Разности идемпотентов в C^*-алгебрах и квантовый эффект Холла

Бикчентаев А.М.
КФУ, г. Казань, Россия

C^*-алгеброй называется комплексная банахова $*$-алгебра $\mathcal{A}$ такая, что $\|A^*A\| = \|A\|^2$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Для C^*-алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ и $\mathcal{A}^+$ будем обозначать ее подмножества идемпотентов и положительных элементов соответственно. Для $P \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ существует единственное разложение $P = \widetilde{P} + Z$, где $\widetilde{P} = (\widetilde{P})^* \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ и нильпотент $Z \in \mathcal{A}$ с $Z^2 = 0$, причем $Z\widetilde{P} = 0$, $\widetilde{P}Z = Z$.

Следом на C^*-алгебре $\mathcal{A}$ называется такое отображение $\varphi : \mathcal{A}^+ \to [0, +\infty]$, что $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\quad \varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathcal{A}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$); $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{A}$. Для следа φ определим

$$\mathfrak{M}_\varphi^+ = \{X \in \mathcal{A}^+ :\ \varphi(X) < +\infty\}, \quad \mathfrak{M}_\varphi = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\mathfrak{M}_\varphi^+.$$

Ограничение $\varphi|_{\mathfrak{M}_\varphi^+}$ корректно продолжается по линейности до функционала на $\mathfrak{M}_\varphi$, который будем обозначать той же буквой φ. Такое продолжение позволяет отождествлять конечные следы (т.е. $\varphi(X) < +\infty$ для всех $X \in \mathcal{A}^+$) с положительными функционалами на $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – $*$-алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Любую C^*-алгебру можно реализовать как C^*-подалгебру в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$ (Гельфанд–Наймарк).

Теорема 1. Пусть $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{id}}$, $Q = Q^*$ и $U = P - Q$ – изометрия. Тогда $U = U^*$ унитарен и $Q = P^\perp$.

Условие $Q = Q^*$ существенно в теореме 1. Следующая теорема является C^*-аналогом известного утверждения [1] (см. также [2]): *если $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{id}}$ и $P - Q$ принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_1$ ядерных операторов, то канонический след* $\mathrm{tr}(P-Q) \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2. Пусть φ – след на унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$ и $P, Q \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$. Если $P - Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi(P - Q) \in \mathbb{R}$.

Следствие 1. Пусть φ – след на унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$ и трипотенты $A, B \in \mathcal{A}$. Если $A - B \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi(A - B) \in \mathbb{R}$.

Следствие 2 ([3, теорема 3.6]). Пусть φ – след на унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$, $P \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ и $P = \widetilde{P} + Z$ – описанное выше разложение. Тогда $P \in \mathfrak{M}_\varphi \Leftrightarrow \widetilde{P} \in \mathfrak{M}_\varphi$ и при выполнении этих условий имеем $\varphi(P) = \varphi(\widetilde{P}) \in \mathbb{R}^+$.

Доказательства приведенных утверждений см. в [4]. Получен C^*-аналог квантового эффекта Холла ([5], [6]): если $P, Q \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ и $P - Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi((P-Q)^{2n+1}) = \varphi(P - Q) \in \mathbb{R}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Республики Татарстан (проект 15-41-02433) и субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.1515.2017/ ПЧ).

[1] Avron J., Seiler R., Simon B. The index of a pair of projections // J. Funct. Anal. 1994. V. 120, N 1. P. 220–237.

[2] Kalton N. J. A note on pairs of projections // Bol. Soc. Mat. Mexicana (3). 1997. V. 3, N 2. P. 309–311.

[3] Бикчентаев А. М. К теории τ-измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана // Матем. заметки. 2015. Т. 98, № 3. С. 337-348.

[4] Бикчентаев А. М. Разности идемпотентов в C^*-алгебрах // Сибирск. матем. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 183–189.

[5] Bellissard J., van Elst A., Schulz-Baldes H. The noncommutative geometry of the quantum Hall effect. Topology and physics // J. Math. Phys. 1994. V. 35, N 10. P. 5373–5451.

[6] Gesztesy F. (coordinating Editor), From Mathematical Physics to Analysis: a walk in Barry Simon's Mathematical Garden, II // Notices Amer. Math. Soc. 2016. V. 63, N 8. P. 878–889.