

Бадриев Ильдар Бурханович, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики, e-mail: ildar.badriev@kpfu.ru

Badriev Ildar Burkhanovich, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Computing Mathematics Department, e-mail: ildar.badriev@kpfu.ru

Бандеров Виктор Викторович, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, заместитель директора Института вычислительной математики и технологий, e-mail: Victor.Banderov@kpfu.ru

Banderov Viktor Viktorovich, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Deputy Director of the Institute of Computer Mathematics and Information Technologies, e-mail: Victor.Banderov@kpfu.ru

Гарипова Гульназ Зуфаровна, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, студент, e-mail: gulnazgarif@gmail.com

Garipova Gulnaz Zufarovna, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Student, e-mail: gulnazgarif@gmail.com

Макаров Максим Викторович, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева (КНИТУ-КАИ), г. Казань, Российская Федерация, аспирант кафедры прочности конструкций, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, младший научный сотрудник, e-mail: makarovmaksim@mail.ru

Makarov Maksim Viktorovich, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Junior Researcher, e-mail: makarovmaksim@mail.ru

УДК 517.958

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ И КВАЗИВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ ТЕОРИИ МЯГКИХ СЕТЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК

© И. Б. Бадриев, В. В. Бандеров, Н. В. Калачева

Ключевые слова: мягкая оболочка; вариационное неравенство; квазивариационное неравенство; теорема существования; итерационный метод; теорема сходимости.

Рассмотрены задачи о напряженно-деформированном состоянии мягких оболочек, находящихся под воздействием массовой и поверхностной нагрузки. Допускается также, что оболочка может быть ограничена в перемещении препятствием. Обобщенные постановки сформулированы в виде вариационных и квазивариационных неравенств. Исследована разрешимость задач. Для решения вариационных и квазивариационных неравенств с операторами монотонного типа в банаховых и гильбертовых пространствах рассматриваются итерационные методы. Исследована сходимость методов. Рассмотрены особенности применения предложенных итерационных методов к задачам теории мягких сетчатых оболочек.

Рассматриваются задачи об определении положения равновесия мягких (не воспринимающих сжимающих усилий) оболочек [1-4], закрепленных по краям, находящихся под воздействием массовой и поверхностной нагрузки, для плоского (бесконечно длинная цилиндрическая оболочка) случая. Деформации и перемещения оболочек допускаются конечными.

Допускается также, что оболочка может быть ограничена в перемещении препятствием, материал которого считается абсолютно твердым, а его поверхность — абсолютно гладкой, то есть препятствие при воздействии на него не деформируется и порождает усилия только в направлении внешней нормали к своей поверхности. Предполагается, что поверхность препятствия описывается достаточно гладкой (не обязательно выпуклой) функцией F . Исходя из уравнений равновесия, записанных в декартовой системе координат Ox_1x_2 , сформулирована поточечная задача. Затем на основе принципа виртуальных перемещений получена вариационная формулировка. Установлена эквивалентность поточечной и вариационной задач. При условии, что функция, определяющая зависимость модуля силы натяжения в оболочке от ее деформации, имеет степенной рост, поставлена обобщенная задача в виде квазивиариационного [5] неравенства

$$\text{Найти } u \in K : \int_0^l \frac{T(\lambda(u))}{\lambda(u)} (u', v' - u') ds + q_0 \int_0^l (Qu', v - u) \geq \int_0^l (\tilde{f}, v - u) ds \quad \forall v \in K(u), \quad (1)$$

где l — длина оболочки в недеформированном состоянии, $0 \leq s \leq l$ — лагранжева координата, выбранная так, что длина оболочки, отсчитываемая в недеформированном состоянии от точки $(0, 0)$ до текущей, равна s (т. е. s — натуральный параметр при описании недеформированной оболочки), q_0 и \tilde{f} — плотности поверхностных и массовых сил соответственно, $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Деформация оболочки в точке с координатой s характеризуется степенью удлинения $\lambda(u(s))$, $u = (u_1, u_2)$ — перемещения точек оболочки. Относительно функции T , определяющей зависимость модуля силы натяжения в оболочке от степени удлинения предполагаем, что $T(\xi) = 0$ при $\xi \leq 1$ (оболочка не воспринимает сжимающих усилий), T — непрерывна, не убывает, существуют положительные $a_0, a_1, p > 1$ такие, что $a_0(\xi - 1)^{p-1} \leq T(\xi) \leq a_1 \xi^{p-1}$ при $\xi \geq 1$. Множество K допустимых конфигураций оболочки имеет вид $K = \{u \in V : u_2 \geq F(u_1), s \in (0, l)\}$, множество направлений возможных перемещений есть $K(u) = \{v : u + \alpha(v - u) \in K \text{ для всех } \alpha \in (0, 1)\}$, $V = [W_p^{(1)}(0, 1)]^2$. Сопряженным к V будет пространство $V^* = [W_{p^*}^{(-1)}(0, l)]^2$, $p^* = \frac{p}{p-1}$.

Отметим, что множество K слабо замкнуто, но, вообще говоря, не является выпуклым, а множество $K(u)$ является выпуклым и замкнутым.

Т е о р е м а 1. Пусть $p \geq 2$, при $p = 2$ выполнено условие $|q_0| < q_1 = a_0/a_2$, $a_2 = 2l^{2/p^*}$. Тогда задача (1) имеет по крайней мере одно решение.

Отметим, что в случае выпуклой функции F множество $K(u)$ совпадает с множеством K . Действительно, если v — произвольный элемент из K , тогда элемент $u + \alpha(v - u)$ тоже принадлежит K . Наоборот, пусть v — произвольный элемент из $K(u)$, тогда, из определения множества $K(u)$ следует, что элемент $u + \alpha(v - u) = \alpha v + (1 - \alpha)u$ принадлежит K . Отсюда в силу выпуклости K имеем, что $v \in K$. Поэтому задача (1) формулируется в виде следующего вариационного неравенства:

$$\text{Найти } u \in K : \int_0^l \frac{T(\lambda(u))}{\lambda(u)} (u', v' - u') ds + q_0 \int_0^l (Qu', v - u) \geq \int_0^l (\tilde{f}, v - u) ds \quad \forall v \in K. \quad (2)$$

Пусть элемент $f \in V^*$ порождается формой $\langle f, v \rangle = \int_0^l (\tilde{f}, v) ds$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — отношение двойственности между V и V^*

Теорема 2. Пусть $f \in V^*$, $p > 1$. Тогда

- 1) если $p > 2$, задача (2) имеет решение при любом $q_0 \in R^1$;
- 2) если $p = 2$, задача (2) имеет решение при q_0 , удовлетворяющих условию $|q_0| < q_1$;
- 3) если $1 < p < 2$, для любого $\delta > 0$ найдется $q_\delta > 0$ такое, что задача (2) имеет решение при условиях $\|f\|_{V^*} \leq \delta$, $|q_0| < q_\delta$.

Для решения вариационных и квазивариационных неравенств с операторами монотонного типа в банаховых и гильбертовых пространствах рассматриваются итерационные методы.

Сначала рассматривается задача решения квазивариационного неравенства с псевдомонотонным [6], коэрцитивным [7], потенциальным оператором, удовлетворяющим условию типа ограниченной липшиц-непрерывности [8]. Для решения квазивариационного неравенства предлагается итерационный процесс, каждый шаг которого состоит в решении вариационного неравенства с оператором двойственности [6], обладающего лучшими свойствами по сравнению с исходным псевдомонотонным оператором. Установлено, что итерационная последовательность ограничена, и все ее слабо предельные точки являются решениями квазивариационного неравенства. Затем рассматривается смешанное вариационное неравенство (вариационное неравенство второго рода) на выпуклом замкнутом множестве с псевдомонотонным, коэрцитивным, потенциальным оператором, удовлетворяющим условию типа ограниченной липшиц-непрерывности, и собственным, выпуклым, полунепрерывным снизу, вообще говоря, недифференцируемым функционалом. Для решения вариационного неравенства предложен метод итеративной регуляризации, позволяющий рассматриваемую задачу к вариационному неравенству второго рода с оператором двойственности вместо исходного псевдомонотонного оператора и регуляризованным функционалом, решение которого можно проводить известными методами. Так же как и выше, доказано, что итерационная последовательность ограничена, и все ее слабо предельные точки являются решениями исходного вариационного неравенства. В случае гильбертова пространства, когда оператор вместо условия типа ограниченной липшиц-непрерывности и псевдомонотонности удовлетворяет условию обратной сильной монотонности [9] (или ко-коэрцитивности [10], доказана сходимость всей итерационной последовательности. Отметим, что данный метод итеративной регуляризации особенно привлекателен в случае, когда регуляризованный функционал является дифференцируемым. В этом случае каждый шаг итерационного метода сводится к решению нелинейного уравнения с оператором двойственности.

Для решения вариационного неравенства можно рассматривать итерационный метод без регуляризации функционала. При этом, при исследовании сходимости метода можно отказаться от условия потенциальности оператора. Исследование сходимости удалось провести благодаря тому, что оператор перехода этого метода был выписан в явном виде. Этот оператор перехода является проксимальным отображением [7]. Установлено, что множество неподвижных точек оператора перехода совпадает с множеством решений вариационного неравенства. Доказано, что оператор перехода является нерастягивающим. Более того, установлено неравенство, более сильное, чем неравенство нерастягиваемости, что и позволило доказать его асимптотическую регулярность [11], а также слабую сходимость итерационной последовательности. Если оператор, входящий в вариационное неравенство, удовлетворяет более жестким условиям, чем условие обратной сильной монотонности, а именно, является сильно монотонным и липшиц-непрерывным, доказана сильная сходимость итерационного метода и получена оценка его скорости сходимости.

Рассматриваются особенности применения предложенных итерационных методов решения вариационных неравенств к теории мягких сетчатых оболочек. Результаты численных расчетов для модельных задач подтвердили эффективность предложенных численных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимадиев Р.Ш. Динамика мягких оболочек парашютного типа. Казань: Казанский государственный энергетический университет, 2006. 208 с.
2. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. Обобщенная постановка задачи о равновесии мягкой биологической оболочки // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. № 5-2. С. 2447-2449.
3. Ридель В.В., Гулин Б.В. Динамика мягких оболочек. М.: Наука, 1990. 206 с.
4. Шагидуллин Р.Р. Проблемы математического моделирования мягких оболочек. Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2001. 235 с.
5. Байocchi К., Капелло А. Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. М.: Наука, 1988. 448 с.
6. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588 с.
7. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
8. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
9. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. Модифицированные функции Лагранжа. М.: Наука, 1989. 400 с.
10. Tzeng P. Further Applications of a Splitting Algorithm to Decomposition in Variational Inequalities and Convex Programming // Mathematical Programming. 1990. V. 48. P. 249-264.
11. Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings // Bulletin of the American Mathematical Society. 1967. V. 73. № 4. P. 591-597.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена в рамках договора № 02.G25.31.0122 между НПО ОАО «ОКБ им. М.П. Симонова» и Министерством образования и науки РФ по реализации комплексного проекта по созданию высокотехнологичного производства, выполняемого с участием ФГБОУВПО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ» и при финансовой поддержке РФФИ (проекты 15-41-02569, 15-38-21099).

Поступила в редакцию 2 июня 2015 г.

Badriev I.V., Banderov V.V., Kalacheva N.V. NUMERICAL INVESTIGATION OF VARIATIONAL AND QUASI-VARIATIONAL INEQUALITIES OF THE SOFT NETWORK SHELLS THEORY

We consider the problem of stress-strain state of soft shells under the action of the mass and the surface load. In the plane case, it is also allowed that the shell may be restricted in the movement by obstacles. Generalized statements are stated as variational and quasivariational inequalities. Solvability of the problems is investigated. To solve variational inequalities and quasivariational operators of monotone type in Banach and Hilbert spaces, iterative methods are considered. Convergence of the method is investigated. Features of applying the proposed iterative methods for solving the problems of the Soft Network Shells Theory are considered.

Key words: soft shell; variational inequality; quasivariational inequality; existence theorem; iterative method; convergence theorem.

Бадриев Ильдар Бурханович, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики, e-mail: ildar.badriev@kpfu.ru

Badriev Ildar Burkhanovich, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Computing Mathematics Department, e-mail: ildar.badriev@kpfu.ru

Бандеров Виктор Викторович, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, заместитель директора Института вычислительной математики и технологий, e-mail: Victor.Banderov@kpfu.ru

Banderov Viktor Viktorovich, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Deputy Director of the Institute of Computer Mathematics and Information

Technologies, e-mail: Victor.Banderov@kpfu.ru

Калачева Наталья Вячеславовна, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация, кандидат психологических наук, старший преподаватель кафедры общей математики, e-mail: nvkalacheva@gmail.com

Kalacheva Natalia Vyacheslavovna, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Candidate of Psychology, Senior Lecturer of the General Mathematics Department, e-mail: nvkalacheva@gmail.com

УДК 517.958

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ ПОДЗЕМНОЙ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ВЫСОКОВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ СКВАЖИН

© И.Б. Бадриев, М.Т. Сингатуллин, Ю.В. Чебаков

Ключевые слова: теория фильтрации; высоковязкая жидкость; многозначный закон фильтрации; вариационное неравенство; итерационный метод, численный эксперимент. Для решения смешанных вариационных неравенств, возникающих при описании нелинейных процессов фильтрации несжимаемой высоковязкой жидкости, следующей многозначному закону с предельным градиентом, предложен итерационный метод. Метод реализован численно. Проведены численные эксперименты для модельных задач фильтрации и их анализ.

Рассматривается установившийся процесс фильтрации несжимаемой высоковязкой жидкости в пористой среде, занимающей ограниченную область $\Omega \subset R^m$, $m \geq 2$, с липшиц-непрерывной границей Γ , на которой давление считается равным нулю. Предполагается, что в некоторой внутренней точке x^* области фильтрации Ω находится скважина с дебитом q , которую мы будем моделировать дельта-функцией Дирака. Необходимо найти стационарные поля давления u и скорости v жидкости, удовлетворяющие уравнению неразрывности $\operatorname{div} v = q\delta(x - x^*)$, $x \in \Omega$, и граничным условиям $u(x) = 0$, $x \in \Gamma$, в предположении, что жидкость подчиняется многозначному закону фильтрации (см. рис. 1) [1-4] $v = -g(|\nabla u|)\nabla u/|\nabla u|$. Предполагается, что функция g , задающая закон фильтрации имеет степенной рост порядка $p - 1$, $p \geq 2$, на бесконечности.

Обобщенная постановка задач формулируется в виде смешанного вариационного неравенства с монотонным оператором и выпуклым, липшиц-непрерывным, вообще говоря, недифференцируемым, функционалом. Трудность, связанную с наличием источника удалось преодолеть благодаря введению вспомогательной задачи на шаре и аддитивного выделения особенности [5]. Исследована разрешимость вариационного неравенства.

Для решения вариационного неравенства применен итерационный метод расщепления [6-10], не требующий обращения исходного оператора. При этом каждый шаг итерационного процесса сводится фактически к решению краевой задачи для оператора Лапласа. Были построены конечноэлементные аппроксимации рассматриваемых задач и исследована их сходимость.

Следует отметить, что предложенные методы позволяют находить приближенные значения не только самого решения, но и его характеристик, для задач фильтрации — это