a

§ 7.4 НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 1. Если функция $f(x)$ определена и ограничена на $[a, b]$ и если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число интервалов, покрывающих все точки разрыва этой функции и имеющих общую сумму длин меньше ε, то $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство. Напомним старые и введем новые обозначения:

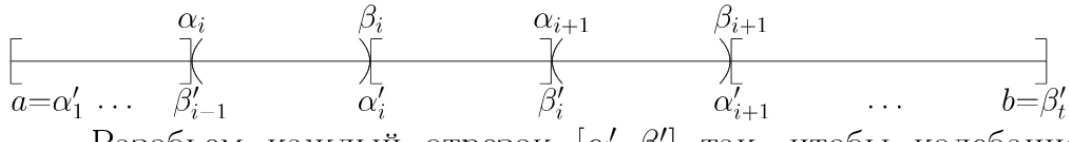
$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x),\ m = \inf_{x\in[a,b]} f(x),\ M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),$$
$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

(здесь $[x_{i-1}, x_i]$ – частичные множества некоторого разбиения отрезка $[a, b]$), $\omega_i = M_i - m_i$ – колебание функции $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$. Пусть Ω – множество точек разрыва функции $f(x)$ и пусть дано $\varepsilon > 0$. Покроем Ω конечным числом интервалов $(\alpha_i, \beta_i),\ i = 1, \ldots, l$, имеющих общую сумму

$$\sum_{i=1}^{l}(\beta_i - \alpha_i) < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$$

(покрытие Ω интервалами (α_i, β_i) означает $\Omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{l}(\alpha_i, \beta_i)$. Будем считать, что интервалы (α_i, β_i) попарно не пересекаются. Итак,

$$[a, b] = \left(\bigcup_{i=1}^{l}(\alpha_i, \beta_i)\right) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{t}[\alpha'_i, \beta'_i]\right)$$



Разобьем каждый отрезок $[\alpha'_i, \beta'_i]$ так, чтобы колебание ω_i функции $f(x)$ на любом частичном отрезке разбиения было меньше $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Объединяя частичные отрезки разбиения отрезков $[\alpha'_i, \beta'_i]$ и интервалы (α_i, β_i), мы получим разбиение $\Delta = \Delta(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ всего отрезка $[a, b]$. Для этого разбиения слагаемые суммы $\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta = \sum\limits_k \omega_k(x_k - x_{k-1})$ разделим на две группы – $\sum\limits_k{}' \omega_k(x_k - x_{k-1})$ и $\sum\limits_k{}'' \omega_k(x_k - x_{k-1})$, причем в первую группу входят все слагаемые, отвечающие частям разбиения Δ, образованным из интервалов (α_i, β_i), покрывающих точки разрыва, а во вторую – остальные слагаемые.

отвечающие частям разбиения Δ, образованным из интервалов (α_i, β_i), покрывающих точки разрыва, а во вторую – остальные слагаемые.

Для слагаемых первой группы $\omega_i \le M - m$ и $\sum'(x_k - x_{k-1}) = \sum\limits_{i=1}^{l}(\beta_i - \alpha_i) < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$. Поэтому $\sum' \omega_k(x_k - x_{k-1}) \le (M-m)\sum'(x_k - x_{k-1}) < \frac{(M-m)\varepsilon}{2(M-m)} = \frac{\varepsilon}{2}$. Для слагаемых второй группы $\omega_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Поэтому $\sum'' \omega_k(x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum''(x_k - x_{k-1}) \le \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом,

$$\overset{*}{S}_\Delta - \underset{*}{S}_\Delta = \sum_k \omega_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_k{}' \omega_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_k{}'' \omega_k(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon.$$

Следовательно, для функции $f(x)$ выполнены достаточные условия интегрируемости. $\blacksquare$

<u>Замечание 1.</u> Ограниченная на $[a, b]$ функция $f(x)$, имеющая лишь конечное число точек разрыва, интегрируема на $[a, b]$. Действительно, если p – число точек разрыва функции $f(x)$, то достаточно покрыть каждую точку разрыва интервалом длины $\varepsilon/2$, где $\varepsilon > 0$, и мы получим, что все точки разрыва функции $f(x)$ покрываются конечным числом интервалов, суммарная длина которых меньше ε. Возникает вопрос. Существуют ли интегрируемые функции, имеющие бесконечное число точек разрыва? Оказывается, что такие функции есть. Например, функция $f(x)$, определенная на $[0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right], \ n = 1, 2, \ldots, \\ -1, & \text{если } x \in \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right], \ n = 1, 2, \ldots, \ x = 0 \end{cases}.$$

Указанная функция имеет разрывы 1-го рода во всех точках $x_n = \frac{1}{n}, \ n = 2, 3, \ldots$. Фиксируем любое $\varepsilon > 0$. Покроем точку $x = 0$ интервалом $\left(-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right)$, внутри которого находится бесконечное число, а вне - лишь конечное число p точек разрыва функции $f(x)$. Каждую из точек, находящуюся вне интервала $\left(-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right)$, покроем интервалом длины меньше $\frac{\varepsilon}{2p}$. Сумма длин интервалов, покрывающих все точки разрыва функции $f(x)$, будет меньше $\frac{\varepsilon}{2} + p \cdot \frac{\varepsilon}{2p} = \varepsilon$. Следовательно, функция $f(x)$ интегрируема на $[0, 1]$. $\blacksquare$

Замечание 2. Любая непрерывная функция $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ интегрируема на $[a, b]$.

Утверждение данного замечания является очевидным следствием замечания 1.

Докажем теорему об интегрируемости монотонных функций, заданных на $[a, b]$ (функция называется монотонной на $[a, b]$, если она не убывает или не возрастает на $[a, b]$).

Теорема 2. Монотонная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть f – не убывает на $[a, b]$; $\varepsilon > 0$. Разобьем $[a, b]$ на равные части, длины которых меньше $\varepsilon/(f(b) - f(a))$ ($f(b) \neq f(a)$, так как в противном случае $f = const$).

$$\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i),$$

но для неубывающих функций $\sum\limits_{i=1}^{n}(M_i - m_i) \leq f(b) - f(a)$. Поэтому $\overset{*}{\mathrm{S}}_\Delta - \underset{*}{\mathrm{S}}_\Delta < \varepsilon$. Следовательно, f интегрируема на $[a, b]$. ■

Теорема 1 не дает ответа на вопрос о классе функций, интегрируемых по Риману. Отвечает на этот вопрос следующая теорема.

Теорема Лебега. Для того, чтобы функция f была интегрируемой на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной на $[a, b]$ и непрерывной всюду на $[a, b]$, за исключением множества точек лебеговой меры нуль.