S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 242–251 (2016) УДК 514.13
DOI 10.17377/semi.2016.13.017 MSC 51M09

ИНТЕРПРЕТАЦИИ ТЕОРЕМЫ КЕЗИ И ЕЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО АНАЛОГА

А.В. КОСТИН, Н.Н. КОСТИНА

Abstract. We obtain interpretations of Casey's theorem and of its hyperbolic version in a pseudo-Euclidean and in a pseudo-hyperbolic spaces.

Keywords: Casey's theorem, Ptolemy's theorem, hyperbolic plane, Laguerre's transformations.

1. Предварительные сведения и постановка задачи

Все рассматриваемые в работе утверждения будут «вариациями на тему» теоремы Птолемея.

Теорема 1. *Четырехугольник на евклидовой плоскости является вписанным тогда и только тогда, когда сумма произведений длин противоположных сторон его равна произведению длин диагоналей.*

Аналог «прямой» теоремы для четырехугольника, вписанного в цикл (окружность, эквидистанту, орицикл), на плоскости Лобачевского впервые доказан был, по всей видимости, Т. Куботой (см. [1]). П. А. Широков (см. [2]) привел свои доказательства теоремы Птолемея для четырехугольника, вписанного в цикл на плоскости Лобачевского. В своей работе он рассмотрел также различные варианты этой теоремы. Впоследствии статья «Теорема Птолемея на плоскости Лобачевского» (вместе с другими «этюдами») была включена в сборник избранных работ П. А. Широкова [3]. В этой статье имеется замечание, что доказательство утверждения для четырехугольника, вписанного в окружность,

Kostin, A.V., Kostina, N.N., An interpretation of Casey's theorem and of its hyperbolic analogue.

Поступила 10 февраля 2016 г., опубликована 21 марта 2016 г.

не требуется, так как оно следует из связи между дугой и хордой орицикла. Связь эта имеет простой вид: хорда длины x стягивает дугу l орицикла длины

$$l = 2R\sinh\frac{x}{2R} \tag{1}$$

на гиперболической плоскости кривизны $K = -\dfrac{1}{R^2}$. Такая же связь, только в обратном порядке, имеет место между длиной дуги геодезической на сфере мнимого радиуса трехмерного псевдоевклидова пространства и отрезком «стягивающей» ее псевдоевклидовой прямой (псевдоевклидова хорда длиннее дуги геодезической на сфере). Фактически, эта связь в псевдоевклидовом пространстве может быть истолкована на основе определения гиперболического синуса. В теореме Кези (см. [4]) вершины четырехугольника, вписанного в окружность ω, заменяются четырьмя окружностями, касающимися окружности ω в том же порядке, а вместо сторон и диагоналей берутся отрезки касательных к окружностям.

Теорема 2. *Пусть окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ касаются окружности ω на евклидовой плоскости. Пусть t_{ij} — длина отрезка внешней касательной окружностей ω_i, ω_j, если окружности ω_i, ω_j касаются окружности ω одинаково (внутренним или внешним образом), и t_{ij} — длина отрезка внутренней касательной, если одна из окружностей ω_i, ω_j касается окружности ω внутренним образом, а другая — внешним. Тогда выполняется соотношение*

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} = t_{13} \cdot t_{24}.$$

Длину отрезка общей касательной окружностей будем далее называть «касательным расстоянием» между окружностями.

В недавней работе [5] доказан аналог теоремы Кези в гиперболической геометрии:

Теорема 3. *Пусть окружности O_1, O_2, O_3, O_4 на гиперболической плоскости H^2 касаются внутренним образом окружности O. Пусть t_{ij} — длины отрезков внешних касательных к окружностям O_i, O_j. Тогда*

$$\sinh\frac{t_{12}}{2}\cdot\sinh\frac{t_{34}}{2} + \sinh\frac{t_{23}}{2}\cdot\sinh\frac{t_{14}}{2} = \sinh\frac{t_{13}}{2}\cdot\sinh\frac{t_{24}}{2}.$$

Нашей целью будет получение еще одного аналога теоремы Кези на гиперболической плоскости, а также построение «точечных» интерпретаций обоих гиперболических аналогов и евклидова оригинала. Эти результаты будут следствиями утверждения, поэтапно доказываемого ниже.

Теорема 4. (1) *Четверка окружностей, касающихся окружности на евклидовой плоскости, может быть интерпретирована:*
- (a) *четверкой точек на сфере нулевого радиуса трехмерного псевдоевклидова пространства так, что «касательным расстояниям» между евклидовыми окружностями будут соответствовать расстояния между точками на изотропной сфере;*
- (b) *четверкой циклов, касающихся цикла на плоскости Лобачевского, так, что «касательным расстояниям» между евклидовыми окружностями будут соответствовать длины дуг касательных орициклов.*

(2) *Четверка циклов, касающихся цикла на плоскости Лобачевского, может быть интерпретирована четверкой точек на изотропной сфере трехмерного пространства* $^2S_3$ *так, что «касательным расстояниям» между циклами будут соответствовать расстояния между точками изотропной сферы пространства* $^2S_3$.

Доказательству утверждения 1.a) этой теоремы посвящен пункт 2, 1.b) — пункт 3, 2 — пункт 4 данной работы. Несколько предложений, возникающих попутно, выделено в качестве отдельных теорем.

2. Точечная интерпретация теоремы Кези

Рассмотрим первоначально многообразие ориентированных окружностей на евклидовой плоскости, в котором в качестве расстояния берется длина отрезка общей касательной. Ориентацию окружности можно связать со знаком ее радиуса. Для одинаково ориентированных окружностей берется длина отрезка внешней касательной. Для окружностей же, имеющих различную ориентацию, берется длина отрезка внутренней касательной. Роль движений выполняют преобразования, сохраняющие таким образом определенные расстояния. Это хорошо известные преобразования Лагерра (см. [6]–[8]) евклидовой плоскости. Группа преобразований Лагерра на евклидовой плоскости изоморфна группе дробно-линейных подстановок дуального переменного

$$z = x + y \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon^2 = 0,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Иногда такое представление берется в качестве определения. Преобразования этой группы воздействуют на ориентированные прямые и обладают двумя основными свойствами:

(1) семейство ориентированных прямых, огибающих окружность, переходит при этих преобразованиях в аналогичное семейство;
(2) если ориентированная прямая евклидовой плоскости принадлежит двум семействам такого типа, то при преобразованиях Лагерра длина отрезка общей касательной двух окружностей будет равна длине отрезка общей касательной их образов.

С точки зрения группы Лагерра не различаются окружности нулевого и ненулевого радиусов. «Касательное» расстояние между окружностями нулевого радиуса определяется как расстояние между точками, а расстояние от окружности нулевого радиуса до окружности ненулевого радиуса определяется как длина отрезка касательной от точки до окружности.

Пусть (x_1, y_1) — декартовы координаты центра, r_1 — радиус (который может принимать все действительные значения) одной окружности, (x_2, y_2) — декартовы координаты центра, r_2 — радиус второй окружности, тогда в стандартной евклидовой метрике квадрат отрезка касательной будет равен

$$t_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (r_1 - r_2)^2. \tag{2}$$

Это квадрат расстояния в псевдометрике трехмерного пространства Минковского

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dr^2. \tag{3}$$

Касание ориентированных окружностей определяется как внутреннее касание одинаково ориентированных окружностей и внешнее касание окружностей, имеющих разные ориентации. Если каждой ориентированной окружности евклидовой плоскости сопоставить точку с координатами (x, y, r) в псевдоевклидовом пространстве с псевдометрикой (3), то условие касания окружностей будет эквивалентно тому, что отрезок, соединяющий соответствующие этим окружностям точки, будет изотропен. Точка псевдоевклидова пространства, соответствующая ориентированной окружности евклидовой плоскости, является вершиной изотропного конуса, высекающего эту окружность на плоскости $r = 0$ (см. рис. 1).

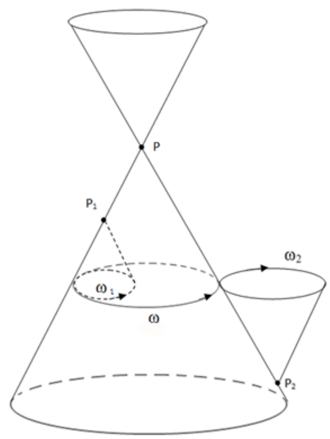

Рис. 1. Отображение окружностей евклидовой плоскости на точки псевдоевклидова пространства

Зафиксируем на плоскости $r = 0$ некоторую окружность ω и рассмотрим четыре окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, касающиеся окружности ω внутренним или внешним образом. Четырем окружностям, касающимся окружности ω, в псевдоевклидовом пространстве будут соответствовать четыре точки, лежащие на изотропном конусе, высекающем на плоскости $r = 0$ окружность ω. Поэтому евклидова теорема Кези может быть истолкована как «точечная» теорема, в которой фигурируют стороны и диагонали пространственного четырехугольника, вписанного в сферу нулевого радиуса трехмерного псевдоевклидова пространства с псевдометрикой (3), то есть как теорема Птолемея для пространственного четырехугольника, вписанного в изотропную сферу. В частности, если точки, соответствующие окружностям $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, лежат в одной евклидовой плоскости псевдоевклидова пространства с псевдометрикой (3), то в этом случае теорема Кези будет трактоваться как плоская евклидова теорема Птолемея. Если четыре точки, соответствующие окружностям, принадлежат одной псевдоевклидовой плоскости, то получим истолкование евклидовой теоремы Кези как плоской псевдоевклидовой теоремы Птолемея. Если ограничиться случаями без вырождения, то есть без совпадения точек касания евклидовых окружностей ω_i, ω_j с окружностью ω, получим следующий эквивалент евклидовой теоремы Кези.

Теорема 5. *Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в сферу нулевого радиуса псевдоевклидова пространства с псевдометрикой* (3) *так, что изотропные* *образующие сферы, проходящие через точки A, B, C, D, пересекают ее евклидовы сечения в вершинах выпуклого многоугольника. Тогда выполняется соотношение*

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|.$$

3. "Орициклический" аналог теоремы Кези

Рассмотрим один из аналогов теоремы Кези, в котором четыре произвольных цикла будут касаться одного цикла на плоскости Лобачевского, а роль касательных прямых будут играть касательные орициклы. В силу построенного ниже диффеоморфизма, этот аналог также допускает интерпретацию на изотропном конусе псевдоевклидова пространства. Кроме того, один частный случай этого аналога теоремы Кези может интерпретироваться четверкой точек на евклидовой прямой. Введем в рассмотрение гиперболическую плоскость в модели Пуанкаре с метрикой

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}. \tag{4}$$

Сопоставим орициклу, задаваемому в этой модели уравнением

$$(u - a)^2 + v^2 - bv = 0, \tag{5}$$

прямую евклидовой плоскости, задаваемую в декартовых координатах уравнением

$$2ax + (a^2 - 1)y - b = 0. \tag{6}$$

Для глобализации отображения можно использовать два экземпляра плоскостей Лобачевского с общим абсолютом $v = 0$, а также одному пучку ориентированных прямых евклидовой плоскости сопоставить точки абсолюта. Мы не будем останавливаться на этих деталях. Если в уравнениях (5) и (6) b будет квадратично зависеть от a, то однопараметрическое семейство прямых (6) будет огибать окружность, а однопараметрическое семейство орициклов (5) будет огибать кривую постоянной кривизны (прямую, орицикл, эквидистанту или окружность). В число окружностей в обоих случаях включаются окружности нулевого радиуса. Локально циклу плоскости Лобачевского, изображаемому евклидовой окружностью с центром в точке (u, v) и радиусом w, будет соответствовать окружность с центром (x, y) и радиусом r, где

$$x = \frac{-u}{v \pm w}, \quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - u^2}{v \pm w} - (v \mp w)\right), \quad r = \frac{1}{2}\left(\frac{1 + u^2}{v \pm w} + (v \mp w)\right).$$

Выбор знака перед радиусом связывается с ориентацией цикла. Локальный характер соответствия между выбранными координатами циклов обусловлен тем, что они не покрывают все многообразие, и тем, что два различных семейства орициклов могут огибать один и тот же цикл плоскости Лобачевского. Этим семействам в евклидовой плоскости будут соответствовать два разных цикла, связанные инверсией второго рода относительно окружности с центром начале координат евклидовой плоскости. Простым подсчетом проверяется, что касающимся евклидовым окружностям соответствуют касающиеся циклы плоскости Лобачевского. Для этого правую часть в равенстве (2) надо приравнять к нулю и убедиться, что параметры циклов на плоскости Лобачевского связаны аналогичным соотношением.

Псевдометрика (3) индуцирует псевдометрику псевдоевклидова пространства и в многообразии циклов плоскости Лобачевского. В координатах (u, v, w) локально она будет иметь следующий вид:

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2 - dw^2}{(v \pm w)^2}.$$

Нетрудно видеть, что в подмногообразии точек, рассматриваемых как окружности нулевого радиуса $w = 0$, индуцируется метрика (4) плоскости Лобачевского. Соответствующие этим точкам евклидовы окружности диаметрально пересекают окружность $x^2 + y^2 = 1$. Подмногообразие прямых плоскости Лобачевского, рассматриваемых как огибающие однопараметрических семейств орициклов, выделяется условием $v = 0$. В нем при указанном отображении индуцируется метрика плоскости де Ситтера, совпадающая с угловой метрикой в этом подмногообразии. В первом случае точки псевдоевклидова пространства с псевдометрикой (3), соответствующие циклам плоскости Лобачевского, лежат на сфере мнимоединичного радиуса с центром в начале координат этого пространства, во втором случае — на сфере единичного радиуса этого пространства.

Из приведенных рассуждений можно вывести ряд элементарных следствий, из которых отметим следующее:

Теорема 6. *Пусть на плоскости Лобачевского кривизны $K = -1$ дана произвольная пара пересекающихся прямых. Впишем в каждый из четырех образуемых ими углов по орициклу. Тогда сумма длин дуг орициклических касательных не будет превосходить $4\sqrt{2}$.*

Конечно, эта теорема просто доказывается и на основе стандартных формул тригонометрии плоскости Лобачевского, но здесь она получается как следствие введения в многообразие семейств орициклов и их огибающих псевдометрики трехмерного пространства Минковского. Преобразования Лагерра в многообразии ориентированных прямых евклидовой плоскости индуцируют преобразования в многообразии орициклов плоскости Лобачевского. Орицикл, касающийся двух циклов, при таких преобразованиях переходит в орицикл, касающийся их образов, с сохранением длины дуги орицикла между точками касания. Это следует из отмеченной выше связи между дугой и хордой орицикла и связи между дугой геодезической на сфере мнимого радиуса псевдоевклидова пространства и псевдоевклидовой хордой. В нашем случае в (1) нужно положить $R = 1$. Пусть A_1 и A_2 — точки касания орицикла с циклами γ_1, γ_2. Поскольку нас интересует в данном случае только длина дуги A_1A_2, заменим циклы γ_1, γ_2 точками A_1, A_2, рассматриваемыми тоже в качестве циклов. Последним циклам при нашем отображении циклов плоскости Лобачевского на точки трехмерного псевдоевклидова пространства с псевдометрикой (3) соответствуют две точки B_1, B_2 на сфере мнимоединичного радиуса этого пространства. Так как преобразования Лагерра истолковываются как движения псевдоевклидова пространства, при этих преобразованиях сохраняется псевдоевклидова длина отрезка B_1B_2. Она и равна длине дуги орицикла A_1A_2. Отметим только, что об инвариантности длины дуги касательного орицикла имеет смысл говорить в категории локальных групп Ли преобразований.

Отображение, сопоставляющее прямым и огибаемым ими окружностям евклидовой плоскости орициклы и огибаемые ими циклы плоскости Лобачевского, при котором касательному расстоянию между окружностями соответствует длина дуги орицикла, дает, в частности, еще один своеобразный аналог теоремы Кези для орициклов на плоскости Лобачевского. Мы приведем вариант этой теоремы, который не требует оговорок о способах касания циклов и выбора касательных орициклических дуг и может быть легко доказан без обращения к преобразованиям Лагерра.

Теорема 7. *Пусть на плоскости Лобачевского орициклы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ касаются орицикла γ в указанном порядке. Пусть t_{ij} — длина дуги общего касательного орицикла для орициклов γ_i, γ_j. Тогда*

$$t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}.$$

Этот вариант теоремы эквивалентен предельному случаю евклидовой теоремы Птолемея:

Теорема 8. *Пусть точки A, B, C, D в указанном порядке лежат на одной прямой. Тогда выполняется соотношение*

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|.$$

Сведение доказательства теоремы 7 к этому предельному случаю с использованием метрики (4) очевидно. Нужно учесть только, что для двух произвольных неконцентрических орициклов существуют только два других общих касательных орицикла с собственными точками касания. Они имеют равные длины дуг между точками касания.

На рисунке 2 изображены четыре орицикла, касающиеся орицикла $v = 1$, и орициклы, попарно касающиеся некоторых из этих четырех орициклов. Длина дуги A_1B_1 орицикла, изображаемого в данной модели евклидовой окружностью, касающейся абсолюта, равна длине дуги AB орицикла $v = 1$.

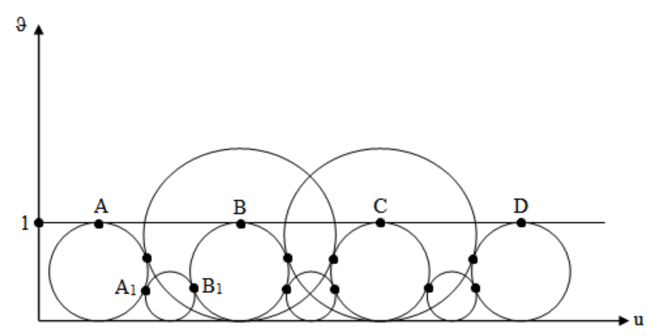

Рис. 2. Орициклический аналог теоремы Кези в модели Пуанкаре

Так же просто доказывается случай, когда четыре произвольных цикла плоскости Лобачевского касаются одного орицикла γ. Если все касания циклов внешние, то есть циклы лежат вне орикруга с границей γ, то касательные орициклические дуги тоже берутся внешние. Если цикл ω_i касается орицикла γ внутренним образом, а цикл ω_j — внешним, то берется длина дуги того орицикла который содержит внутри себя цикл ω_i и не содержит ω_j. Заметим, что внутренним образом в собственных точках плоскости Лобачевского орицикла могут касаться только окружности.

4. Гиперболический аналог теоремы Кези и его точечная интерпретация

Обратимся теперь к теореме Кези на плоскости Лобачевского, доказанной в [5]. Наряду с окружностями и касательными расстояниями между ними естественно рассматривать преобразования Лагерра плоскости Лобачевского. Группа преобразований Лагерра на плоскости Лобачевского является группой дробно-линейных подстановок двойного переменного

$$z = x + y \cdot e, \quad e^2 = 1,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Каждой ориентированной прямой плоскости Лобачевского можно сопоставить точку на абсолюте пространства ${}^2S_3$. Один из вариантов построения отображения ориентированных прямых на точки абсолюта псевдогиперболического пространства таков (см. [9]): плоскость Лобачевского берется в модели Кэли-Клейна на проективной плоскости, абсолют которой, в свою очередь, рассматривается как сечение абсолюта пространства ${}^2S_3$. Если проективное пространство рассматривать как расширенное аффинное пространство, то абсолют F пространства ${}^2S_3$ может быть представлен однополостным гиперболоидом (см. [9], [10]). Для наглядности, за абсолют плоскости Лобачевского можно взять горловое сечение этого гиперболоида. Далее, через "концы" прямой плоскости Лобачевского в данной модели проводятся образующие гиперболоида, принадлежащие разным семействам образующих. Точка пересечения образующих сопоставляется ориентированной гиперболической прямой. На рис. 3 прямой Z_1Z_2 сопоставляется точка Z. Эта точка является точкой пересечения поляры прямой с абсолютом пространства ${}^2S_3$. При таком отображении ориентированным прямым, огибающим циклы плоскости Лобачевского, соответствуют плоские сечения абсолюта F, а касательное расстояние между циклами равно углу между плоскостями соответствующих сечений. Если каждой плоскости сопоставить полюс относительно абсолюта F, то циклам плоскости Лобачевского будут соответствовать точки трехмерного пространства ${}^2S_3$, а касательному расстоянию между циклами будет соответствовать расстояние между точками этого пространства.

Проиллюстрируем соответствие между циклами плоскости Лобачевского и точками пространства ${}^2S_3$ на конкретном примере. Пусть абсолют F пространства ${}^2S_3$ в однородных координатах $(x^1 : x^2 : x^3 : x^4)$ имеет уравнение

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = 0.$$

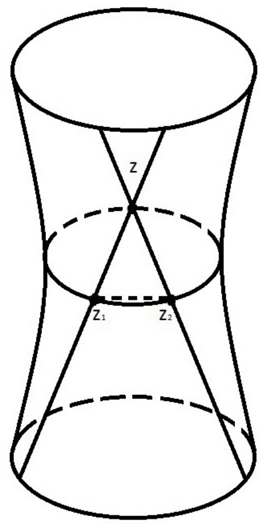

Рис. 3. Отображение прямых плоскости Лобачевского на точки абсолюта пространства ${}^2S_3$

Если сечение этой поверхности плоскостью $x^3 = 0$ взять в качестве абсолюта плоскости Лобачевского, то семейству прямых, огибающих цикл

$$\begin{cases} (x^1)^2 + (x^2)^2 - 2(x^4)^2 = 0, \\ x^3 = 0 \end{cases}$$

гиперболической плоскости, будет соответствовать сечение поверхности F плоскостью $x^3 - x^4 = 0$, а ему, в свою очередь, точка $(0 : 0 : 1 : -1)$ пространства ${}^2S_3$.

Касающимся циклам будут соответствовать точки, соединенные изотропным отрезком, и теорему Кези плоскости Лобачевского можно трактовать как теорему о пространственном четырехугольнике, вписанном в изотропную квадрику (сферу нулевого радиуса, центр которой соответствует тому циклу, которого касаются четыре других цикла в теореме Кези). С точки зрения группы Лагерра на плоскости Лобачевского циклы разного «гиперболического» типа неразличимы. Это является предпосылкой обобщения теоремы 3, упомянутого в работе [5].

References

[1] T. Kubota, *On the extended Ptolemy's theorem in hyperbolic geometry*, Science reports of the Tohoku University. Ser. 1: Physics, Chemistry, astronomy, **2** (1912), 131–156.

[2] P. A. Shirokov, *Etudes on the Lobachevskii geometry*, Izvestia Fiziko-matematicheskogo obschestva pri KGU, seria 2, **24**:1 (1924), 26–32.

[3] P. A. Shirokov, *Selected papers on the Lobachevskii geometry*, Izdatelstvo Kazanskogo Universiteta, Kazan, 1966.

[4] J. Casey, *A seqyel to the first six books of the Elements of Euclid, containing an easy introduction to modern geometry, with numerous examples, 5th. ed.*, Dublin, Hodges, Figgis and Co., 1888.
[5] N. V. Abrosimov, L. A. Mikaiylova, *Casey's theorem in hyperbolic geometry*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 354–360.
[6] I. M. Yaglom, *Complex numbers and their application to the geometry*, Matematicheskoe prosveschenie, **6** (1961), 60–106. Zbl 0136.15505
[7] I. M. Yaglom, *Geometric transformations II*, Moscow, 1956. Zbl 1177.51004
[8] A. M. Mikenberg, *The Laguerre geometry and its analogue*, Dissertacii kand. f.-m. nauk, Kazan, 1994.
[9] Z. A. Skopets, I. M.Yaglom, *Laguerre transformations of the Lobachevskii plane and Möbius transformations of a dual variable. Problems of the differential and non-Euclidean geometries*, Izdatelstvo MGPI, Moscow, 1965.
[10] B. A. Rosenfeld, *Non-Euclidean spaces*, Nauka, Moscow, 1969.

Andrey Viktorovich Kostin
Kazan (Volga Region) Federal University, Elabuga Institute,
Kazanskaya str., 89,
423604, Elabuga, Russia
E-mail address: `kostin_andrei@mail.ru`

Natalia Nikolaevna Kostina
Kazan (Volga Region) Federal University, Elabuga Institute,
Kazanskaya str., 89,
423604, Elabuga, Russia
E-mail address: `natnikost@mail.ru`