

**ЗАДАЧА БЕЗНАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЧЕРЕЗ ГРУНТОВУЮ ПЛОТИНУ ПРИ НАЛИЧИИ НЕПРОНИЦАЕМОГО ВКЛЮЧЕНИЯ.**

К.П. Курцева, Е.Г. Шешуков, Н.Д. Якимов  
shesh039@rambler.ru

Казанский государственный энергетический университет  
Лицей им. Н.И. Лобачевского – Казанский федеральный университет

*Исследована задача линейной и нелинейной безнапорной фильтрации через грунтовую прямоугольную плотину с учетом непроницаемого вертикального включения (экрана). Нелинейная краевая задача фильтрации с неизвестной свободной границей аппроксимирована конечно-разностной схемой на фиксированной сетке. Для заданной длины экрана найден оптимальный интервал положения экрана от верхнего бьефа, при котором потеря воды минимальна. При фильтрации, подчиняющейся закону Дарси, методом фрагментов получена в неявном виде аналитическая формула, связывающая расход воды с положением экрана.*

**Ключевые слова:** линейная и нелинейная фильтрация, грунтовая плотина, непроницаемое включение (экран), участок высачивания.

Интенсивное использование природных водных ресурсов, предотвращение вредного воздействия воды на окружающую среду определяют широкое строительство гидротехнических сооружений. С их помощью осуществляются те или иные водохозяйственные мероприятия, создаются водохранилища, регулируются расходы и уровни воды, осуществляется пропуск льда и наносов и т.д. Гидротехнические сооружения бывают различного назначения и строятся в разнообразных природных условиях, в частности, выполненные из грунтовых материалов водоподпорные сооружения (плотины, дамбы), которые перегораживают водоток и воспринимают напор воды.

Грунтовые плотины получили широкое распространение. Для обоснования рациональных и экономичных форм и размеров плотины, ее противофильтрационных устройств необходимо проводить соответствующие фильтрационные расчеты, которые позволяют определять потери воды через тело плотины, положения неизвестных свободных поверхностей и гидродинамическую сетку течения. В грунтовых плотинах для уменьшения фильтрационных потерь воды через тело плотины, т.е. уменьшения выходных скоростей водопотока используют противофильтрационные устройства: экраны, ядра, шпунты и т.д.

В данной работе рассматривается стационарная задача безнапорной линейной и нелинейной фильтрации жидкости в прямоугольной грунтовой плотине  $ABCD$  при наличии непроницаемого включения (экрана)  $MNN_1M_1$  (рис.1).

Фильтрация подчиняется нелинейному закону  $\vec{V} = -k(|\nabla h|)\nabla h$ ,

где  $h$  – пьезометрический напор жидкости,  $\vec{V}$  – вектор скорости фильтрации,  $k$  – заданная функция, характеризующая нелинейность фильтрации и зависящая от закона течения.

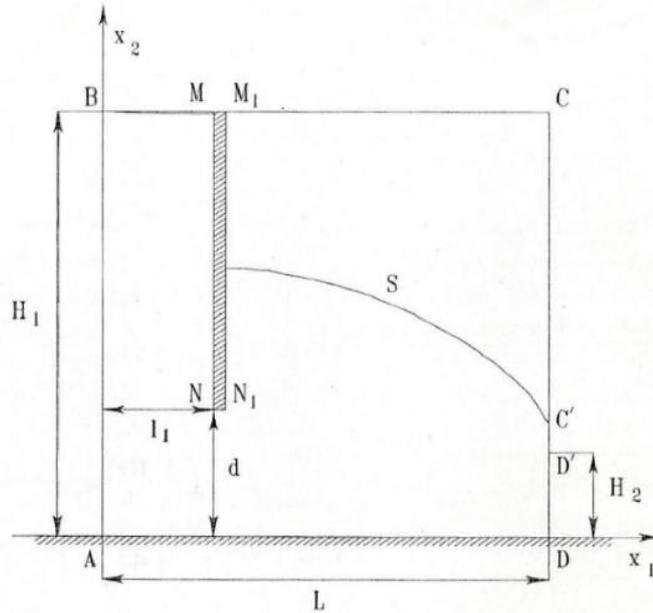


Рис.1. Прямоугольная плотина с непроницаемым экраном

Пусть ширина плотины  $L=1$ , ширина прямоугольного непроницаемого экрана  $|MM_1|$  равна шагу сетки  $\Delta x_1$ , длина и положение непроницаемого экрана вдоль оси  $x_1$  варьируются. Расстояние  $d$  между основанием перемычки (водоупором) и нижней границей непроницаемого экрана меняется от  $\Delta x_2$  до  $H_1 - \Delta x_2$  с шагом  $\Delta x_2$ .

Граничные условия задачи:

$$h = x_2, \quad \vec{V} \vec{n} = 0, \quad x \in S \quad (\text{условия на депрессионных кривых}),$$

$$h = x_2, \quad x \in D'C' \quad (\text{условие на участке высачивания}),$$

$$h = H_1, \quad x \in AB \quad (\text{заданный напор в верхнем бьефе}),$$

$$h = H_2, \quad x \in DD' \quad (\text{заданный напор в нижнем бьефе}),$$

$$\vec{V} \vec{n} = 0, \quad x \in AD \quad (\text{условие непроницаемости основания}),$$

$$\vec{V} \vec{n} = 0, \quad x \in MNN_1M_1 \quad (\text{условие непроницаемости экрана}).$$

Здесь  $n$  – единичный вектор нормали. Пусть напор в верхнем бьефе  $H_1 = 1$ , в нижнем  $H_2 = 0,2$ , атмосферное давление  $P = h - x_2 = 0$ .

Краевая задача фильтрации состоит в отыскании неизвестной области течения и поля пьезометрических напоров  $h(x)$ .

Поставленная нелинейная задача решается методом фиксированной области [1-3]. Суть метода: исходная нелинейная краевая задача со свободной границей (кривой депрессии) сводится к вариационному неравенству в фиксированной области с нелинейным оператором.

Рассматриваемая задача аппроксимируется конечно-разностной схемой на фиксированной сетке. Нелинейное сеточное уравнение в рассматриваемой области решается методом расширенного лагранжиана. Использование лагранжиана позволяет одновременно находить как сеточные приближения к напорам, так и к скоростям фильтрации. Кроме того, определяется сеточная аппроксимация характеристической функции области фильтрации, по значениям которой строится депрессионная кривая. Реализация каждого шага этого метода состоит в решении линейной сеточной схемы в фиксированной области и совокупности несвязанных между собой нелинейных скалярных уравнений. Последовательность линейных краевых задач решается методом верхней релаксации. Совокупность нелинейных скалярных уравнений решается методом Ньютона.

Первой рассматривается задача с линейным законом фильтрации  $\vec{V} = -k\nabla h$ , коэффициент фильтрации  $k=1$ . В таблице 1 представлено поле фильтрационных расходов  $Q$ , полученное при решении исходной задачи численным методом [1] для различных длин и положений вдоль оси  $x_1$  непроницаемого включения. Верхняя строка таблицы соответствует  $l_1$  – расстоянию от верхнего бьефа до экрана, все остальные – расходам при определенной длине включения, первая строка с расходами соответствует  $d = 0,95$ , вторая  $d = 0,90$ , и так далее до  $d = 0,05$

$d \setminus l_1$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,95	0,480	0,480	0,480	0,480	0,480	0,480	0,480	0,480	0,480
0,90	0,473	0,475	0,480	0,480	0,480	0,480	0,480	0,480	0,480
0,85	0,472	0,470	0,473	0,480	0,480	0,480	0,480	0,480	0,480
0,80	0,467	0,467	0,468	0,473	0,480	0,480	0,480	0,480	0,480
0,75	0,462	0,460	0,463	0,467	0,473	0,480	0,480	0,480	0,480
0,70	0,454	0,451	0,454	0,461	0,466	0,474	0,480	0,480	0,480
0,65	0,444	0,441	0,444	0,450	0,459	0,467	0,476	0,480	0,480
0,60	0,432	0,429	0,431	0,438	0,448	0,459	0,470	0,480	0,480
0,55	0,421	0,414	0,417	0,424	0,435	0,448	0,461	0,474	0,480
0,50	0,406	0,399	0,400	0,407	0,419	0,433	0,450	0,466	0,479
0,45	0,390	0,381	0,382	0,388	0,400	0,416	0,435	0,455	0,474
0,40	0,371	0,362	0,361	0,367	0,380	0,395	0,416	0,440	0,465
0,35	0,352	0,340	0,339	0,345	0,356	0,372	0,393	0,420	0,451
0,30	0,330	0,317	0,315	0,320	0,331	0,346	0,367	0,395	0,431
0,25	0,306	0,292	0,289	0,293	0,303	0,318	0,338	0,365	0,405
0,20	0,279	0,264	0,261	0,264	0,273	0,286	0,305	0,331	0,371
0,15	0,247	0,233	0,230	0,233	0,240	0,252	0,268	0,290	0,328
0,10	0,219	0,197	0,195	0,198	0,204	0,213	0,225	0,243	0,275
0,05	0,163	0,154	0,154	0,156	0,160	0,166	0,175	0,186	0,208

Таблица 1. Фильтрационный расход от положения экрана.

При фиксированном положении непроницаемого экрана очевидно, что фильтрационный расход будет падать с увеличением его длины. Таким образом для данной перемычки наименьший фильтрационный расход  $Q = 0,153$  будет при  $l_1 \approx 0,3$  и при максимально рассмотренной длине экрана  $|MN| = 0,95$ .

При "движении" непроницаемого экрана к нижнему бьефу и с уменьшением его длины будет уменьшаться и его влияние на область течения. При определенном положении это влияние прекращается, так как экран будет находиться за пределами области течения. Это хорошо видно из таблицы: с уменьшением длины непроницаемого экрана и увеличением  $l_1$  расход стремится к значению  $Q=0,480$ . Это значение расхода совпадает с точным значением фильтрационного расхода, полученного по формуле Дюпюи [4] для аналогичной задачи без включения.

Из таблицы также можно заметить, что при фиксированной длине непроницаемого включения при его "движении" от верхнего бьефа к нижнему фильтрационный расход сначала уменьшается, затем начинает расти, то есть для каждой рассматриваемой длины существует некоторое значение  $x_1$ , при котором фильтрационный расход имеет минимальную величину.

Для наглядности приведен график зависимости фильтрационного расхода от положения включения при фиксированной длине (рис.2). Каждой кривой на

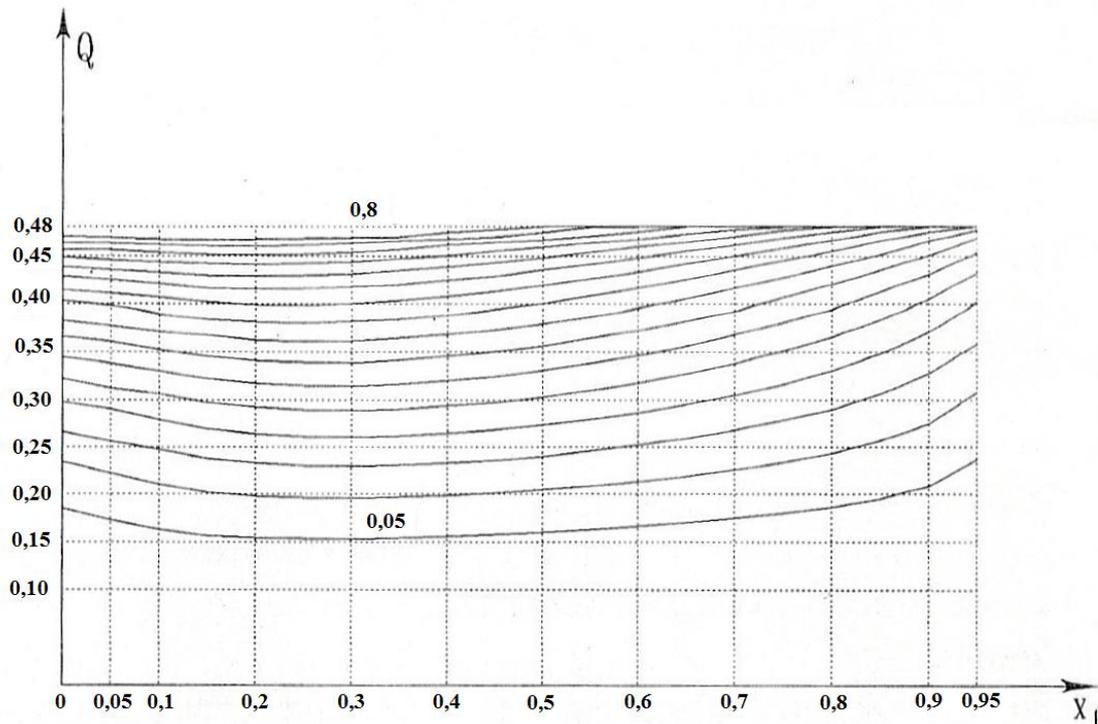


Рис. 2. Зависимости расхода от положения включения.

графике соответствует определенное расстояние  $d$  между водоупором и экраном. Для нижней кривой значение  $d = 0,05$  (шаг сетки). Для последующих

кривых значение  $d$  увеличивается на 0,05 (шаг сетки). Для верхней кривой значение  $d=0,8$ . Из графика видно, что при  $x_1 \in [0,2;0,3]$  расходы имеют минимальное значение. Этот факт не является очевидным. Поэтому для его обоснования были проведены дополнительные исследования.

Для исходной задачи методом фрагментов получена неявная приближенно-аналитическая формула зависимости расхода от положения непроницаемого вертикального включения бесконечно малой ширины, сокращенный вывод которой приводится ниже.

$$H_1 = \sqrt{H_2^2 + 2(l-l_1)Q} - \frac{2Q}{\pi} \ln \sin \left( \frac{\pi d}{2\sqrt{H_2^2 + 2(L-l_1)Q}} \right) + \frac{K(k)}{K(k')} Q, \quad (1)$$

где

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\Phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \Phi}}$$

– полный эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода.

$d \setminus l_1$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,95									
0,90									
0,85									
0,80	0,466	0,470							
0,75	0,457	0,461	0,471						
0,70	0,447	0,450	0,459	0,474					
0,65	0,436	0,438	0,446	0,459	0,480				
0,60	0,424	0,424	0,431	0,443	0,463				
0,55	0,410	0,409	0,414	0,426	0,444	0,471			
0,50	0,395	0,392	0,396	0,407	0,424	0,449			
0,45	0,379	0,375	0,377	0,387	0,403	0,426	0,459		
0,40	0,362	0,356	0,357	0,365	0,380	0,401	0,432	0,477	
0,35	0,343	0,335	0,336	0,342	0,355	0,375	0,403	0,446	
0,30	0,323	0,313	0,313	0,318	0,330	0,347	0,373	0,412	0,474
0,25	0,301	0,290	0,288	0,293	0,303	0,318	0,341	0,375	0,432
0,20	0,276	0,264	0,262	0,266	0,274	0,288	0,307	0,337	0,386
0,15	0,248	0,236	0,234	0,237	0,244	0,255	0,272	0,296	0,336
0,10	0,215	0,204	0,202	0,205	0,211	0,219	0,232	0,251	0,281
0,05	0,173	0,165	0,164	0,166	0,170	0,176	0,185	0,198	0,217

Таблица 2. Фильтрационный расход по приближенно-аналитической формуле

Для формулы (1) имеют место некоторые ограничения, которые видны при выводе формулы.

В таблице 2 представлены значения фильтрационных расходов  $Q$  в зависимости от длины и положения вдоль оси  $x_1$  непроницаемого включения, полученные из формулы (1). В этой таблице прослеживается та же зависимость, что и в таблице 1: при некотором значении  $l_1$  расход минимален и диапазон этих значений совпадает с полученным выше численным методом фиксированной области [1-3].

На рис.3 для некоторых значений  $d$ , указанных на кривых, приведена зависимость фильтрационного расхода от положения включения при фиксированной длине, полученная при решении численным методом (сплошные линии) и для сравнения штрихом отмечены кривые зависимости, полученные из формулы (1) (см. рис.2). Некоторое несоответствие между кривыми объясняется тем, что формула (1) записана для бесконечно тонкого включения и имеет ограничения на точность.

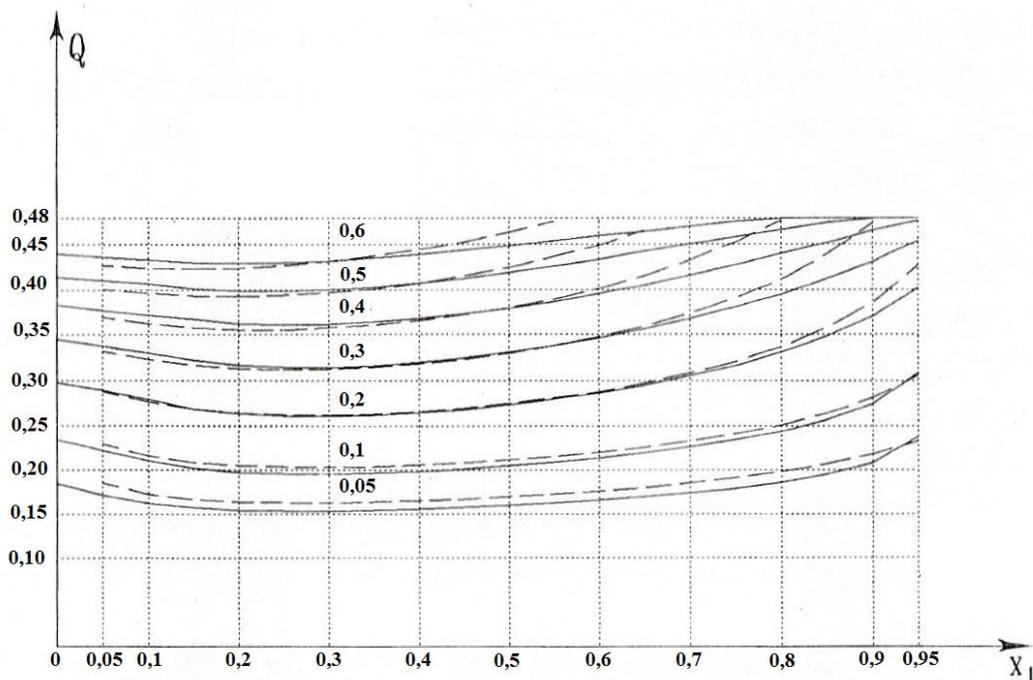


Рис.3: Сравнение интегрально-сеточной и приближенно-аналитической зависимости расхода от положения включения

В процессе численного решения задачи определяется значение участка высачивания. Зависимость величины участка высачивания от положения экрана представлена на рисунке 4. На каждой кривой указано значение  $d$ . Из рисунка видно, что минимальное значение ординаты участка высачивания  $y_0$  для различных  $d$  приходится на тот же интервал оси  $x$ , что и для расходов ( $x_1 \in [0,2; 0,3]$ ). Значение ординаты участка высачивания для аналогичной задачи без включения, полученное численным методом, следующее:  $y_0 = 0,361$ ,

а по точному решению [5]  $y_0^* = 0,348$ , относительная погрешность 3,74%.

С увеличением расстояния между непроницаемым включением и основанием перемычки и при движении включения к нижнему бьефу экран оказывает меньшее влияние на область течения, и участок высачивания, естественно, увеличивается и стремится к 0,361 (при  $d > 0,2$ ).

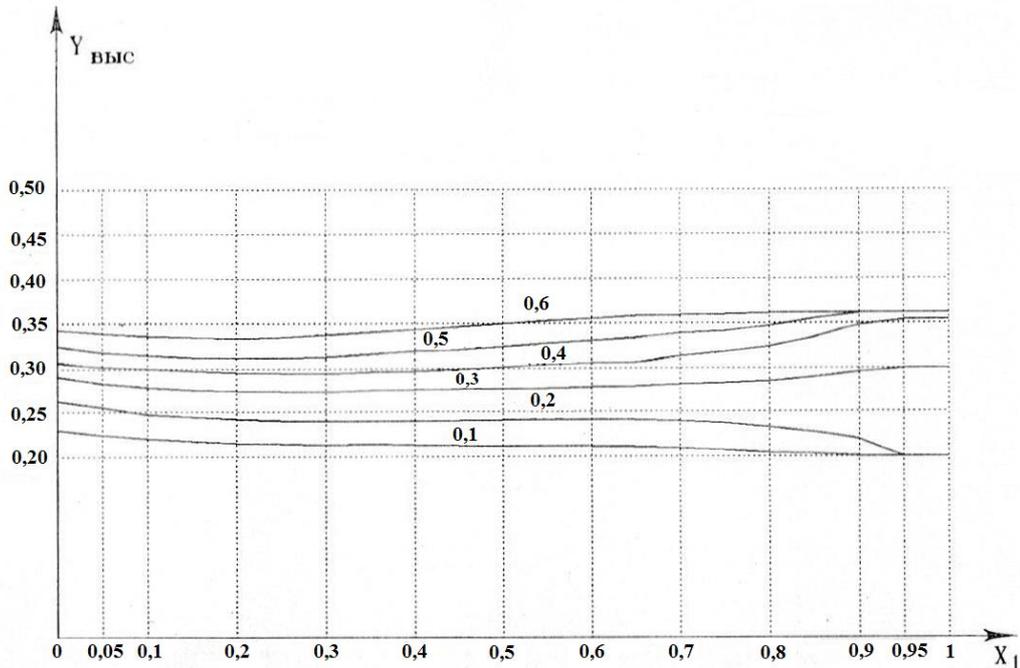


Рис. 4: Зависимости величины участка высачивания от положения включения.

В процессе решения задачи определяется также поле напоров и скоростей. В качестве примера на рис.5 для линейного закона Дарси по результатам числовых расчетов построены кривая депрессии, линии равных напоров и линии равных расходов в случае, когда экран расположен на расстоянии  $l_1 = 0,5$  от верхнего бьефа и на расстоянии  $d = 0,3$  от основания перемычки  $|MM_1| = 0,025$ . Для нелинейного закона фильтрации линии равных напоров и равных расходов имеют аналогичный вид.

Рассматриваются также задачи с нелинейными законами фильтрации: а)  $|\nabla h| = V^2$  – квадратичный закон, б)  $|\nabla h| = V + V^2$  – двучленный квадратичный закон. Для сравнения на рис.6 приведены кривые депрессии для рассмотренных законов. Варианту а) соответствуют штриховые линии, варианту б) -- пунктирные, сплошные линии соответствуют закону Дарси.

Из рисунка 6 видно, что депрессионные кривые, соответствующие нелинейным законам, находятся выше депрессионной кривой, соответствующей закону Дарси. Средний фильтрационный расход для закона а)  $Q_{\text{ср}} = 0,383$ , ордината точки высачивания  $y_0 = 0,31$ , для закона б)  $Q_{\text{ср}} = 0,22$ ,  $y_0 = 0,284$ , для закона Дарси  $Q_{\text{ср}} = 0,331$ ,  $y_0 = 0,277$ .

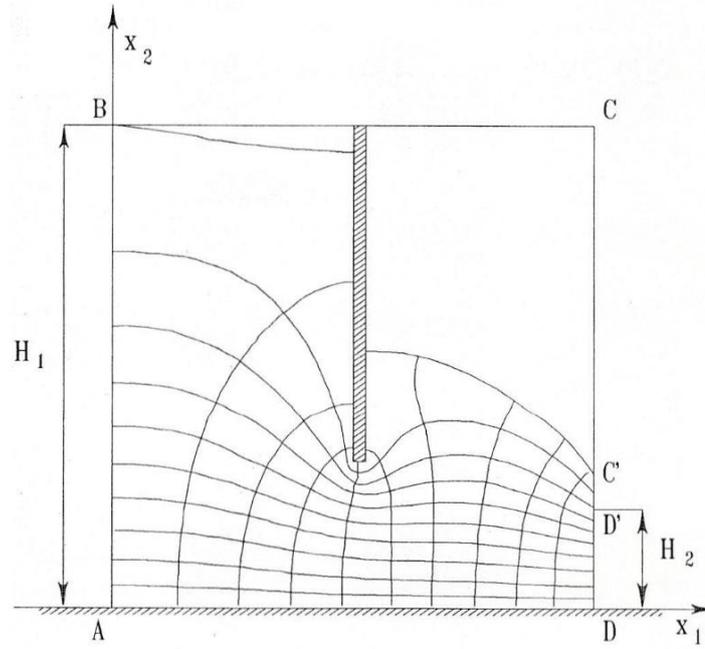


Рис. 5: Линейный закон фильтрации. Сетка течения.

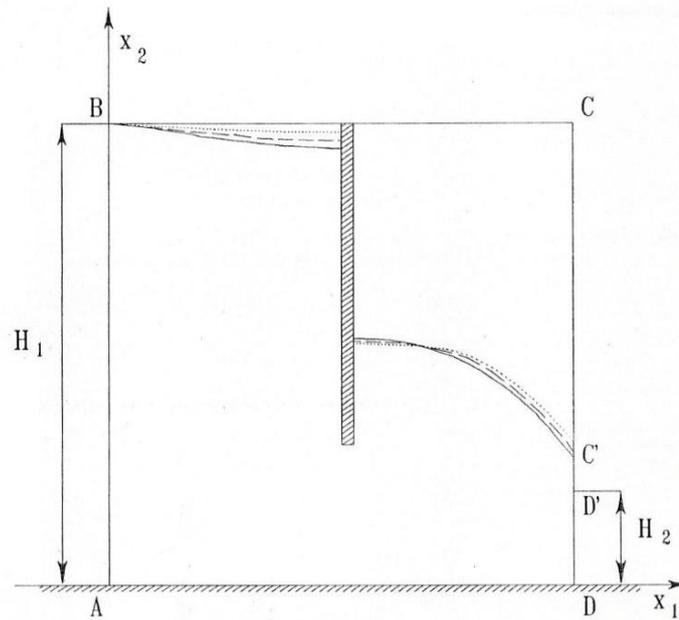


Рис.6. Депрессионные кривые для различных законов фильтрации.

Опишем кратко метод фрагментов для получения приближенно-аналитической формулы (1), связывающей фильтрационный расход и действующий напор на плотину, суть которого состоит в том, что область движения разбивается прямыми на участки – фрагменты и линии раздела принимаются за линии равного напора. Делается ряд допущений. Рассматривается такое расположение экрана, чтобы  $l_1$  и  $d$  были малы по сравнению с  $L=1$  (например,  $l_1=0,125, d=0,1$ ) (рис.7). Толщина экрана считается настолько малой, что ей можно пренебречь, то есть экран рассматривается как тонкая непроницаемая завеса  $MN$ .

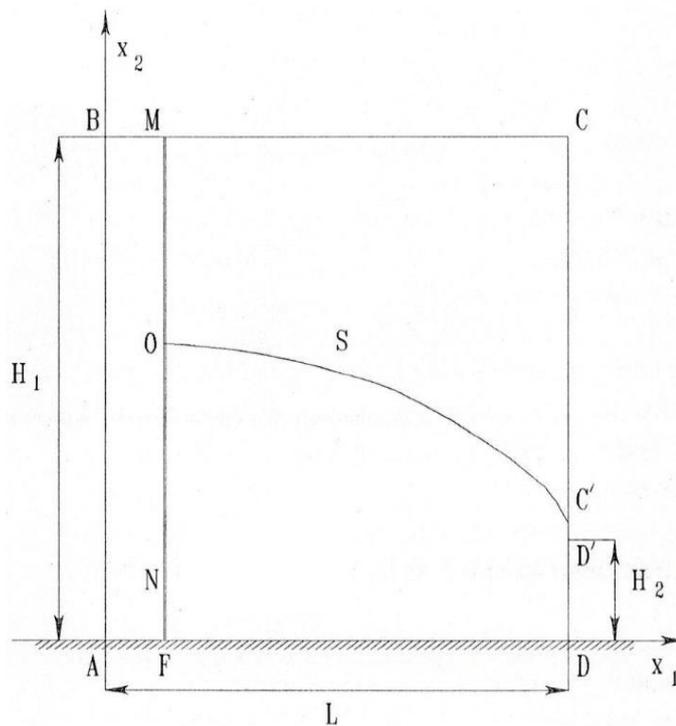


Рис.7: Прямоугольная перемычка при наличии тонкого непроницаемого экрана

Итак, область фильтрации разбивается прямой  $MN$  на два фрагмента. В качестве первого фрагмента рассматривается область  $ABMF$ . Так как падение депрессионной кривой на участке  $BM$  незначительное, то первый фрагмент можно считать прямоугольником шириной  $l_1$  и высотой  $H_1$ . Этому прямоугольнику в области комплексного потенциала течения соответствует прямоугольник, ширина которого равна  $\Delta H_1$  – перепаду напоров в верхнем бьефе  $AB$  и на эквипотенциали  $NF$ , а высота – фильтрационному расходу

через первый фрагмент ( $Q$ ). Путем ряда конформных отображений области фильтрации и области комплексного потенциала с использованием вспомогательной полуплоскости удастся определить связь расхода  $Q$  и  $\Delta H_1$  :

$$\Delta H_1 = \frac{2K(k)}{K'(k)} Q .$$

В качестве второго фрагмента рассматривается область  $FOC'D$ . Фильтрация в этом фрагменте безнапорная с образованием кривой депрессии  $OC$ . Ширина основания фрагмента  $FD = L - l_1 = l_2$ . Расстояние  $l_2$  больше, чем  $FO$ . Депрессионная кривая вблизи непроницаемого экрана пологая. Фильтрационный расход во втором фрагменте равен  $Q$ . Таким образом, в прямоугольной перемычке  $FMCD$  (рис.7) из верхнего бьефа  $FN$  происходит фильтрация с расходом  $Q$  в нижний бьеф с пьезометрическим напором  $H_2$ .

Тогда из формулы Дюпюи [4] для  $Q$  можно найти напор в верхнем бьефе  $FN$ . Склеивая решения задачи в первом и втором фрагментах на общей границе  $FN$  получим приближенно-аналитическую формулу (1), связывающую расход и напоры в верхнем и нижнем бьефах.

Следует отметить, что во всех приведенных выше рассуждениях относительная погрешность должна уменьшаться с уменьшением  $d$  и, соответственно,  $Q$  при фиксированных  $H_1$  и  $H_2$ . Таким образом, эти формулы можно считать асимптотическими, сколь угодно точными при достаточно малых  $Q$  и  $d$ .

Итак, приближенно-аналитическая формула (1) позволяет быстро и просто находить оптимальное решение задачи о плотине с экраном при возникновении чрезвычайных ситуаций. Например, во время паводка – наводнения или при жгучей жаре можно легко и быстро найти в каждом конкретном случае свое оптимальное решение (оптимальное положение экрана), не допускающее аварийную ситуацию.

Title:

A free boundary seepage problem through earth dam with an impermeable screen

K.P. Kurtseva, E.G. Sheshukov, N.D. Yakimov

[shesh039@rambler.ru](mailto:shesh039@rambler.ru)

Kazan State Power Engineering University

Lyceum named N.I. Lobachevsky – Kazan Federal University

Summary

A water seepage problem through the rectangular earth dam with the presence of a vertical impermeable screen was studied in nonlinear formulation. A finite-difference scheme with a fixed mesh was used for discretization of mathematical equations with a free boundary. The optimal position of the impermeable screen was found for its optimal

length, that facilitates minimum losses of water. An analytical solution was developed in implicit form under the Darcy's law formulation using the fragment's method. The solution provides a relationship between water flux and a position of the screen.

Key words: Linear and nonlinear seepage; water flow; soil; earth dam; impermeable screen; numerical grid method.

#### Литература.

1. Курцева К.П., Лапин А.В., Шешуков Е.Г., Решение сеточными методами задачи фильтрации жидкости в плотине при нелинейном законе фильтрации //Изв. вузов. Математика. №2.-1999. С.47-52.

2. Шешуков Е.Г., Курцева К.П. Численное исследование краевых задач нелинейной фильтрации.// Изв.вузов. Проблемы энергетики.—2012.-- №9-10. С.158-166.

3. Курцева К.П., Шешуков Е.Г. Фильтрационный расчет задачи нелинейной фильтрации в неоднородной грунтовой плотине.// Научно-технический и производственный журнал “Энергетика Татарстана”. №1(5)/ Казань, 2007. – С.38-43.

4. Чарный И.А. Строгое доказательство формулы Дюпюи для безнапорной фильтрации с промежутком высачивания // Докл. АН СССР.—1951.—Том 79.--№6.- С.937—940.

5. Чарный И.А. О величине промежутка высачивания при безнапорной фильтрации. // Докл. АН СССР.—1951.—Том 80.--№1.--С.29-32..

#### Авторы:

Курцева Кира Петровна. Кандидат физико-математических наук. Доцент, Преподаватель Лицея имени Н.И. Лобачевского – Казанский Федеральный Университет. Тел.8-917-236-6873.

Шешуков Евгений Геннадиевич. Доктор физико-математических наук. Старший научный сотрудник. Профессор кафедры Энергетического машиностроения КГЭУ. Тел. 8-904-664-0766

Якимов Николай Дмитриевич. Доктор физико-математических наук. Профессор. Профессор кафедры ТОТ КГЭУ. Тел. 8-987-296-2784.

References:

1. Kurtseva K.P., Lapin A.V., Sheshukov E.G. Numerical solution of non-linear filtration problem of seepage through earth dam.// Izvestiya Vuzov.Matematika / Vol.2/1999. P.47-52.
2. Sheshukov E.G., Kurtseva K.P, A numerical study of the boundary value problem of non-linear filtration.// Izvestiya Vuzov. Problems of heat power engineering. – 2012. -- № 9-10. P. 158-166.
3. Kurtseva K.P., Sheshukov E.G., on-linear seepage problem in non-homogeneous earth dam.// Power-engineering of Tatarstan./ №1(5), - 2007- P,38-43,
4. Charnyj I.A.Strict proof of the Dupui formula for open-boundary filtration problem with exfiltration interval. //Rep. AN USSR, 1951. Vol. 79, №. 6, -P. 937-940.
5. Charnyj I.A. On the largest exfiltration gap of pressure-free filtration problem.// Reports with of the USSR Academy of Sciences, Vol. 80, №1. – 1951, - 29-32.

About author:

Kurtseva, Kira Petrovna. Candidate of phys.-math. Sciences. Docent, Lecturer Lyceum named N.I. Lobachevsky, -- Kazan Federal University.

Sheshukov, Evgeny Gennadievich. Doctor of phys.-math. sciences. Senior scientist. Professor of the department of head pow engineering machinery, Kazan Heat Power Engineering University.

Yakimov, Nikolai Dmitrievich, Doctor of phys.-math. sciences. Professor of the department of theoretical basics of thermo-physics. Kazan Heat Power Engineering University