Л.Р. Секаева

Курс лекций по математике для студентов Института фундаментальной медицины и биологии направления «Медицинская кибернетика».

Часть 1

Казань – 2021

Казанский федеральный университет

Кафедра общей математики

Л.Р. Секаева

Курс лекций по математике для студентов Института фундаментальной медицины и биологии направления «Медицинская кибернетика»

Часть 1

Казань – 2021

УДК 517
ББК 22.143, 22.147, 22.161.1
ГРНТИ 27.17.29, 27.23.17
С 28

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

учебно-методической комиссии
Института математики и механики имени Н.И. Лобачевского КФУ
Протокол № 3 от 16 декабря 2021 г.

заседания кафедры общей математики
Протокол № 2 от 25 ноября 2021 г.

Автор
кандидат физико-математических наук, доцент Секаева Л.Р.

Научный редактор
доктор физико-математических наук, профессор Насыров С.Р.

Рецензент
доктор физико-математических наук, доцент Абзалилов Д.Ф.

С 28 **Курс лекций по математике для студентов Института фундаментальной медицины и биологии направления «Медицинская кибернетика»:** учебное пособие. – Часть 1 / Л.Р. Секаева. – Казань: Казанский федеральный университет, 2021. – 118 с.

Данное учебное пособие предназначено для студентов Института фундаментальной медицины и биологии направления 30.05.03 «Медицинская кибернетика».

Пособие содержит следующие разделы: элементы линейной алгебры, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, множества, функции и их пределы, производная, приложения производных, а также включает разобранные решения задач вручную и с помощью пакета математических программ MAXIMA.

Содержание

Лекция 1.

Элементы линейной алгебры.

Матрицы

Матрицы и действия над ними. *Матрицей* называется система $m \times n$ чисел, расположенных в прямоугольной таблице из m строк и n столбцов. Числа этой таблицы называются *элементами матрицы*. Обозначения матрицы:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица, состоящая лишь из одной строки, называется *матрицей-строкой*. Матрица, имеющая лишь один столбец, называется *матрицей-столбцом*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*.

Квадратной называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов $(m = n)$, т. е. матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Порядком квадратной матрицы называется число ее строк (или столбцов).

Элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ квадратной матрицы образуют ее главную диагональ, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1}$ –

второстепенную или побочную диагональ. Каждый элемент матрицы обозначают буквой a с двумя индексами; первый указывает номер строки, второй – номер столбца, на пересечении которых находится соответствующий элемент (например, элемент a_{21} принадлежит второй строке и первому столбцу матрицы).

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю.

Единичная матрица – это диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Треугольной называется матрица, у которой все ее элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Различают соответственно верхнюю и нижнюю треугольные матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если в матрице A заменить каждую ее строку столбцом с тем же номером, то получится *транспонированная* матрица A^{T}. Таким образом, если

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если матрица A имеет размеры $m\times n$, то A^{T} имеет размеры $n\times m$.

Линейными действиями над матрицами называются сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число. Сложение и вычитание определяются только для матриц одинаковых размеров.

Сумма матриц

Суммой двух матриц $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$, $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ называется матрица $C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)$ такая, что

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ \left(i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}\right).$$

Разность матриц

Разностью двух матриц $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$, $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ называется матрица $C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)$ такая, что

$$c_{ij}=a_{ij}-b_{ij},\ \left(i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}\right).$$

Пример 1. Найти сумму и разность двух матриц.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \\ 6 & 8 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение.

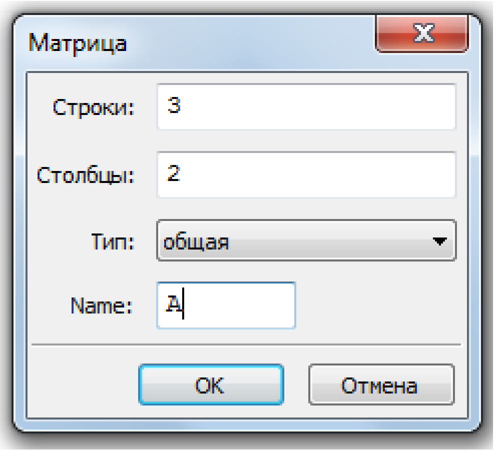
$$A+B=\begin{pmatrix}3+1 & 5+2\\ 7+5 & 9+7\\ 6+4 & 8+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 12 & 16\\ 10 & 14\end{pmatrix},$$

$$A-B=\begin{pmatrix}3-1 & 5-2\\ 7-5 & 9-7\\ 6-4 & 8-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}.$$

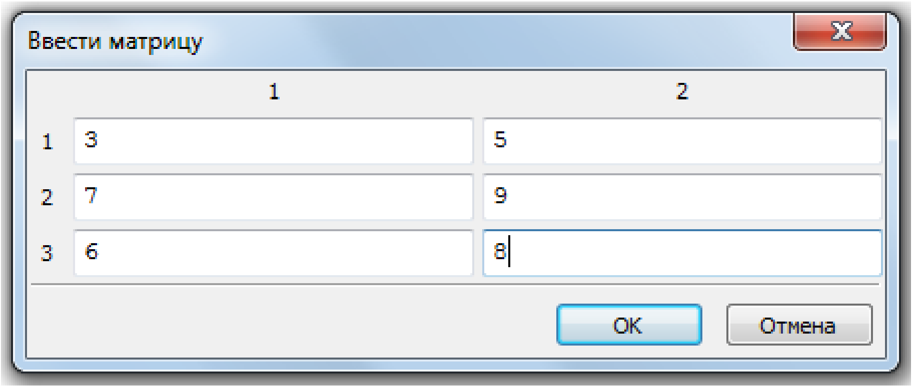
Решение в MAXIMA.

При решении примеров мы будем проверять результаты с помощью пакета математических программ MAXIMA. Установить версию программы на свой компьютер можно с ее сайта в сети Интернет: http://maxima.sourceforge.net/. Русская локализация сайта: http://maxima.sourceforge.net/ru/.

Используя меню, щелкнуть по кнопкам «Алгебра → Enter Matrix…». При этом появится окно, которое необходимо заполнить, щелкнуть по команде «OK»,



далее появится следующее окно, которое нужно заполнить и по команде «OK» получим результат:




```
(%i1) A: matrix([3,5],[7,9],[6,8]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

Аналогично вводим матрицу B:

```
(%i2) B: matrix([1,2],[5,7],[4,6]);
```

(%o2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

```
(%i3) A+B;
```

(%o3) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 12 & 16 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$

```
(%i4) A-B;
```

(%o4) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Ответ: $A+B=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 12 & 16 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на число* k называется матрица $B_{m\times n}=(b_{ij})$ такая, что

$$b_{ij} = k \cdot a_{ij}, \quad \left(i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}\right).$$

Пример 2. Умножить матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ на $k = 2$.

Решение.

$$A \cdot k = A \cdot 2 = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 & 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot 2 & 5 \cdot 2 & 6 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) A: matrix([1,2,3],[4,5,6]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

```
(%i2) k:2;
(%o2) 2
```

```
(%i3) A.k;
```

(%o3) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$

Ответ: $A \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$.

Произведение матриц

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Произведением матрицы $A_{m \times n} = \left(a_{ij}\right)$ *на матрицу* $B_{n \times p} = \left(b_{ij}\right)$ называется матрица $C_{m \times p} = \left(c_{ij}\right)$, такая что

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}, \text{ где } \quad i = \overline{1, m}, \; k = \overline{1, p},$$

т.е. элемент i-ой строки и k-го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.

Получение элемента c_{ik} схематично изображается так (Рис. 1):

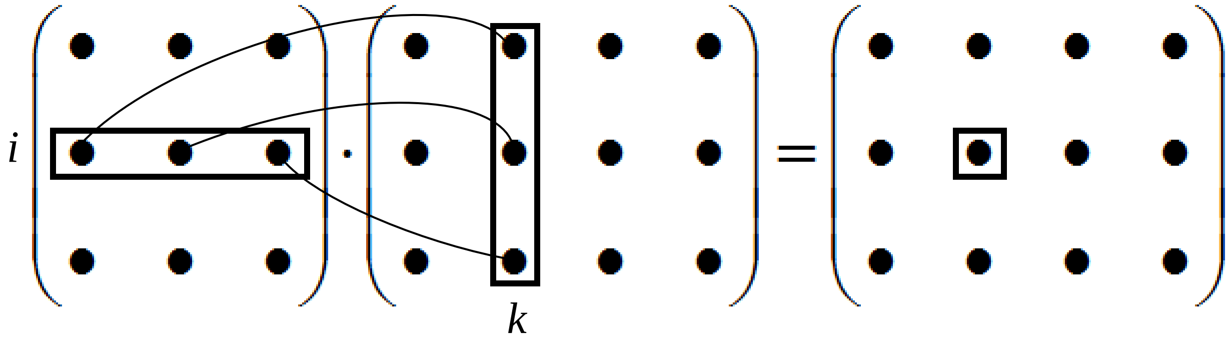


Рис. 1

Примеры: Найти произведения матриц:

1. $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Итак, мы перемножили матрицы размерами 3×3, 3×2 и получили матрицу-произведение размером 3×2.

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) A: matrix([a[11],a[12],a[13]],
                [a[21],a[22],a[23]],
                [a[31],a[32],a[33]]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

```
(%i2) B: matrix([b[11],b[12]],
                [b[21],b[22]],
                [b[31],b[32]]);
```

(%o2) $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$

```
(%i3) A.B;
```

(%o3) $\begin{bmatrix} a_{13}\, b_{31}+a_{12}\, b_{21}+a_{11}\, b_{11} & a_{13}\, b_{32}+a_{12}\, b_{22}+a_{11}\, b_{12} \\ a_{23}\, b_{31}+b_{21}\, a_{22}+b_{11}\, a_{21} & a_{23}\, b_{32}+a_{22}\, b_{22}+b_{12}\, a_{21} \\ b_{31}\, a_{33}+b_{21}\, a_{32}+b_{11}\, a_{31} & b_{32}\, a_{33}+b_{22}\, a_{32}+b_{12}\, a_{31} \end{bmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) A: matrix([1,3],[1,2]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

```
(%i2) B: matrix([1,2,1],[3,1,0]);
```

(%o2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

```
(%i3) A.B;
```

$$(\%o3)\quad \begin{bmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} \end{pmatrix}.$$

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) A: matrix([a[11],a[12],a[13]],
                [a[21],a[22],a[23]],
                [a[31],a[32],a[33]]);
```

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

```
(%i2) B: matrix([b[11],b[21],b[31]]);
```

$$(\%o2)\quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \end{bmatrix}$$

```
(%i3) A.B;
```

$$(\%o3)\quad \begin{bmatrix} a_{13}\, b_{31} + a_{12}\, b_{21} + a_{11}\, b_{11} \\ a_{23}\, b_{31} + b_{21}\, a_{22} + b_{11}\, a_{21} \\ b_{31}\, a_{33} + b_{21}\, a_{32} + b_{11}\, a_{31} \end{bmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} \end{pmatrix}$.

Определители

Определители второго порядка. *Определителем (детерминантом) второго порядка называется число, обозначаемое символом*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Для определителя A употребляются следующие обозначения: $|A|$, Δ, $\det A$, $\det(a_{ik})$.

Вычисление определителя второго порядка иллюстрируется схемой (Рис. 2):

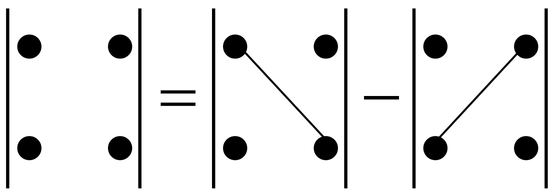


Рис. 2

Пример 1. Вычислить определитель второго порядка

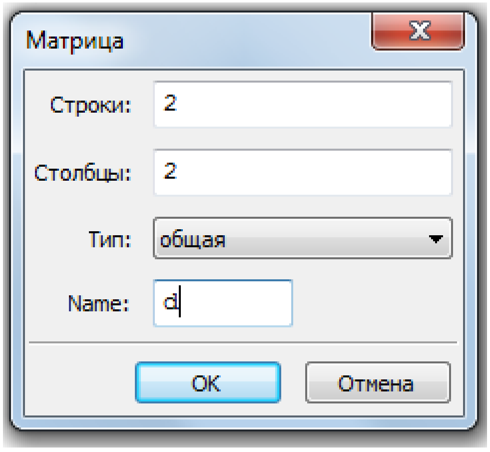
$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 9 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

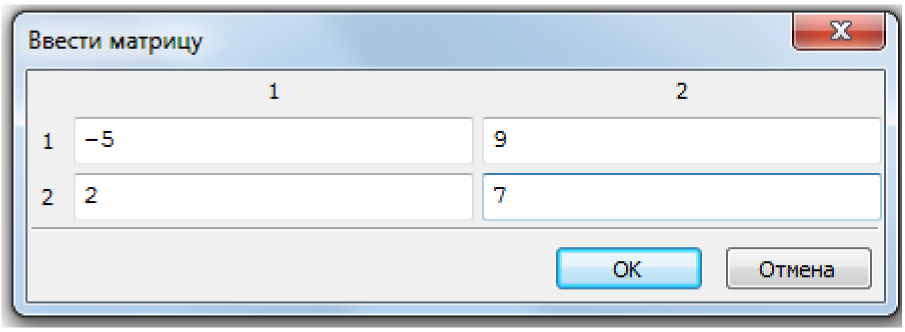
Решение.

Пользуясь определением определителя второго порядка, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 9 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -5 \cdot 7 - 2 \cdot 9 = -35 - 18 = -53.$$

Решение в MAXIMA.






```
(%i1) d:matrix([-5,9],[2,7]);
(%o1) [-5  9]
      [ 2  7]
```

Алгебра → Определитель:

```
(%i2) determinant(d);
(%o2) -53
```

Ответ: -53.

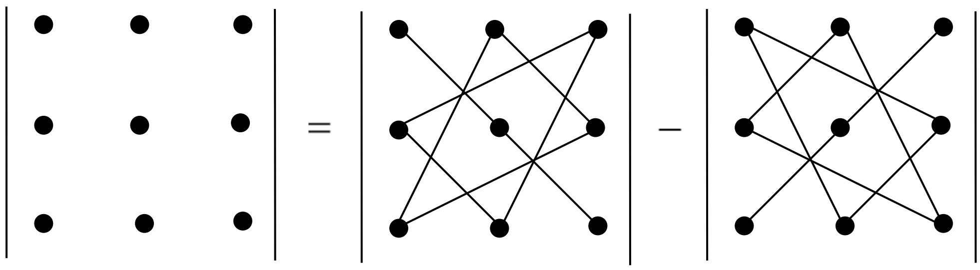
Определители третьего порядка. *Определителем (детерминантом) третьего порядка называется число, обозначаемое символом*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$
\begin{aligned}
\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\
- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{33}a_{21}a_{12} - a_{11}a_{32}a_{23}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства (1) берутся со знаком «+», а какие со знаком «–», полезно использовать следующее правило треугольников (или Саррюса), которое символически можно записать так (Рис. 3):



(основания равнобедренных треугольников параллельны главной диагонали)

(основания равнобедренных треугольников параллельны побочной диагонали)

Рис. 3

Минором некоторого элемента определителя называется определитель, получаемый из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент. Минор элемента a_{ik} обозначают M_{ik}.

Например, минором элемента a_{11} определителя Δ является определитель второго порядка $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} *матрицы* называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+k}$, где $i+k$ – сумма номеров строки и столбца. Алгебраическое дополнение элемента a_{ik} обозначают A_{ik}. В соответствии с определением $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

Например, если элемент a_{21} находится на пересечении второй строки и первого столбца, то для него $i + k = 2 + 1 = 3$ и алгебраическим дополнением является

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}.$$

Свойства определителей:

1°. Определитель не изменится при замене всех его строк соответствующими столбцами.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2°. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет лишь знак.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3°. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

4°. Множитель, общий для всех элементов некоторой строки (столбца), можно вынести за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{21}a_{12} = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5°. Определитель, имеющий две пропорциональные строки (столбца) равен нулю.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21} \\ a_{11} & a_{21} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{11} & a_{21} \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0.$$

6°. Определитель равен нулю, если все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю. Например,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

7°. Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), предварительно умножив их на один и тот же множитель.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + \lambda a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + \lambda a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8°. Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\begin{vmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \underline{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

Доказательство.

$$a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}=$$

$$=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}\cdot\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}\right)+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Соответствующие знаки, приписываемые при этом минорам элементов определителя, можно задать таблицей:

$$\boxed{\begin{matrix} + & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{matrix}}$$

$$\begin{vmatrix} + & -\\ - & +\end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} + & - & + & -\\ - & + & - & +\\ + & - & + & -\\ - & + & - & +\end{vmatrix}$$

По аналогии с последней формулой вводятся определители четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix},$$

определители пятого порядка и т. д.

9°. Сумма произведений элементов некоторой строки (столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равен нулю.

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0.$$

Пример 2. Вычислить определитель третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Пользуясь определением определителя третьего порядка, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-2) + 4 \cdot (-3) \cdot 3 -$$

$$-3 \cdot (-5) \cdot (-2) - 1 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \cdot 2 =$$

$$= -10 - 2 - 36 - 30 - 4 + 6 = -76.$$

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) A: matrix([2,1,3],[4,-5,1],[-2,-3,1]);
```

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i2) determinant(A);
(%o2) -76
```

Ответ: -76.

Обратная матрица. Квадратная матрица A^{-1} называется *обратной* квадратной матрице A, если выполняется условие

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E,$$

где E – единичная матрица.

Квадратная матрица называется *невырожденной* или *неособенной*, если ее определитель отличен от нуля. Если определитель матрицы равен нулю, она называется *вырожденной* или *особенной*.

Всякая невырожденная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

имеет обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ik} – алгебраическое дополнение элемента a_{ik} матрицы A.

Пример 1. Найти матрицу A^{-1}, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель матрицы A и алгебраические дополнения ее элементов:

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1,\; A_{12}=-\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=2,\; A_{13}=\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1,\; A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=2,\; A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=2,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1,\; A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=1,\; A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=2.$$

В соответствии с формулой получаем

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \; A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+0-1 & 2+0-2 & 2+0-2 \\ -3+2+1 & -3+2+2 & -3+1+2 \\ 2-2+0 & 2-2+0 & 2-1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) A: matrix([2,0,-1], [-3, 1, 1], [2, -1, 0]);
```

$$(\%o1) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
(%i2) A^^(-1);
```

$$(\%o2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Проверка:

```
(%i3) A.A^^(-1);
```

$$(\%o3) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

Ранг матрицы

Рангом матрицы называют порядок наибольшего не равного нулю определителя, составленного из ее элементов.

Рассмотрим матрицу размера $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \end{matrix} \\ \cdots \quad \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} \quad a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k строк и k столбцов. Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k порядка. Все эти определители называются *минорами* матрицы A. Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля и является рангом матрицы. Обозначается: r, $r(A)$, $rang\,A$.

Лекция 2.

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где числа a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ называются *коэффициентами системы,* числа b_{ij} – *свободными членами системы*. Подлежат нахождению числа x_n.

Решить систему уравнений означает найти такие числа $x_i\left(i = \overline{1, n}\right)$, что при подстановке в исходную систему уравнений каждое уравнение системы обратится в тождество. Необязательно решение будет единственным.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определенной,* если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Две системы называются *эквивалентными* (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение.

Система уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = 0 \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, т.к. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется *нулевым* или *тривиальным*.

Метод Крамера решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Рассмотрим линейную систему 2 уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Введем основной определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, а также дополнительные определители $\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Если $\Delta = 0$, но, по крайней мере, один из дополнительных определителей не равен нулю, то система несовместна, т.е. не имеет ни одного решения.

Если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то система неопределенна, т.е. имеет бесконечное множество решений. В этом случае одно из уравнений есть следствие другого, и система приводится к одному уравнению, например,

$a_{11}x + a_{12}y = b_1$, и имеет бесконечное множество решений:

$x = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} y$, где y – произвольное число.

Рассмотрим линейную систему 3 уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \ , \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 , \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \ . \end{cases}$$

Введем определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

а также дополнительные определители

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Возможны два варианта:

1) Если $\Delta \neq 0$, то решение исходной системы уравнений существует и оно единственное.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \text{ (формулы Крамера).}$$

2) Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей Δ_x или Δ_y или $\Delta_z \neq 0$, то хотя бы одно из равенств невозможно, т.е. система *не имеет решений* (т.е. несовместна).

Если $\Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система имеет либо *бесчисленное множество решений* (т.е. система неопределенная) либо *не имеет решений* (т.е. система несовместна).

Пример 1. Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 17, \\ 2x + 5y = -11. \end{cases}$$

Решение. Вычислим основной определитель системы и дополнительные определители Δ_x, Δ_y:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 26, \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 17 & -3 \\ -11 & 5 \end{vmatrix} = 52, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 17 \\ 2 & -11 \end{vmatrix} = -78.$$

Поскольку $\Delta = 26 \neq 0$, находим:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{52}{26} = 2, \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-78}{26} = -3.$$

Система имеет единственное решение: $x = 2$, $y = -3$.

Сделать проверку.

Ответ: $(2;-3)$.

Пример 2. Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2, \\ 3x + y + 2z = 3, \\ 2x + 3y + z = 1. \end{cases}$$

Решение. Находим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 + 27 - 6 - 6 - 6 = 18.$$

Так как $\Delta = 18 \neq 0$, то система имеет единственное решение. Чтобы получить его, необходимо вычислить определители Δ_x, Δ_y, Δ_z:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 27 + 4 - 3 - 6 - 12 = 12,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 + 9 - 18 - 6 - 2 = -6,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 12 + 18 - 4 - 6 - 9 = 12.$$

Находим:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}, \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

Сделать проверку.

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) D: matrix([1,2,3], [3,1,2], [2,3,1]);
      D:determinant(D);
```

$$(\%o1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(%o2) 18

```
(%i3) Dx: matrix([2,2,3], [3,1,2], [1,3,1]);
      Dx:determinant(Dx);
      x=Dx/D;
```

$$(\%o3) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(%o4) 12

$$(\%o5) \; x = \frac{2}{3}$$

```
(%i6) Dy: matrix([1,2,3], [3,3,2], [2,1,1]);
      Dy:determinant(Dy);
      y=Dy/D;
```

$$(\%o6) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(%o7) -6

$$(\%o8) \; y = -\frac{1}{3}$$

```
(%i9) Dz: matrix([1,2,2], [3,1,3], [2,3,1]);
      Dz:determinant(Dz);
      z=Dz/D;
```

$$(\%o9) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(%o10) 12

$$(\%o11) \; z = \frac{2}{3}$$

Ответ: $\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с помощью обратной матрицы

Пусть дана система 3 линейных алгебраических уравнений с 3 неизвестными x, y, z:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 , \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \ . \end{cases} \quad (1)$$

Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $A-$ матрица, составленная из коэффициентов системы, $X -$ матрица-столбец из неизвестных (искомая матрица), $B-$матрица-столбец из свободных членов.

Используя понятие произведения матриц, систему можем записать в виде матричного уравнения

$$AX = B. \quad (3)$$

Пусть матрица A – неособенная, т. е. $\det A \neq 0$, тогда существует матрица A^{-1}, обратная к матрице A.

Чтобы найти неизвестную матрицу X, надо матрицу A^{-1} умножить на матрицу из свободных членов B: $X = A^{-1}B$.

Пример. Решить систему с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28, \\ 7x + 3y - 6z = -1, \\ 7x + 9y - 9z = 5. \end{cases}$$

Очевидно

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 28 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Основной определитель этой системы уравнений совпадает с определителем матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 27 - 4 \cdot 21 + 9 \cdot 42 = 348.$$

Подсчитаем алгебраические дополнения элементов определителя:

$$A_{11} = 27;\ A_{12} = 21;\ A_{13} = 42;\ A_{21} = 45;\ A_{22} = -81;$$
$$A_{23} = -46;\ A_{31} = -3;\ A_{32} = 75;\ A_{33} = 34.$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{348} \begin{pmatrix} 27 & 45 & -3 \\ 21 & -81 & 75 \\ 42 & -46 & 34 \end{pmatrix}$$

и

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{348}\begin{pmatrix}27\cdot 28+45\cdot(-1)-3\cdot 5\\21\cdot 28+81\cdot 1+75\cdot 5\\42\cdot 28+46\cdot 1+34\cdot 5\end{pmatrix}=\frac{1}{348}\begin{pmatrix}696\\1044\\1392\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},$$

отсюда $x=2$, $y=3$, $z=4$.

Решение в MAXIMA.

(%i1) A: matrix([2,-4,9], [7,3,-6], [7,9,-9]);

(%o1) $\begin{bmatrix}2 & -4 & 9\\7 & 3 & -6\\7 & 9 & -9\end{bmatrix}$

(%i2) B: matrix([28], [-1], [5]);

(%o2) $\begin{bmatrix}28\\-1\\5\end{bmatrix}$

(%i3) A^^(-1);

(%o3) $\begin{bmatrix}\frac{9}{116} & \frac{15}{116} & -\frac{1}{116}\\ \frac{7}{116} & -\frac{27}{116} & \frac{25}{116}\\ \frac{7}{58} & -\frac{23}{174} & \frac{17}{174}\end{bmatrix}$

(%i4) A^^(-1).B;

(%o4) $\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$

Ответ: $(2;3;4)$.

Метод Гаусса
решения систем линейных алгебраических уравнений
(СЛАУ)

Процесс решения системы по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду (в частности, к треугольному).

$$\begin{cases} a_{11}x + b_{12}y + c_{13}z = d_1 & \cdot\left(-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right) \quad \cdot\left(-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}\right) \\ a_{21}x + b_{22}y + c_{23}z = d_2 & + \\ a_{31}x + b_{32}y + c_{33}z = d_3 & + \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x + b_{12}y + c_{13}z = d_1, & \\ \qquad\quad b'_{22}y + c'_{23}z = d'_2, & \cdot\left(-\dfrac{b'_{32}}{b'_{22}}\right) \\ \qquad\quad b'_{32}y + c'_{33}z = d'_3. & + \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x + b_{12}y + c_{13}z = d_1, \\ \qquad\quad b'_{22}y + c'_{23}z = d'_2, \\ \qquad\qquad\qquad c''_{33}z = d''_3. \end{cases}$$

1) Если $a_{11} \neq 0,\ b'_{22} \neq 0,\ c''_{33} \neq 0$, то решение системы единственно: z находится из третьего уравнения, затем y – из второго, а x – из первого.

2) Пусть $a_{11} \neq 0,\ b'_{22} \neq 0,\ c''_{33} = 0$:

а) Если и $d_3''=0$, то решений бесконечное множество, определяемое из первых двух уравнений: y выражается через z из второго уравнения, а затем x – через z из первого, z – произвольное число.

б) Если и $d_3''\neq 0$, то система несовместна, решений нет.

3) Пусть $a_{11}\neq 0, b_{22}'=c_{23}'=b_{32}'=c_{33}'=0$:

а) Если и $d_2'=d_3'=0$ то решений бесконечное множество, определяемое из первого уравнения: $x=\frac{d_1}{a_{11}}-\frac{b_{12}}{a_{11}}y-\frac{c_{13}}{a_{11}}z$, где y и z – произвольные числа.

б) Если и хотя бы одно из чисел d_2' или $d_3'\neq 0$, то система несовместна, решений нет.

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

На практике удобнее работать не с системой, а с расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x+2y+2z=3, \\ 4x-2y-5z=5, \\ 6x-y+3z=1. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членах:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -5 & 5 \\ 6 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

(вертикальной чертой отделен столбец, составленный из свободных членов). Умножая первую строку матрицы A поочередно на «–4», «6» и прибавляя соответственно ко второй и третьей, получаем матрицу

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -13 & -7 \\ 0 & -13 & -9 & -17 \end{array}\right).$$

Умножив вторую строку матрицы A_1 на «$-\frac{13}{10}$» и прибавив к третьей строке, получим новую матрицу

$$A_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -13 & -7 \\ 0 & 0 & 7{,}9 & -7{,}9 \end{array}\right).$$

Матрице A_2 соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3, \\ -10y - 13z = -7, \\ 7{,}9z = -7{,}9. \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим $z = -1$, второе уравнение дает $y = 2$, а первое: $x = 1$. Следовательно, исходная система также имеет решение: $x = 1,\ y = 2,\ z = -1$.

Решение в MAXIMA.

Введем расширенную матрицу A

```
(%i1) A: matrix([1,2,2,3], [4,-2,-5,5], [6,-1,3,1]);
```

$$(\%o1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -5 & 5 \\ 6 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

и приведем ее к треугольному виду

```
(%i2) echelon(A);
```

(%o2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{13}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

решим, получим искомые значения

```
(%i3) solve([x+2*y+2*z=3, y+(13/10)*z=7/10, z=-1], [x,y,z]);
(%o3) [[x=1,y=2,z=-1]]
```

Ответ: $(1;2;-1)$.

Любую из трех выше приведенных систем можно решить с помощью команды solve

solve([*уравнение*1, *уравнение*2, …],[*переменная*1, *переменная*2, …]).

Пример.

```
(%i1) solve([2*x-4*y+9*z=28,
             7*x+3*y-6*z=-1,
             7*x+9*y-9*z=5], [x,y,z]);
(%o1) [[x=2,y=3,z=4]]
```

Лекция 3.

Аналитическая геометрия на плоскости. Точка на плоскости

Для задания точки на плоскости приходится использовать две шкалы, называемые координатными осями (ось абсцисс и ось ординат), пересекающиеся в точке O, называемой началом координат. Традиционно изображают взаимно перпендикулярные оси координат Ox и Oy, причем ось Ox изображают горизонтально, а ось Oy вертикально. Обычно принято задавать такие направления положительных движений по осям, что положительное направление оси Ox после поворота на 90^0 против часовой стрелки совпадает с положительным направлением осиOy (Рис. 1). Хотя могут быть и другие варианты.

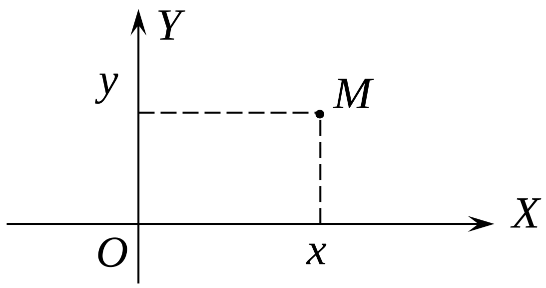


Рис. 1

Произвольная точка M на плоскости задается координатами (x, y) ее проекций на координатные оси. Каждая проекция получается проведением через M прямой, параллельной оси, до пересечения с другой осью. Такая система координат называется *декартовой* (по имени знаменитого математика и философа Рене Декарта, жившего в 17 веке).

Другим способом задания точки на плоскости является задание точки в *полярной* системе координат. Для задания такой системы координат следует задать направленный луч (называемый *полярной осью*), который обычно изображают горизонтальным, направленным вправо. Начало луча называют *полюсом*. Положение точки M на плоскости задают расстоянием до полюса (полярный радиус точки r) и углом, на который следует повернуть луч, чтобы точка оказалась на нем (полярный угол точки φ) (Рис. 2).

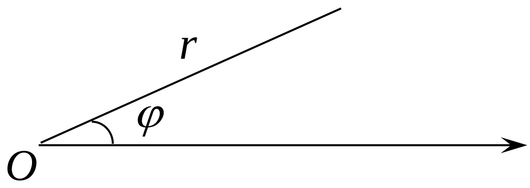


Рис. 2

Полярные координаты точки $M(r,\varphi)$ имеют следующие особенности: первая координата неотрицательна, а вторая координата неоднозначна, так как вместо угла φ можно взять угол $\varphi+2\pi k$ при любом целом k.

Связь между декартовыми координатами с началом координат в полюсе и полярными координатами осуществляется по следующим формулам:

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi, \\ y = r\cdot\sin\varphi. \end{cases}$$

Точка в пространстве

Для задания точки в пространстве требуется уже 3 координаты.

В случае *декартовой* системы координат мы строим 3 оси координат, традиционно взаимно перпендикулярные. Кроме того, обычно задают координатные оси OX, OY и OZ, составляющие *правую тройку* (Рис. 3). Это означает, что если средний и большой пальцы правой руки, направить, соответственно, вдоль осей OX и OY в положительном направлении, то указательный палец правой руки укажет положительное направление оси OZ.

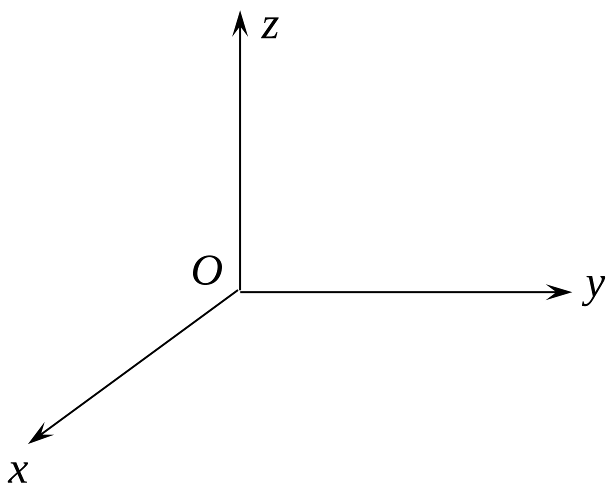


Рис. 3

Координаты точки M (x, y, z) в пространстве определяется проекциями точки на соответствующие оси, причем проекции получаются проведением через M плоскостей, параллельных координатным плоскостям, до пересечения с координатными осями (Рис. 4).

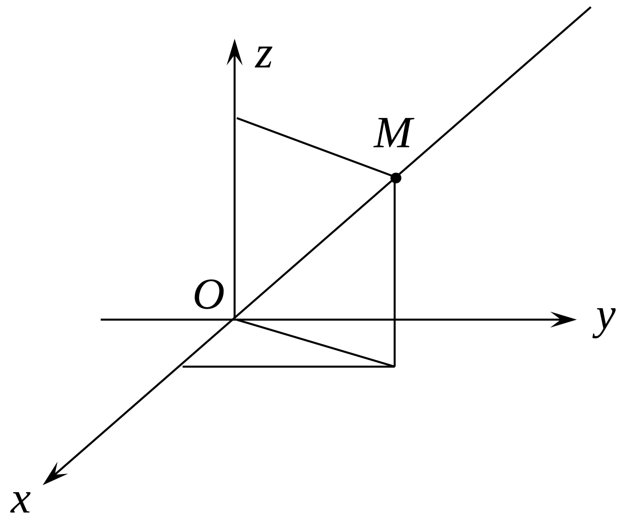


Рис. 4

Другой координатной системой является *цилиндрическая* система координат. При такой системе координат задается координатная плоскость и перпендикулярная ей координатная ось. На плоскости задаются полярные координаты, причем начало полярной оси находится в точке O пересечения заданной координатной оси с заданной координатной плоскостью. Проекция точки на плоскость задается полярными координатами. Проекция точки на заданную ось определяет третью координату. Таким образом, точка M задается координатами (r, φ, z) (Рис. 5). Связь между цилиндрическими координатами и декартовыми координатами следующая: аппликата z в декартовых и в цилиндрических координатах одна и та же, а координаты r и φ связаны с координатами x и y так же, как связаны декартовы и полярные координаты на плоскости.

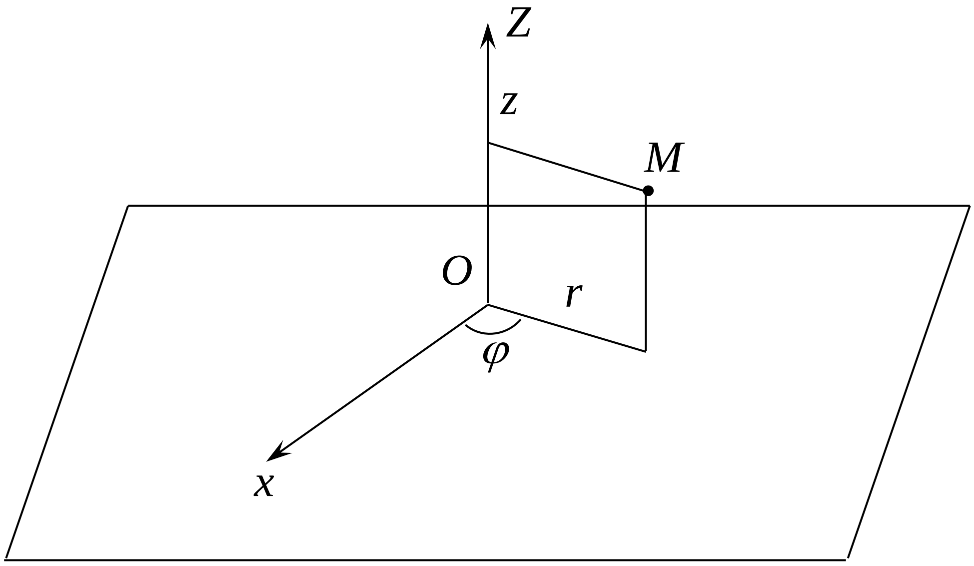


Рис. 5

Еще одна координатная система в пространстве – *сферическая* система координат. Здесь также задаются плоскость и перпендикулярная ей ось. В точке их пересечения ставится точка O. Из точки O в заданной плоскости проводится полярная ось. Точка M в пространстве задается расстоянием r до точки O (выбор радиуса сферы), углом ψ, который отрезок, соединяющий точку O с точкой M, образуют с заданной осью (выбор меридиана), а также углом, который образует проекция отрезка OM на заданную плоскость с полярной осью (выбор параллели) (Рис. 6).

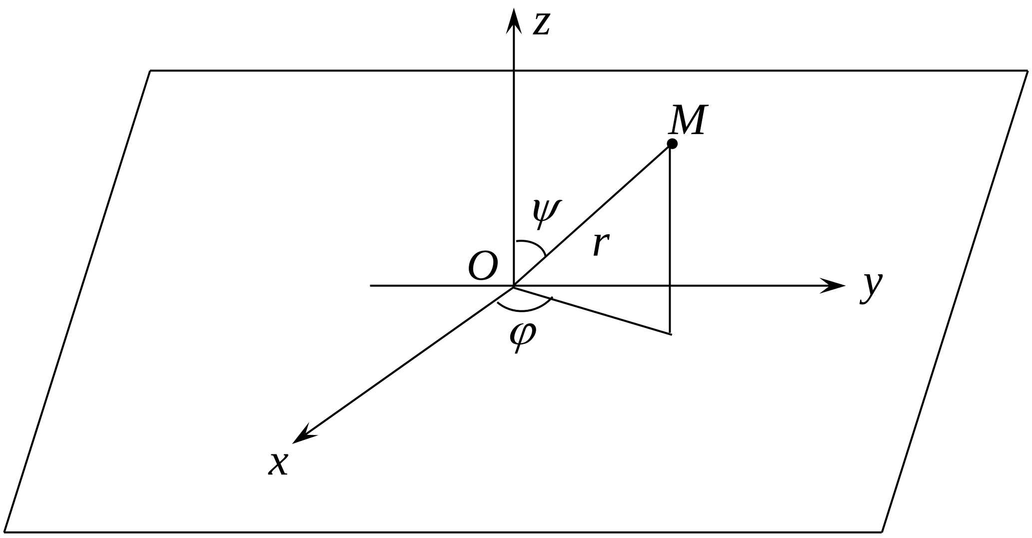


Рис. 6

Связь между сферическими и декартовыми координатами осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\psi, \\ y = r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\psi, \\ z = r\cdot\cos\psi, \end{cases} \qquad \varphi\in[0,2\pi],\ \psi\in[0,\pi].$$

Линии первого порядка

Уравнение прямой на плоскости с заданным угловым коэффициентом имеет вид

$$y = k\,x + b,$$

где k равен тангенсу угла α наклона прямой к оси Ox $(k = \mathrm{tg}\alpha)$ и называется *угловым коэффициентом*, b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy (Рис. 7):

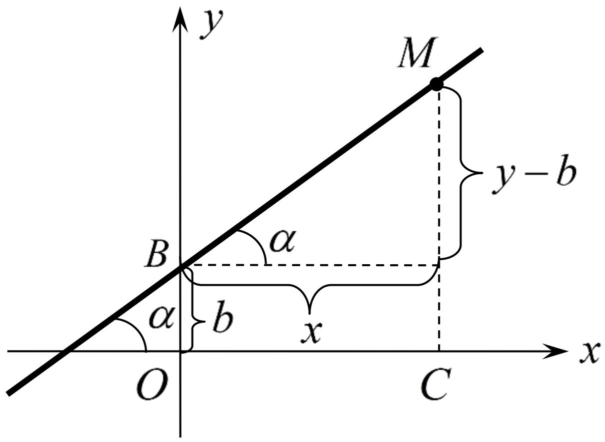


Рис. 7

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_1; y_1)$ *с заданным угловым коэффициентом:*

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, записывается в виде

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \ (x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2),$$

и угловой коэффициент этой прямой находится по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Если $x_2 = x_1$, то прямая, проходящая через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, параллельна оси ординат. Ее уравнение имеет вид $x = x_1$.

Если $y_2 = y_1$, то уравнение прямой может быть записано в виде $y = y_1$, прямая M_1M_2 параллельна оси абсцисс.

Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0,$$

где $A,\ B,\ C$ – произвольные коэффициенты ($A^2 + B^2 \neq 0$).

Если в уравнении какой-то из коэффициентов равен нулю, то:

1) при $C = 0$ $y = -\dfrac{A}{B}x$ – прямая проходит через начало координат;

2) при $B = 0$ $(A \neq 0)$ $x = -\dfrac{C}{A} = a$ – прямая параллельна оси Oy;

3) при $A = 0$ $(B \neq 0)$ $y = -\dfrac{C}{B} = b$ – прямая параллельна оси Ox;

4) при $B = C = 0,\ Ax = 0,\ x = 0$ – ось Oy;

5) при $A = C = 0,\ By = 0,\ y = 0$ – ось Ox.

Если ни один из коэффициентов общего уравнения прямой не равен нулю, то его можно преобразовать к виду:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $a = -\dfrac{C}{A}$ и $b = -\dfrac{C}{B}$ – величины отрезков, которые отсекает прямая на координатных осях. Это уравнение называется *уравнением прямой в отрезках.*

Угол между двумя прямыми

Угол φ, отсчитанный против часовой стрелки от прямой I: $y = k_1 x + b_1$ до прямой II (Рис. 8): $y = k_2 x + b_2$, определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (*)$$

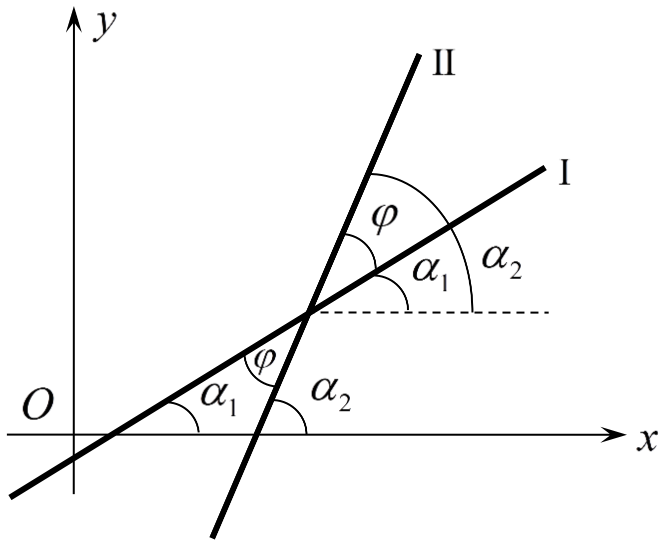


Рис. 8

Если требуется вычислить острый угол между прямыми, не учитывая, какая прямая является первой, какая – второй, то правая часть формулы берется по модулю, т.е.

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Для прямых, заданных уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, формула (*) примет вид

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

Условие параллельности двух прямых: $k_1 = k_2$ или $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.

Условие перпендикулярности двух прямых: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$ или $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой. Пусть на плоскости Oxy дана некоторая прямая L. Проведем через начало координат прямую n, перпендикулярную данной, и назовем ее *нормалью* к прямой L. Обозначим через N точку пересечения нормали с прямой L. На нормали введем направление от точки O к точке N. Обозначим через α угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки ось Ox до совмещения ее с нормалью, через p – длину отрезка ON (Рис. 9):

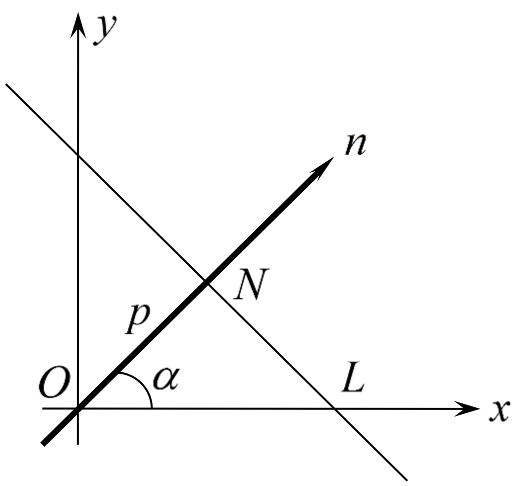


Рис. 9

Тогда уравнение данной прямой может быть записано в виде

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

оно называется *нормальным уравнением* прямой L.

Чтобы привести общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ к нормальному виду, нужно все члены его умножить на *нормирующий множитель*

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

взятый со знаком, противоположным знаку C. Если $C = 0$, то знак нормирующего множителя можно брать произвольно.

Пусть L – прямая, заданная нормальным уравнением, и пусть $M_0(x_0; y_0)$ – точка, не лежащая на этой прямой. Тогда расстояние d от точки M_0 до прямой L может быть вычислено по формуле:

$$d = \left| x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p \right|$$

или

$$d = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Уравнения биссектрис углов между прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ($A_1/A_2 \neq B_1/B_2$, т. е. прямые не параллельны):

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0.$$

Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

1. Для любых двух точек $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ плоскости расстояние между ними выражается формулой

$$M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (1)$$

2. Деление отрезка в данном отношении.

Пусть на плоскости дан произвольный отрезок M_1M_2 и пусть M – любая точка этого отрезка, отличная от M_2. Число λ, определяемое равенством $\lambda=\dfrac{M_1M}{MM_2}$, называется отношением, в котором точка M делит отрезок M_1M_2.

Если точка $M(x;y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, то координаты этой точки определяются формулами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad (2)$$

Следствие. Если M – середина отрезка M_1M_2, то $\lambda=1$ и получаем

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, y=\frac{y_1+y_2}{2}. \qquad (2')$$

3. Для любых точек $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$, не лежащих на одной прямой, площадь S треугольника ABC выражается формулой:

$$S=\pm\frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right] \qquad (3)$$

или

$$S_\vartriangle=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (3')$$

Знак «+» в формуле (3) берут в случае, когда выражение в определителе положительно, а знак «−», – когда оно отрицательно.

Признаком того, что три точки $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ лежат на одной прямой, может служить равенство нулю площади соответствующего треугольника, т. е.

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$$

или

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \qquad (4)$$

4. Площадь многоугольника с вершинами $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3),\ldots,$ $F(x_n;y_n)$ равна

$$S=\pm\frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right]. \qquad (5)$$

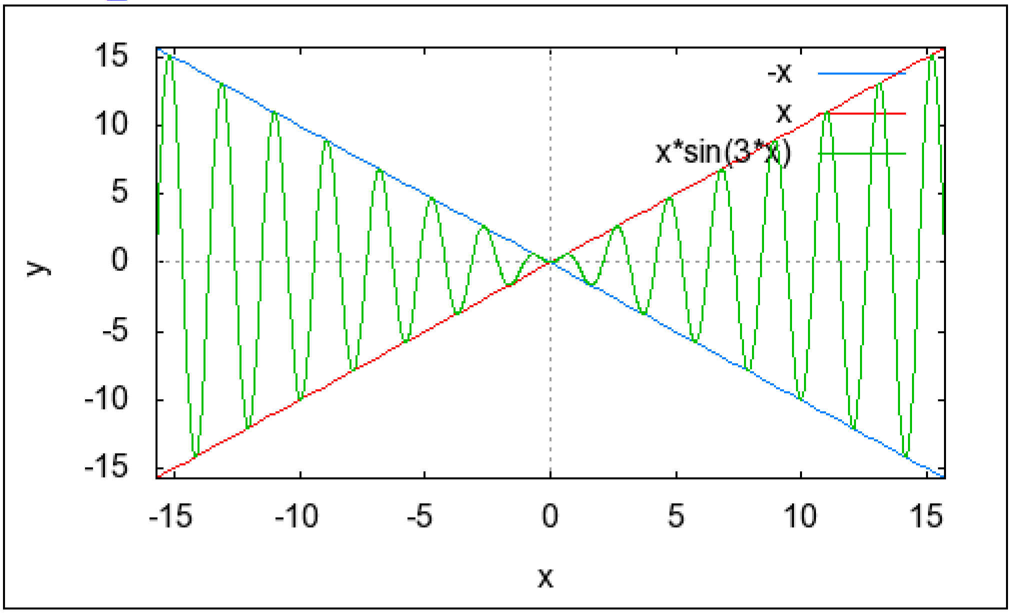
Знак «+» в формуле (5) берут в случае, когда выражение в квадратных скобках положительно, а знак «−», – когда оно отрицательно.

Построение графиков функций в MAXIMA

Пример 1. Построить графики функций $y = -x,\ y = x,\ y = x\sin 3x$ на отрезке $[-5\pi; 5\pi]$.

```
(%i1) wxplot2d([-x, x, x*sin(3*x)],
      [x,-5*%pi,5*%pi], [y,-5*%pi,5*%pi],
      [plot_format, gnuplot]);
```

(%t1)

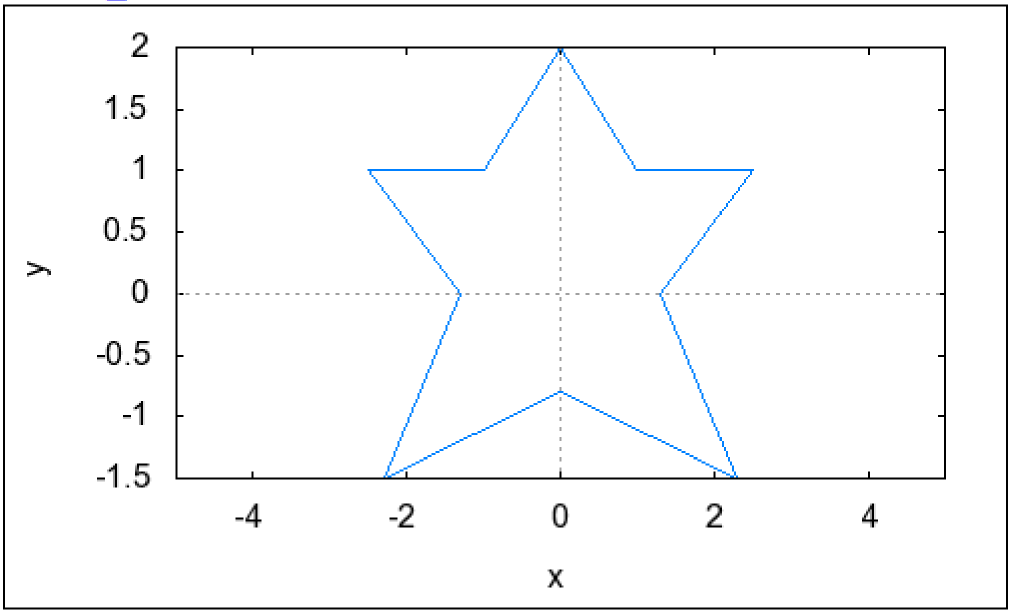


(%o1)

Пример 2. Построить пятиконечную звезду

```
(%i2) wxplot2d([['discrete,
      [-1.3,-2.5,-1,0,1,2.5,1.3,2.3,0,-2.3,-1.3],
      [0,1,1,2,1,1,0,-1.5,-0.8,-1.5,0]]], [x,-5,5],
      [plot_format, gnuplot]);
```

(%t2)

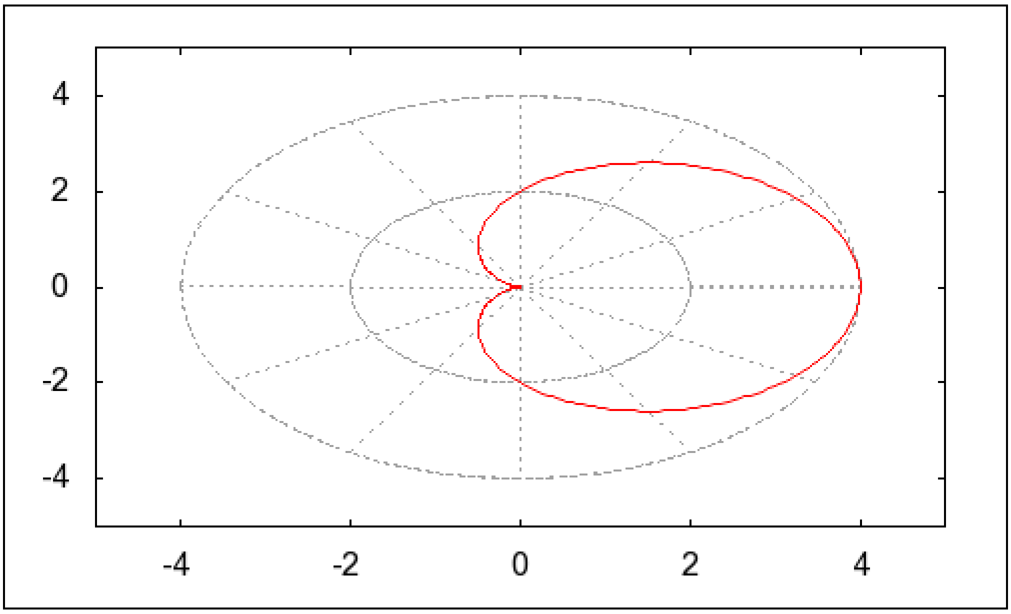


(%o2)

Пример 3. Построить кардиоиду

```
(%i3) load(draw)$
      wxdraw2d(user_preamble="set grid polar", nticks=300,
      color=red, xrange=[-5,5], yrange=[-5,5],
      polar(2*(1+cos(theta)), theta,0,2*%pi));
```

(%t4)



(%o4)

Линии второго порядка. Окружность

Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от некоторой точки, называемой ее *центром*.

Пусть $C(a;b)$ – центр и R – радиус окружности, т.е. расстояние любой ее точки от центра (Рис. 10).

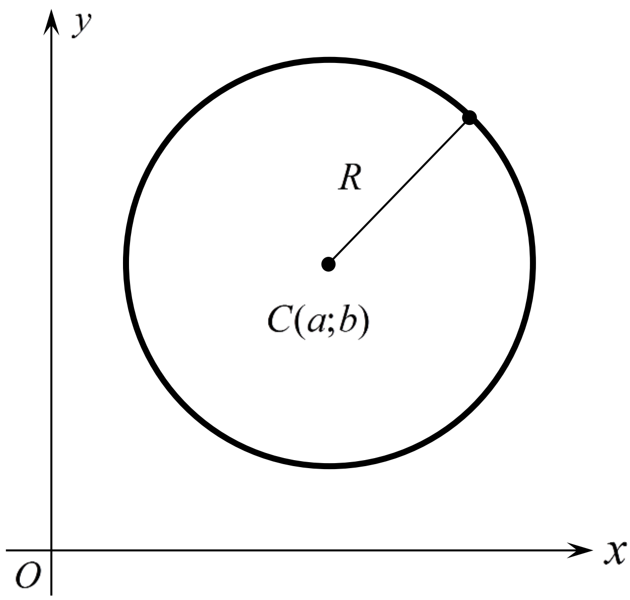


Рис. 10

Тогда уравнение окружности примет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (1)$$

Если центр окружности совпадает с началом координат, т. е. если $a=0,\ b=0$, то уравнение (1) примет вид:

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (2)$$

Если в уравнении (1) раскрыть скобки, то оно примет вид:

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0. \qquad (3)$$

Чтобы от уравнения (3) снова перейти к уравнению вида (1), нужно в левой части уравнения (3) выделить полные квадраты:

$$\left(x+\frac{m}{2}\right)^2+\left(y+\frac{n}{2}\right)^2=\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{4}-p. \qquad (4)$$

Эллипс

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемая фокусами, есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами (Рис. 11).

Фокусы эллипса обозначают буквами F_1 и F_2, расстояние между ними $F_1F_2 = 2c$.

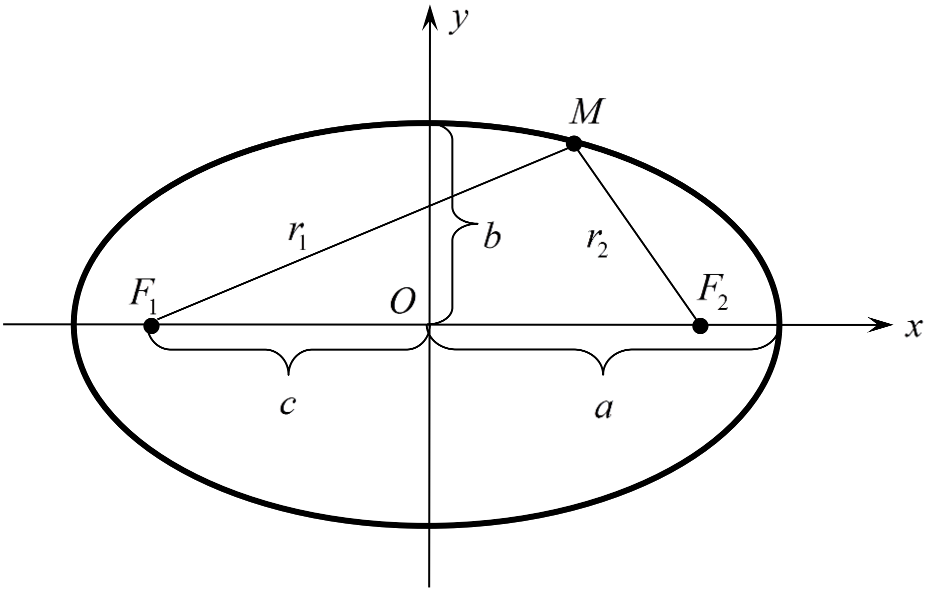


Рис. 11

Для вывода уравнения эллипса выберем систему координат Oxy так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox, а начало координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2. Тогда фокусы будут иметь следующие координаты: $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.

Пусть M – произвольная точка эллипса. Тогда, согласно определению эллипса, $MF_1 + MF_2 = 2a$, т.е.

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a,$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2,$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2,$$

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\left(a^2+cx\right),$$

$$a^2\left(x^2+2cx+c^2+y^2\right)=c^2x^2+2a^2cx+a^4,$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right).$$

Так как, по определению, $F_1M+F_2M>F_1F_2$, то $2a>2c$ и $a>c$. Положим

$$a^2-c^2=b^2.\ (b=\sqrt{a^2-c^2},\ c=\sqrt{a^2-b^2},\ a>b)$$

Тогда последнее уравнение примет вид

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \text{ или}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

каноническое (простейшее) уравнение эллипса.

Через r_1 и r_2 обозначают расстояние от точки M до фокусов ($r_1=F_1M$, $r_2=F_2M$). Числа r_1, r_2 называются *фокальными радиусами* точки M.

Числа a и b называются большой и малой *полуосями эллипса*. Отношение $\frac{c}{a}=\varepsilon<1$ называется *эксцентриситетом эллипса*. Фокальные радиусы определяются формулами $r_1=a+\varepsilon x$, $r_2=a-\varepsilon x$.

Гипербола

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояний между фокусами (Рис. 12).

Фокусы гиперболы обозначают буквами F_1 и F_2, расстояние между ними $F_1F_2 = 2c$.

Пусть M – произвольная точка гиперболы.

Так как, по определению, $|F_1M - F_2M| < |F_1F_2|$, то $2a < 2c$ или $a < c$. Числа F_1M и F_2M называют *фокальными радиусами* точки M и обозначают через r_1 и r_2.

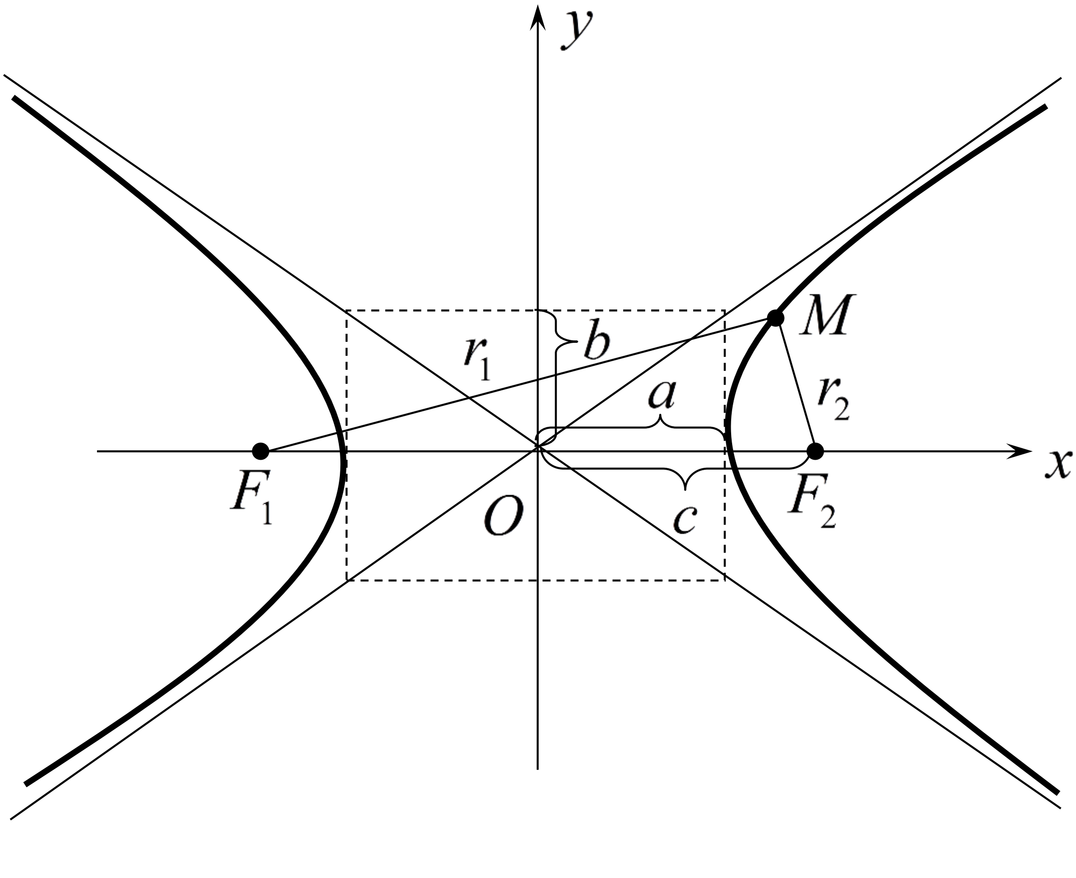


Рис. 12

Модуль разности расстояний от точки M до фокусов обозначают через $2a$: $|F_1M - F_2M| = 2a$ или $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$ Освободившись от радикалов, получим каноническое (простейшее) уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ $(c = \sqrt{a^2 + b^2})$. Число a называется *действительной*, а число b – *мнимой* полуосями гиперболы. Отношение $\frac{c}{a} = \varepsilon > 1$ называется *эксцентриситетом гиперболы*. Фокальные радиусы определяются формулами $r_1 = |\varepsilon x + a|$, $r_2 = |\varepsilon x - a|$. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ называются *асимптотами гиперболы*. Гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ называются *сопряженными*.

Парабола

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус (Рис. 13).

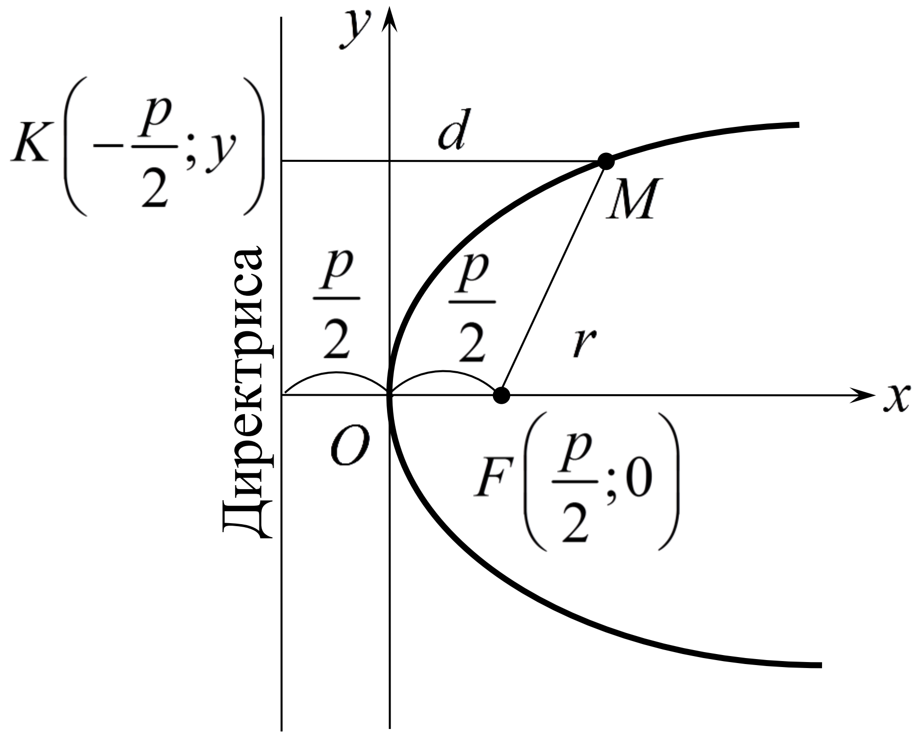


Рис. 13

Пусть M – произвольная точка параболы. Фокус параболы обозначают буквой F, а через r – расстояние от точки M до фокуса ($r = |FM|$), через d – расстояние от точки M до директрисы, через p – расстояние от фокуса до директрисы. Величину p называют *параметром параболы*.

Каноническое (простейшее) уравнение параболы:

$$y^2 = 2px.$$

(Вывод уравнения. Так как по определению $FM = MK$, то, применяя формулу расстояния между двумя точками, получим уравнение параболы в выбранной системе координат: $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$. Освободившись от радикалов, получим каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$.)

Парабола имеет фокус $F(p/2;0)$ и директрису $x = -\dfrac{p}{2}$; фокальный радиус $r = x + \dfrac{p}{2}$. Симметрична относительно оси Ox. Вершина параболы находится в начале координат.

Парабола, уравнение которой $y^2 = -2px$, $p > 0$, расположена слева от оси ординат. Вершина этой параболы совпадает с началом координат, осью симметрии является ось Ox (Рис. 14):

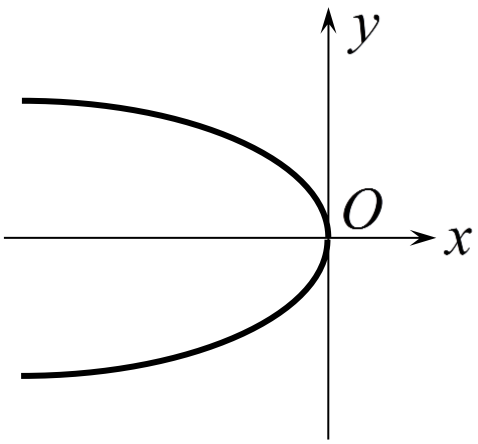


Рис. 14

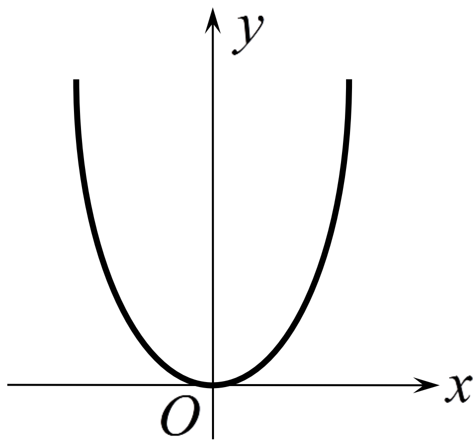


Рис. 15

Уравнение $x^2 = 2py$, $p > 0$, является уравнением параболы, вершина которой совпадает с началом координат, а осью симметрии является ось Oy. Эта парабола лежит выше оси абсцисс (Рис. 15).

Уравнение $x^2 = -2py$, $p > 0$, определяет параболу, лежащую ниже оси Ox, с вершиной в начале координат (Рис. 16).

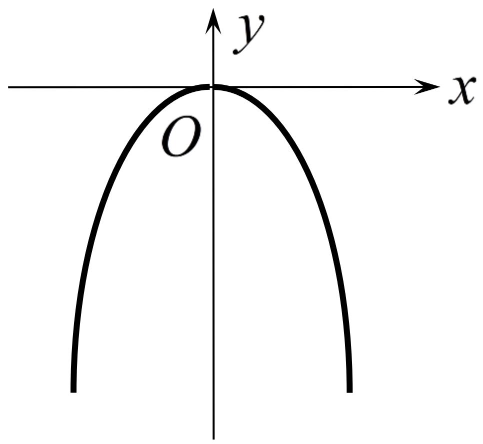


Рис. 16

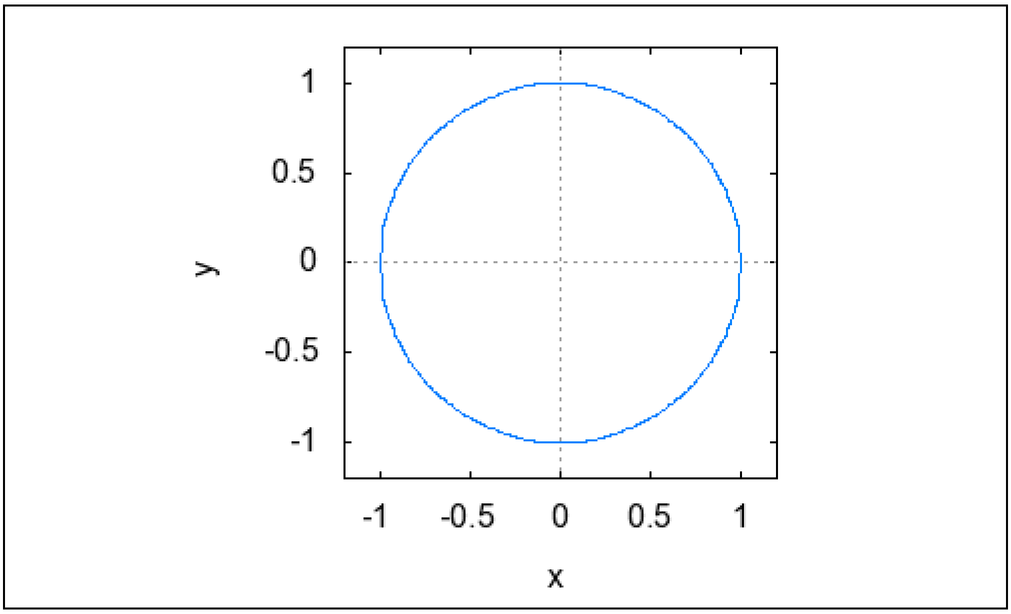
Построение линий второго порядка в MAXIMA.

Окружность

```
(%i1) load(implicit_plot)$

(%i2) wximplicit_plot([x^2+y^2-1],
      [x,-1.2,1.2], [y,-1.2,1.2],
      [gnuplot_preamble,
      "set size ratio 1; set zeroaxis;"]);
```

(%t2)

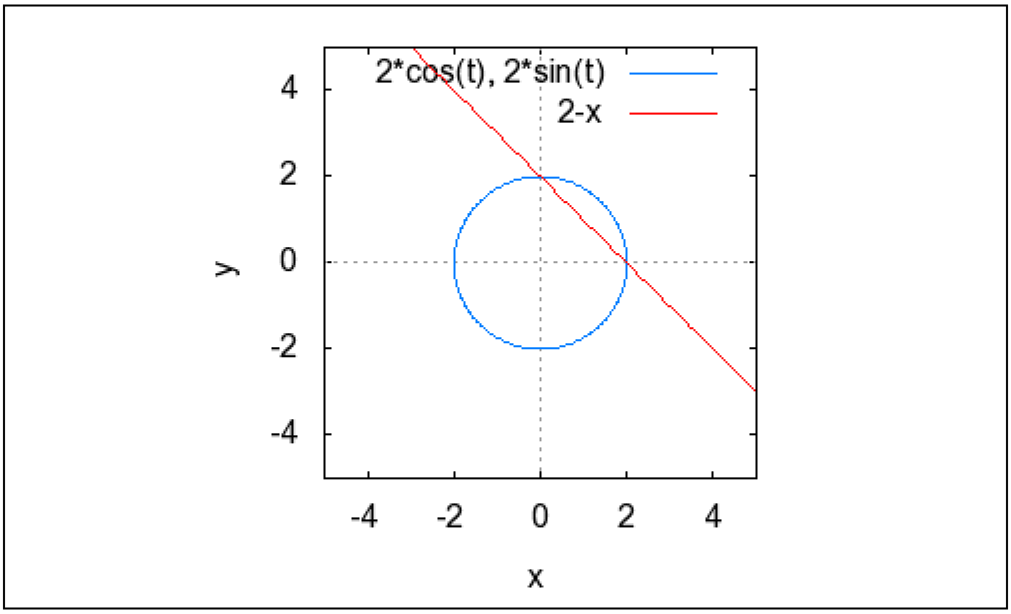


(%o2)

Пример. Найти точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 4$ и прямой $x + y = 2$.

```
(%i3) wxplot2d([['parametric, 2*cos(t), 2*sin(t),
      [t, 0, 2*%pi], [nticks, 300]], 2-x],
      [x,-5,5], [y,-5,5],
      [plot_format, gnuplot],
      [gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set zeroaxis;"])$
plot2d: some values were clipped.
```

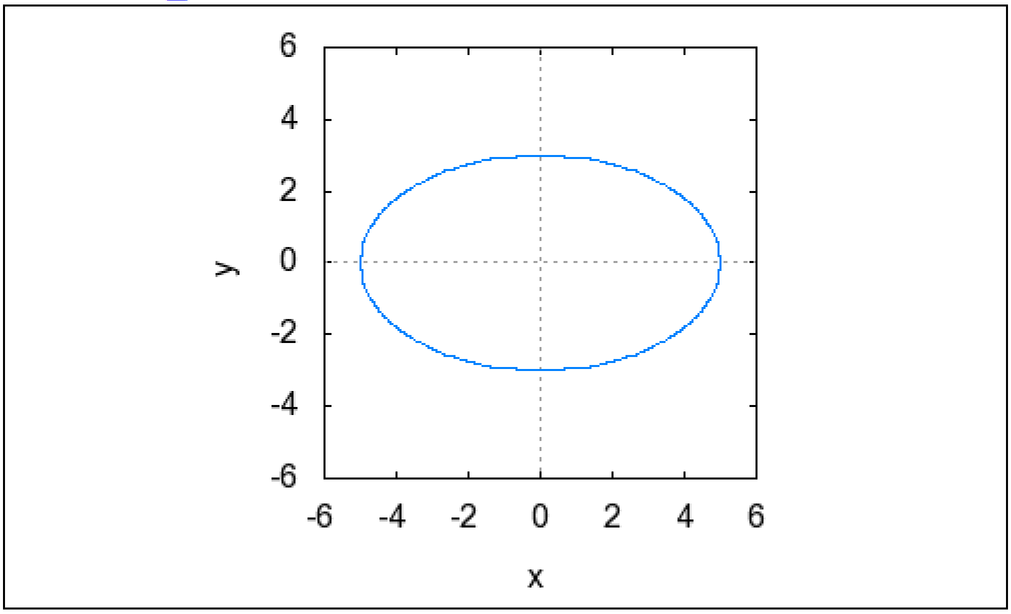
(%t3)



Эллипс

```
(%i4) wximplicit_plot((x^2)/25+(y^2)/9-1,
      [x,-6,6], [y,-6,6],
      [plot_format, gnuplot],
      [gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set zeroaxis;"]);
```

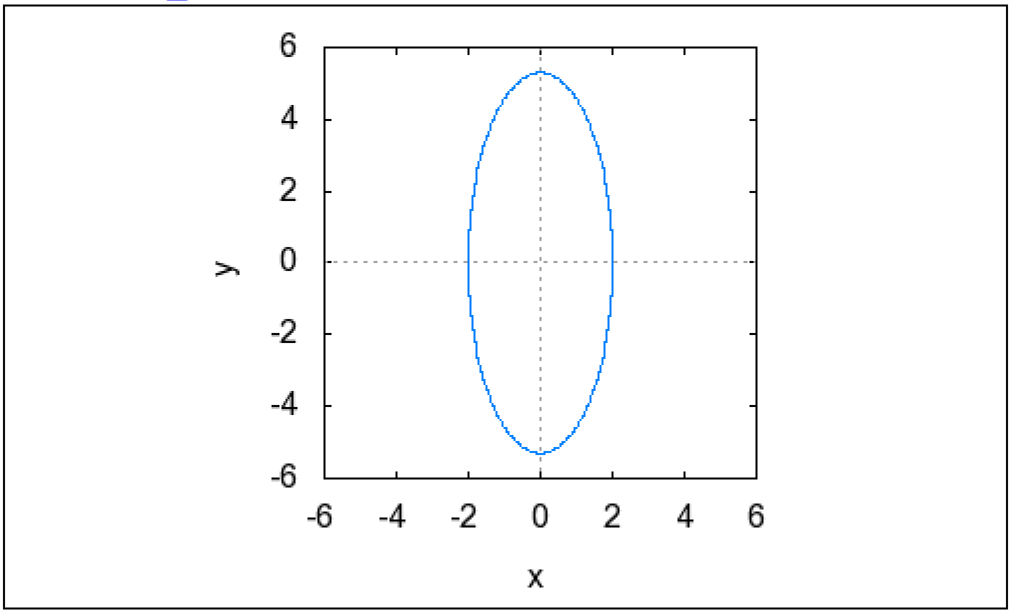
(%t4)



(%o4)

```
(%i5) wximplicit_plot((x^2)/4+(y^2)/28-1,
      [x,-6,6], [y,-6,6],
      [plot_format, gnuplot],
      [gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set zeroaxis;"]);
```

(%t5)

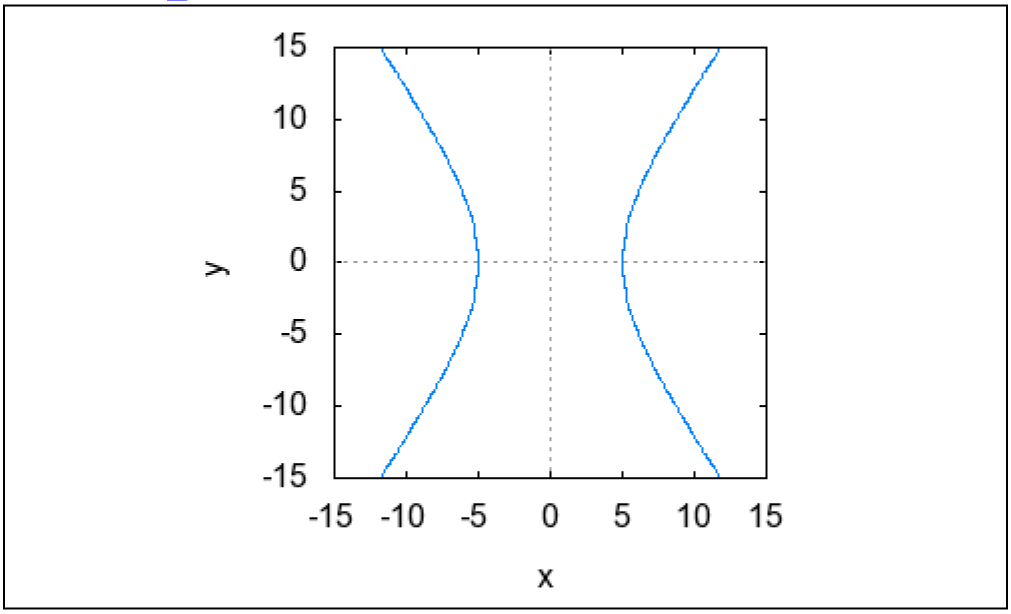


(%o5)

Гипербола

```
(%i6) wximplicit_plot([(x^2)/25-(y^2)/49-1],
      [x,-15,15], [y,-15,15],
      [plot_format, gnuplot],
      [gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set zeroaxis;"]);
```

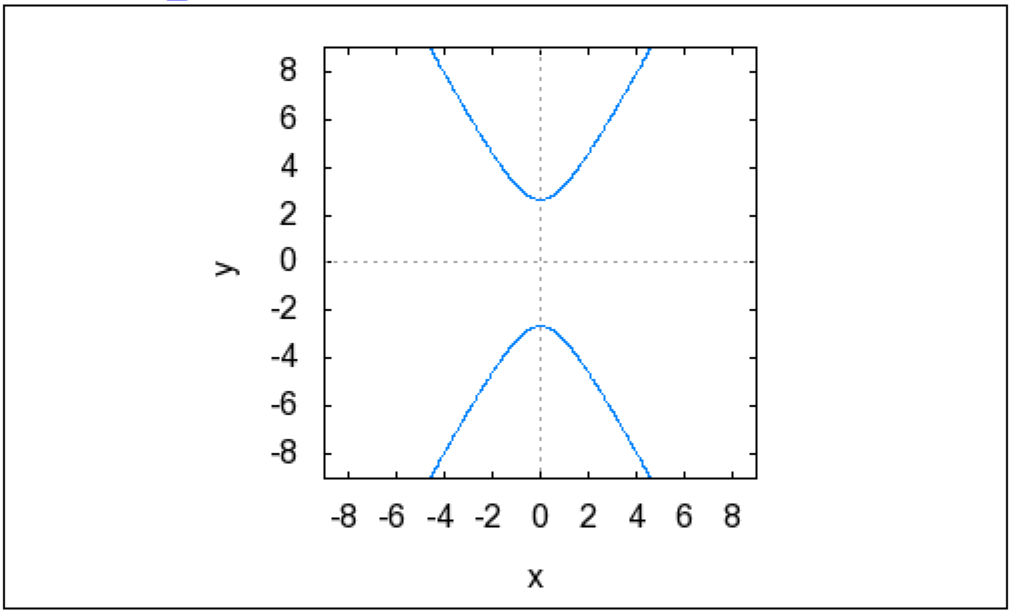
(%t6)



(%o6)

```
(%i7) wximplicit_plot([-(x^2)/2+(y^2)/7-1],
      [x,-9,9], [y,-9,9],
      [plot_format, gnuplot],
      [gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set zeroaxis;"]);
```

(%t7)

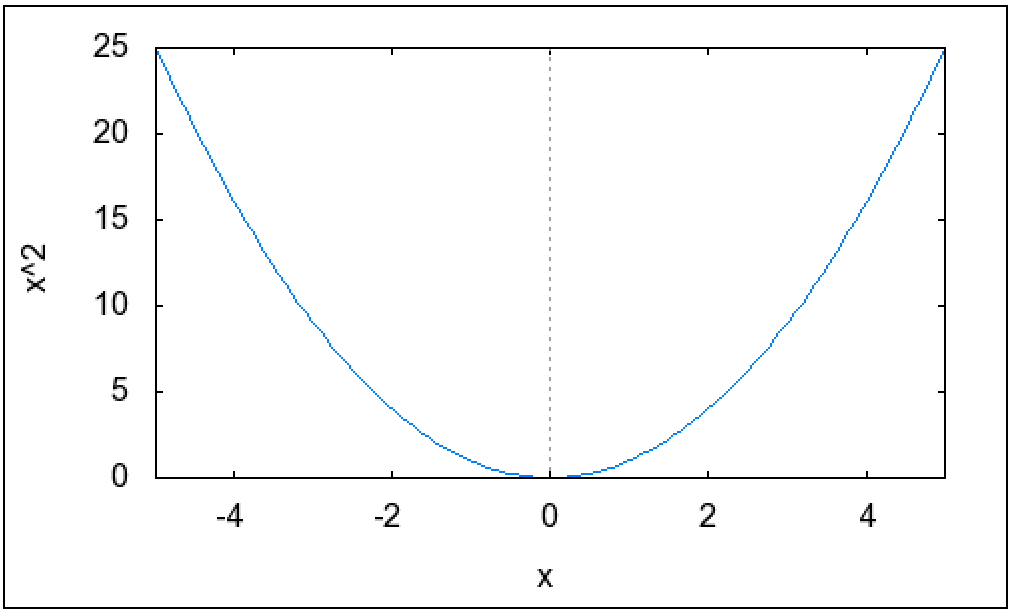


(%o7)

Парабола

```
(%i8) wxplot2d([x^2], [x,-5,5]);
```

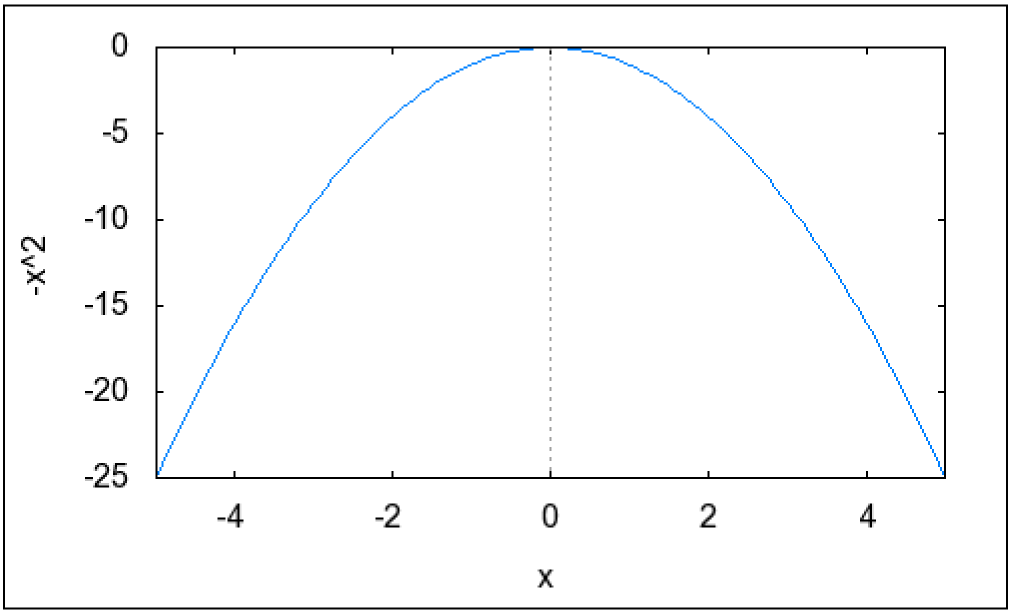
(%t8)



(%o8)

```
(%i9) wxplot2d([-x^2], [x,-5,5]);
```

(%t9)



(%o9)

Лекция 4.

Аналитическая геометрия в пространстве. Поверхности первого порядка

Уравнение первого порядка с тремя неизвестными имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, причем хотя бы один из коэффициентов A, B, C должен быть отличен от нуля. Оно задает в пространстве в *прямоугольной системе координат* $Oxyz$ *алгебраическую поверхность первого порядка*. Более подробная информация:

https://pedtext.ru/building-materials/chto-takoe-poverhnost-pervogo-poryadka-osnovnye-poverhnosti-prostranstva-i/

Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называют геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению второй степени, то есть уравнению, в котором координаты x, y и z входят в суммарной степени не выше 2. Такое уравнение имеет вид

$$A\cdot x^2 + B\cdot x\cdot y + C\cdot y^2 + D\cdot x\cdot z + E\cdot y\cdot z + F\cdot z^2 + K\cdot x + L\cdot y + M\cdot z + N = 0.$$

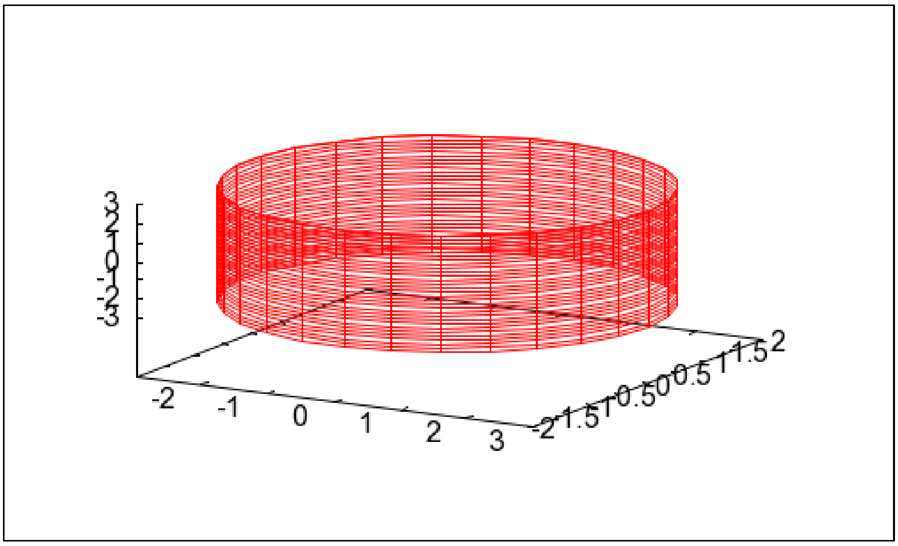
Цилиндрические поверхности

Уравнение второй степени, не содержащее одной из переменных, задает цилиндрическую поверхность. Например, уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ задает связь между координатами x и y, но не накладывает ограничений на координату z. В итоге получается поверхность, «вырастающая» из соответствующего эллипса, расположенного в плоскости XOY. Из каждой точки эллипса перпендикулярно плоскости

XOY выходит прямая, называемая *образующей* данной цилиндрической поверхности. В совокупности эти образующие составляют цилиндрическую поверхность, а сам эллипс называется *направляющей* цилиндрической поверхности (Рис. 1).

```
(%i1) load(draw);
      wxdraw3d(color = red,
      parametric_surface(3*cos(t),2*sin(t),
      z,t,0,2*%pi,z,-3,3));
(%o1) C:/PROGRA~2/MAXIMA~1.1-G/share/maxima/5.25.1/share/draw/draw.lisp
```

(%t2)



(%o2)

Рис. 1

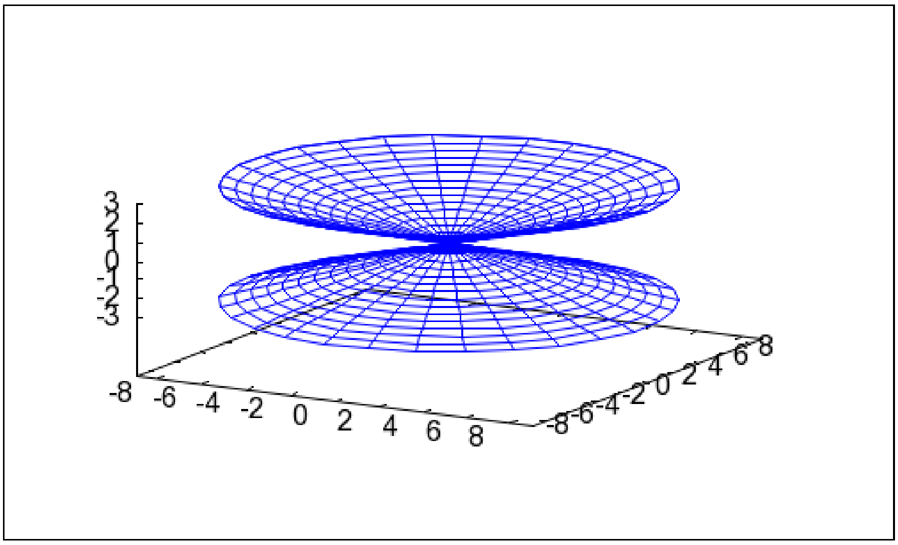
Аналогичным способом получаются цилиндрические поверхности из кривых второго порядка, лежащих в других координатных плоскостях.

Конические поверхности

Это поверхности, построенные с помощью *образующих*, не параллельных друг другу, как в цилиндрических поверхностях, а проходящих через одну и ту же точку и через точки направляющей. Примером конической поверхности является круговой конус с направляющей – окружностью. *Уравнение кругового конуса* с направляющей, лежащей в плоскости, параллельной плоскости XOY, имеет вид $z^2 = R^2 \cdot (x^2 + y^2)$ (Рис. 2).

```
(%i3) load(draw);
      wxdraw3d(color = blue,
      parametric_surface(3*z*cos(t),3*z*sin(t),
      z,t,0,2*%pi,z,-3,3));
(%o3) C:/PROGRA~2/MAXIMA~1.1-G/share/maxima/5.25.1/share/draw/draw.lisp
```

(%t4)



(%o4)

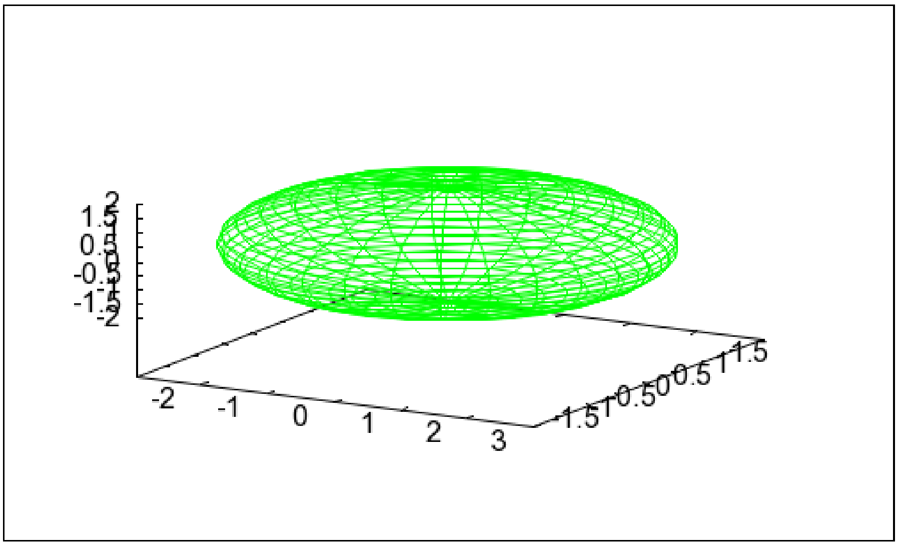
Рис. 2

Поверхности вращения

Рассмотрим в плоскости XOY эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Начнем вращать эту кривую относительно оси OX. Кривая опишет поверхность, называемую *эллипсоидом вращения* и имеющую уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ (Рис. 3).

```
(%i5) load(draw);
      wxdraw3d(color = green,
      parametric_surface(3*cos(t)*sin(s),2*sin(t)*sin(s),
      2*cos(s), t,0,2*%pi,s,0,%pi));
(%o5) C:/PROGRA~2/MAXIMA~1.1-G/share/maxima/5.25.1/share/draw/draw.lisp
```

(%t6)



(%o6)

Рис. 3

При вращении вокруг оси OX выражение y^2 в уравнении эллипса заменяется на выражение y^2+z^2. Аналогично при вращении вокруг оси OY мы получим эллипсоид вращения с уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$.

Рассмотрим в плоскости XOY гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (Рис. 4).

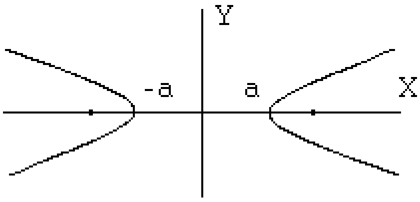
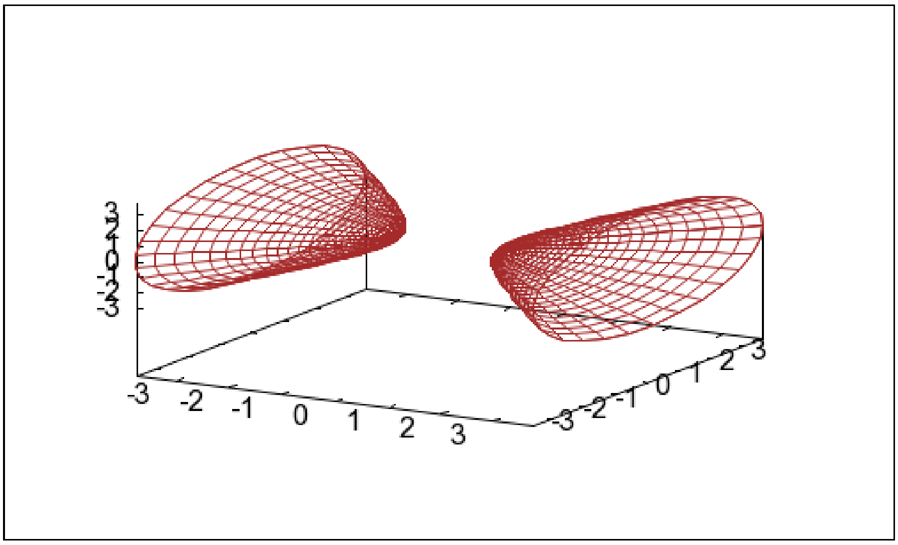


Рис. 4

Будем вращать эту кривую вокруг оси OX. Мы получим поверхность, задаваемую уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ и называемую *двуполостным гиперболоидом вращения* (Рис. 5).

```
(%i7) load(draw);
      wxdraw3d(color = brown,
      parametric_surface(cosh(u),sinh(u)*cos(v),
      sinh(u)*sin(v),u,0,2,v,0,2*%pi),
      parametric_surface(-cosh(u),sinh(u)*cos(v),
      sinh(u)*sin(v),u,0,2,v,0,2*%pi));
(%o7) C:/PROGRA~2/MAXIMA~1.1-G/share/maxima/5.25.1/share/draw/draw.lisp
(%t8)
```



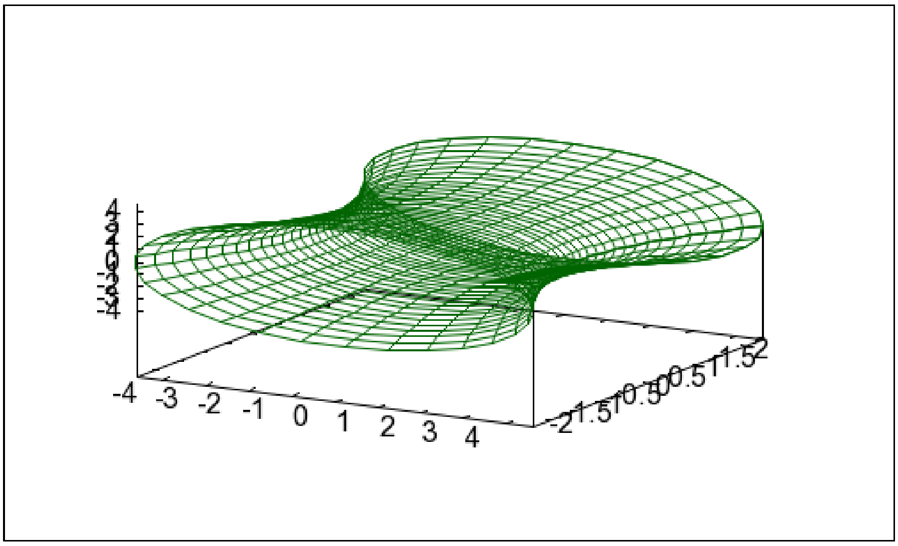

```
(%o8)
```

Рис. 5

Будем вращать ту же кривую вокруг оси OY. Мы получим поверхность, задаваемую уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$ и называемую *однополостным гиперболоидом вращения* (Рис. 6).

```
(%i9) load(draw);
      wxdraw3d(color = dark_green,
      parametric_surface(3*cosh(t)*cos(s),2*sinh(t),
      3*cosh(t)*sin(s),t,-1,1,s,0,2*%pi));
(%o9) C:/PROGRA~2/MAXIMA~1.1-G/share/maxima/5.25.1/share/draw/draw.lisp
```

(%t10)



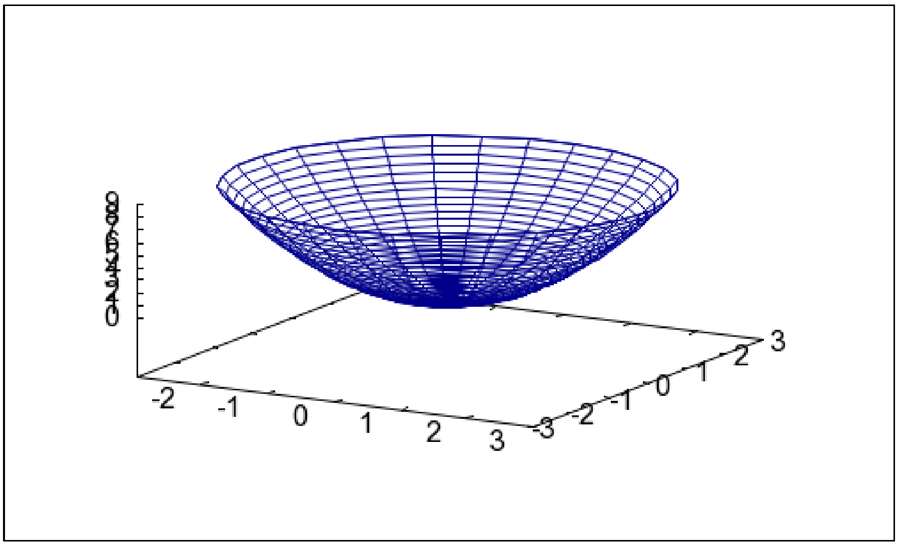
(%o10)

Рис. 6

Параболоидом вращения называется поверхность вида $z = A\cdot(x^2 + y^2)$. Эта поверхность получается вращением лежащей в плоскости XOZ параболы $z = A\cdot x^2$ вокруг своей оси (Рис. 7).

```
(%i11) load(draw);
       wxdraw3d(color = dark_blue,
       parametric_surface(s*cos(t),s*sin(t),
       s^2,s,0,3,t,0,2*%pi));
(%o11) C:/PROGRA~2/MAXIMA~1.1-G/share/maxima/5.25.1/share/draw/draw.lisp
```

(%t12)



(%o12)

Рис. 7

Лекция 5.

Множества, функции и их пределы

Для описания математических свойств используют два символа, позволяющих сокращать запись: $\forall$ (любой, произвольный, все) и $\exists$ (существует, найдется).

Переменные и постоянные величины

Величины могут быть *переменными и постоянными*, то есть меняющимися или не меняющимися. Переменные величины могут быть *независимыми и зависимыми* – меняющимися в зависимости от каких-то других величин.

Если рассмотреть уравнение окружности $x^2 + y^2 = 4$, в нем участвует две переменные величины x и y. Одной из них можно придавать в некоторой области любые значения, другая находится из приведенного уравнения. Следовательно, одну из них можно считать независимой, другую – зависимой переменной. При этом независимой переменной может считаться любая из них, тогда вторая будет зависимой.

Функция. Способы ее задания

Независимую переменную часто называют аргументом, зависимую – функцией.

Если каждому элементу некоторого множества $X \subset \mathbb{R}$ ставится в соответствие элемент множества $Y \subset \mathbb{R}$, говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$, здесь f определяет закон, с помощью которого осуществляется это соответствие.

Примеры.

1. Показательная функция $y = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Логарифмическая функция $y = \log_2 x$, $x > 0$.

3. Степенная функция $y = x^5,\ x \in \mathbb{R}$.

Функция может быть задана в виде таблицы или графика, либо формулой (аналитическое задание).

Аналитически функцию можно задать в явном виде $y = f(x)$ (*явное задание функции*), когда из формулы следует, что переменная y зависит от x, то есть является функцией аргумента x.

Можно задать ее *неявно* $F(x, y) = 0$, когда любая из переменных может считаться независимой, тогда другая переменная является функцией. Пример неявного задания функции $x^2 + y^2 = 9$.

Параметрическое задание функции $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, когда вводится дополнительный параметр $t \in [t_0, T]$. Примером является параметрическое уравнение окружности $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi)$, в неявном виде записанное как $x^2 + y^2 = 9$.

Множество X называется *областью существования* функции, или областью ее определения.

Множество Y называется *областью значений* функции.

Любое связное подмножество (то есть такое, что от одной произвольной его точки можно дойти до второй произвольной его точки, оставаясь внутри подмножества) числовой оси называется *промежутком*.

Открытый промежуток, не включающий граничных точек, называется *интервалом* и обозначается (a, b) или $a < x < b$. Замкнутый промежуток, содержащий все внутренние и граничные точки, называется *отрезком* и обозначается $\left[a,b\right]$ или $a\le x\le b$. Существуют также полуинтервалы $\left[a,b\right)$ и $\left(a,b\right]$. В первом случае в полуинтервал входит только левая граничная точка, во втором – только правая.

Последовательности.
Числовая последовательность

Под *числовой последовательностью* $x_{1,}\,x_{2,}\,x_{3,}\,\ldots x_{n,}\,\ldots$ понимается функция

$$x_n = f(n), \qquad (1)$$

заданная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Кратко последовательность обозначается в виде $\left\{x_n\right\}$ или x_n, $n\in\mathbb{N}$. Число x_1 называется первым членом (элементом) последовательности, x_2 – вторым,…, x_n – *общим* или n-м *членом последовательности.*

Чаще всего последовательность задается формулой его общего члена. Формула (1) позволяет вычислить любой член последовательности по номеру n, по ней можно сразу вычислить любой член последовательности.

Так, равенства

$$v_n = n^2+1,\; z_n=(-1)^n\cdot n,\; y_n=\frac{1}{n},\; u_n=\frac{n-1}{n},\; n\in\mathbb{N},$$

задают соответственно последовательности

$$v_n=\left\{2,5,10,\ldots,n^2+1,\ldots\right\};\; z_n=\left\{-1,2,-3,4,\ldots,(-1)^n\cdot n,\ldots\right\};$$

$$y_n=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\};\; u_n=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\ldots,\frac{n-1}{n},\ldots\right\}.$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число $M>0$, что для любого $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|x_n|\le M .$$

В противном случае последовательность называется неограниченной. Легко видеть, что последовательности y_n и u_n ограничены, а v_n и z_n – неограничены.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*неубывающей*), если для любого n выполняется неравенство $a_{n+1}>a_n$ $\left(a_{n+1}\ge a_n\right)$. Аналогично определяется убывающая (невозрастающая) последовательность.

Все эти последовательности называются *монотонными* последовательностями. Последовательности v_n, y_n и u_n монотонные, а z_n – не монотонная.

Предел числовой последовательности

Можно заметить, что члены последовательности $u_n=\dfrac{n-1}{n}$ неограниченно приближаются к числу 1 при неограниченном возрастании n. В этом случае говорят, что последовательность u_n, $n\in\mathbb{N}$ стремится к пределу 1.

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n>N$ выполняется неравенство

$$|x_n-a|<\varepsilon . \qquad (2)$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = a$ или $x_n \to a$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ (или переменная x_n, пробегающая последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$) имеет предел, равный числу a (или x_n стремится к a). Говорят также, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к a.

Коротко определение предела можно записать так:

$$\left(\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Неравенство (2) равносильно неравенствам $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, которые показывают, что элемент x_n находится в ε-окрестности точки a (Рис. 1).

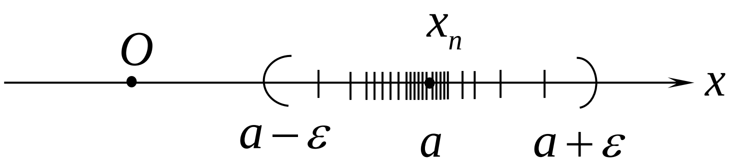


Рис. 1

Предел монотонной ограниченной последовательности

Теорема Вейерштрасса. *Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

Предел функции. Предел функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Определение (на «языке последовательностей», или по Гейне). *Число A называется* ***пределом функции*** $y = f(x)$ *в точке* x_0 *(или при* $x \to x_0$*), если для любой последовательности допустимых значений аргумента* x_n,

$n \in \mathbb{N}$ ($x_n \neq x_0$), сходящейся к x_0 (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к числу A (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$). В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Геометрический смысл предела функции: *$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \to A$ означает, что для всех точек x, достаточно близких к точке x_0, соответствующие значения функции как угодно мало отличаются от числа A.*

Бесконечно большие функции (б.б.ф.)

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой при* $x \to x_0$, если для любого числа $M > 0$ существует число $\delta = \delta(M) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$. Записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ или $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$.

Коротко:

$$(\forall M > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x : |x - x_0| < \delta,\, x \neq x_0 \Rightarrow |f(x)| > M) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$

Например, функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ есть б.б.ф. при $x \to 2$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to x_0$ и принимает лишь положительные значения в некоторой окрестности точки x_0, то пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \to +\infty$; если лишь отрицательные значения, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \to -\infty$.

Функция $y = f(x)$, заданная на всей числовой прямой, называется *бесконечно большой при* $x \to \infty$, если для любого числа $M > 0$ найдется такое число $N = N(M) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$. Коротко:

$$(\forall M > 0\ \exists N > 0\ \forall x : |x| > N \Rightarrow |f(x)| > M) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Например, $y = 2^x$ есть б.б.ф. при $x \to \infty$.

Бесконечно малые функции (б.м.ф.)

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой при* $x \to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0. \qquad (1)$$

По определению предела функции равенство (1) означает: для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Аналогично определяется б.м.ф. при $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$: во всех этих случаях $f(x) \to 0$.

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами или бесконечно малыми; обозначают обычно греческими буквами α, β и т.д.

Примерами б.м.ф. служат функции $y = x^2$ при $x \to 0$; $y = x - 2$ при $x \to 2$.

Другой пример: $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ – бесконечно малая последовательность.

Точка x_0, в которых рассматриваются бесконечно малые и бесконечно большие величины – одинакова для всех рассматриваемых функций.

Теорема 1. *Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.*

Теорема 2. *Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая.*

Следствие 1. *Произведение двух б.м.ф. есть функция бесконечно малая.*

Следствие 2. *Произведение б.м.ф. на число есть функция бесконечно малая.*

Теорема 3. *Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть функция бесконечно малая.*

Теорема 4. *Если функция* $\alpha(x)$ *– бесконечно малая* $(\alpha \neq 0)$*, то функция* $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ *есть бесконечно большая функция и наоборот: если функция* $f(x)$ *– бесконечно большая, то* $\dfrac{1}{f(x)}$ *– бесконечно малая.*

Основные свойства пределов

В приводимых свойствах будем считать, что пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$ существуют.

1. Предел постоянной равен самой постоянной:

$$\lim_{x\to x_0} C = C.$$

2. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\pm\varphi(x)\big)=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

3. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot\varphi(x)\big)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0} C\cdot f(x)=C\cdot\lim_{x\to x_0} f(x).$$

5. Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}\ \left(\text{если } \lim_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0\right).$$

6. Если $f(x)\le\varphi(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

7. (О пределе промежуточной функции). Если функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $g(x)$, стремящимися к одному и тому же пределу, то она также стремится к этому пределу, т.е. если

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A,\ \lim_{x\to x_0}g(x)=A,$$

$$\varphi(x)\le f(x)\le g(x),$$

то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

Это правило иногда называют «правилом двух полицейских», суть которого в следующем. Если вас ведут под руки двое полицейских и идут они в участок, то ты окажешься там же.

8. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n$. В частности, $\lim\limits_{x\to x_0} x^n={x_0}^n,\ n\in\mathbb{N}$.

Замечательные пределы

Первый замечательный предел: предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=1.$$

Следствия. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=1.$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left\{1^{\infty}\right\}=e,$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\left\{1^{\infty}\right\}=e,$$

где $e-$число, которое называют неперовым числом, $e\approx 2,72$ $(e=2,718281828459045\ldots)$.

Равносильность этих формул следует из связи переменных: $\alpha=\dfrac{1}{x}$.

Третий замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}=1.$$

Четвертый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1.$$

Лекция 6.

Непрерывность функций.
Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

Равенство (1) означает выполнение трех условий:
1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности;
2) функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$;
3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т.е. выполняется равенство (1).

Так как $\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0$, то равенство (1) можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0). \qquad (2)$$

Это означает, что при нахождении предела непрерывной функции $f(x)$ можно перейти к пределу под знаком функции, то есть в функцию $f(x)$ вместо аргумента x подставить его предельное значение x_0.

Можно дать еще одно определение непрерывности функции, опираясь на понятия приращения аргумента и функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(a;b)$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a;b)$. Для любого $x \in (a;b)$ разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента* x *в точке* x_0 и обозначается Δx («дельта x»): $\Delta x = x - x_0$. Отсюда $x = x_0 + \Delta x$.

Разность соответствующих значений функций $f(x)-f(x_0)$ называется *приращением функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначается Δy (или Δf или $\Delta f(x_0)$): $\Delta y = f(x)-f(x_0)$ или $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ (Рис. 1).

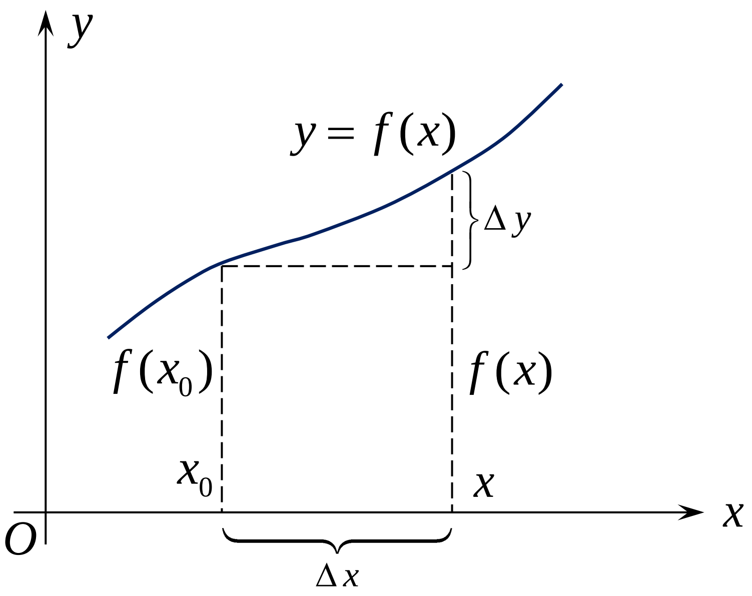


Рис. 1

Запишем равенство (1) в новых обозначениях. Так как условия $x \to x_0$ и $x - x_0 \to 0$ одинаковы, то равенство (1) принимает вид $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$ или

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{3}$$

Полученное равенство (3) является еще одним определением непрерывности функции в точке: функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в точке x_0 и ее окрестности и выполняется равенство (3), т.е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Непрерывность функции в интервале и на отрезке

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в интервале* $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a;b]$, если она непрерывна в интервале $(a;b)$ и в точке $x=a$ *непрерывна справа* (т.е. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$), а в точке $x=b$ *непрерывна слева* (т.е. $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$).

Точки разрыва функции

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва этой функции*. Если $x=x_0$ – точка разрыва функции $y=f(x)$, то в ней не выполняется, по крайней мере, одно из условий первого определения непрерывности функции, а именно:

Функция определена в окрестности точки x_0, но не определена в самой точке x_0.

Например, функция $y=\dfrac{1}{x-2}$ не определена в точке $x_0=2$ (Рис. 2).

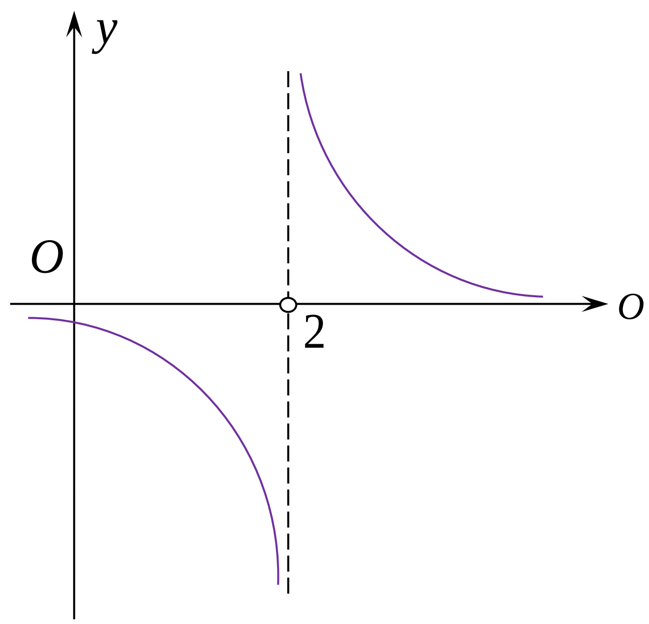


Рис. 2

Вычисление пределов функций

Сначала рассмотрим предел функции, непрерывной в точке x_0.

Пусть необходимо вычислить предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, причем значение функции в предельной точке $f(x_0)$ известно и равно конечному числу. В этом случае $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, что следует из первого определения непрерывности функции в точке. Задача решена. Однако имеется альтернативный случай, когда значение функции в предельной точке не существует, тогда поступают следующим образом. Подставляя в функцию под знаком предела предельное значение аргумента и не получая желаемого результата, то есть $f(x_0)$, делаем вывод, что вместо ответа мы получили неопределенность, и от нее нужно каким-то образом избавляться. Эта процедура называется раскрытием неопределенности. Чтобы предметно говорить о раскрытии неопределенности, рассмотрим некоторые виды неопределенности. В символических обозначениях это $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}, \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}, \{\infty - \infty\}, \{0 \cdot \infty\}, \{1^\infty\}, \{0^0\}, \{0^\infty\}, \{\infty^0\}$. Нужно с пониманием относиться к этим обозначениям. Это вовсе не деление на нуль или бесконечность, не разность между бесконечностями и т.д., это обозначения того результата, который получается при подстановке предельного значения аргумента в функцию, стоящую под знаком предела, другими словами, это информация, к какому виду неопределенности мы пришли в результате совершенного действия.

Правила вычисления предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

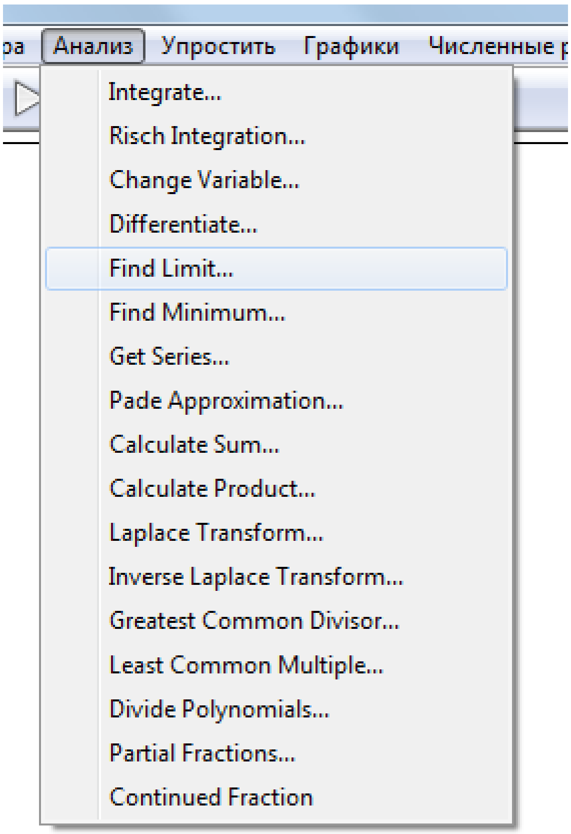
1. Подставляем в функцию под знаком предела вместо аргумента x его предельное значение x_0. Если в результате подстановки получаем конкретное значение, то рассматриваемый предел равен этому конкретному значению $f(x_0)$, что находится в полном соответствии с первым определением непрерывности функции.

2. Если после указанной подстановки вместо x его предельного значения x_0 получаем неопределенность, раскрываем ее с помощью тождественных преобразований. Получив в результате тождественных преобразований под знаком предела новую функцию, опять подставляем в нее предельное значение аргумента. Если неопределенность исчезла, записываем полученное значение предела. Если неопределенность сохранилась, либо перешла в другую неопределенность, продолжаем тождественные преобразования до тех пор, пока не добьемся положительного результата.

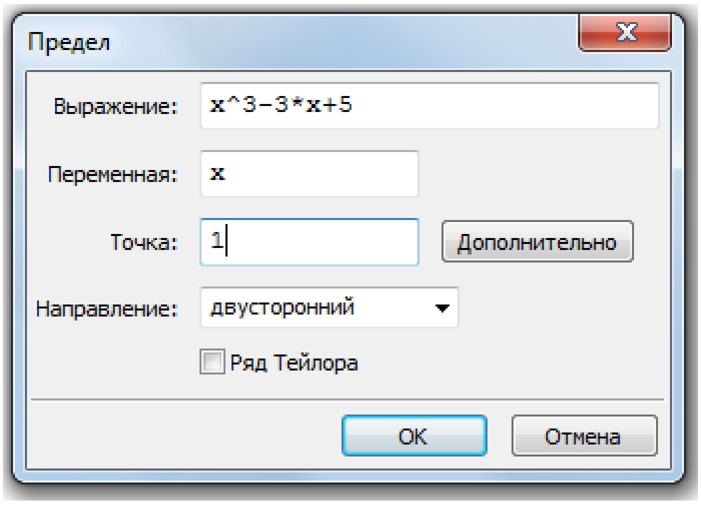
Примеры. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x \to 1}\left(x^3 - 3x + 5\right) = 1 - 3 + 5 = 3.$

Анализ → Find Limit



В появившемся окне заполняем данные



Получаем ответ

```
(%i1) limit(x^3-3*x+5, x, 1);
(%o1) 3
```

2. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{2x}=\frac{\sin\pi}{2\pi}=0.$

```
(%i2) limit(sin(x)/(2*x), x, %pi);
(%o2) 0
```

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}2\cos x=1\cdot 2=2.$$

```
(%i3) limit(sin(2*x)/x, x, 0);
(%o3) 2
```

Способы раскрытия неопределенностей.

Раскрытие неопределенностей вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$

Самым простым видом неопределенности является неопределенность $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, поскольку правило ее раскрытия единое – переход от бесконечно больших к конечным величинам и бесконечно малым. Для этого в числителе и знаменателе выносим за скобки самые большие величины с учетом предельного значения аргумента и проводим сокращение этих больших величин, устраняя таким образом неопределенность, что позволяет вычислить предел. Речь идет об алгебраической сумме, т.е. рассматриваются дроби, в числителе и знаменателе которых содержатся выражения, которые являются алгебраическими суммами некоторых функций, поведение которых в предельной точке известно.

Примеры. Вычислить пределы:

$$4.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+6}{2x^2-3}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{\left(2-\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{1}{2}.$$

```
(%i4) limit((x^2-x+6)/(2*x^2-3), x, inf);
(%o4) 1/2
```

$$5.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2+6}{2x^2+4}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x^3}\right)}{x^2\left(2+\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x^3}\right)}{\left(2+\frac{4}{x^2}\right)}=\infty.$$

```
(%i5) limit((x^3-x^2+6)/(2*x^2+4), x, inf);
(%o5) ∞
```

$$6.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+6}{2x^3-3x+2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x^3\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}=0.$$

```
(%i6) limit((x^2-x+6)/(2*x^3-3*x+2), x, inf);
(%o6) 0
```

Раскрытие неопределенностей вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$

Рассмотрим некоторые приемы, позволяющие раскрыть данную неопределенность.

1) В числителе и знаменателе выражения под знаком предела – многочлены. В этом случае каждый из многочленов записывается в виде произведения простейших скобок, причем одна из этих скобок известна до решения примера. После сокращения, как правило, неопределенность «исчезает», и предел вычисляется.

Примеры. Вычислить пределы:

$$7.\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-6x+8}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-1)}{(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(2-1)}{2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{-2}=\lim_{x\to 2}(-1)=-1.$$

```
(%i7) limit((x^3-3*x^2+2*x)/(x^2-6*x+8), x, 2);
(%o7) -1
```

$$8.\ \lim_{x\to3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-6x+9}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-3)^2}=\lim_{x\to3}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-3)}=\infty.$$

```
(%i8) limit((2*x^2-5*x-3)/(x^2-6*x+9), x, 3);
(%o8) infinity
```

$$9.\ \lim_{x\to3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to3}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{2\left(3+\frac{1}{2}\right)}{1}=7.$$

```
(%i9) limit((2*x^2-5*x-3)/(x^2-5*x+6), x, 3);
(%o9) 7
```

2) В числителе или знаменателе стоят выражения, содержащие радикалы.

Пример. Вычислить предел:

$$10.\ \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{2(x-1)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{2(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+8-9}{2(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{2\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{2(3+3)}=\frac{1}{12}.$$

```
(%i10) limit((sqrt(x+8)-3)/(2*(x-1)), x, 1);
(%o10) 1/12
```

3) Выражение под знаком предела содержит тригонометрические или обратные тригонометрические функции, это в большинстве случаев предполагает использование первого замечательного предела.

Пример. Вычислить предел:

$$11.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{5x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{5x^2}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=\frac{2}{5}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2=\frac{2}{5}.$$

```
(%i11) limit((1-cos(2*x))/(5*x^2), x, 0);
(%o11) 2/5
```

Раскрытие неопределенностей вида $\{\infty-\infty\}$ и $\{0\cdot\infty\}$

Общий прием раскрытия этих неопределенностей – сведение их к выражению, не содержащему неопределенности, или к неопределенностям $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Примеры. Вычислить пределы:

$$12.\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2-x^2}{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)}=0.$$

```
(%i12) limit(sqrt(1+x^2)-x, x, inf);
(%o12) 0
```

$$13.\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^3-3x^4+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{4}{x}\right)}{x^3\left(9+\frac{6}{x}-\frac{12}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\frac{4}{x}\right)}{\left(9+\frac{6}{x}-\frac{12}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right)}=\frac{2}{9}.$$

```
(%i13) limit(x^3/(3*x^2-4)-x^2/(3*x+2), x, inf);
(%o13) 2/9
```

14. $\lim_{x\to 0} x\sin 2x\,\mathrm{ctg}^2 5x=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sin 2x}{\mathrm{tg}^2 5x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x\cos^2 5x}{\sin^2 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin 2x}{2x}\frac{x\cos^2 5x}{\sin^2 5x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{2\cdot 25x^2}{25\sin^2 5x}\cos^2 5x=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\lim_{x\to 0}\left(\frac{5x}{\sin 5x}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{2}{25}\cos^2 5x=\frac{2}{25}.$$

```
(%i14) limit(x*sin(2*x)*(cot(5*x))^2, x, 0);
(%o14) 2/25
```

Лекция 7.

Производная. Дифференциал функции.
Задача о проведении касательной к кривой

Пусть заданная кривая является графиком непрерывной функции $y = f(x)$, $x \in [a;b]$, и требуется провести касательную к этой кривой в точке $c \in (a;b)$. Заметим, что *касательная* – это прямая, получающаяся в пределе из хорд, проходящих через точки $(c; f(c))$ и $(c+\Delta x; f(c+\Delta x))$, когда $\Delta x \to 0$. Уравнение хорды – прямой, проходящей через две заданные различные точки, – имеет вид:

$$\frac{x-c}{(c+\Delta x)-c} = \frac{y-f(c)}{f(c+\Delta x)-f(c)}$$

или

$$y = f(c) + \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}(x-c).$$

Делая предельный переход при $\Delta x \to 0$, получим предельное значение углового коэффициента хорд – угловой коэффициент касательной: $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$. На рисунке касательная представлена пунктиром. Итак, $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол, образованный касательной с положительным направлением оси Ox (Рис. 1).

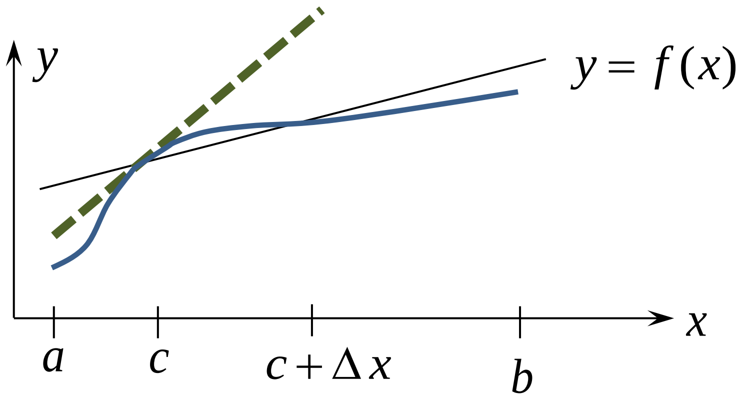


Рис. 1

Очевидно, что существуют непрерывные кривые, в некоторых точках которых провести касательную невозможно (Рис. 2).

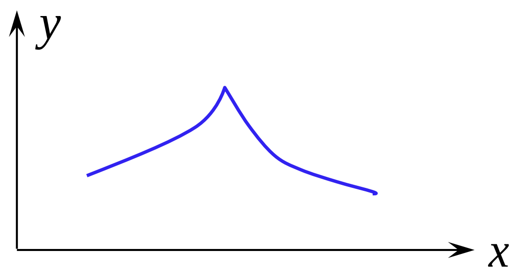


Рис. 2

Возникает вопрос: какое условие нужно наложить на функцию $f(x)$ в окрестности точки c, чтобы в соответствующей точке можно было провести касательную к графику этой функции.

Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если ее приращение $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$ представимо в виде $\Delta f = A\Delta x + \beta$, причем A – константа, $\beta = o(\Delta x)$ – бесконечно малая функция, более высокого порядка малости, чем Δx, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\beta}{\Delta x} = 0$.

Установим значение A, для чего вычислим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[A + \frac{\beta}{\Delta x} \right] = A.$$

Назовем число A *производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначим ее $f'(x_0)$, в результате получаем определение производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ и, кроме того,

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Как было сказано выше, второе слагаемое в выражении приращения функции – величина более высокого порядка малости, чем величина Δx, а следовательно, и чем величина $f'(x_0)\Delta x$. Другими словами, *первое слагаемое в выражении приращения функции представляет основную часть приращения функции*. Называют его *дифференциалом функции* $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначают $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$. В целях единообразия и для того, чтобы подчеркнуть, что Δx – бесконечно малая величина, приращение аргумента Δx в этой формуле обозначают dx. Тогда $df = f'(x)dx$, откуда следует второе обозначение производной $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$. Связь между приращением функции и ее дифференциалом изображена на рисунке 3.

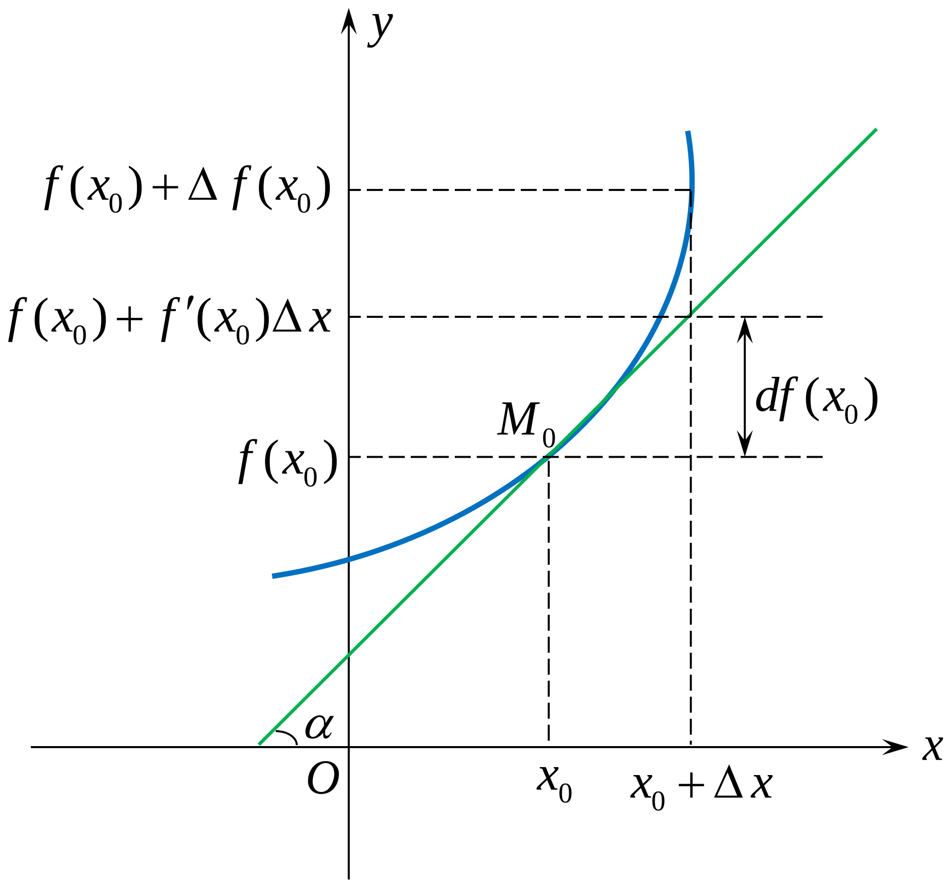


Рис. 3

Замечание. Геометрическим смыслом производной $f'(x_0)$ является тангенс угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$.

Физическим смыслом производной $f'(x_0)$ является скорость в момент $x = x_0$, когда зависимость длины пути y от скорости x задается функцией $y = f(x)$.

Теорема. *Дифференцируемая в точке* x_0 *функция непрерывна в этой точке.*

В самом деле, поскольку

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \right) = 0,$$

имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Если из условия непрерывности функции следует, что приращение функции Δy бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, то из условия дифференцируемости получается, что Δy бесконечно малая одного порядка малости с Δx.

Вычисление производной называют дифференцированием функции.

Таблица производных.
Правила дифференцирования

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – две дифференцируемые на $(a;b)$ функции.

1. Производная суммы, разности:

$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$

2. Производная произведения:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'; \ (C \cdot u)' = C \cdot u', \text{ где } C = \text{const};$$

3. Производная частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \ v \neq 0; \ \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C} \cdot u', \text{ где } C = \text{const};$$

$$\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C \cdot v'}{v^2}, \text{ где } C = \text{const};$$

4. Производная сложной функции:

Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции (или функции от функции) $y = f(\varphi(x))$ существует и равна произведению производной данной функции y по промежуточному аргументу и производной промежуточного аргумента u по независимой переменной x:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

5. Производная обратной функции:

Пусть $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$ – обратная функция. Если производная в точке x_0 функции $f(x)$ существует и отлична от нуля, тогда существует производная обратной функции в точке y_0 и она равна

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \text{ или } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \text{ или } \varphi'\left(y_0\right) = \frac{1}{f'\left(x_0\right)}.$$

6. Производная степенно-показательной функции:
$y = u(x)^{v(x)}$.

$\ln y = \ln u^v$,

$\ln y = v \cdot \ln u$,

$$\frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u},$$

$$y' = y \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right),$$

$$y' = u^v \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right),$$

$$(u^v)' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.$$

Производные основных элементарных функций

1. $(C)' = 0$, где $C = \text{const}$

2. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$

3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$; $\left(e^x\right)' = e^x$

4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$

5. $(\sin x)' = \cos x$

6. $(\cos x)' = -\sin x$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

На практике чаще всего приходится находить производные от сложных функций. Поэтому в приведенной ниже таблице формул дифференцирования аргумент «x» заменен на промежуточный аргумент «u».

Формулы дифференцирования

Здесь $u = u(x)$ – функция, дифференцируемая по x. Приведенные формулы получаются с помощью правила дифференцирования сложной функции и таблицы, данной на странице 101.

1. $(C)' = 0$, где $C = \mathrm{const}$

2. $\left(u^n\right)' = \alpha \cdot u^{n-1} \cdot u'$; $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

3. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$; $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$

4. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$; $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

7. $(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

8. $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

9. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

10. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

11. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

12. $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Примеры вычисления производных

Пример 1. Найти производную первого порядка функции $y = \sin^4(7x+3)$.

Решение.

$$y' = 4\sin^3(7x+3)\cdot\cos(7x+3)\cdot 7 = 28\cdot\sin^3(7x+3)\cdot\cos(7x+3).$$

```
(%i1) diff((sin(7*x+3))^4,x,1);
(%o1) 28 cos(7 x+3) sin(7 x+3)^3
```

Пример 2. Найти производную первого порядка функции $y = 2^{\ln(\mathrm{ctg} 3x)}$.

Решение.

$$y' = 2^{\ln(\mathrm{ctg}3x)}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{\mathrm{ctg}3x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2(3x)}\right)\cdot 3 = -2^{\ln(\mathrm{ctg}3x)}\frac{3\cdot\ln 2}{\mathrm{ctg}3x\cdot\sin^2(3x)}.$$

```
(%i2) diff(2^log(cot(3*x)),x,1);
(%o2) -3 log(2) 2^log(cot(3 x)) csc(3 x)^2 / cot(3 x)
```

Дифференцирование неявно заданных функций

Если функция задана неявно, перед дифференцированием следует определиться, какую переменную считать аргументом. Пусть $x^2+y^2=9$. Считаем x независимой переменной, $y-$функцией. Можно из уравнения определить $y=-\sqrt{9-x^2}$ и $\tilde{y}=\sqrt{9-x^2}$, тогда $y'=\frac{2x}{2\sqrt{9-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$ и $\tilde{y}'=-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$. Но можно поступить по-другому. Дифференцируем обе части уравнения $x^2+y^2=9$ по переменной x, используя при этом правило дифференцирования сложных функций: $\left(x^2+y^2\right)'_x=(9)'_x \Rightarrow 2x+2y\cdot y'=0$, откуда следует $y'=-\frac{x}{y}$.

В рассмотренном случае из неявного задания функции можно было перейти к явному ее заданию. Иногда это невозможно, и приходится применять второй способ.

Пусть $3x+5y^2-e^{xy}=0$, $y'_x=?$

Отметим, что здесь уже задано, что y следует считать функцией x. Дифференцируем по x, считая y промежуточным аргументом

$$\left(3x+5y^2-e^{xy}\right)'_x=0'_x,$$

$$3+10yy'-e^{xy}\left(y+xy'\right)=0,$$

$$y'\left(10y-xe^{xy}\right)=ye^{xy}-3,$$

$$y'=\frac{ye^{xy}-3}{10y-xe^{xy}}.$$

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) f(x,y):=3*x+5*y^2-%e^(x*y);
      -diff(f(x,y),x)/diff(f(x,y),y);
```

(%o1) $f(x,y):=3x+5y^2-\%e^{xy}$

(%o2) $\dfrac{y\,\%e^{xy}-3}{10\,y-x\,\%e^{xy}}$

Дифференцирование функции, заданной параметрически

Пусть $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$

где t – параметр.

Тогда, $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ или $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$.

Пример. Вычислить производную первого порядка функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$.

Решение.

$x'_t = 2(1 - \cos t)$, $y'_x = 2\sin t$ и $y'_x = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$.

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) x(t):=2*(t-sin(t));
      y(t):=2*(1-cos(t));
      diff(y(t),t)/diff(x(t),t);
(%o1) x(t):=2(t-sin(t))
(%o2) y(t):=2(1-cos(t))
         sin(t)
(%o3)  ----------
       1-cos(t)
```

Логарифмическое дифференцирование

Здесь имеется ввиду дифференцирование с предварительным логарифмированием функции. Пусть $y = x^{\operatorname{tg} x}$. При вычислении производной нет возможности использовать таблицу производных, так как эта функция не является ни степенной, ни показательной. Прологарифмируем обе части уравнения: $\ln y = \ln\left(x^{\operatorname{tg} x}\right) \Rightarrow \ln y = \operatorname{tg} x \ln x$. В результате от явного задания функции перешли к неявному, при этом функция стала более удобной для дифференцирования. В самом деле, $(\ln y)'_x = (\operatorname{tg} x \ln x)'_x$. Поэтому $\frac{1}{y} y' = \frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}$. В результате

$$y' = y\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right) = x^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right).$$

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) diff(x^tan(x),x,1);
```

$$\text{(\%o1)}\quad x^{\tan(x)}\left(\frac{\tan(x)}{x}+\log(x)\sec(x)^2\right)$$

Лекция 8.

Производные и дифференциалы высших порядков

Второй производной функции $y = f(x)$ называется производная ее первой производной $y'' = (y')'$.

Если физический смысл первой производной есть скорость изменения функции, то *вторая производная определяет* скорость изменения скорости изменения функции, то есть *ускорение*. Аналогично определяется производная любого порядка:

$$y''' = (y'')', \dots, y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Пример. Найти производную третьего порядка функции $y = x^5$.

Решение.

Так как $y = x^5$, то $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$.

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) diff(x^5,x,3);
(%o1) 60 x^2
```

Аналогично определяются *дифференциалы высших порядков*.

Дифференциал второго порядка – это дифференциал от дифференциала, т.к. $df(x) = f'(x)dx$, тогда

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = (df(x))'dx = (f'(x)dx)'dx,$$

dx – бесконечно малое приращение, не зависящее от x, поэтому производная от dx вычисляется, как от постоянной. Т.е.

$$d^2 f(x) = (f'(x)dx)'dx^2 = f''(x)dx^2.$$

Подобным образом получим $d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n$.

Производная высших порядков неявно заданной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно в виде уравнения $F(x; y) = 0$. Продифференцировав это уравнение по x и разрешив полученное уравнение относительно по y', найдем производную первого порядка (первую производную). Продифференцировав по x первую производную, получим вторую производную от неявной функции. В нее войдут x, y и y'. Подставляя уже найденное значение y' в выражение второй производной, выразим y'' через x и y.

Аналогично поступаем для нахождения производной третьего (и дальше) порядка.

Пример. Найти y'', если $x^2 + y^2 = 1$.

Решение.

$2x + 2yy' = 0$, $y' = -\dfrac{x}{y}$,

$$y'' = -\frac{1 \cdot y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\dfrac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}$$

(так как $x^2 + y^2 = 1$).

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) f(x,y):=x^2+y^2-1;
```

(%o1) $f(x,y):=x^2+y^2-1$

```
(%i2) (-diff(diff(f(x,y),x,1),x,1)-
      2*diff(diff(f(x,y),x,1),y,1)*
      (-diff(f(x,y),x,1)/diff(f(x,y),y,1))-
      diff(diff(f(x,y),y,1),y,1)*
      (-diff(f(x,y),x,1)/diff(f(x,y),y,1))^2)/
      diff(f(x,y),y,1);
```

(%o2) $\dfrac{-\dfrac{2x^2}{y^2}-2}{2y}$

```
(%i3) ratsimp(%);
```

(%o3) $-\dfrac{y^2+x^2}{y^3}$

```
(%i4) at(%o3, x^2+y^2=1);
```

(%o4) $-\dfrac{1}{y^3}$

Производные высших порядков от функций, заданных параметрически

Известно, что $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$y''_{xx}=\left(y'_x\right)'_x=\left(y'_x\right)'_t\cdot t'_x=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}=\frac{\left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t}=\frac{y''_{tt}\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}.$$

Аналогично получаем

$$y'''_{xxx}=\frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t},\ldots$$

функции $y = y(x)$, заданной параметрически.

Пример. Найти вторую производную функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

Решение.

$$y'_x = \frac{(\sin t)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\mathrm{ctg} t,$$

$$y''_{xx} = \frac{(-\mathrm{ctg} t)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\dfrac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}.$$

Решение в MAXIMA.

```
(%i1) x(t):=cos(t);
      y(t):=sin(t);
(%o1) x(t):=cos(t)
(%o2) y(t):=sin(t)
(%i3) diff(diff(y(t),t)/diff(x(t),t),t)/diff(x(t),t);
```

$$(\%o3)\quad -\frac{\dfrac{\cos(t)^2}{\sin(t)^2}+1}{\sin(t)}$$

```
(%i4) ratsimp(%);
```

$$(\%o4)\quad -\frac{\sin(t)^2+\cos(t)^2}{\sin(t)^3}$$

```
(%i5) trigsimp(%);
```

$$(\%o5)\quad -\frac{1}{\sin(t)^3}$$

Приложения производной функции. Правило Лопиталя

(Правило раскрытия неопределенностей $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ и $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$)

Пусть требуется вычислить предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем функции в числителе и знаменателе дифференцируемы в окрестности точки a, за исключением, может быть, самой точки a и имеет место одна из неопределенностей $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, тогда если существует предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, возможно, равный бесконечности, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Правило справедливо и когда a – бесконечно удаленная точка.

Примеры. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-3}{2x}=\frac{1}{4}$.

```
(%i1) limit((x^2-3*x+2)/(x^2-4), x, 2);
(%o1) 1/4
```

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$

```
(%i2) limit(log(x)/x, x, inf);
(%o2) 0
```

Исследование функций.
Теорема о возрастании (убывании) функции $y = f(x)$ на интервале

Необходимое условие возрастания (убывания) функции на интервале. Если функция $y = f(x)$, имеющая производную на интервале (a,b), возрастает (убывает) на этом интервале, то ее производная $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на этом отрезке. Доказательство следует из формулы для производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, где знаки числителя и знаменателя совпадают (противоположны), а при предельном переходе знак неравенства становится нестрогим.

Достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), причем $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $a < x < b$, то эта функция возрастает (убывает) на этом отрезке.

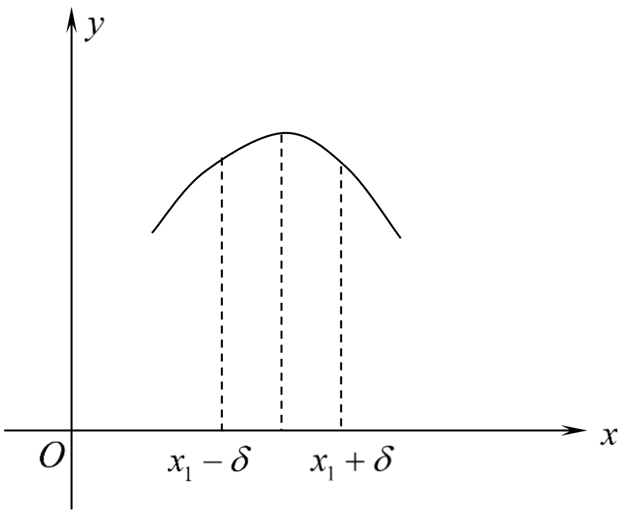


Рис. 1

Функция $y = f(x)$ в точке x_1 имеет *локальный максимум*, если для всех x из некоторой δ – окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$ при $x \neq x_1$ (Рис. 1).

Функция $y = f(x)$ в точке x_2 имеет *локальный минимум*, если для всех x из некоторой δ – окрестности точки x_2 выполняется неравенство $f(x) > f(x_2)$ при $x \neq x_2$ (Рис. 2).

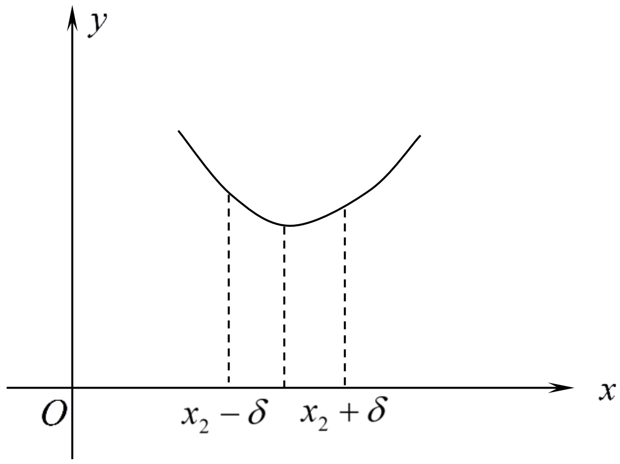


Рис. 2

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*.

***Теорема** о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции. Необходимым условием экстремума дифференцируемой в точке c функции является* $f'(c) = 0$ (Рис. 3).

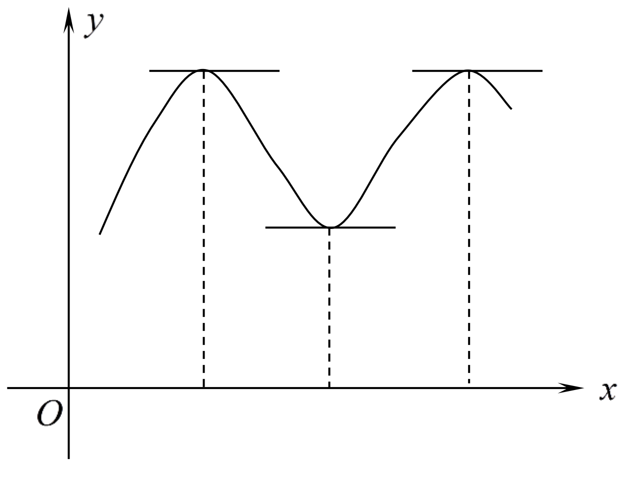


Рис. 3

Точки, в которых производная функции обращается в ноль, называются *критическими точками*. Критические точки функции не обязательно являются точками экстремума. Например, если $f(x) = x^3$, то $f'(x) = 3x^2 = 0$ при $x = 0$, но точка $x = 0$ не является точкой экстремума, что видно из рисунка 4.

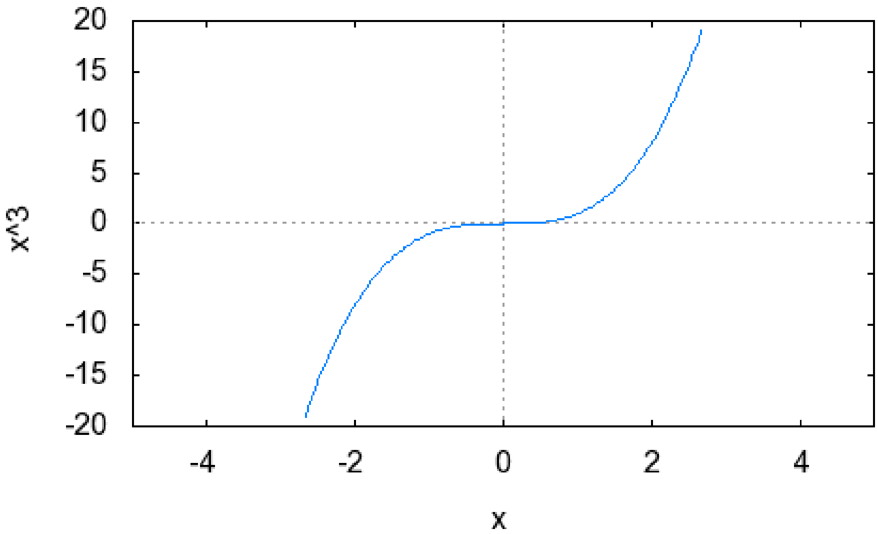


Рис. 4

Теорема 1 *о достаточном условии существования локального максимума и локального минимума функции.*

Если производная функции при переходе через точку c *меняет знак с «+» на «–», это точка максимума (Рис. 5). Если знак производной меняется с «–» на «+», имеем точку минимума* (Рис. 6).

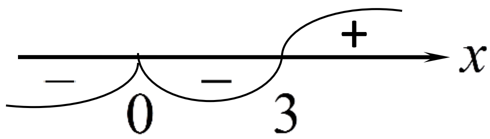
Рис. 5

Рис. 6

Теорема 2 *о достаточном условии существования локального максимума и локального минимума функции. Пусть* $f'(x_0)=0$*, тогда при* $x=x_0$ *функция имеет локальный максимум, если* $f''(x_0)<0$ *и локальный минимум, если* $f''(x_0)>0$.

Пример 1. Найти экстремум функции. $y=\frac{1}{4}x^4-x^3$.

Решение. Так как $y'=x^3-3x^2=x^2(x-3)$, то критическими точками являются $x_1=0$, $x_2=3$.



Очевидно, что $y'(x)<0$ при $x<0$ и при $0<x<3$, следовательно, по ***Теореме 1***, в точке 0 экстремума нет.

$y'(x)>0$ при $x>3$, следовательно, в точке $x=3$ по ***Теореме 1*** – локальный минимум функции.

Найдем значение функции в точке $x=3$:

$$y_{\min}(3)=\frac{1}{4}3^4-3^3=\frac{81}{4}-27=\frac{81-108}{4}=-\frac{27}{4}.$$

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Чтобы определить наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке, необходимо подсчитать значения функции в точках экстремума, входящих в исследуемую область, а также в граничных ее точках и выбрать среди них наименьшее и наибольшее значения.

Пример. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 + 1$ на отрезке $\left[1;4\right]$.

Решение. Находим точки, в которых производная обращается в нуль:

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x\left(x-2\right) = 0,$$

получаем две точки, одна из которых $x=0$ не входит в исследуемую область, добавляем к ним граничные точки, тогда получим набор точек: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$.

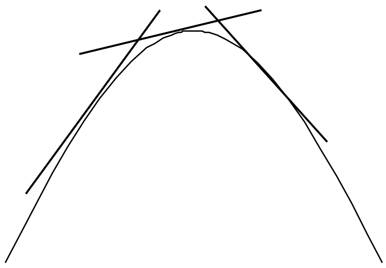
Определяем в этих точках значения функции $y_1 = -1$, $y_2 = -3$, $y_3 = 17$.

Таким образом, наименьшее в заданной области значение функции (–3) реализуется при $x=2$, наибольшее (17) при $x=3$.

Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба

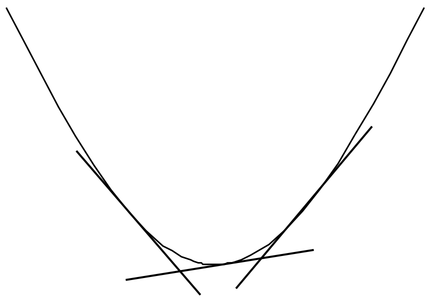
Функция $y = f\left(x\right)$ называется *выпуклой* на интервале $\left(a, b\right)$, если точки касательных к функции на этом интервале расположены выше точек функции (Рис. 7).

Функция $y = f\left(x\right)$ называется *вогнутой* на интервале $\left(a_1, b_1\right)$, если точки касательных к функции на этом интервале расположены ниже точек функции (Рис. 8).



Выпуклая функция

Рис. 7



Вогнутая функция

Рис. 8

Точки, в которых выпуклость переходит в вогнутость, или наоборот, называются *точками перегиба* функции.

Теорема. *Достаточным условием выпуклости функции* $y=f(x)$ *на интервале* $(a\,,b)$ *является* $f''(x)<0$. *Достаточным условием вогнутости функции* $y=f(x)$ *на интервале* $(a_1\,,b_1)$ *является* $f''(x)>0$.

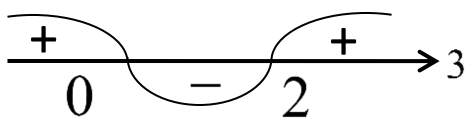
Теорема. *Если* $f''(c)=0$ *и при переходе через точку* c *вторая производная меняет знак,* $x=c$ *– точка перегиба.*

Пример. Дана функция $y=\dfrac{1}{4}x^4-x^3$. Найти точки перегиба, выпуклость вверх, выпуклость вниз.

Решение. Имеем

$y'=x^3-3x^2$,

$y''=3x^2-6x=3x(x-2)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=2$.



$y''(x) > 0$, при $x < 0,\ x > 2$, $y''(x) < 0$ при $0 < x < 2$.

Следовательно, точки x_1 и x_2 – точки перегиба. В первой выпуклость вниз переходит в выпуклость вверх, во второй – выпуклость вверх в выпуклость вниз.

Литература

1. Секаева Л.Р., Тюленева О.Н. Элементы линейной алгебры. Векторная алгебра: учебно-методическое пособие / Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева. – Казань: Издательство Казанского государственного университета, 2008. – 52 с. https://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/F_397525361/Sekaeva_L.R.__Tjuleneva_O.N._Elementy_linejnoj_algebry._Vektornaya_algebra.pdf

2. Секаева Л.Р., Тюленева О.Н. Аналитическая геометрия на плоскости: учебно-методическое пособие / Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева. – Казань: Издательствово Казанского государственного университета, 2008. – 56 с. https://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/F2136414438/Sekaeva_L.R.__Tjuleneva_O.N._Analiticheskaya_geometriya_na_ploskosti.pdf

3. Малакаев М.С., Секаева Л.Р., Тюленева О.Н. Основы работы с системой компьютерной алгебры Maxima: учебно-методическое пособие / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева. – Казань: Казанский университет, 2012. – 72 с. https://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/F39055617/Malakaev_M.S.__Sekaeva_L.R.__Tjuleneva_O.N..pdf

4. Малакаев М.С., Секаева Л.Р., Тюленева О.Н. Основы работы с системой компьютерной алгебры Maxima: учебно-методическое пособие. – Часть 2 / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева. – Казань: Казанский университет, 2013. – 61 с. https://kpfu.ru/docs/F698532637/Malakaev.M.S._.Sekaeva.L.R._..Tjuleneva.O.N..Chast.2.pdf

5. Малакаев М.С., Секаева Л.Р., Тюленева О.Н. Элементы линейной алгебры: учебно-методическое пособие / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева. – Казань: Казанский университет, 2013. – 37 с. https://kpfu.ru/docs/F1960025520/Malakaev.M.S._.Sekaeva.L.R._..Tjuleneva.O.N..Chast.3.pdf

6. Секаева Л.Р., Халямина В.А. Сборник задач по математике. – Часть 1: учебное пособие / Л.Р. Секаева, В.А. Халямина. – Казань: Казанский федеральный университет, 2019. – 65 с. https://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/F_610969787/UP_Sbornik_zadach_po_vysshej_matematike._Chast_1_Sekaeva_L.R.__Khalyamina_V.A._2019.pdf