Математические заметки

Том 82 выпуск 6 декабрь 2007

УДК 517.5

Об однолистности производных функций, однолистных в угловых областях

С. Р. Насыров

Рассматриваются функции f, однолистные в угловой области на плоскости раствора $\alpha\pi$, $0 < \alpha \leqslant 2$. Доказано, что существует натуральное k, зависящее только от α, такое, что k-е производные этих функций $f^{(k)}$ не могут быть однолистными в этом угле. Найдено наименьшее из возможных значений для k. Как следствие получается ответ на вопрос, поставленный Кирьяцким: если f однолистна в полуплоскости, то ее четвертая производная не может быть однолистной в этой полуплоскости.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. В статьях [1]–[3] исследовались голоморфные в круговых областях функции, производные которых также однолистны. Было замечено, что в круге существуют однолистные функции, все производные которых однолистны. Простейшим примером является функция

$$f(z) = e^{az}, \tag{1.1}$$

где $a \neq 0$ – достаточно малое по модулю число.

В полуплоскости ситуация существенно отличается от круга. Так, в [4] было показано, что у голоморфной функции, однолистной в полуплоскости, пятая производная не может быть однолистной. Отметим, что функции, однолистные в полуплоскости, изучались гораздо меньше, чем однолистные функции в круге. Среди работ в этом направлении можно указать статьи [5]–[12]. В большинстве из них предполагается, что функции удовлетворяют так называемой гидродинамической нормировке на бесконечности.

Пример функции $\varphi(z) = z^\alpha$, $\alpha \in (1,2)$, однолистной в правой полуплоскости $\Pi = \{\operatorname{Re} z > 0\}$, показывает, что первая, вторая и третья производные этой функции однолистны в Π, в то время как четвертая производная однолистной не является. В связи с этим возникает вопрос, поставленный проф. Э. Г. Кирьяцким.

Задача. Существует ли однолистная в Π функция, у которой четвертая производная также однолистна в Π?

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 05-01-00523 и 06-01-81019-Бел.).

Для любой области D на плоскости определим число

$$u(D) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \text{существует функция, однолистная в } D, \\ \text{у которой } n\text{-я производная } f^{(n)} \text{ однолистна в } D\}.$$

(Нетрудно видеть, что характеристика $u(D)$ не меняется при движении и гомотетии, а при возрастании области она не увеличивается.)

В этой статье дается отрицательный ответ на вопрос, поставленный Кирьяцким. Мы рассматриваем более общую ситуацию функций, однолистных в угле $\Pi_\alpha = \{|\arg z| < \alpha\pi/2\}$, и находим значения $u(\Pi_\alpha)$, $0 < \alpha \leqslant 2$. Справедлива

Теорема 1. *Значения $u(\Pi_\alpha)$, $0 < \alpha \leqslant 2$, равны*

$$u(\Pi_\alpha) = \begin{cases} 2\beta - 1, & \text{если } \beta \in \mathbb{N}, \\ [2\beta], & \text{если } \beta \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Здесь $\beta = 2/\alpha$, $[x]$ – целая часть числа x.

2. Вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть функция φ однолистна в угле Π_α, $\beta = 2/\alpha$. Тогда для любых $0 < x_1 < x_2 < +\infty$ имеет место неравенство*

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-\beta-1} \leqslant \left|\frac{\varphi'(x_2)}{\varphi'(x_1)}\right| \leqslant \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta-1}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Для любого $x > 0$ рассмотрим заданную в единичном круге E функцию

$$f(\zeta) = \frac{\varphi(x\omega^\alpha(\zeta)) - \varphi(x)}{2\alpha x\varphi'(x)}, \qquad \omega(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}. \tag{2.2}$$

Эта функция однолистна в E и $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Следовательно, f принадлежит известному классу S однолистных в E функций, нормированных в нуле. Воспользуемся известной теоремой искажения в классе S (см., например, [13; гл. 2, § 4]):

$$\frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3} \leqslant |f'(\zeta)| \leqslant \frac{1+|\zeta|}{(1-|\zeta|)^3}.$$

Учитывая, что

$$f'(\zeta) = \frac{\varphi'(x\omega^\alpha(\zeta))\omega^{\alpha-1}(\zeta)}{(1-\zeta)^2\varphi'(x)},$$

получаем

$$|1-\zeta|^2\frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3} \leqslant \left|\frac{\varphi'(x\omega^\alpha(\zeta))\omega^{\alpha-1}(\zeta)}{\varphi'(x)}\right| \leqslant |1-\zeta|^2\frac{1+|\zeta|}{(1-|\zeta|)^3}. \tag{2.3}$$

Пусть теперь ζ – действительное число из $(0,1)$. Тогда из (2.3) вытекает неравенство

$$[\omega(\zeta)]^{-2-\alpha} \leqslant \left|\frac{\varphi'(x\omega^\alpha(\zeta))}{\varphi'(x)}\right| \leqslant \omega(\zeta)^{2-\alpha},$$

откуда следует (2.1).

Следствие 1. *В условиях леммы 1 функция $\gamma(x,\varphi)=x^{1-\beta}|\varphi'(x)|$ не возрастает, а функция $\delta(x,\varphi)=x^{1+\beta}|\varphi'(x)|$ не убывает на $(0,+\infty)$.*

Лемма 2. *Пусть функция φ однолистна в Π_α. Тогда для любого натурального n существует константа $C_n=C_n(\alpha)>0$ такая, что для любых $x>0$ имеет место неравенство*

$$\left|x^n\frac{\varphi^{(n+1)}(x)}{\varphi'(x)}\right|\leqslant C_n. \tag{2.4}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию (2.2). Прямые вычисления дают

$$f^{(n+1)}(0)=(2\alpha x)^n\frac{\varphi^{(n+1)}(x)}{\varphi'(x)}+\sum_{k=1}^{n}a_{kn}(\alpha)x^{k-1}\frac{\varphi^{(k)}(x)}{\varphi'(x)} \tag{2.5}$$

с некоторыми константами $a_{kn}(\alpha)$.

В силу гипотезы Бибербаха, доказанной де Бранжем (см., например, [14]),

$$|f^{(n+1)}(0)|\leqslant(n+1)!\,(n+1).$$

Из этих оценок с учетом (2.5) по индукции следует справедливость (2.4) с некоторыми константами C_n.

Обозначим $\gamma_0(\varphi)=\lim_{x\to+\infty}\gamma(x,\varphi)$.

Лемма 3. *Пусть функция φ однолистна в Π_α, $\beta=2/\alpha$ и $2\beta\leqslant n\in\mathbb{N}$. Если n-я производная $\varphi^{(n)}$ также однолистна в Π_α, то $\gamma_0(\varphi)>0$.*

Доказательство. В силу леммы 2 имеем

$$\left|\frac{x^{2\beta}\varphi^{(n+1)}(x)}{\varphi'(x)}\right|\leqslant\left|\frac{x^n\varphi^{(n+1)}(x)}{\varphi'(x)}\right|\leqslant C,\qquad x\leqslant1,$$

с некоторой константой $C>0$, следовательно,

$$\delta(x,\varphi^{(n)})=|x^{1+\beta}\varphi^{(n+1)}(x)|\leqslant C|x^{1-\beta}\varphi'(x)|=C\gamma(x,\varphi),\qquad x\leqslant1. \tag{2.6}$$

Так как функция $\varphi^{(n)}(x)$ однолистна в Π, то в силу следствия 1 при $x\leqslant1$ имеем

$$\delta(x,\varphi^{(n)})\geqslant\delta(1,\varphi^{(n)})=|\varphi^{(n+1)}(1)|>0, \tag{2.7}$$

откуда с учетом (2.6) получаем $\gamma(x,\varphi)\geqslant(1/C)|\varphi^{(n+1)}(1)|$, $x\leqslant1$. Значит,

$$\gamma_0(\varphi)\geqslant\frac{1}{C}|\varphi^{(n+1}(1)|>0.$$

3. Доказательство основного результата.

Теорема 2. *Пусть функция φ однолистна в Π_α, $\beta=2/\alpha$, $n\in\mathbb{N}$ и выполняется одно из условий*:

1) $n\geqslant2\beta$, $\beta\in\mathbb{N}$;
2) $n>2\beta$, $\beta\notin\mathbb{N}$.

Тогда функция $\varphi^{(n)}$ не может быть однолистной в Π_α.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда мы находимся в условиях леммы 3. Рассмотрим однопараметрическое семейство $f(\zeta, x) = f(\zeta)$, определенное формулой (2.2), где в качестве параметра берется $x > 0$. Докажем, что при $x \to +\infty$ функции $f(\zeta, x)$ сходятся локально равномерно в E к функции Кебе

$$\psi_0(\zeta) = \frac{\zeta}{(1-\zeta)^2}, \qquad \zeta \in E. \tag{3.1}$$

Так как класс S компактен в топологии локально равномерной сходимости, то для любой последовательности $\{x_n\} \to +\infty$ существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $f(\zeta, x_{n_k})$ сходится локально равномерно в E к некоторой функции $\psi \in S$. Тогда по теореме Вейерштрасса $f'(\zeta, x_{n_k}) \to \psi'(\zeta)$ локально равномерно в E. В силу леммы 3 имеем $|\varphi'(t)| \sim \gamma_0 t^{\beta-1}$, $t \to +\infty$, где $\gamma_0 = \gamma_0(\varphi) > 0$. Отсюда при вещественных ζ, лежащих на $(0, 1)$, получаем

$$|f'(\zeta, x_{n_k})| = \left|\frac{\varphi'(x_{n_k}\omega^\alpha(\zeta))\omega^{\alpha-1}(\zeta)}{(1-\zeta)^2\varphi'(x_{n_k})}\right| \to \left|\frac{\omega(\zeta)}{(1-\zeta)^2}\right| = \left|\frac{1+\zeta}{(1-\zeta)^3}\right|.$$

Таким образом,

$$|\psi'(\zeta)| = \left|\frac{1+\zeta}{(1-\zeta)^3}\right|$$

для любого $\zeta \in (0, 1)$. В силу теоремы искажения для любой функции ψ класса S (см., например, [13]) справедливо неравенство

$$|\psi'(\zeta)| \leqslant \left|\frac{1+\zeta}{(1-\zeta)^3}\right|, \qquad \zeta \in (0, 1),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда ψ имеет вид (3.1).

Итак, для любой последовательности $\{x_n\} \to +\infty$ существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $f(\zeta, x_{n_k})$ сходится локально равномерно в E к функции Кебе (3.1). Поэтому $f(\zeta, x)$ сходится локально равномерно в E к функции Кебе (3.1) при $x \to +\infty$.

Значит,

$$f'(\zeta, x) = \frac{\varphi'(x\omega^\alpha(\zeta))\omega^{\alpha-1}(\zeta)}{(1-\zeta)^2\varphi'(x)} \to \psi_0'(\zeta) = \frac{1+\zeta}{(1-\zeta)^3}, \qquad x \to +\infty,$$

откуда

$$\frac{\varphi'(x\omega^\alpha(\zeta))}{\varphi'(x)} \to \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^{2-\alpha} = \omega^{2-\alpha}(\zeta), \qquad x \to +\infty,$$

локально равномерно в E при $x \to +\infty$. Отсюда следует, что

$$\frac{\varphi'(x\omega)}{\varphi'(x)} \to \omega^{\beta-1}, \qquad x \to +\infty, \tag{3.2}$$

локально равномерно в Π_α. Поскольку из локально равномерной сходимости аналитических функций вытекает локально равномерная сходимость их производных, то, дифференцируя (3.2) по ω, получаем для любого натурального j

$$\frac{x^{j-1}\varphi^{(j)}(x\omega)}{\varphi'(x)} \to \frac{d^{j-1}(\omega^{\beta-1})}{d\omega^{j-1}}, \qquad x \to +\infty, \quad \omega \in \Pi_\alpha. \tag{3.3}$$

Рассмотрим два случая.

1) Если $n \geqslant 2\beta$, $\beta \in \mathbb{N}$, то из (3.3) следует, что

$$\frac{x^n \varphi^{(n+1)}(x\omega))}{\varphi'(x)} \to \frac{d^n(\omega^{\beta-1})}{d\omega^n} \equiv 0, \qquad x \to +\infty, \quad \omega \in \Pi_\alpha.$$

С использованием следствия 1 тогда получаем, что

$$\delta(x, \varphi^{(n)}) = \left| \frac{x^n \varphi^{(n+1)}(x)}{\varphi'(x)} \right| \cdot \gamma(x, \varphi) \to 0, \qquad x \to +\infty.$$

Но это противоречит следствию 1, так как функция $\delta(x, \varphi^{(n)})$ строго положительна и не убывает.

2) Если $n > 2\beta$, $\beta \notin \mathbb{N}$, то из (3.3) следует, что

$$\frac{x^{n-1} \varphi^{(n)}(x\omega)}{\varphi'(x)} \to \frac{d^{n-1}(\omega^{\beta-1})}{d\omega^{n-1}} = A\omega^{\beta-n}, \qquad x \to +\infty,$$

где константа $A \neq 0$. Таким образом, получили, что семейство однолистных функций $x^{n-1}\varphi^{(n)}(x\omega))/\varphi'(x)$ сходится локально равномерно в Π_α к непостоянной неоднолистной функции $A\omega^{\beta-n}$ – противоречие.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим два случая.

1) Если $\beta \in \mathbb{N}$, то из теоремы 2 следует, что $u(\Pi_\alpha) \leqslant 2\beta - 1$. Пример функции $\varphi(\omega) = \omega^{\beta-1/2}$ показывает, что $u(\Pi_\alpha) \geqslant 2\beta - 1$.

2) Если $\beta \notin \mathbb{N}$, то из теоремы 2 следует, что $u(\Pi_\alpha) \leqslant [2\beta]$. Пример функции $\varphi(\omega) = \omega^\beta$ показывает, что $u(\Pi_\alpha) \geqslant [2\beta]$.

В заключение сформулируем открытую проблему.

Задача. Охарактеризовать неограниченные области D в $\mathbb{C}$, для которых величина $u(D) < +\infty$.

Пример функции (1.1) показывает, что для любой полосы D величина $u(D)$ равна $+\infty$. Таким образом, неограниченность области не является достаточным условием конечности величины $u(\Omega)$.

В качестве другого примера рассмотрим область D, которая получается объединением двух перпендикулярных полос. Область D можно поместить в угол раствора $3\pi/2$. Из теоремы 1 следует, что $u(D) \geqslant 2$. Возникает вопрос: как оценить величину $u(D)$ сверху? Является ли конечной величина $u(D)$?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] S. M. Shah, S. Y. Trimble, “Univalent functions with univalent derivatives”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 153–157.

[2] S. M. Shah, S. Y. Trimble, “Univalent functions with univalent derivatives. II”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **144** (1969), 313–320.

[3] S. M. Shah, S. Y. Trimble, “Univalent functions with univalent derivatives. III”, *J. Math. Mech.*, **19** (1969), 451–460.

[4] J. Kirjackis, “On the existence of functions being univalent in half-plane together with their derivatives”, *Nonlinear Anal. Model. Control*, **6**:2 (2001), 43–50.

[5] И. А. Александров, В. В. Соболев, “Экстремальные задачи для некоторых классов функций, однолистных в полуплоскости”, *Укр. матем. журн.*, **22**:3 (1970), 291–307.

[6] Ф. Г. Авхадиев, “О некоторых однолистных отображениях полуплоскости”, *Труды семинара по краевым задачам*, **11** (1974), 3–8.

[7] G. J. Dimkov, J. Stankiewicz, Z. Stankiewicz, “On a class of starlike functions defined in a halfplane”, *Ann. Polon. Math.*, **55** (1991), 81–86.

[8] А. М. Захаров, Д. В. Прохоров, “Множество значений функции и ее производной в классе однолистных отображений полуплоскости”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 1993, № 2, 33–37.

[9] С. Е. Демин, “Изопериметрическая задача искажения для однолистных функций Монтеля”, *Сиб. матем. журн.*, **37**:1 (1996), 108–116.

[10] В. В. Горяйнов, И. Ба, “Полугруппа конформных отображений верхней полуплоскости в себя с гидродинамической нормировкой на бесконечности”, *Укр. матем. журн.*, **44**:10 (1992), 1320–1329.

[11] A. Lecko, “On the class of functions defined in a halfplane and starlike with respect to a boundary point”, *Ann. Polon. Math.*, **79**:1 (2002), 67–83.

[12] N. N. Pascu, N. R. Pascu, “Convex functions in a half-plane”, paper № 102, *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **4**:5 (2003).

[13] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966.

[14] L. de Brange, “A proof of the Bieberbach conjecture”, *Acta Math.*, **154**:1–2 (1985), 137–152.

С. Р. Насыров
Казанский государственный университет
E-mail: snasyrov@ksu.ru

Поступило
26.03.2007