

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СЛАБО НАПРАВЛЯЮЩИХ ВОЛНОВОДАХ¹

Аннотация. Изучается задача о распространении электромагнитных волн в слабо направляющем диэлектрическом волноводе. Задача сводится к линейной задаче на собственные значения для интегрального оператора с симметричным, положительным, слабополярным ядром. Для решения используется метод Галеркина. Представлены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: распространение электромагнитных волн в волноводе, задача на собственные значения, интегральные уравнения, численный метод.

Abstract. The article analyses a problem of electromagnetic waves propagation in weakly guiding dielectric waveguide. The problem is reduced to the linear eigenvalue problem for integral operator with symmetric, positive, weakly polar kernel. The authors apply the Galerkin method for problem solving. The article introduces the numerical results.

Key words: propagation of electromagnetic waves in waveguides, eigenvalue problems, integral equations, numerical methods.

Введение

Интерес к задачам о собственных волнах диэлектрических волноводов стремительно возрастает в течение последних двух десятилетий в связи с бурным развитием оптических телекоммуникационных технологий передачи данных на большие расстояния [1] и использованием в радиоэлектронной промышленности миниатюрных интегрированных оптических схем вместо классических электрических [2]. Эти задачи являются спектральными задачами теории дифракции, т.е. задачами поиска частных решений уравнений Максвелла в виде бегущих (собственных) волн в неограниченных областях, удовлетворяющих условиям сопряжения на границах раздела сред и соответствующим условиям на бесконечности [3]. Достаточно эффективные и универсальные алгоритмы решения задач дифракции в неограниченных областях основаны на переходе к интегральным уравнениям (см. [4–7]).

В данной статье метод интегральных уравнений применяется для изучения электромагнитных волн, распространяющихся в диэлектрическом волноводе, показатель преломления которого в области поперечного сечения является функцией, мало отличающейся от постоянного показателя преломления окружающей среды. Это позволяет использовать известное скалярное приближение слабо направляющего волновода [8]. Задача сводится к линейной задаче для интегрального оператора с симметричным, положительным, слабополярным ядром. Доказывается теорема о существовании характеристических чисел и собственных функций. Для приближенного решения задачи используется метод Галеркина. Представлены результаты численных экспериментов.

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-01-97009.

1. Постановка задачи

Задача о поверхностных волнах слабо направляющего диэлектрического волновода заключается [8] в определении таких значений частоты электромагнитных колебаний $\omega > 0$ и постоянных распространений $\beta > 0$, при которых существуют нетривиальные, экспоненциально убывающие на бесконечности функции u , удовлетворяющие уравнениям

$$\left[\Delta + (k^2 n^2 - \beta^2) \right] u = 0, \quad x \in \Omega; \quad (1)$$

$$\left[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2) \right] u = 0, \quad x \in \Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}; \quad (2)$$

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma. \quad (3)$$

Здесь Ω – ограниченная область на плоскости \mathbb{R}^2 , ее граница Γ – липшицева кривая (см. рис. 1); $u^+(u^-)$ – предельное значение функции u извне (изнутри) контура Γ ; $\partial u / \partial \nu$ – производная по внешней нормали; n – показатель преломления волновода; $n_\infty > 0$ – постоянный показатель преломления окружающей среды; $k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ – продольное волновое число; $\epsilon_0(\mu_0)$ – электрическая (магнитная) постоянная. Будем считать, что показатель преломления непрерывен и непрерывно дифференцируем в области Ω . Предположим также, что $n(x) > n_\infty$ при $x \in \Omega$, обозначим $n_+ = \max_{x \in \Omega} n(x)$.

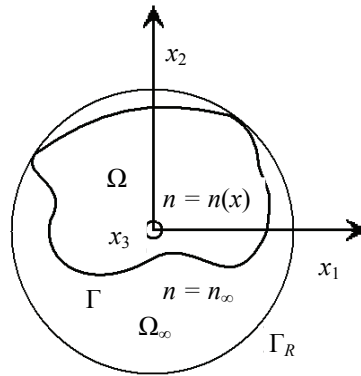


Рис. 1. Поперечное сечение волновода

Будем разыскивать нетривиальные решения u задачи (1)–(3) в классе функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ и $\bar{\Omega}_\infty$, дважды непрерывно дифференцируемых в Ω и Ω_∞ . Обозначим это множество функций через U . В работе [3] доказано, что для существования экспоненциально убывающих на бесконечности решений задачи (1), (3) необходимо, чтобы $(\beta, \omega) \in \Lambda$, где $\Lambda = \{(\beta, \omega) : \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} n_\infty < \beta < \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} n_+, \omega > 0\}$. Если $(\beta, \omega) \in \Lambda$,

то поперечное волновое число $\sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_\infty^2}$ является вещественным, положительным и определяет скорость затухания амплитуд собственных волн на бесконечности. Точнее,

$$u(x) = \exp(-\sigma|x|) O\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Задачу о собственных волнах слабо направляющего цилиндрического диэлектрического волновода сформулируем теперь следующим образом. Требуется найти $(\beta, \omega) \in \Lambda$ и ненулевые функции $u \in U$, удовлетворяющие условиям (1)–(4).

2. Существование решений задачи

Сведем задачу (1)–(4) к спектральной задаче для интегрального оператора.

Лемма 1. Пусть u – решение задачи (1)–(4), отвечающее некоторым значениям спектральных параметров $(\beta, \omega) \in \Lambda$. Тогда

$$u(x) = (A(\sigma)u)(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (5)$$

где

$$(A(\sigma)u)(x) = \int_{\Omega} \Phi(\sigma; x, y) p^2(y) u(y) dy; \quad (6)$$

$$p^2(y) = k^2(n^2(y) - n_\infty^2); \quad (7)$$

$$\Phi(\sigma; x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0(\sigma|x-y|). \quad (7)$$

Здесь K_0 – функция Макдональда (см. [9]).

Доказательство. Функция u удовлетворяет в области Ω_∞ однородному уравнению Гельмгольца с постоянным отрицательным коэффициентом:

$$\Delta u - \sigma^2 u = 0, \quad x \in \Omega_\infty. \quad (8)$$

Запишем в области Ω уравнение (2) формально в виде неоднородного уравнения Гельмгольца с тем же коэффициентом:

$$\Delta u - \sigma^2 u = -p^2 u, \quad x \in \Omega, \quad (9)$$

где функция p определена в (6). Применим в области Ω формулу Грина:

$$w(x)u(x) = \int_{\Gamma} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu} \right) dl(y) + \int_{\Omega} \Phi(x, y) p^2(y) u(y) dy, \quad (10)$$

где $w(x) = \{1, x \in \Omega; 1/2, x \in \Gamma; 0, x \in \Omega_\infty\}$. Отметим, что при $(\beta, \sigma) \in \Lambda$ фундаментальное решение Φ уравнения Гельмгольца (8) имеет вид (7), так как в этом случае

$$\Phi(\sigma; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(i\sigma|x-y|) = \frac{1}{2\pi} K_0(\sigma|x-y|), \quad \sigma > 0.$$

Обозначим Ω_R область, ограниченную контуром Γ и окружностью Γ_R достаточно большого радиуса R такого, что область Ω целиком лежит в круге этого радиуса. Применим в области Ω_R формулу Грина:

$$\begin{aligned} w_R(x)u(x) = & -\int_{\Gamma} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial v(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \right) dl(y) + \\ & + \int_{\Gamma_R} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial v(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \right) dl(y), \end{aligned} \quad (11)$$

где $w_R(x) = \{1, x \in \Omega_R; 1/2, x \in \Gamma; 0, x \in \Omega\}$. Вычислим предел при $R \rightarrow \infty$ от второго интеграла в правой части равенства (11). Подынтегральное выражение экспоненциально убывает на бесконечности в силу асимптотики (4) и экспоненциального убывания на бесконечности функции Макдональда [9]. Следовательно, искомый предел равен нулю. Сложим теперь полученное предельное выражение с равенством (10), учитывая условия сопряжения (3). В результате получим искомое интегральное представление (5). Лемма доказана.

Равенство (5) при $x \in \Omega$ представляет собой спектральную задачу для интегрального оператора, которую запишем в виде

$$u(x) = \lambda \int_{\Omega} \Phi(\sigma; x, y) g^2(y) u(y) dy, \quad x \in \Omega, \quad (12)$$

где $g^2(x) = (n^2(x) - n_{\infty}^2)/(n_+^2 - n_{\infty}^2)$, $\lambda = k^2(n_+^2 - n_{\infty}^2)$.

Умножим обе части равенства (12) на g и положим $v = gu$. Тогда

$$v(x) = \lambda \int_{\Omega} \Phi(\sigma; x, y) g(x) g(y) v(y) dy. \quad (13)$$

Обозначим $B(\sigma)$ интегральный оператор, определяемый правой частью последнего равенства,

$$(B(\sigma)v)(x) = \int_{\Omega} \Phi(\sigma; x, y) g(x) g(y) v(y) dy. \quad (14)$$

Будем рассматривать оператор $B(\sigma)$ как оператор, действующий в пространстве вещественнозначных интегрируемых с квадратом функций $L_2(\Omega)$ со стандартным скалярным произведением. Запишем задачу (13) в операторном виде:

$$v = \lambda B(\sigma)v. \quad (15)$$

Лемма 2. *При любом $\sigma > 0$ ядро оператора $B(\sigma)$ является симметричным, положительным и слабополярным.*

Доказательство. Пусть $\sigma > 0$. Ядро оператора B имеет вид

$$K(\sigma; x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0(\sigma |x - y|) g(x) g(y).$$

Функция $K_0(z) > 0$ при $z > 0$ [9]. Функция

$$g = \left(n^2 - n_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(n_+^2 - n_\infty^2 \right)^{-\frac{1}{2}} > 0,$$

так как $n_+ \geq n(x) > n_\infty$ при $x \in \Omega$.

Таким образом, ядро K положительное. Функция K_0 зависит от расстояния между точками x и y , поэтому ядро K симметричное. Запишем ядро K формально в виде

$$K(\sigma |x - y|) = \frac{K_0(\sigma |x - y|) g(x) g(y) |x - y|^\alpha}{2\pi |x - y|^\alpha}, \quad \alpha < 1.$$

Так как функция $K_0(\sigma |x - y|)$ имеет логарифмическую особенность при $|x - y| \rightarrow 0$, то функция $K_0(\sigma |x - y|) |x - y|^\alpha$, $\alpha < 1$, непрерывна в области $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$. Следовательно, ядро слабополярное. Лемма доказана.

При фиксированных значениях параметра σ задачу (15) удобно рассматривать как линейную спектральную задачу определения характеристических чисел λ и собственных функций v оператора B (см. [10]). Если $(\beta, \omega) \in \Lambda$, то параметры σ и λ должны удовлетворять следующим условиям: $\lambda > 0$, $0 < \sigma < \sqrt{\lambda}$. Итак, требуется найти такие $(\lambda, \sigma) \in \Psi$, где $\Psi = \{(\lambda, \sigma) : 0 < \sigma < \sqrt{\lambda}, \lambda > 0\}$, и ненулевые функции $v \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющие равенству (15). Задачи (15) и (1)–(4) эквивалентны, а именно справедлива

Теорема 1. Если ненулевая функция $u \in U$ и параметры $(\beta, \omega) \in \Lambda$ удовлетворяют условиям (1)–(4), то

$$v = gu \in L_2(\Omega), \quad \lambda = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_\infty^2), \quad \sigma = \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_\infty^2}$$

удовлетворяют равенству (15). С другой стороны, если для ненулевой функции $v \in L_2(\Omega)$ и $(\lambda, \sigma) \in \Psi$ выполняется равенство (14), то

$$u = \lambda B(\sigma) (g^{-1} v) \in U;$$

$$\beta = \left(\sigma^2 + \lambda \frac{n_\infty^2}{n_+^2 - n_\infty^2} \right)^{1/2}; \quad \omega = \left(\frac{\lambda}{\varepsilon_0 \mu_0 (n_+^2 - n_\infty^2)} \right)^{1/2} \quad (16)$$

удовлетворяют условиям (1)–(4).

Доказательство. Первое утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 1. Докажем второе утверждение. Пусть для ненулевой функции $v \in L_2(\Omega)$ и $(\lambda, \sigma) \in \Psi$ выполняется равенство (18). Ядро оператора $B(\sigma)$ слабополярное. Следовательно, функция $u = \lambda B(\sigma) (g^{-1} v)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$

[10]. Теперь в силу известных свойств потенциала площади [10] функция u непрерывна и непрерывно дифференцируема в \mathbb{R}^2 , дважды непрерывно дифференцируема в Ω и Ω_∞ ; кроме того, функция u и параметры β , ω , определяемые равенствами (16), удовлетворяют уравнениям (1), (2). Условие (4) экспоненциального убывания функции u следует из соответствующего поведения на бесконечности функции Макдональда [9]. Теорема доказана.

Относительно существования решений задачи (15) справедлива

Теорема 2. *Для любого $\sigma > 0$ справедливы следующие утверждения:*

1) *существует счетное множество положительных характеристических чисел λ_i , $i = 1, 2$, с единственной точкой накопления на бесконечности;*

2) *система собственных функций $\{v_k\}$ может быть выбрана ортонормальной;*

3) *наименьшее по модулю характеристическое число λ_1 положительное и простое, соответствующая собственная функция v_1 положительна в $\bar{\Omega}$;*

4) $\lambda_1 \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$.

Доказательство. Первые три утверждения теоремы следуют из леммы 2 и результатов спектральной теории интегральных операторов с симметричными, положительными, слабо полярными ядрами [10]. Докажем, что $\lambda_1 \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$. Используем вариационный принцип для первого характеристического числа λ_1 :

$$\lambda_1 = \inf_{f \in L_2(\Omega)} \frac{(f, f)}{(B(\sigma)f, f)}.$$

В силу непрерывной зависимости ядра оператора B от σ функция $\lambda_1 = \lambda_1(\sigma)$ непрерывна [3]. Так как ядро оператора B имеет логарифмическую особенность, для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ имеем $(B(\sigma)f, f) \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow 0$. Следовательно, $\lambda_1 \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$. Теорема доказана.

3. Численный метод

Для численного решения задачи применим метод Галеркина. Произведем триангуляцию области:

$$\Omega_N = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k \subseteq \Omega.$$

Выберем в качестве базисных функций φ_k характеристические функции для каждого треугольника Ω_k . Приближенное решение v^N будем разыскивать в виде

$$v^N = \sum_{k=1}^N w_k \varphi_k. \quad (17)$$

Подставим представление (17) в формулу (15). Используя линейность оператора B , получим

$$\sum_{k=1}^N w_k \varphi_k - \lambda \left(\sum_{k=1}^N w_k B(\sigma) \varphi_k \right) = 0.$$

Для определения коэффициентов w_k потребуем, чтобы левая часть последнего равенства была ортогональна функциям φ_l , $l = \overline{1, N}$:

$$\left(\sum_{j=1}^N w_j \varphi_j, \varphi_l \right) - \left(\lambda \sum_{k=1}^N w_k B(\sigma) \varphi_k, \varphi_l \right) = 0, \quad l = \overline{1, N}.$$

Следовательно,

$$w_l \int_{\Omega_l} dx = \lambda \sum_{k=1}^N w_k \int_{\Omega_l} \int_{\Omega_k} \Phi(\sigma; x, y) g(x) g(y) dy dx, \quad l = \overline{1, N}.$$

Таким образом, мы пришли к спектральной задаче

$$w_l \text{mes}(\Omega_l) = \lambda \sum_{k=1}^N \alpha_{lk} w_k, \quad l = \overline{1, N},$$

где $\alpha_{lk} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_l} \int_{\Omega_k} K_0(\sigma |x - y|) g(x) g(y) dy dx$, $l, k = \overline{1, N}$.

Опишем способ вычисления диагональных элементов α_{ll} . Будем аппроксимировать функцию g константой на каждом треугольнике Ω_l . Внешний интеграл по x вычислим следующим образом:

$$\alpha_{ll} = \frac{g^2(\xi_l) \text{mes}(\Omega_l)}{2\pi} \int_{\Omega_l} K_0(\sigma |\xi_l - y|) dy,$$

где ξ_l – центр тяжести треугольника Ω_l . Ядро интегрального оператора имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов. Выделим эту особенность явно:

$$\alpha_{ll} = \frac{g^2(\xi_l) \text{mes}(\Omega_l)}{2\pi} \left(\int_{\Omega_l} \ln \frac{1}{|\xi_l - y|} dy + \int_{\Omega_l} \Phi_0(\sigma; |\xi_l - y|) dy \right),$$

где $\Phi_0(\sigma; \xi_l, y) = K_0(\sigma |\xi_l - y|) - \ln \frac{1}{|\xi_l - y|}$ – функция, не имеющая особенности. Нетрудно видеть, что $\Phi_0(\sigma, \xi_l, \xi_l) = -\ln \frac{\sigma \gamma}{2}$. Интеграл от логарифма вычисляется аналитически и имеет значение

$$\int_{\Omega_l} \ln \frac{1}{|\xi_l - y|} dy = \left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \text{mes}(\Omega_l).$$

Аппроксимируем интеграл от функции Φ_0 выражением

$$\int_{\Omega_i} \Phi_0(\sigma, \xi_l, y) dy = -\ln \frac{\sigma \gamma}{2} \text{mes}(\Omega_l).$$

Формула для вычисления элемент α_{ll} принимает следующий вид:

$$\alpha_{ll} = \frac{g^2(\xi_l) \text{mes}^2(\Omega_l)}{2\pi} \left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} - \ln \frac{\sigma \gamma}{2} \right).$$

Внедиагональные элементы могут быть вычислены по формуле

$$\alpha_{lk} = \frac{\text{mes}(\Omega_l) \text{mes}(\Omega_k)}{2\pi} K_0(\sigma |\xi_l - \xi_k|) g(\xi_l) g(\xi_k).$$

Запишем полученную алгебраическую задачу в матричном виде:

$$S w = \lambda A(\sigma) w, \tag{18}$$

где $S = \text{diag}(\text{mes}(\Omega_1), \text{mes}(\Omega_2), \dots, \text{mes}(\Omega_N))$.

Таким образом, мы свели исходную задачу к обобщенной задаче на собственные значения (18), которая решается при каждом σ .

4. Результаты численных экспериментов

Для волновода кругового поперечного сечения с постоянным показателем преломления известно точное решение задачи [8]. Опишем результаты численных экспериментов для этого случая. На рис. 2 непрерывными линиями показаны дисперсионные кривые, графики функций $\lambda_k = \lambda_k(\sigma)$, для $k = 1, \dots, 10$, построенные с помощью метода Галеркина. Кружочками обозначены точные решения задачи.

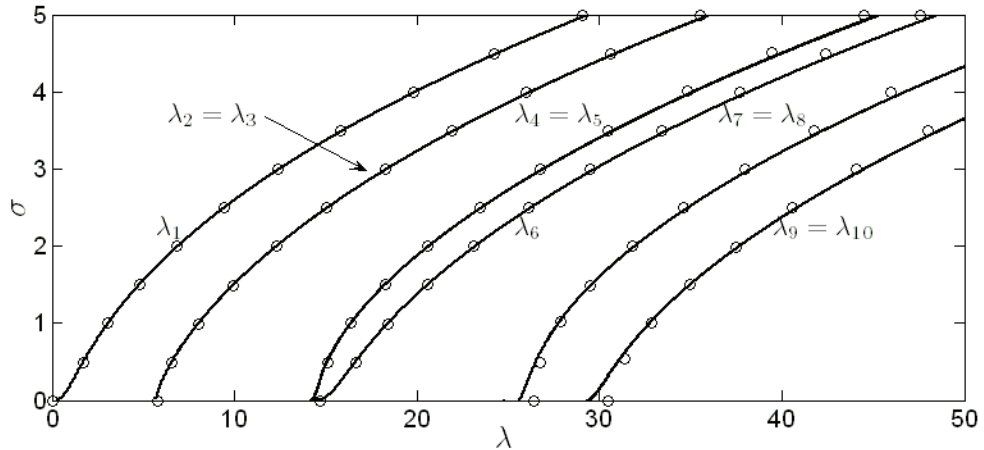


Рис. 2. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода кругового сечения. Сплошные линии – результаты расчетов методом Галеркина, кружочки – точное решение

В табл. 1 приведена зависимость относительной ошибки $\varepsilon = \frac{|\lambda_6^2 - \bar{\lambda}_6^2|}{\lambda_6^2}$ и величины $e = \frac{\varepsilon}{h^2}$ от количества треугольников N . Здесь $\lambda_6 = 18,4324$ – точное значение характеристического числа; $\bar{\lambda}_6$ – значение, полученное при расчете методом Галеркина; h максимальная длина стороны треугольника. Видно, что с увеличением числа N относительная погрешность ε убывает, а величина e принимает постоянное значение, следовательно, скорость сходимости имеет второй порядок.

Таблица 1

Результаты численных расчетов для собственного значения λ_6 для волновода кругового поперечного сечения

N	64	256	1032	2304	4128	6528
h	0,4856	0,2594	0,1184	0,0875	0,0620	0,0491
$\bar{\lambda}_6$	12,3395	16,7829	18,0594	18,2892	18,3695	18,4013
ε	0,3306	0,0895	0,0202	0,0078	0,0034	0,0017
e	1,4018	1,3299	1,4435	1,0147	0,8877	0,6999

На рис. 3 приведены линии уровня собственных функций, построенные при $\sigma = 1$ и $N = 4128$.

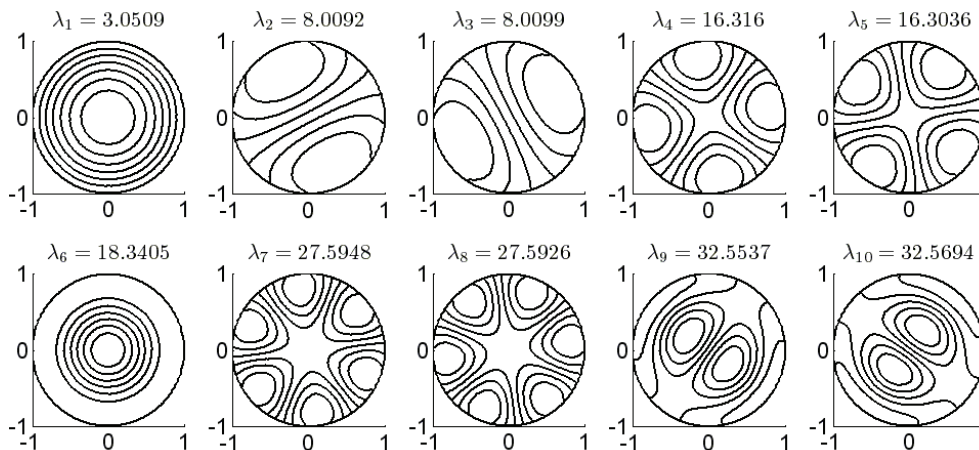


Рис. 3. Линии уровня собственных функций волновода кругового поперечного сечения при $\sigma = 1$

Приведем результаты расчетов для волновода прямоугольного поперечного сечения. На рис. 4 непрерывными линиями показаны дисперсионные кривые, графики функций $\lambda_k = \lambda_k(\sigma)$ для $k = 1, \dots, 10$, построенные с помощью метода Галеркина. Кружочками обозначены данные из работы [11], полученные методом контурных интегральных уравнений. На рис. 5 приведены линии уровня собственных функций v_k^N , построенные при $\sigma = 1$ и $N = 6656$.

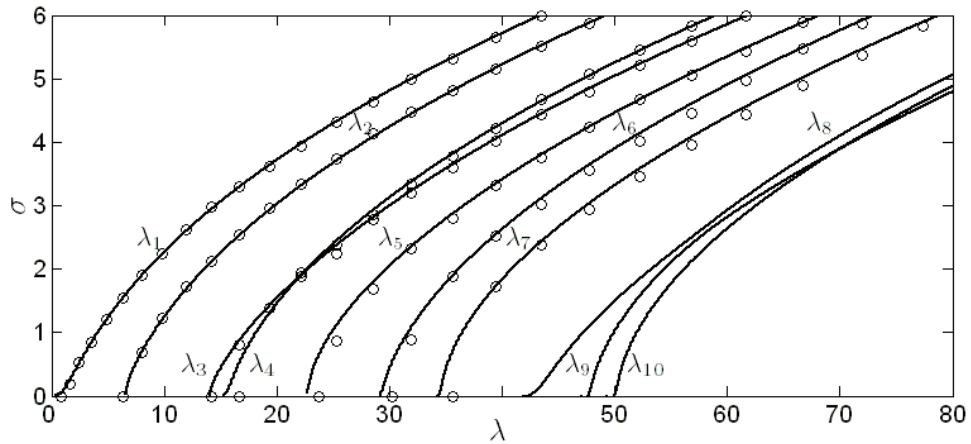


Рис 4. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода прямоугольного сечения. Сплошные линии – результаты расчетов методом Галеркина, кружочки – данные из работы [11]

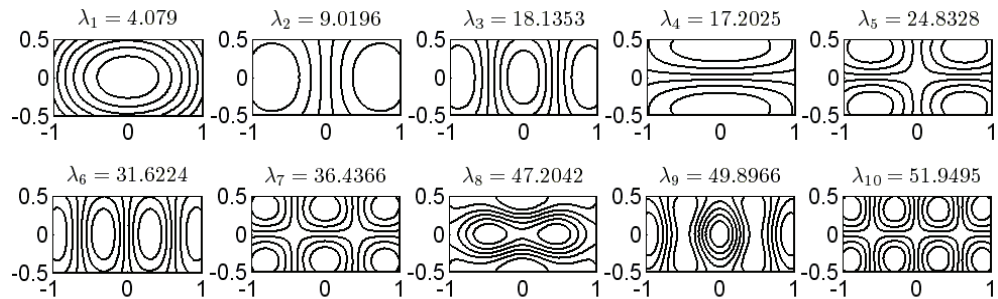


Рис 5. Линии уровня собственных функций волновода прямоугольного поперечного сечения при $\sigma = 1$

Список литературы

1. **Karimov, I. P.** Optical Fiber Telecommunications III / I. P. Karimov, T. L. Koch. – New York : Academic Press, 1997. – 437 p.
2. **Hunspenger, R. G.** Integrated optics: theory and technology / R. G. Hunspenger // Optical Sciences 33. – New York : Springer-Verlag, 1991. – 426 p.
3. **Даутов, Р. З.** Метод интегральных уравнений и точные нелокальные граничные условия в теории диэлектрических волноводов / Р. З. Даутов, Е. М. Карчевский. – Казань : Казан. гос. ун-т, 2009. – 271 с.
4. **Колтон, Д.** Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс. – М. : Мир, 1987. – 312 с.
5. **Ильинский, А. С.** Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции) / А. С. Ильинский, Ю. Г. Смирнов. – М. : ИПРЖР, 1996. – 176 с.
6. **Самохин, А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – М. : Радио и связь, 1998. – 160 с.
7. **Смирнов, Ю. Г.** Математические методы исследования задач электродинамики / Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Информационно-издательский центр ПензГУ, 2009. – 268 с.
8. **Снайдер, А.** Теория оптических волноводов / А. Снайдер, Дж. Лав. – М. : Радио и связь, 1987. – 656 с.

9. **Янке, Е.** Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М. : Наука, 1968. – 344 с.
10. **Владимиров, В. С.** Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 527 с.
11. **Eyges, L.** Modes of dielectric waveguides of arbitrary cross sectional shape / L. Eyges, P. Gianino, P. Wintersteiner // J. Opt. Soc. Am. – 1979. – V. 69, № 9. – P. 1226–1235.

Фролов Александр Геннадьевич

студент, кафедра прикладной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: Alexander_ksu@mail.ru

Frolov Alexander Gennadyevich

Student, sub-department of applied mathematics, Kazan Federal University

Карчевский Евгений Михайлович

доктор физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: Alexander_ksu@mail.ru

Karchevsky Evgeny Mikhaylovich

Doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of applied mathematics, Kazan Federal University

УДК 517.9

Карчевский, Е. М.

Численное решение задачи о распространении электромагнитных волн в слабо направляющих волноводах / Е. М. Карчевский, А. Г. Фролов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 1 (17). – С. 47–57.