Известия вузов. Математика
2016, №6, с. 86–90

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Е.Н. СОСОВ

ОБ ОСНОВНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТАХ КОНЕЧНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ. II

Аннотация. Получены новые основные метрические инварианты конечных метрических пространств. Эти инварианты можно будет использовать для классификации конечных метрических пространств и их распознавания.

Ключевые слова: конечное метрическое пространство, метрический инвариант.

УДК: 515.124

Введение

Рассмотрим некоторое множество $\mathbb{K}$ конечных метрических пространств одной и той же мощности $N > 1$ и напомним определение основного метрического инварианта [1].

Определение 1. Функция $F : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$, принимающая значения в множестве всех неотрицательных вещественных чисел $\mathbb{R}_+$, называется *основным метрическим инвариантом* (на $\mathbb{K}$), если выполняются следующие условия:
(i) $F(X) = F(Y)$ для любых изометричных метрических пространств $X, Y \in \mathbb{K}$,
(ii) для любого метрического пространства $(X, \rho) \in \mathbb{K}$

$$F(X) \in \{\rho(x, y) : x, y \in X,\ x \neq y\},$$

(iii) для любых метрических пространств (X, ρ), $(Y, d) \in \mathbb{K}$

$$|F(X) - F(Y)| \leq 2d_s(X, Y),$$

где [2]

$$d_s(X, Y) = \frac{1}{2}\min\{\operatorname{dis} f : f : X \to Y \text{ — биекция}\},$$
$$\operatorname{dis} f = \max\{|\rho(x, y) - d(f(x), f(y))| : x, y \in X\}.$$

Приведем известные примеры основных метрических инвариантов конечного метрического пространства $(X, \rho) \in \mathbb{K}$.

1. Диаметр пространства X: $D(X) = \max\{\rho(x, y) : x, y \in X\}$ ([2]; [3], с. 305).
2. K-радиусы, где $1 \leq K \leq N - 1$, пространства X имеют вид

$$R_K(X) = \min\{\beta(X, S) : S \subset X,\ 1 \leq \operatorname{card}(S) \leq K\}, \tag{1}$$

здесь $\beta(X, S) = \max\{\rho(x, S) : x \in X\}$, $\operatorname{card}(S)$ — мощность множества S ([2], где применялось обозначение $R_{KX}(X) = R_K(X)$).

Поступила 06.10.2014

3. Пусть $2 \le K < N$. Минимальный диаметр из всех диаметров подмножеств мощности K [1]

$$D_K(X) = \min\{D(S) : S \subset X,\ \mathrm{card}(S) = K\}.$$

4. Пусть $2 \le K < N$, $1 \le L \le K-1$. Максимальный L-радиус из всех L-радиусов подмножеств мощности K [1]

$$\mathrm{mar}_{LK}(X) = \max\{R_L(S) : S \subset X,\ \mathrm{card}(S) = K\}.$$

5. Пусть $2 \le K < N$, $1 \le L \le K-1$. Минимальный L-радиус из всех L-радиусов подмножеств мощности K [1]

$$\mathrm{mir}_{LK}(X) = \min\{R_L(S) : S \subset X,\ \mathrm{card}(S) = K\}.$$

В общем случае при $N > 2$ для любого $X \in \mathbb{K}$ имеют место равенства

$$D(X) = \mathrm{mar}_{12}(X), \quad D_2(X) = \mathrm{mir}_{(L-2)(L-1)}(X) = R_{N-1}(X),$$

где L — натуральное число, $2 < L \le N$.

Основные результаты и доказательства

Определение 2. Пусть $S \subset X$, $\mathrm{card}(S) = K$, где $4 \le K \le N$, $\mathrm{Ld}(S)$ — упорядоченный по неубыванию набор всех расстояний между различными точками в S. $\mathrm{Ld}_m(S)$ — m-й элемент из $\mathrm{Ld}(S)$, где $1 \le m \le K(K-1)/2$. Определим на множестве $\mathbb{K}$ функции

$$\mathrm{mild}_{mK}(X) = \min\{\mathrm{Ld}_m(S) : S \subset X,\ \mathrm{card}(S) = K\},$$
$$\mathrm{mald}_{mK}(X) = \max\{\mathrm{Ld}_m(S) : S \subset X,\ \mathrm{card}(S) = K\}.$$

Отметим, что при $K = N$ значения этих функций равны $\mathrm{Ld}_m(X)$. Кроме того,

$$\mathrm{mild}_{1K}(X) = R_{N-1}(X), \quad \mathrm{Ld}_2(X) = R_{N-2}(X), \quad \mathrm{mild}_{(K(K-1)/2)K}(X) = D_K(X);$$
$$\mathrm{mald}_{1K}(X) = \mathrm{mar}_{(K-1)K}(X), \quad \mathrm{mald}_{2K}(X) = \mathrm{mar}_{(K-2)K}(X), \quad \mathrm{mald}_{(K(K-1)/2)K}(X) = D(X).$$

Определение 3. Пусть $S \subset X$, $\mathrm{card}(S) = T$, где $1 \le T \le [N/2]$, $[N/2]$ — целая часть $N/2$. Обозначим через $\mathrm{Lc}(S)$ упорядоченный по неубыванию набор всех расстояний между точками, первая из которых пробегает множество S, а вторая независимо пробегает множество $X \setminus S$, через $\mathrm{Lc}_k(S)$ — k-й элемент из $\mathrm{Lc}(S)$, где $1 \le k \le T(N-T)$. Определим на множестве $\mathbb{K}$ функции

$$\mathrm{milc}_{kT}(X) = \min\{\mathrm{Lc}_k(S) : S \subset X,\ \mathrm{card}(S) = T\},$$
$$\mathrm{malc}_{kT}(X) = \max\{\mathrm{Lc}_k(S) : S \subset X,\ \mathrm{card}(S) = T\}.$$

Отметим, что

$$\mathrm{milc}_{1T}(X) = R_{N-1}(X), \quad \mathrm{malc}_{(T(N-T))T}(X) = D(X).$$

Например, если $X = \{x, y, z, u\}$ — множество вершин прямоугольника с длинами сторон $a = |xy| = |zu|$, $b = |yz| = |xu|$ и $a \ge b$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, то

$$\mathrm{Ld}(X) = (b, b, a, a, c, c), \quad \mathrm{Ld}_3(X) = \mathrm{Ld}_4(X) = a, \quad \mathrm{Lc}(x) = (b, a, c),$$
$$\mathrm{Lc}_2(x) = a, \quad \mathrm{malc}_{11}(X) = b.$$

Оказывается, что все функции из определений 2, 3 являются основными метрическими инвариантами.

Теорема. *Пусть $4 \le K \le N$, $1 \le m \le K(K-1)/2$, $1 \le T \le [N/2]$, $1 \le k \le T(N-T)$. Тогда функции*

$$\mathrm{mild}_{mK}, \quad \mathrm{mald}_{mK}, \quad \mathrm{milc}_{kT}, \quad \mathrm{malc}_{kT}$$

являются основными метрическими инвариантами.

Доказательство. Из определений 2, 3 следует, что функции

$$\mathrm{mild}_{mK},\quad \mathrm{mald}_{mK},\quad \mathrm{milc}_{kT},\quad \mathrm{malc}_{kT}$$

удовлетворяют условиям (i), (ii) определения 1. Докажем, что эти функции удовлетворяют условию (iii) определения 1. Выберем произвольно метрические пространства (X,ρ), $(Y,d) \in \mathbb{K}$ и предположим для определенности, что

$$\mathrm{mild}_{mK}(X) \geq \mathrm{mild}_{mK}(Y),\quad \mathrm{mald}_{mK}(X) \geq \mathrm{mald}_{mK}(Y),$$

$$\mathrm{malc}_{kT}(X) \geq \mathrm{malc}_{kT}(Y),\quad \mathrm{milc}_{kT}(X) \geq \mathrm{milc}_{kT}(Y).$$

Фиксируем такую биекцию $f : X \to Y$, что

$$\operatorname{dis} f = 2d_s(X,Y),$$

и введем обозначение $a = 2d_s(X,Y)$. Тогда

$$\rho(x,x') \leq d(f(x),f(x')) + a \tag{2}$$

для любых $x, x' \in X$.

Пусть $S \subset X$, $\mathrm{card}(S) = K$, $4 \leq K \leq N$, $1 \leq m \leq K(K-1)/2$,

$$\mathrm{Ld}_m(S) = \rho(x,x'),\quad \mathrm{Ld}_m(f(S)) = d(f(u),f(v)),\quad x,x',u,v \in S.$$

Рассмотрим два возможных случая.

1. Допустим, что $\rho(u,v) \geq \rho(x,x')$. Тогда, используя неравенство (2), получим

$$\mathrm{Ld}_m(S) = \rho(x,x') \leq \rho(u,v) \leq d(f(u),f(v)) + a = \mathrm{Ld}_m(f(S)) + a.$$

2. Допустим, что $\rho(u,v) < \rho(x,x')$. Если

$$m = K(K-1)/2 \quad \text{или} \quad d(f(x),f(x')) \leq d(f(u),f(v)),$$

то ввиду (2) имеем неравенство

$$\mathrm{Ld}_m(S) = \rho(x,x') \leq d(f(x),f(x')) + a \leq d(f(u),f(v)) + a = \mathrm{Ld}_m(f(S)) + a.$$

Если

$$m < K(K-1)/2 \quad \text{и} \quad d(f(x),f(x')) > d(f(u),f(v)),$$

то в силу биективности f и определения $\mathrm{Ld}_m(S)$ найдутся такие $p,q \in S$, что

$$\rho(x,x') \leq \rho(p,q) \quad \text{и} \quad d(f(p),f(q)) \leq d(f(u),f(v)).$$

Тогда согласно (2) получим неравенство

$$\mathrm{Ld}_m(S) = \rho(x,x') \leq \rho(p,q) \leq d(f(p),f(q)) + a \leq d(f(u),f(v)) + a = \mathrm{Ld}_m(f(S)) + a.$$

Таким образом, доказано

$$\mathrm{Ld}_m(S) \leq \mathrm{Ld}_m(f(S)) + a. \tag{3}$$

Если возьмем максимум по всем $S \subset X$ таким, что $\mathrm{card}(S) = K$ в правой части этого неравенства, а затем в левой его части, то получим

$$\mathrm{mald}_{mK}(X) \leq \mathrm{mald}_{mK}(Y) + a.$$

Если же возьмем минимум по всем $S \subset X$, $\mathrm{card}(S) = K$, в левой части неравенства (3), а затем в правой его части, то получим

$$\mathrm{mild}_{mK}(X) \leq \mathrm{mild}_{mK}(Y) + a.$$

Пусть $\mathrm{Lc}_k(S) = \rho(x,x')$, $\mathrm{Lc}_k(f(S)) = d(f(u),f(v))$ для произвольно выбранного $S \subset X$ такого, что $\mathrm{card}(S) = T$. Рассмотрим два возможных случая.

1. Допустим, что $\rho(u,v) \geq \rho(x,x')$. Тогда в силу (2) получим неравенство

$$\mathrm{Lc}_k(S) = \rho(x,x') \leq \rho(u,v) \leq d(f(u),f(v)) + a \leq \mathrm{Lc}_k(f(S)) + a.$$

2. Допустим, что $\rho(u,v) < \rho(x,x')$. Если

$$k = T(N-T) \quad \text{или} \quad d(f(x),f(x')) \leq d(f(u),f(v)),$$

то согласно (2) имеем

$$\mathrm{Lc}_k(S) = \rho(x,x') \leq d(f(x),f(x')) + a \leq d(f(u),f(v)) + a = \mathrm{Lc}_k(f(S)) + a.$$

Если

$$k < T(N-T) \quad \text{и} \quad d(f(x),f(x')) > d(f(u),f(v)),$$

то в силу биективности f и определения $\mathrm{Lc}(S)$ найдутся такие $p,q \in S$, что

$$\rho(x,x') \leq \rho(p,q) \quad \text{и} \quad d(f(p),f(q)) \leq d(f(u),f(v)).$$

Тогда ввиду (2)

$$\mathrm{Lc}_k(S) = \rho(x,x') \leq \rho(p,q) \leq d(f(p),f(q)) + a \leq d(f(u),f(v)) + a = \mathrm{Lc}_k(f(S)) + a.$$

Таким образом, доказано

$$\mathrm{Lc}_k(S) \leq \mathrm{Lc}_k(f(S)) + a \tag{4}$$

для любого $S \subset X$, $\mathrm{card}(S) = K$. Если возьмем максимум по всем $S \subset X$, $\mathrm{card}(S) = T$, в правой части этого неравенства, а затем в левой его части, то получим

$$\mathrm{malc}_{kT}(X) \leq \mathrm{malc}_{kT}(Y) + a.$$

Если же возьмем минимум по всем $S \subset X$, $\mathrm{card}(S) = T$, в левой части неравенства (4), а затем в правой его части, то получим

$$\mathrm{milc}_{kT}(X) \leq \mathrm{milc}_{kT}(Y) + a. \qquad \square$$

Отметим непосредственное

Следствие. Для любых (X,ρ), $(Y,d) \in \mathbb{K}$ имеет место неравенство

$$DS(X,Y) := \max\{|\,\mathrm{Ld}_m(X) - \mathrm{Ld}_m(Y)| : 1 \leq m \leq N(N-1)/2\} \leq 2d_s(X,Y).$$

Рассмотрим подпространства

$$X = \{x_1 = (0;0;0),\ x_2 = (12;0;0),\ x_3 = (10;6;0),\ x_4 = (8;5;3)\},$$

$$Y = \{y_1 = (0;0;0),\ y_2 = (12;0;0),\ y_3 = (10;5;3),\ y_4 = (8;6;0)\}$$

метрического пространства $(\mathbb{R}^3,\rho)$ с метрикой

$$\rho((a^1;a^2;a^3),\ (b^1;b^2;b^3)) = \max\{|a^1-b^1|,\ |a^2-b^2|,\ |a^3-b^3|\}.$$

В [1] показано, что $2d_s(X,Y) = 1$. Нетрудно доказать, что любой из рассмотренных основных инвариантов J принимает на этих подпространствах одинаковые значения, т.е. $J(X) = J(Y)$. Можно привести много примеров метрических инвариантов, принимающих разные значения на этих подпространствах, но пример основного метрического инварианта с таким же свойством не известен автору.

В силу следствия можно указать следующий простой способ для распознавания конечных подмножеств $X = \{x_1,\dots,x_N\}$, $Y = \{y_1,\dots,y_N\}$ одной и той же мощности N в нормированном пространстве. Пусть $r(X) = (x_1+\dots+x_N)/N$, $\mathrm{Lr}(X)$ — упорядоченный по неубыванию набор расстояний между точкой $r(X)$ и всеми точками в X, а $\mathrm{Lr}_m(X)$ — m-й элемент из

$\mathrm{Lr}(X)$, где $1 \le m \le N$. Тогда расстояние между этими подмножествами можно вычислять по формуле

$$d_r(X,Y) = \max\{DS(X,Y), DR(X,Y)\},$$

где $DR(X,Y) := \max\{|\mathrm{Lr}_m(X) - \mathrm{Lr}_m(Y)| : 1 \le m \le N\}$.

Литература

[1] Сосов Е.Н. *Об основных метрических инвариантах конечных метрических пространств*, Изв. вузов. Матем., № 5, 45–48 (2015).

[2] Сосов Е.Н. *Относительный N-радиус ограниченного множества метрического пространства*, Учен. зап. Казанск. ун-та **153** (4), 28–36 (2011).

[3] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии* (Ин-т компьют. иследов., Москва–Ижевск, 2004).

Е.Н. Сосов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` Evgenii.Sosov@kpfu.ru

E.N. Sosov

Main metric invariants of finite metric spaces. II

Abstract. In the present paper we obtain new main metric invariants of finite metric spaces. These invariants can be used for classification of the finite metric spaces and their recognition.

Keywords: finite metric space, metric invariant.

E.N. Sosov

Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Evgenii.Sosov@kpfu.ru