и Российская школа «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений». Казань, 21-26 октября 2013 г. - с.151-157.

[3] Нигмедзянова А.М. Оснащенная динамическая визуализация построения точки по ее координатам на проективной прямой. Труды XV Международной научной конференции "Системы компьютерной математики и их приложения"(СКМП-2014). 16-18 мая, 2014. Смоленск. - с.36-38.

## ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС АНАЛИТИЧЕСКОГО ТЕСТИРОВАНИЯ ПО ОСНОВНЫМ РАЗДЕЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

А.А. Осипов[a]

[a]E-mail: osipov.and2012@yandex.ru; Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ

Поставленная задача включает в себя осуществление комплексного контроля знаний студента по трем основным разделам высшей математики. Остановимся на каждом разделе подробнее.

Студенты, в большинстве случаев, освоение программы высшей математики начинают с раздела «Линейная и векторная алгебра». Студент получает знания о матрицах, векторах и действиях над ними.

Затем первый раздел плавно перетекает в раздел «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве». Теперь студент познает фигуры на плоскости и тела, заданные в пространстве.

Третьим разделом является раздел «Дифференциальное исчисление». Изучение данного раздела дает краткий курс по нахождению производной от разных видов функций.

Программный комплекс разработан с учетом требований балльно-рейтинговой системы и рассчитан на быстрый и наиболее полный контроль знаний по вышеперечисленным разделам.

## ПОЛУКЛАССИЧЕСКИЕ УЛЬТРАЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ГОРИЗОНТЫ

А.А. Попов[a]

[a]E-mail: apopov@kpfu.ru; Казанский федеральный университет

**Аннотация**. *Мы рассматриваем квантовую обратную реакцию на ультраэкстремальный горизонт квантового скалярного поля с произвольной массой и параметром связи с гравитацией. Специфика задачи состоит в том, что в отличие от неэкстремлаъных или обычных экстремальных черных дыр ВКБ приближение остается справедливым вблизи горизонта даже для безмассового поля. Мы анализируем поведение тензора энергии-импульса квантового поля вблизи горизонта и показываем, что квантово-поправленные ультраэкстремальные горизонты действительно существуют. В пределе большой массы поля результаты согласуются с полученными в литературе ранее.*

**Abstract**. A.A. Popov. Semiclassical ultraextremal horizons.

*We consider quantum backreaction of the quantized scalar field with an arbitrary mass and curvature coupling on ultraextremal horizons. The problem is distinguished in that (in contrast to non-extremal or extremal black holes) the WKB approximation remains valid near $r_+$ (which is the radius of the horizon) even in the massless limit. We examine the behavior of the stress-energy tensor of the quantized field near $r_+$ and show that quantum-corrected objects under discussion do exist. In the limit of the large mass our results agree with previous ones known in literature.*

**Keywords:** *ultraextremal horizon, quantized field, vacuum polarization.*

## Введение

Особая роль экстремальных горизонтов не вызывает никаких сомнений. Достаточно лишь напомнить о таких вопросах, как энтропия черной дыры, сценарии ее испарения, включая проблему ее конечного состояния, и т.д. Такие объекты естественным образом появляются на классическом уровне - характерным примером является горизонт черной дыры Рейсснера-Нордстрема с массой равной заряду. Однако вопрос о существовании экстремальных горизонтов становится нетривиальным в полуклассической теории гравитации, в рамках которой учитывается обратная реакция квантовых полей на метрику. Квантово-поправленная метрика содержит комбинации тензора энергии-импульса (ТЭИ), имеющие смысл энергии, измеряемой в системе отсчета свободно падающего наблюдателя, и заранее не очевидно, является ли эта величина конечной или расходится вблизи экстремального горизонта. Численные расчеты показали, что для безмассового поля на фоне экстремальной черной дыры Рейсснера-Нордстрема таких расходимостей нет [1]. Аналитическое исследование поведения массивных полей вблизи экстремальных горизонтов дало тот же результат [2]. Недавно такие исследования были распространены на случай так называемых ультраэкстремальных горизонтов (УЭГ) [3], в котором метрический коэффициент

$$-g_{tt} \sim (r_+ - r)^3 \tag{1}$$

вблизи горизонта. Здесь $r$ - шварцшильдова радиальная координата (координата кривизны), $r = r_+$ соответствует горизонту. Такие горизонты встречаются, например, в пространстве Рейсснера-Нордстрема - де Ситтера, в случае, когда космологическая константа $\Lambda > 0$ [4]. Соответствующий этому случаю горизонт оказывается космологическим, так что метрика является статической между $r = 0$ и $r = r_+$.

Результаты для УЭГ были получены в [3] только для массивных полей. Возникает естественный вопрос, существуют ли УЭГ с учетом квантовых поправок полей произвольной массы, включая случай безмассовых полей, вклад которых в вакуумные средние оператора ТЭИ квантованных полей много больше соответствующего вклада массивных полей. Напомним, что аналитические вычисления ТЭИ квантовых полей существенным образом основаны на ВКБ приближении. Хорошо известное приближение Швингера - де Витта [5, 6, 7] является разложением по малому параметру

$$\epsilon = (\lambda/r_0)^2 \,, \tag{2}$$

где $\lambda$ является комптоновской длиной волны поля, $r_0$ - характерным масштабом изменения гравитационного поля, равным вблизи горизонта $r_+$. Для массивных полей $\lambda \sim m^{-1}$, где $m$ - масса поля (здесь и ниже мы используем систему единиц с $G = c = \hbar = 1$). Для безмассовых полей $\lambda \sim r_+$, так что $\epsilon$ перестает быть малым параметром. На первый взгляд, те же причины, что воспрепятствовали аналитическому рассмотрению полуклассических экстремальных черных дыр, должны проявить себя и в случае УЭГ, поскольку ситуация ожидается не лучше, чем для экстремальных горизонтов. К счастью, это оказывается не так. Поскольку геометрия пространства-времени в окрестности УЭГ меняется "достаточно медленно параметр ВКБ приближения, как мы увидим, остается в этой области малым в отличие от окрестности обычных экстремальных горизонтов. Это ключевое наблюдение, которое позволяет провести аналитические вычисления и установить, что УЭГ с учетом квантовых поправок полей произвольной массы действительно существуют.

## Применимость ВКБ приближения

Метрика статического сферически симметричного пространства-времени может быть записана в виде

$$ds^2 = -U(r)dt^2 + \frac{dr^2}{V(r)} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \tag{3}$$

Обозначим корень уравнения $V(r) = 0$ через $r_+$, так что

$$V(r_+) = 0. \tag{4}$$

Применимость ВКБ приближения требует, чтобы длина волны частицы менялась незначительно на расстоянии порядка ее самой (см., например, параграф 46 книги [8]). В нашем контексте это реализуется следующим образом. Рассмотрим волновое уравнение для модовой функции $S(\rho)$ на фоне метрики

(3), где $\rho$ - инвариантное расстояние. Тогда можно показать [5, 9], что эта функция удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + A(\rho)\frac{d}{d\rho} + B(\rho)\right] S = 0, \tag{5}$$

где

$$A = \frac{1}{2U}\frac{dU}{d\rho} + \frac{1}{r^2}\frac{dr^2}{d\rho}, \qquad B = -\left[\frac{\omega^2}{U} + \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 + \xi R\right], \tag{6}$$

$R$ – скалярная кривизна, $\xi$ – параметр связи между скалярным полем и гравитацией, $\omega$ - частота, $l$ – угловой момент. Подстановкой

$$S = \psi(\rho)\exp\left(-\frac{1}{2}\int d\rho A\right), \tag{7}$$

уравнение (5) сводится к стандартному виду уравнения Шредингера

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + C(\rho)\right]\psi = 0, \tag{8}$$

где

$$C = B - \frac{A'}{2} - \frac{A^2}{4}. \tag{9}$$

Если записать $\psi = \exp(i\sigma(\rho))$, то в терминах функции $\sigma$ условие применимости ВКБ приближения для решения уравнения (8) выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\sigma'}\right) \ll 1. \tag{10}$$

В первом приближении

$$\sigma = \int \sqrt{C}d\rho, \tag{11}$$

что позволяет переписать условие применимости ВКБ приближения (10) в виде

$$\frac{1}{2C^{3/2}}\frac{dC}{d\rho} \ll 1. \tag{12}$$

В окрестности "обычного"экстремального горизонта $U \sim (r - r_+)^2$, $R \sim r_+^{-2}$.

Удобно сформулировать соответствующее условие в терминах инвариантного собственного расстояния $\rho$ . Примем, что соответствующий масштаб изменения метрики определяется ее первой производной (это действительно так в рассматриваемой нами задаче). Тогда этот масштаб определяется согласно

$$r_0^{-1} = \max\left\{\left|\frac{d\ln(U)}{d\rho}\right|,\ \left|\frac{d\ln(r)}{d\rho}\right|\right\}. \tag{13}$$

Для скалярного квантового поля произвольной массы в статических сферически-симметричных пространствах мы можем использовать ВКБ приближение, полученное в [9, 10] (см. также [11, 12] для полей спина 1 и 1/2). В этом случае роль комптоновской длины волны играет параметр

$$\lambda = \left[m^2 + \frac{2\xi}{r^2}\right]^{-1/2}, \tag{14}$$

Заметим, что в случае

$$m^2 \gg \frac{2\xi}{r^2} \tag{15}$$

приближенные выражения, полученные в [9, 10], совпадают с соответствующими выражениями [5, 6, 7].

Пусть в нулевом приближении метрика имеет вид (3), причем $U = V$. Тогда $r_+$ соответствует горизонту. Если предположить, что

$$\frac{d^kV}{dr^k}_{|r=r_+} = 0,\ k = 0, 1, 2, ...n - 1, \tag{16}$$

тогда вблизи горизонта производные от $r^2$ и $V$ по $\rho$ могут быть оценены следующим образом:

$$\left|\frac{dr^2}{d\rho}\right| \sim \frac{|r-r_+|^{n/2}}{r_+^{n/2-1}}, \qquad \left|\frac{1}{U}\frac{dU}{d\rho}\right| \sim \frac{|r-r_+|^{n/2-1}}{r_+^{n/2}}. \tag{17}$$

Случай $n = 2$ соответствует экстремальной метрике Рейсснера - Нордстрома. В этом случае при $r \to r_+$ $\left|\frac{dr^2}{d\rho}\right| \to 0$, но $\left|\frac{1}{U}\frac{dU}{d\rho}\right| \sim r_+^{-1}$ и не содержит малого параметра. В результате выражение (13) дает $r_0 \sim r_+$. Поэтому для безмассовых полей, когда $\lambda \sim r_+$, параметр $\varepsilon$ перестает быть малым ($\varepsilon \sim 1$), и ВКБ приближение становится неприменимым.

Однако, ситуация коренным образом меняется, если $n > 2$. Тогда

$$\varepsilon = \frac{\lambda^2}{r_+^2}\left(\frac{r-r_+}{r_+}\right)^{n-2} \ll 1. \tag{18}$$

Точность приближения становится тем больше, чем меньше становится параметр $\lambda^2/r_0^2$, т.е. в пределе $r \to r_+$. Таким образом, ВКБ приближение справедливо вблизи $r_+$ для любой конечной массы $m$ квантованного поля, включая $m = 0$. Ниже мы используем это обстоятельство для нахождения поправок к метрике, создаваемых квантованным скалярным полем произвольной массы вблизи $r_+$.

## Квантовая обратная реакция вблизи ультраэкстремального горизонта

Для нашей системы tt и rr уравнения Эйнштейна имеют вид

$$\frac{V'}{r} + \frac{V}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \Lambda = 8\pi T_t^t, \tag{19}$$

$$\frac{VU'}{rU} + \frac{V}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \Lambda = 8\pi T_r^r, \tag{20}$$

где штрих означает дифференцирование по $r$, $T_\mu^\nu = T_\nu^{\mu\,(cl)} + \langle T_\nu^\mu\rangle_{ren}$, где $T_\nu^{\mu\,(cl)}$ отвечает классическому источнику, $\langle T_\nu^\mu\rangle_{ren}$ - перенормированный тензор энергии-импульса квантованных полей.

В качестве классического источника мы будем рассматривать электромагнитное поле, так что

$$T_\nu^{\mu\,(cl)} = \frac{Q^2}{8\pi r^4} diag(-1,-1,1,1). \tag{21}$$

Следуя работам [2, 3], мы будем полагать, что даже с учетом квантовых поправок выполняются условия

$$U(r_+) = U'(r_+) = U''(r_+) = V(r_+) = V'(r_+) = V''(r_+) = 0, \tag{22}$$

которые соответствуют УЭГ с n=3. Такой выбор мотивирован физически, так как он соответствует УЭГ (ультрахолодному горизонту) метрики Рейсснера-Нордстрема - де Ситтера [4].

В пренебрежении обратной реакцией квантованного поля

$$U(r) = V(r) = \frac{(r+3r_+)}{6{r_+}^2\, r^2}\,(r_+ - r)^3\,, \tag{23}$$

а соответствующие условия ульраэкстремальности выглядят следующим образом [4]:

$$Q^2 = \frac{{r_+}^2}{2}\,, \quad \Lambda = \frac{1}{2{r_+}^2}. \tag{24}$$

Чтобы учесть обратную реакцию квантованных полей на фоновое гравитационное поле, мы поступим подобно тому, как это делалось в [2, 3]. Будем стартовать не с классического фона с последующим добавлением к нему квантовых поправок, а с самого начала рассмотрим квантово-поправленную самосогласованную геометрию. Это означает, что для $\varepsilon \neq 0$ горизонт будет оставаться ультраэкстремальным (22), хотя конкретные условия ультраэкстремальности будут отличаться от соответствующих условий в классическом случае (24) членами порядка $\varepsilon$.

Решение уравнения (19), с учетом условия $V(r_+) = 0$, может быть записано в следующем виде:

$$V(r) = 1 + \left(\frac{\Lambda r_+^3}{3} - \frac{Q^2}{r_+} - r_+\right)\frac{1}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{8\pi}{r}\int_{r_+}^{r} d\tilde{r}\tilde{r}^2 \langle T_t^t\rangle_{ren}, \tag{25}$$

где $\langle T_\nu^\mu\rangle_{ren}$ вычисляется на невозмущенном фоне. Остальные условия (22) на $V(r)$ дают

$$Q^2 = \frac{r_+^2}{2} - 2\pi r_+^5 \frac{d\langle T_t^t\rangle_{ren}}{dr}_{|r=r_+}, \tag{26}$$

$$\Lambda = \frac{1}{2r_+^2} + 8\pi\langle T_t^t\rangle_{ren|r=r_+} + 2\pi r_+ \frac{d\langle T_t^t\rangle_{ren}}{dr}_{|r=r_+}. \tag{27}$$

Решение уравнения (20) может быть записано в виде

$$U = \exp(2\psi)V \approx (1+2\psi)V, \tag{28}$$

$$\psi = \frac{const}{2} + 4\pi\int_{r_+}^{r} d\tilde{r}F(\tilde{r}),\ F(\tilde{r}) = \tilde{r}\frac{T_r^r - T_t^t}{V}. \tag{29}$$

Тогда из (21) следует, что неисчезающий вклад в $F(r)$ дают только квантовые поля. Ниже мы ограничимся вкладом в эту величину только квантованного скалярного поля.

Ключевой вопрос заключается в поведении $F(r)$ вблизи ульраэкстремального горизонта. Если эта величина остается конечной при $r_+$, то метрическая функция $U(r)$ (28) имеет ту же асимптотику, что и $V(r)$, а это соответствует УЭГ. Что касается состояния квантового поля, то уместно напомнить (см. раздел 11.3.7 работы [13]), что приближение Швингера - де Витта для очень массивного поля [5, 6, 7] на заданном фоне малочувствительно к выбору квантового состояния, будучи полностью локальным (зависящим от кривизны и ее производных в данной точке). Однако, оговорка "почти"является важной, так как различие между состояниями Хартля - Хокинга, Бульвара и Унру существенно в непосредственной окрестности горизонта. Между тем, поскольку мы пытаемся выяснить, существует УЭГ с учетом квантовых поправок или нет, именно окрестность горизонта и представляется для нас наиболее важной. Поэтому, мы хотим подчеркнуть, что интересуемся поведением системы в состоянии Хартля - Хокинга. Последнее означает, что мы рассматриваем статическую область пространства-времени, ограниченную значениями радиуса $0 < r \leq r_+$. При этом возникает проблема, связанная с наличием сингулярности при $r = 0$, избежать которую можно так же, как это было сделано в [3]: мы размазываем сингулярность или просто заменяем ее центральным телом с регулярным центром и границей при $r = R < r_+$.

Оказывается (см. ниже), что в разложении

$$\langle T_\nu^\mu\rangle_{ren} = \langle T_\nu^\mu\rangle_{ren|r=r_+} + \frac{d\langle T_\nu^\mu\rangle_{ren}}{dr}_{|r=r_+}(r-r_+) + \frac{1}{2}\frac{d^2\langle T_\nu^\mu\rangle_{ren}}{dr^2}_{|r=r_+}(r-r_+)^2 + ... \tag{30}$$

коэффициенты при $(r-r_+)^k$ с $k = 0, 1, 2$ совпадают для $\langle T_t^t\rangle_{ren}$ и $\langle T_r^r\rangle_{ren}$. В результате, разница $\langle T_r^r\rangle_{ren} - \langle T_t^t\rangle_{ren} = B(r_+ - r)^3 + O((r_+ - r)^4)$ с конечной константой $B$ имеет тот же порядок, что и $V$, так что функция $F(r)$ оказывается конечной при $r \to r_+$. Таким образом, величина $\psi$ также оказывается конечной. Это позволяет сделать вывод, что квантово-поправленные УЭГ действительно существуют.

Можно найти явные выражения для квантово-поправленной метрики в терминах $r_+$ и $\langle T_\nu^\mu\rangle_{ren}$ вблизи $r_+$. Выражения (25, 28, 29) в этой области дают

$$\begin{aligned} V(r) = &\left[-\frac{2}{3r_+^3} + \frac{20\pi}{3}\frac{d\langle T_t^t\rangle_{ren}}{dr}_+ + \frac{4\pi r_+}{3}\frac{d^2\langle T_t^t\rangle_{ren}}{dr^2}_+\right](r-r_+)^3 \\ &+ \left[\frac{7}{6r_+^4} - \frac{20\pi}{3r_+}\frac{d\langle T_t^t\rangle_{ren}}{dr}_+ + \frac{2\pi}{3}\frac{d^2\langle T_t^t\rangle_{ren}}{dr^2}_+ + \frac{\pi r_+}{3}\frac{d^3\langle T_t^t\rangle_{ren}}{dr^3}_+\right](r-r_+)^4 + O\left(\frac{(r-r_+)^5}{r_+^5}\right), \end{aligned} \tag{31}$$

$$U(r)=\left[-\frac{2C}{3r_+^3}+\frac{20\pi}{3}\frac{d\langle T_t^t\rangle_{ren}}{dr}_{+}+\frac{4r_+\pi}{3}\frac{d^2\langle T_t^t\rangle_{ren}}{dr^2}_{+}\right](r-r_+)^3+\left[\frac{7C}{6r_+^4}-\frac{20\pi}{3r_+}\frac{d\langle T_t^t\rangle_{ren}}{dr}_{|r=r_+}+\right.$$
$$\left.\frac{2\pi}{3}\frac{d^2\langle T_t^t\rangle_{ren}}{dr^2}_{+}+\frac{\pi r_+}{3}\frac{d^3\langle T_t^t\rangle_{ren}}{dr^3}_{+}+\frac{4\pi r_+}{3}\left(\frac{d^3\langle T_r^r\rangle_{ren}}{dr^3}_{+}-\frac{d^3\langle T_t^t\rangle_{ren}}{dr^3}_{+}\right)\right](r-r_+)^4+O\left(\frac{(r-r_+)^5}{r_+^5}\right),\quad(32)$$

где $C$ – константа, а знак $dT/dx_+$ означает, что производжная вычисляется в точке $r=r_+$.

## $\langle T_\nu^\mu\rangle_{ren}$ вблизи ультраэкстремального горизонта

Здесь мы приводим коэффициенты в соответствующих компонентах разложения ТЭИ квантованного скалярного поля вблизи УЭГ. Они получены из [9], где вычисления были проведены при условии

$$\mu_+^2=m^2r_+^2+2\xi-1/4>0.\qquad(33)$$

Мы имеем:

$$\langle T_t^t\rangle_{ren}=\frac{1}{\pi^2r_+^4}\left\{\left(\xi-\frac{1}{8}\right)\frac{m^2r_+^2}{32}+\frac{3\xi^2}{32}-\frac{11\xi}{384}+\frac{79}{30720}+\left[-\frac{m^4r_+^4}{64}-\left(\xi-\frac{1}{6}\right)\frac{m^2r_+^2}{16}-\frac{\xi^2}{16}+\frac{\xi}{48}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{480}\right]\ln\left(\frac{\mu_+^2}{m_{DS}^2r_+^2}\right)+\frac{\mu_+^4}{8}\left[I_1(\mu_+)-I_2(\mu_+)\right]\right\}+\frac{1}{\pi^2r_+^5}\left\{\frac{1}{\mu_+^2}\left[\left(-\frac{5\xi^2}{24}+\frac{73\xi}{1152}-\frac{77}{23040}\right)m^2r_+^2-\frac{5\xi^3}{12}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{103\xi^2}{576}-\frac{53\xi}{2560}+\frac{7}{11520}\right]+\left[\left(\xi-\frac{1}{6}\right)\frac{m^2r_+^2}{8}+\frac{\xi^2}{4}-\frac{\xi}{12}+\frac{1}{120}\right]\ln\left(\frac{\mu_+^2}{m_{DS}^2r_+^2}\right)+\mu_+^2\left[\left(\xi-\frac{1}{8}\right)I_2(\mu_+)\right.$$
$$\left.+\left(2\xi^2-\frac{5\xi}{12}+\frac{1}{24}\right)I_1(\mu_+)\right]+\mu_+^3\left[\left(\frac{m^2r_+^2}{8}+\xi^2+\frac{65\xi}{48}-\frac{59}{192}\right)\frac{dI_1(\mu_+)}{d\mu_+}+\left(\frac{25}{192}-\frac{31\xi}{48}-\xi^2\right)\frac{dI_0(\mu_+)}{d\mu_+}\right.$$
$$\left.-\frac{m^2r_+^2}{8}\frac{dI_2(\mu_+)}{d\mu_+}\right]+\left(\xi-\frac{1}{4}\right)\mu_+^4\left[\frac{23}{48}\frac{d^2I_1(\mu_+)}{d\mu_+^2}-\frac{5}{12}\frac{d^2I_0(\mu_+)}{d\mu_+^2}\right]+\left(\xi-\frac{1}{4}\right)\frac{\mu_+^5}{32}\left[\frac{d^3I_1(\mu_+)}{d\mu_+^3}\right.$$
$$\left.\left.-\frac{d^3I_0(\mu_+)}{d\mu_+^3}\right]\right\}(r-r_+)+\frac{1}{\pi^2r_+^6}\left\{\left[\frac{m^4r_+^4}{8}+\left(\xi-\frac{1}{6}\right)\frac{m^2r_+^2}{4}\right]\mu_+\frac{dI_0(\mu_+)}{d\mu_+}-\frac{5}{4}\mu_+^4I_2(\mu_+)+\left[\frac{3m^2r_+^2}{8}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{5}{2}\left(\xi-\frac{1}{8}\right)\right]\mu_+^2I_1(\mu_+)+\left[-\left(\xi-\frac{1}{6}\right)\frac{5m^2r_+^2}{16}-\frac{5\xi^2}{8}+\frac{5\xi}{24}-\frac{1}{48}\right]\ln\left(\frac{\mu_+^2}{m_{DS}^2r_+^2}\right)$$
$$\left.-\frac{m^2r_+^2}{192}+\frac{5\xi^2}{8}-\frac{35\xi}{192}+\frac{641}{46080}\right\}(r-r_+)^2+\frac{1}{\pi^2r_+^7}\left\{\left[\frac{m^6r_+^6}{24}+\left(\frac{5\xi}{12}-\frac{11}{144}\right)m^4r_+^4+\left(\frac{7\xi^2}{6}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{13\xi}{36}+\frac{1}{30}\right)m^2r_+^2+\xi^3-\frac{5\xi^2}{12}+\frac{\xi}{15}-\frac{1}{168}\right]\frac{d^2I_0(\mu_+)}{d\mu_+^2}+\frac{1}{\mu_+}\left[-\frac{m^6r_+^6}{3}+\left(\frac{53}{288}-\frac{4\xi}{3}\right)m^4r_+^4\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{4\xi^2}{3}+\frac{7\xi}{18}-\frac{11}{360}\right)m^2r_+^2+\frac{\xi^2}{24}-\frac{7\xi}{360}-\frac{1}{2520}\right]\frac{dI_0(\mu_+)}{d\mu_+}+\frac{5\mu_+^4}{2}I_2(\mu_+)+\left(-\frac{m^2r_+^2}{2}-\frac{9\xi}{2}\right.$$
$$\left.+\frac{13}{24}\right)\mu_+^2I_1(\mu_+)+\left[\left(\xi-\frac{1}{6}\right)\frac{5m^2r_+^2}{8}+\frac{5\xi^2}{4}-\frac{5\xi}{12}+\frac{11}{240}\right]\ln\left(\frac{\mu_+^2}{m_{DS}^2r_+^2}\right)+\frac{1}{\mu_+^2}\left[\frac{11m^4r_+^4}{576}\right.$$
$$\left.\left.+\left(-\frac{5\xi^2}{4}+\frac{125\xi}{288}-\frac{2513}{69120}\right)m^2r_+^2-\frac{5\xi^3}{2}+\frac{53\xi^2}{48}-\frac{5483\xi}{34560}+\frac{18653}{1935360}\right]\right\}(r-r_+)^3$$
$$+O\left(\frac{(r-r_+)^4}{r_+^8}\right),\qquad(34)$$

$$\langle T_r^r\rangle_{ren}-\langle T_t^t\rangle_{ren}=\frac{1}{\pi^2r_+^7}\left\{\frac{1}{\mu_+^2}\left[\left(\frac{1}{144}-\frac{5\xi}{144}\right)m^2r_+^2-\frac{5\xi^2}{72}+\frac{11\xi}{576}-\frac{37}{13440}\right]-\frac{1}{360}\ln\left(\frac{\mu_+^2}{m_{DS}^2r_+^2}\right)\right.$$

$$
-\left(\xi-\frac{1}{6}\right)\mu_+^2 I_1(\mu_+)+\left[\left(\xi-\frac{1}{8}\right)\frac{m^4r_+^4}{3}+\left(\frac{4\xi^2}{3}-\frac{29\xi}{72}+\frac{23}{720}\right)m^2r_+^2+\frac{4\xi^3}{3}-\frac{23\xi^2}{36}+\frac{19\xi}{180}\right.
$$
$$
\left.-\frac{11}{2520}\right]\frac{dI_0(\mu_+)}{\mu_+d\mu_+}+\left[-\left(\xi-\frac{1}{4}\right)\frac{m^4r_+^4}{6}+\left(-\frac{2\xi^2}{3}+\frac{2\xi}{9}-\frac{1}{45}\right)m^2r_+^2-\frac{2\xi^3}{3}+\frac{5\xi^2}{18}-\frac{2\xi}{45}\right.
$$
$$
\left.\left.+\frac{1}{252}\right]\frac{d^2I_0(\mu_+)}{d\mu_+^2}\right\}(r-r_+)^3+O\left(\frac{(r-r_+)^4}{r_+^8}\right). \tag{35}
$$

Существенно, что эта разность имеет тот же порядок по $(r-r_+)$ что и функция $V$, так что $F(r)$ и $\psi(r)$ (29) действительно конечны на горизонте.

$$
\langle T_\theta^\theta\rangle_{ren}=\langle T_\varphi^\varphi\rangle_{ren}=\frac{1}{\pi^2r_+^4}\left\{\frac{m^2r_+^2}{32}\left(\xi-\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{32}\left(\xi-\frac{1}{8}\right)^2+\left[-\frac{m^4r_+^4}{64}+\frac{\xi^2}{16}-\frac{\xi}{48}\right.\right.
$$
$$
\left.\left.+\frac{1}{480}\right]\ln\left(\frac{\mu_+^2}{m_{DS}^2r_+^2}\right)-\left(\xi-\frac{1}{8}\right)\frac{\mu_+^2}{4}I_1(\mu_+)+\frac{\mu_+^4}{8}I_2(\mu_+)\right\}+\frac{1}{\pi^2r_+^5}\left\{\frac{1}{\mu_+^2}\left[\left(\frac{7\xi^2}{24}-\frac{113\xi}{1152}+\frac{41}{4608}\right)m^2r_+^2\right.\right.
$$
$$
\left.+\frac{7\xi^3}{12}-\frac{143\xi^2}{576}+\frac{271\xi}{7680}-\frac{77}{46080}\right]+\left[\left(\frac{1}{6}-\xi\right)\frac{m^2r_+^2}{8}-\frac{\xi^2}{4}+\frac{\xi}{12}-\frac{1}{120}\right]\ln\left(\frac{\mu_+^2}{m_{DS}^2r_+^2}\right)
$$
$$
+\left[\left(2\xi^2+\frac{5\xi}{6}-\frac{3}{16}\right)m^2r_+^2+4\xi^3+\frac{13\xi^2}{6}-\frac{5\xi}{6}+\frac{1}{16}\right]I_1(\mu_+)-\left(\xi-\frac{1}{8}\right)\mu_+^2I_2(\mu_+)
$$
$$
+\left[\left(\xi^2+\frac{47\xi}{48}-\frac{25}{128}\right)m^2r_+^2+2\xi^3+\frac{53\xi^2}{24}-\frac{73\xi}{96}+\frac{29}{512}\right]\mu_+\frac{dI_1(\mu_+)}{d\mu_+}+\left[\left(-\xi^2-\frac{13\xi}{48}\right.\right.
$$
$$
\left.\left.+\frac{29}{384}\right)m^2r_+^2-2\xi^3-\frac{19\xi^2}{24}+\frac{35\xi}{96}-\frac{15}{512}\right]\mu_+\frac{dI_0(\mu_+)}{d\mu_+}+\frac{m^2r_+^2}{8}\mu_+^3\frac{dI_2(\mu_+)}{d\mu_+}+\left(\frac{23\xi}{48}\right.
$$
$$
\left.\left.-\frac{7}{128}\right)\mu_+^4\frac{d^2I_1(\mu_+)}{d\mu_+^2}-\left(\frac{5\xi}{12}-\frac{7}{128}\right)\mu_+^4\frac{d^2I_0(\mu_+)}{d\mu_+^2}+\frac{\xi}{32}\mu_+^5\left[\frac{d^3I_1(\mu_+)}{d\mu_+^3}-\frac{d^3I_0(\mu_+)}{d\mu_+^3}\right]\right\}(r-r_+)
$$
$$
+\frac{1}{\pi^2r_+^6}\left\{\left[\frac{m^6r_+^6}{16}+\left(\xi-\frac{1}{12}\right)\frac{m^4r_+^4}{4}+\left(\xi-\frac{1}{6}\right)\frac{\xi m^2r_+^2}{4}\right]\frac{d^2I_0(\mu_+)}{d\mu_+^2}+\frac{1}{\mu_+}\left[-\frac{m^6r_+^6}{4}+\left(-\frac{\xi}{4}+\frac{7}{192}\right)m^4r_+^4\right.\right.
$$
$$
\left.+\left(2\xi^2-\frac{59\xi}{96}+\frac{3}{64}\right)m^2r_+^2+3\xi^3-\frac{11\xi^2}{8}+\frac{5\xi}{24}-\frac{1}{96}\right]\frac{dI_0(\mu_+)}{d\mu_+}+\left(-4\xi+\frac{9}{16}\right)\mu_+^2I_1(\mu_+)-\frac{5}{4}\mu_+^4I_2(\mu_+)
$$
$$
+\left[\left(\xi-\frac{1}{6}\right)\frac{5m^2r_+^2}{16}+\frac{5\xi^2}{8}-\frac{5\xi}{24}+\frac{1}{48}\right]\ln\left(\frac{\mu_+^2}{m_{DS}^2r_+^2}\right)+\frac{1}{\mu_+^2}\left[\frac{7m^4r_+^4}{384}+\left(-\frac{5\xi^2}{8}+\frac{3\xi}{16}-\frac{391}{46080}\right)m^2r_+^2\right.
$$
$$
\left.\left.-\frac{5\xi^3}{4}+\frac{11\xi^2}{24}-\frac{1111\xi}{23040}+\frac{241}{184320}\right]\right\}(r-r_+)^2+\frac{1}{\pi^2r_+^7}\left\{\frac{1}{\mu_+}\left[\frac{m^8r_+^8}{48}+\left(\xi+\frac{1}{36}\right)\frac{m^6r_+^6}{8}+\left(\frac{\xi^2}{4}+\frac{\xi}{72}\right.\right.\right.
$$
$$
\left.\left.-\frac{1}{180}\right)m^4r_+^4+\left(\frac{\xi^3}{6}+\frac{\xi^2}{72}-\frac{7\xi}{90}+\frac{11}{720}\right)m^2r_+^2\right]\frac{d^3I_0(\mu_+)}{d\mu_+^3}+\frac{1}{\mu_+^2}\left[-\frac{m^8r_+^8}{12}+\left(\frac{\xi}{3}-\frac{35}{576}\right)m^6r_+^6\right.
$$
$$
+\left(4\xi^2-\frac{47\xi}{48}+\frac{17}{320}\right)m^4r_+^4+\left(\frac{28\xi^3}{3}-\frac{281\xi^2}{48}+\frac{1687\xi}{1440}-\frac{19}{288}\right)m^2r_+^2+\frac{20\xi^4}{3}-\frac{149\xi^3}{18}+\frac{211\xi^2}{72}-\frac{71\xi}{180}
$$
$$
\left.+\frac{13}{720}\right]\frac{d^2I_0(\mu_+)}{d\mu_+^2}+\frac{1}{\mu_+^3}\left[\frac{m^8r_+^8}{2}+\left(-\frac{5\xi}{12}+\frac{23}{192}\right)m^6r_+^6+\left(-\frac{29\xi^2}{2}+\frac{677\xi}{144}-\frac{2173}{5760}\right)m^4r_+^4+\left(-37\xi^3\right.\right.
$$
$$
\left.\left.+\frac{2117\xi^2}{144}-\frac{2447\xi}{1440}+\frac{1}{20}\right)m^2r_+^2-\frac{82\xi^4}{3}+\frac{104\xi^3}{9}-\frac{217\xi^2}{160}+\frac{19\xi}{1440}+\frac{7}{1920}\right]\frac{dI_0(\mu_+)}{d\mu_+}+\left(\frac{27\xi}{2}\right.
$$
$$
\left.-\frac{49}{24}\right)\mu_+^2I_1(\mu_+)-\frac{5\mu_+^4}{2}I_2(\mu_+)+\left[-\left(\xi-\frac{1}{6}\right)\frac{5m^2r_+^2}{8}-\frac{5\xi^2}{4}+\frac{5\xi}{12}-\frac{2}{45}\right]\ln\left(\frac{\mu_+^2}{m_{DS}^2r_+^2}\right)+\frac{1}{\mu_+^4}\left[-\frac{m^6r_+^6}{24}\right.
$$
$$
+\left(\frac{5\xi^2}{4}-\frac{41\xi}{144}-\frac{229}{23040}\right)m^4r_+^4+\left(5\xi^3+\frac{101\xi^2}{72}-\frac{3059\xi}{2880}+\frac{323}{2880}\right)m^2r_+^2+5\xi^4+\frac{65\xi^3}{18}-\frac{13861\xi^2}{5760}
$$

$$+\frac{1001\xi}{2560}-\frac{7207}{368640}\Bigg]\Bigg\}(r-r_+)^3+O\left(\frac{(r-r_+)^4}{r_+^8}\right), \tag{36}$$

где

$$I_n(\mu_+)=\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}\ln|1-x^2|}{1+e^{2\pi|\mu_+|x}}dx, \tag{37}$$

$m_{DS}$ равно массе $m$ поля, если поле массивное. Для безмассового поля $m_{DS}$ является произвольным параметром, возникающим вследствие инфракрасного обрезания при перенормировке ТЭИ. Конкретный выбор этой величины соответствует конечной перенормировке коэффициентов в гравитационнном лагранжиане и должен определяться из экспериментов или наблюдений.

В случае $m=0,\ \xi=1/6$ можно приближенно найти значения величин $I_n(\mu_+)$ и их производных

$$I_1(\sqrt{1/12})\approx -0.05962,\quad I_2(\sqrt{1/12})\approx 0.50384,\quad \frac{dI_0(\mu_+)}{d\mu_+}\approx 0.64950,$$
$$\frac{dI_1(\mu_+)}{d\mu_+}\approx -0.66948,\quad \frac{dI_2(\mu_+)}{d\mu_+}\approx -11.70126,\quad \frac{d^2I_0(\mu_+)}{d\mu_+^2}\approx -0.03288,$$
$$\frac{d^2I_1(\mu_+)}{d\mu_+^2}\approx 21.17445,\qquad \frac{d^3I_0(\mu_+)}{d\mu_+^3}\approx -43.75175,\quad \frac{d^3I_1(\mu_+)}{d\mu_+^2}\approx -462.08899. \tag{38}$$

Таким образом выражения (34,36) принимают вид

$$\langle T_t^t\rangle_{ren}\simeq\frac{1}{\pi^2r_+^4}\left[0.00078+\frac{1}{2880}\ln\left(m_{DS}^2r_+^2\right)\right]+\frac{1}{\pi^2r_+^5}\Bigg[-0.00241$$
$$-\frac{1}{720}\ln\left(m_{DS}^2r_+^2\right)\Bigg](r-r_+)+\frac{1}{\pi^2r_+^6}\left[0.00463+\frac{1}{288}\ln\left(m_{DS}^2r_+^2\right)\right](r-r_+)^2$$
$$+\frac{1}{\pi^2r_+^7}\left[0.00417-\frac{1}{90}\ln\left(m_{DS}^2r_+^2\right)\right](r-r_+)^3+O\left(\frac{(r-r_+)^4}{r_+^8}\right), \tag{39}$$

$$\langle T_r^r\rangle_{ren}-\langle T_t^t\rangle_{ren}\simeq\frac{1}{\pi^2r_+^7}\left[-0.007406+\frac{1}{360}\ln\left(m_{DS}^2r_+^2\right)\right](r-r_+)^3+O\left(\frac{(r-r_+)^4}{r_+^8}\right), \tag{40}$$

$$\langle T_\theta^\theta\rangle_{ren}\ \simeq\ \frac{1}{\pi^2r_+^4}\left[-0.00043-\frac{1}{2880}\ln\left(m_{DS}^2r_+^2\right)\right]+\frac{1}{\pi^2r_+^5}\Big[0.00102$$
$$+\frac{1}{720}\ln\left(m_{DS}^2r_+^2\right)\Big](r-r_+)+\frac{1}{\pi^2r_+^6}\left[-0.00115-\frac{1}{288}\ln\left(m_{DS}^2r_+^2\right)\right](r-r_+)^2$$
$$+\frac{1}{\pi^2r_+^7}\left[-0.06380+\frac{7}{720}\ln\left(m_{DS}^2r_+^2\right)\right](r-r_+)^3+O\left(\frac{(r-r_+)^4}{r_+^8}\right). \tag{41}$$

Выражения (31), (32) можно, таким образом, переписать в виде

$$V(r)\ \simeq\ \left[-\frac{2}{3r_+^3}-\frac{0.00372}{\pi r_+^5}\right](r-r_+)^3+\Bigg\{\frac{7}{6r_+^4}$$
$$-\frac{20}{3\pi r_+^6}\left[0.03058-\frac{1}{120}\ln\left(m_{DS}^2r_+^2\right)\right]\Bigg\}(r-r_+)^4+O\left(\frac{(r-r_+)^5}{r_+^5}\right), \tag{42}$$

$$U(r)\ \simeq\ \left[-\frac{2\mathrm{Const}}{3r_+^3}-\frac{0.00372}{\pi r_+^5}\right](r-r_+)^3+\Bigg\{\frac{7\mathrm{Const}}{6r_+^4}$$

$$+\frac{1}{\pi r_+^6}\left[-0.26311+\frac{7}{90}\ln\left(m_{DS}^2 r_+^2\right)\right]\Big\}(r-r_+)^4+O\left(\frac{(r-r_+)^5}{r_+^5}\right). \quad (43)$$

В пределе большой массы поля ($m_{DS}^2 = m^2 \gg 2\xi/r_+^2$) можно получить следующие разложения

$$\ln\frac{\mu^2}{m^2 r_+^2}=\frac{8\xi-1}{4m^2r_+^2}-\frac{(8\xi-1)^2}{32m^4r_+^4}+\frac{(8\xi-1)^3}{192m^6r_+^6}+O\left(\frac{1}{m^8r_+^8}\right), \quad (44)$$

$$\begin{aligned}
I_0(\mu_+) &= -\frac{1}{48\mu_+^2}-\frac{7}{3840\mu_+^4}-\frac{31}{48384\mu_+^6}+O\left(\frac{1}{\mu_+^8}\right)=-\frac{1}{48m^2r_+^2}\\
&+\frac{1}{m^4r_+^4}\left(\frac{\xi}{24}-\frac{9}{1280}\right)+\frac{1}{m^6r_+^6}\left(-\frac{\xi^2}{12}+\frac{9\xi}{320}-\frac{1381}{483840}\right)+O\left(\frac{1}{m^8r_+^8}\right),\\
I_1(\mu_+) &= -\frac{7}{1920\mu_+^4}-\frac{31}{32256\mu_+^6}+O\left(\frac{1}{\mu_+^8}\right)\\
&= -\frac{7}{1920\,m^4r_+^4}+\frac{1}{m^6r_+^6}\left(\frac{7\xi}{480}-\frac{449}{161280}\right)+O\left(\frac{1}{m^8r_+^8}\right),\\
I_2(\mu_+) &= -\frac{31}{16128\,\mu_+^6}+O\left(\frac{1}{\mu_+^8}\right)=-\frac{31}{16128\,m^6r_+^6}+O\left(\frac{1}{m^8r_+^8}\right),
\end{aligned} \quad (45)$$

а выражения (34), (36) совпадают с соответствующими выражениями приближения ДеВитта-Швингера [5, 6, 7]

$$\begin{aligned}
\langle T_t^t\rangle_{ren} &= \frac{1}{\pi^2m^2r_+^6}\left(-\frac{\xi^3}{24}+\frac{\xi^2}{48}-\frac{\xi}{240}+\frac{1}{2520}\right)+\frac{1}{\pi^2m^2r_+^7}\left(\frac{\xi^3}{4}-\frac{\xi^2}{8}+\frac{\xi}{40}\right.\\
&\left.-\frac{1}{420}\right)(r-r_+)+\frac{1}{\pi^2m^2r_+^8}\left(-\frac{5\xi^3}{8}+\frac{5\xi^2}{16}-\frac{47\xi}{720}+\frac{1}{144}\right)(r-r_+)^2\\
&+\frac{1}{\pi^2m^2r_+^9}\left(\frac{5\xi^3}{4}-\frac{5\xi^2}{8}+\frac{73\xi}{540}-\frac{221}{15120}\right)(r-r_+)^3+O\left(\frac{(r-r_+)^4}{m^2r_+^{10}}\right),
\end{aligned} \quad (46)$$

$$\langle T_r^r\rangle_{ren}-\langle T_t^t\rangle_{ren} = \frac{1}{\pi^2m^2r_+^9}\left(\frac{\xi}{270}-\frac{2}{945}\right)(r-r_+)^3+O\left(\frac{(r-r_+)^4}{m^2r_+^{10}}\right), \quad (47)$$

$$\begin{aligned}
\langle T_\theta^\theta\rangle_{ren} &= \langle T_\varphi^\varphi\rangle_{ren}=\frac{1}{\pi^2m^2r_+^6}\left(\frac{\xi^3}{12}-\frac{\xi^2}{24}+\frac{\xi}{120}-\frac{1}{1260}\right)+\frac{1}{\pi^2m^2r_+^7}\left(-\frac{\xi^3}{4}+\frac{\xi^2}{8}\right.\\
&\left.-\frac{\xi}{36}+\frac{17}{5040}\right)(r-r_+)+\frac{1}{\pi^2m^2r_+^8}\left(\frac{5\xi^3}{8}-\frac{5\xi^2}{16}+\frac{29\xi}{360}-\frac{17}{1440}\right)(r-r_+)^2\\
&+\frac{1}{\pi^2m^2r_+^9}\left(-\frac{5\xi^3}{4}+\frac{79\xi^2}{24}-\frac{35\xi}{27}+\frac{13}{90}\right)(r-r_+)^3+O\left(\frac{(r-r_+)^4}{m^2r_+^{10}}\right).
\end{aligned} \quad (48)$$

Квантово-поправленные выражения (31), (32) для случая массивного поля равны

$$\begin{aligned}
V(r) &= \left[-\frac{2}{3r_+^3}+\frac{1}{m^2\pi r_+^7}\left(-\frac{\xi}{135}+\frac{1}{378}\right)\right](r-r_+)^3\\
&+\left[\frac{7}{6r_+^4}+\frac{1}{m^2\pi r_+^8}\left(\frac{\xi}{60}-\frac{1}{360}\right)\right](r-r_+)^4+O\left(\frac{(r-r_+)^5}{r_+^5}\right),
\end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned}
U(r) &= \left[-\frac{2\mathrm{Const}}{3r_+^3}+\frac{1}{m^2\pi r_+^7}\left(-\frac{\xi}{135}+\frac{1}{378}\right)\right](r-r_+)^3\\
&+\left[\frac{7\mathrm{Const}}{6r_+^4}+\frac{1}{m^2\pi r_+^8}\left(\frac{5\xi}{108}-\frac{149}{7560}\right)\right](r-r_+)^4+O\left(\frac{(r-r_+)^5}{r_+^5}\right).
\end{aligned} \quad (50)$$

## Заключение

Обычно, ВКБ приближение плохо применимо для описания безмассовых полей или полей с конечной массой в области сильного гравитационного поля, в частности вблизи горизонта событий. Тем не менее, мы показали, что существуют исключения, когда эти конфликтующие факторы (ВКБ и безмассовость поля) оказываются совместимыми друг с другом. Используя выражения для вакуумного среднего тензора энергии-импульса квантованного скалярного поля, найденные на основе ВКБ приближения, мы показали, что полуклассические (квантово-поправленные) ультраэкстремальные горизонты существуют при любой массе поля и для любой степени $n > 2$ в асимптотическом разложении метрического коэффициента (1) вблизи горизонта. При этом можно взять $n = 2 + \delta$, где $\delta > 0$ и сколь угодно мало (см. (18)). Поскольку в теории отсутствуют какие бы то ни было сомнения по поводу существования полуклассических неэкстремальных черных дыр, оказывается, что как для $n < 2$, так и для $n > 2$ полуклассический горизонт хорошо определен. С нашей точки зрения, это можно (в дополнение к численным результатам, полученным в [1]) рассматривать как сильный (хотя и не вполне строгий) аргумент в пользу существования полуклассических экстремальных ($n = 2$) черных дыр, одетых квантовыми полями, с конечной или даже нулевой массой частиц.

Работа была частично поддержана грантом РФФИ 13-02-00757.

## Литература

[1] P.R. Anderson, W.A. Hiscock, and D.J. Loranz, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4365 (1995).

[2] J. Matyjasek, O. Zaslavskii *Phys. Rev. D* **64**, 104018 (2001).

[3] J. Matyjasek, O. Zaslavskii *Phys. Rev. D* **71**, 087501 (2005).

[4] L.J. Romans, *Nucl. Phys.* **B383**, 395 (1992).

[5] P. R. Anderson, W. A. Hiscock, and D. A. Samuel, *Phys. Rev. D* **51**, 4337 (1995).

[6] J. Matyjasek *Phys. Rev. D* **61**, 124019 (2000).

[7] J. Matyjasek *Phys. Rev. D* **63**, 084004 (2001).

[8] L. D. Landau and E. M. Liefshitz, *Quantum Mechanics* (Pergamon Press, Oxford 1991).

[9] A.A. Popov, *Phys. Rev. D* **64**, 104005 (2001).

[10] A.A. Popov and S. V. Sushkov, *Phys. Rev. D* **63**, 044017 (2001).

[11] V. M. Khatsymovsky, *Phys. Lett.* **B399**, 215 (1997).

[12] V. M. Khatsymovsky, *Phys. Lett.* **B403**, 203 (1997).

[13] Frolov, V.P., Novikov, I.D. *Physics of Black Holes* (Kluwer Academic 1998).