

УДК 532.546

ОСАЖДЕНИЕ ВЗВЕШЕННЫХ ЧАСТИЦ В КАНАЛЕ ВНУТРИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

О.В. Соловьева, Ш.Х. Зарипов, Э.В. Скворцов

Аннотация

Получено приближенное аналитическое решение задачи об осаждении взвешенных частиц в круговом канале внутри пористой среды на основе модели течения Пуазейля для несущей фазы и уравнения конвективно-диффузионного переноса частиц. Приводятся выражения для профиля скорости газа, пространственного распределения концентрации и коэффициента пропускания частиц, которые включают в себя такие параметры как число Дарси и коэффициент скольжения на границе раздела между пористой средой и прилегающей к ней свободной жидкостью.

Ключевые слова: (аэрозольный фильтр, пористая среда, концентрация частиц, эффективность проникновения)

Решена задача об осаждении дисперсной примеси в канале внутри пористой среды. Такая задача возникает в связи необходимостью оценки характеристик аэрозольных фильтров при нарушении его целостности в результате образования в нем микротверстий [1].

1. Постановка и решение математической задачи

Рассмотрим задачу движения аэрозоля в круговом канале радиуса R_c внутри пористой среды без учета влияния частиц на течение газа. Течение газа через пористую среду и через канал длины L в направлении X обеспечивается перепадом давления ΔP (рис. 1).

Предполагается, что скорость фильтрации V в пористой среде определяется законом Дарси

$$V = -\frac{k}{\mu} \frac{dP}{dX} = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta P}{L}, \quad (1)$$

где μ – вязкость газа, k – проницаемость пористой среды. Для стационарного ламинарного течения несжимаемой жидкости внутри канала принята одномерная модель течения Пуазейля, в рамках которой скорость газа $U = U(R)$ определяется из уравнения [2]:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dU}{dR} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dX} = -\frac{V}{k}. \quad (2)$$

На границе раздела между пористой средой и прилегающей свободной жидкостью принято условие, впервые сформулированное в работе [3],

$$\left. \frac{dU}{dR} \right|_{R=R_c} = -\frac{\alpha}{\sqrt{k}} (U(R_c) - V), \quad (3)$$

где α – безразмерный коэффициент скольжения. В общем случае, коэффициент α может быть определен из эксперимента или из решения гидродинамической задачи

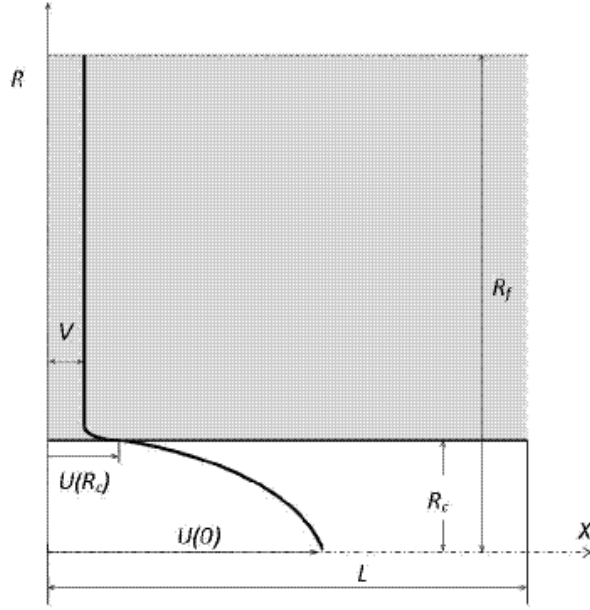


Рис. 1. Схема течения в круговом отверстии внутри пористой среды

с заданной реальной структурой пористой среды [3, 4]. На оси канала примем условие ограниченности скорости газа

$$U(0) < \infty. \quad (4)$$

Решая (2) с условиями (3), (4), получаем:

$$U(R) = \frac{R_c^2 \Delta P}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{R}{R_c} \right)^2 + 2\tau \right], \quad (5)$$

$$\tau = \alpha^{-1} \sqrt{k} \left(1 + 2\alpha \sqrt{k} / R_c \right) / R_c, \quad (6)$$

где параметр τ учитывает изменение скорости потока, вызванное ненулевой скоростью на границе с пористой средой. Уравнение (5) при $\tau = 0$ дает решение задачи о течении жидкости в трубе с непроницаемыми стенками. Введем безразмерное число Дарси $Da = k/R_c^2$, тогда (6) можно переписать в виде

$$\tau = \sqrt{Da} \left(\alpha^{-1} + 2\sqrt{Da} \right). \quad (7)$$

Средняя скорость потока U_0 в канале определяется как отношение расхода газа Q_c к площади поперечного сечения S_c

$$U_0 = \frac{Q_c}{S_c} = \frac{R_c^2 \Delta P}{8\mu L} (1 + 4\tau). \quad (8)$$

С учетом (8) решение (5) записывается в безразмерном виде

$$u = 2(1 - r^2 + 2\tau)/(1 + 4\tau), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (9)$$

где $u = U/U_0$, $r = R/R_c$. Параметр τ определяется значениями k и α .

Диффузионный перенос аэрозольных частиц в круговом канале описывается уравнением конвекции-диффузии для концентрации $C(X, R)$ частиц (осевая диффузия мала по сравнению с конвективным переносом частиц)

$$U \frac{\partial C}{\partial X} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial C}{\partial R} \right), \quad (10)$$

где D – коэффициент диффузии. Вводя величины $c = C/C_0$, $x = X/L$, $\beta = 8\mu DL^2/R_c^4 \Delta P$, перепишем (10) в безразмерной форме

$$2(1 - r^2 + 2\tau) \frac{\partial c}{\partial x} = \beta \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right). \quad (11)$$

Уравнение (11) дополняется граничными условиями

$$c(r, 0) = 1, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (12)$$

$$c(1, x) = 0, \quad x \geq 0, \quad (13)$$

$$\partial c / \partial r = 0, \quad r = 0. \quad (14)$$

Как было показано в [5], для канала с непроницаемой стенкой ($Da = 0$) профиль концентрации становится полностью развитым, начиная с безразмерного расстояния от входа канала $x = 0.2/\beta$. В этой области отношение $f(r) = c(r, x)/c_{max}(x)$ зависит только от радиальной координаты r ($c_{max}(x) = c(0, x)$ – это максимальное значение концентрации частиц в точке x), т.е.

$$c(r, x) = c_{max}(x)f(r), \quad \beta x \geq 0.2. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (11), получим:

$$\frac{1}{\beta c_{max}} \frac{dc_{max}}{dx} = \frac{1}{2(1 - r^2 + 2\tau)f} \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) = -\lambda, \quad (16)$$

где $\lambda = \text{const} > 0$. Из (16) запишем уравнение для функций $c_{max}(x)$ и $f(r)$

$$c_{max}(x) = \delta \exp(-\lambda \beta x), \quad (17)$$

$$f'' + \frac{1}{r} f' = -2(1 - r^2 + 2\tau)\lambda f. \quad (18)$$

Следуя методу, изложенному в [5], найдем решение $f(r)$ в виде

$$f(r) = 1 + a_2 r^2 + a_4 r^4 + a_6 r^6, \quad (19)$$

где $a_2 = -3(6 - \nu)/(11 - \nu)$, $a_4 = 3(3 - \nu)/(11 - \nu)$, $a_6 = -(2 - \nu)/(11 - \nu)$, $\nu = \lambda\tau$.

Для определения неизвестных констант δ и λ в (17)–(18) краевая задача для (11) в предположении $\beta = 1$ решалась численно методом Кранка-Николсона. На основе аппроксимации полученных распределений концентрации частиц $c(0, x)$ на оси при различных значениях τ методом наименьших квадратов построены приближенные зависимости $\delta(\tau)$ и $\lambda(\tau)$

$$\delta(\tau) = (\delta_1 + \delta_2 \tau)/(1 + \delta_3 \tau); \quad \delta_1 = 1.351, \quad \delta_2 = 3.204, \quad \delta_3 = 4.516, \quad (20)$$

$$\lambda(\tau) = (\lambda_1 + \lambda_2 \tau)/(1 + \lambda_3 \tau); \quad \lambda_1 = 3.426, \quad \lambda_2 = 2.563, \quad \lambda_3 = 0.011. \quad (21)$$

Таким образом распределение концентрации $c(r, x)$ в канале внутри пористой среды может быть представлено

$$c(r, x) = \delta(\tau) \exp(-\lambda\beta(\tau)x)(1 + a_2r^2 + a_4r^4 + a_6r^6), \quad (22)$$

где $\delta, \lambda, a_2, a_4, a_6$ определяются по приведенным выше формулам.

Рис. 2 демонстрирует кривые $c(0, x) = c_{max}(x)$ для различных чисел Da . Сплошные кривые соответствуют распределениям, полученным из численного решения (13). Концентрация аэрозольных частиц $c(0, x) = c_{max}(x)$ вдоль оси уменьшается медленнее с увеличением Da . Течение газа в пористой среде ($Da \neq 0$) приводит к ненулевой скорости $U(R_c) = \tau R_c^2 \Delta p / 2\mu L$ на границе отверстия. Поэтому увеличивается скорость потока в канале и дополнительная осевая конвекция уменьшает осаждение частиц. В целом, из рис.2 видно, что кривые, полученные по аналитической и численной модели неплохо согласуются.

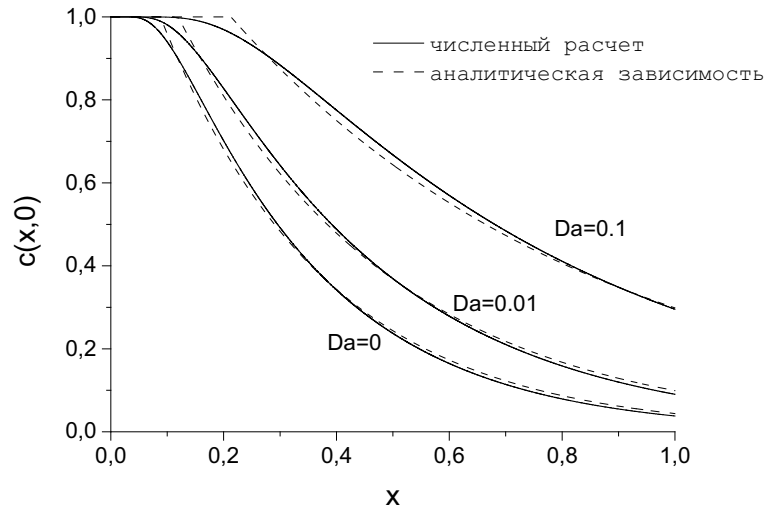


Рис. 2. Осевые распределения концентрации частиц $c(x, 0)$

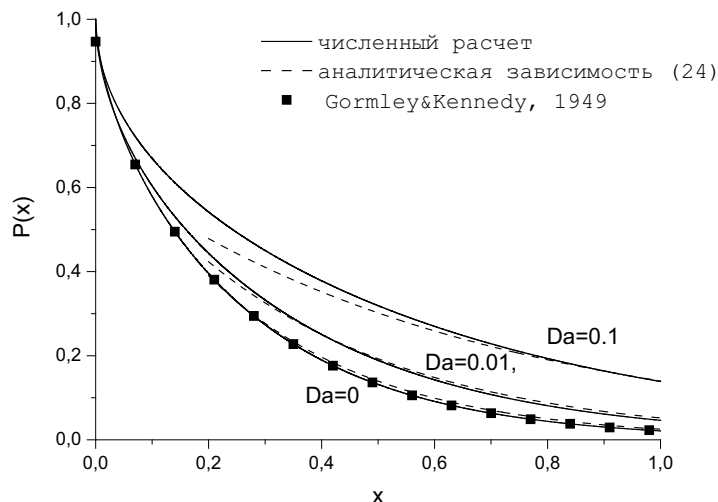
Часть взвешенных частиц при движении будут оседать в результате диффузии к стенкам канала. Для расчета доли оставшихся в канале частиц вводится коэффициент пропускания частиц P , выражаемый по формуле

$$P(x) = \frac{\int_0^1 ru(r)c(r, x)dr}{\int_0^1 ru(r)dr}. \quad (23)$$

После подстановки аналитических выражений $u(r)$, $c(r, x)$ в (23) получим:

$$P(x) = \delta(\tau) \exp[-\lambda(\tau)x] \frac{6.3 + 18\tau - (\tau + 0.4)\nu}{(1 + 4\tau)(11 - \nu)}. \quad (24)$$

Кривые $P(x)$, рассчитанные по приближенной формуле (24) и по (23) с распределениями $u(r)$, $c(r, x)$, полученными из численного решения краевой задачи для (13), приведены на рис. 3. Символы соответствуют широко известной формуле из работы [6]. Видно, что разница между численными и аналитическими зависимостями $P(x)$ возрастает с ростом Da и уменьшается с увеличением x .

Рис. 3. Коэффициент пропускания $P(x)$

2. Заключение

На основе модели течения Пуазейля для несущей фазы и уравнения конвективно-диффузионного переноса примеси получено приближенное аналитическое решение задачи об осаждении взвешенных частиц в круговом канале внутри пористой среды. Приводятся выражения для профиля скорости жидкости, пространственного распределения концентрации и коэффициента пропускания частиц, включающие в себя такие параметры как число Дарси и коэффициент скольжения на границе раздела между пористой средой и прилегающей к ней свободной жидкостью. Аналитические решения находятся в хорошем согласии с результатами численной модели. Показано, что увеличение числа Дарси уменьшает осаждение частиц за счет увеличения скорости потока в отверстии.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты N 12-01-00333, 14-01-31118).

Summary

O.V. Solov'eva, Sh.Kh. Zaripov, E.V. Scvortsov. Analytical model of the transport of aerosol particles in a circular hole inside porous medium.

Analytical solution of equation the suspended particle transport in a circular hole in a porous medium is obtained. The Poiseuille's flow model is used to describe the carrier phase motion. The expressions for the fluid flow velocity profile, the space distribution of particle concentration and the penetration as a Darcy number and slip coefficient function are given.

Key words: aerosol filter, porous medium, particle concentration, penetration efficiency

Литература

1. *Mouret G., Thomas D., Chazelet S., Appert-Collin J-C., Bemer D.* Penetration of nanoparticles through fibrous filters perforated with defined pinholes // *Journal of Aerosol Science.* – 2009. – No 40. – P. 762-775.

2. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Fluid Mechanics. – Oxford: Pergamon, 1987. – 532 p.
3. *Beavers G.S., Joseph D.D.* Boundary condition at a naturally permeable wall // Journal of Fluid Mechanics. – 1967. – No 30. – P. 197–207.
4. *Chandesris M., Jamet D.* Boundary conditions at a planar fluid-porous interface for a Poiseuille flow // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2006. – No 49(13/14). – P. 2137–2150.
5. *Alonso M., Alguacil F.J., Huang C.-H.* Analytical approximation to the fully developed concentration profile of diffusive aerosol particles in laminar flow in a circular tube // Journal of Aerosol Science. – 2010. – No 41. – P. 413–417.
6. *Gormley P.G., Kennedy M.* Diffusion from a stream flowing through a cylindrical tube // Proceedings of the Royal Irish Academy. – 1949. – No 52A. – P. 163–169.

Соловьева Ольга Викторовна – старший преподаватель, Казанский государственный энергетический университет

E-mail: rara_avis86@mail.ru

Зарипов Шамиль Хузеевич – д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: Shamil.Zaripov@kpfu.ru

Скворцов Эдуард Викторович – д.ф.-м.н., профессор, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: eduard.scvortsov@rambler.ru