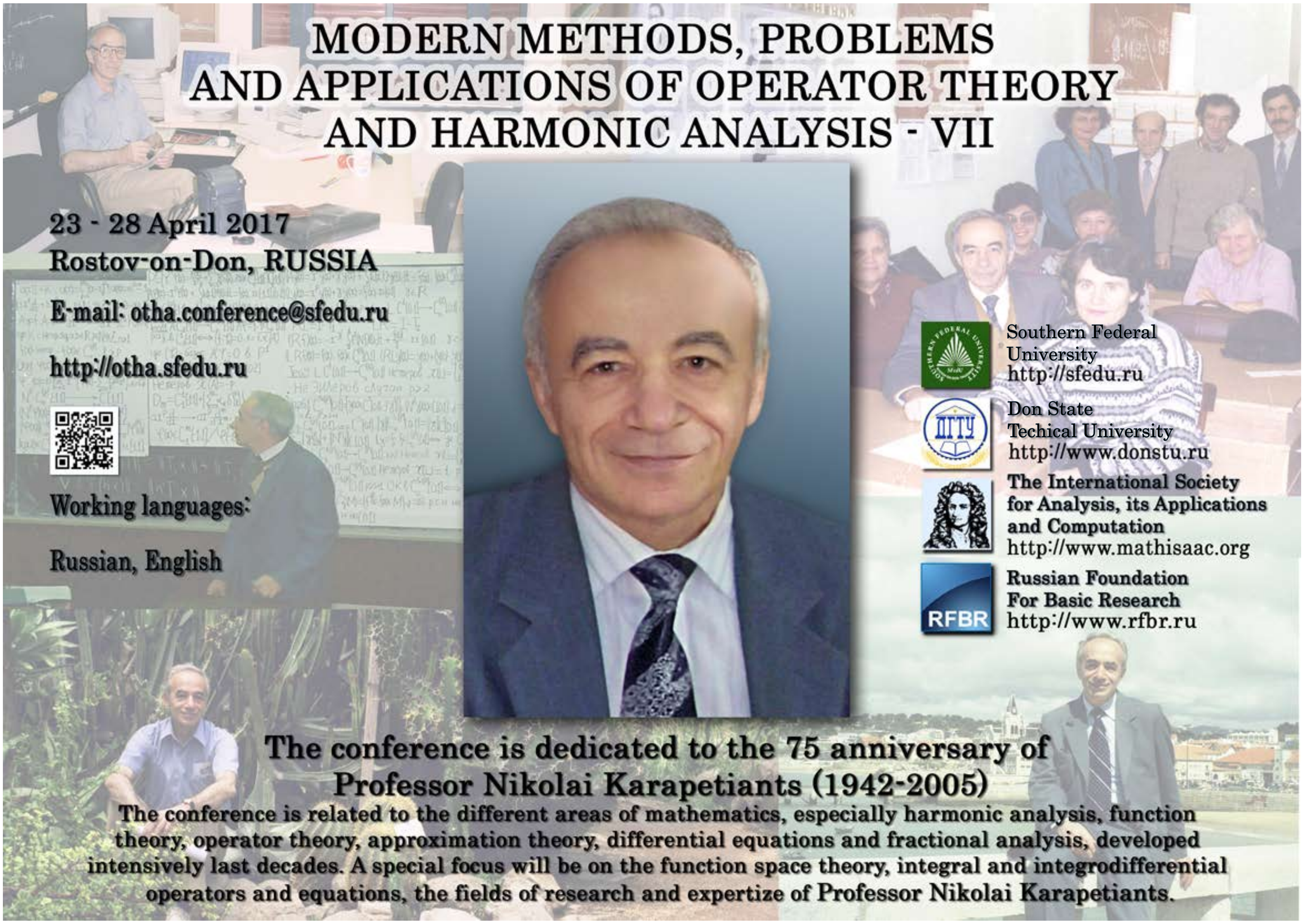

Материалы докладов

международной конференции Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — VII

Ростов-на-Дону, 23-28 апреля 2017 года

www.otha.sfedu.ru/conf2017

E-mail: otha.conference@gmail.com

Ростов-на-Дону
2017

Table of contents

Session I

Functional Analysis and Operator Theory

A. V. Abanin (Rostov-na-Donu, Russia), Pham Trong Tien (Hanoi, Vietnam)
avabanin@sfedu.ru, phamtien@mail.ru

DYNAMICS OF CLASSICAL OPERATORS IN WEIGHTED SPACES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS[1]

It will be given a survey of some recent and new results concerning various properties of classical operators in weighted spaces of holomorphic functions in the unit dick or the complex plane defined by radial weights.

We will discuss the main results from [1], [2] where it was developed a new approach to study boundedness and compactness of the differentiation and integration operators and from [3] where Tien extended and partially improved some previous results by Chan and Shapiro on dynamical properties of the translation operator.

The next point of the survey will be devoted to our new results concerning invariant subspaces and cyclic elements of the integration operator. Recently, Aleman and Korenblum [4] and Constantin and Peláez [5] have proposed two different methods to study this problem in weighted spaces of holomorphic functions. From some reasons these methods can be applied to only those weights that have a very special form. We develop a new technique that allows us to give a complete description of invariant subspaces of the integration operator for a wide family of Bergman, Fock, Bloch, and Dirichlet spaces given by weights of a general type. We show also that this technique works as well for the differentiation operator.

REFERENCES

1. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Differentiation and integration operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions. Math. Nachr. 2017. Vol. 290 (to appear). DOI: 10.1002/mana.201500405.
2. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Compactness of differentiation and integration operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions. Collect. Math. 2017. Vol. 68 (to appear). DOI: 10.1007/s13348-016-0185-z.
3. *Pham Trong Tien.* Translation operators on weighted spaces of entire functions. Proc. Amer. Math. Soc. 2016. Vol. 145, No. 2, pp. 805–815.
4. *Aleman A., Korenblum B.* Volterra invariant subspaces of H^p. Bull. Sci. Math. 2008. Vol. 132, No. 6, pp. 510–528.
5. *Constantin O., Peláez J. A.* Integral operators, embedding theorems and a Littlewood-Paley formular on weighted Fock spaces. J. Geom. Anal. 2016. Vol. 26, No. 2, pp. 1109–1154.

О. Г. Авсянкин (Ростов-на-Дону)
avsyanki@math.rsu.ru

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ

Пусть $\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \leqslant 1\}$ и $1 < p < \infty$. Рассмотрим весовое пространство

$$L_{p,v}(\mathbb{B}_n) = \{f(x) \colon f(x)v^{1/p}(|x|) \in L_p(\mathbb{B}_n)\},$$

[1]The research of A. V. Abanin was supported by Russian Foundation for Basic Research under Project 15-01-01404

где $v(t)$ — непрерывная и полумультипликативная функция, такая что $v(t) \geqslant 1$.

В пространстве $L_{p,v}(\mathbb{B}_n)$ рассмотрим интегральный оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{|x|\leqslant|y|\leqslant 1} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{B}_n,$$

предполагая, что функция $k(x,y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x,y)$, $\forall\, \alpha > 0$;
2) $k(\omega(x), \omega(y)) = k(x,y)$, $\forall\, \omega \in SO(n)$;
3) $\int\limits_{|y|\geqslant 1} |k(e_1,y)||y|^{-n/p} v(|y|^{-1})\,dy < \infty$, где $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$.

Назовем символом оператора $\lambda I - K$ функцию

$$\sigma(m,\xi) = \lambda - \int\limits_{|y|\geqslant 1} k(e_1,y) P_m(e_1 \cdot y')|y|^{-n/p+i\xi}\,dy,$$

где $y' = y/|y|$, $P_m(t)$ — многочлены Лежандра. Символ задается на некотором компакте, зависящем от весовой функции $v(t)$. Показано, что невырожденность символа $\sigma(m,\xi)$ является необходимым и достаточным условием обратимости оператора $\lambda I - K$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{B}_n))$, содержащую все операторы $\lambda I - K$. Алгебра $\mathfrak{A}$ коммутативна. Для алгебры $\mathfrak{A}$ построено символическое исчисление, в терминах которого получен критерий обратимости операторов из этой алгебры.

В качестве следствия рассмотрен случай безвесового пространства $L_p(\mathbb{B}_n)$.

A. V. Harutyunyan (George, Marinescu, Yerevan State University, University of Cologne)
anahit@ysu.am

HANKEL AND BEREZIN TYPE OPERATORS ON WEIGHTED BESOV SPACES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS ON POLYDISCS

Assuming that S is the space of functions of regular variation(see [2]) and $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $\omega_j \in S$, by $B_p(\omega)$ we denote the class of all holomorphic functions defined on the polydisk U^n such that

$$\|f\|^p_{B_p(\omega)} = \int_{U^n} |Df(z)|^p \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(1-|z_j|)dm_{2n}(z)}{(1-|z_j|^2)^{2-p}} < +\infty,$$

where $dm_{2n}(z)$ is the $2n$-dimensional Lebesgue measure on U^n and D stands for a special fractional derivative of f defined here. As in the one-dimensional case, $B_p(\omega)$ is a Banach space with respect to the norm $\|\cdot\|_{B_p(\omega)}$. For properties of holomorphic Besov spaces see [1]. In this paper we consider also the generalized Berezin type operators on $B_p(\omega)$ (and on $L_p(\omega)$) and prove some theorems about the boundedness of these operators. Let us define the little Hankel operators as follows: denote by $\overline{B}_p(\omega)$ the space of conjugate holomorphic functions on $B_p(\omega)$. For the integrable function f on U^n we define the generalized little Hankel operator with symbol $h \in L^\infty(U^n)$ by

$$h_g^\alpha(f)(z) = \overline{P}_\alpha(fg)(z) = \int_{U^n} \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-\zeta\overline{z})^{\alpha+2}} f(\zeta)g(\zeta)dm_{2n}(\zeta),$$

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j > -1$, $1 \leq j \leq n$.

For $n = 1$, $\alpha = 0$ this includes the definition of the classical little Hankel operator, see [3]. we consider the boundedness of little Hankel operator on $B_p(\omega)$. For the case $0 < p < 1$ and for the case $p = 1$ we have the following results

Theorem 1. *Let $0 < p < 1$, $f \in B_p(\omega)$ (or $f \in \overline{B}^p(\omega)$), $g \in L^\infty(U^n)$. Then $h_g^\alpha(f) \in \overline{B}_p(\omega)$ if and only if $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}/p - 2$, $1 \leq j \leq n$.*

Theorem 2. *Let $f \in B_1(\omega)$, $g \in L^\infty(U^n)$. Then $h_g^\alpha(f) \in \overline{B}_1(\omega)$ if and only if $\alpha_j > \alpha_{\omega_j} - 2$, $1 \leq j \leq n$.* The case $p > 1$ is different from the cases of $0 > p < 1$ and from the case of $p = 1$. Here we have the following

Theorem 3. *Let $1 < p < +\infty$, $f \in B_p(\omega)$ (or $f \in \overline{B}_p(\omega)$), $g \in L^\infty(U^n)$. Then if $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}$, $1 \leq j \leq n$ then $h_g^\alpha(f) \in \overline{B}_p(\omega)$.*

For the integrable function f on U^n and for $g \in L^\infty(U^n)$ we define the Berezin-type operator in the following way

$$B_g^\alpha f(z) = \frac{(\alpha+1)}{\pi^n}(1-|z|^2)^{\alpha+2} \int_{U^n} \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-z\overline{\zeta}|^{4+2\alpha}} f(\zeta)g(\zeta)dm_{2n}(\zeta).$$

In the case $\alpha = 0$, $g \equiv 1$ the operator B_g^α will be called the Berezin transform. We have the following results:

1. for the case of $0 < p < 1$ we have

Theorem 4. *Let $0 < p < 1$, $f \in B_p(\omega)$ (or $f \in \overline{B}_p(\omega)$), $g \in L^\infty(U^n)$ and let $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}/p - 2$, $1 \leq j \leq n$. Then $B_g^\alpha(f) \in L^p(\omega)$.* 2. the case $1 < p < +\infty$ gives the next theorem

Theorem 5. *Let $1 < p < +\infty$, $f \in B_p(\omega)$ (or $f \in \overline{B}_p(\omega)$), $g \in L^\infty(U^n)$ and let $\alpha_j > (\alpha_{\omega_j}/p - 2$, $1 \leq j \leq n$. Then $B_g^\alpha(f) \in L_p(\omega)$.*

3. we consider now the case of $p = 1$.

Theorem 6. *Let $f \in B_1(\omega)$ (or $f \in \overline{B}_1(\omega)$), $g \in L^\infty(U^n)$. Then $B_g^\alpha(f) \in L_1(\omega)$ if and only if $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}$, $1 \leq j \leq n$.*

REFERENCES

1. *A. V. Harutyunyan, W. Lusky* $\omega-$ weighted holomorphic Besov space on the polydisk. Function Spaces and Applications, 9 (2011), 1-16.

2. *E. Seneta* Regularly varying functions. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 508. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. 112 pp.

3. *K. Zhu* Duality and Hankel operators on the Bergman space of bounded symmetric domains, J. Func. Anal. 81 (1988), 260-278.

D. Harutyunyan (Yerevan State University, Armenia)
davith@math.utah.edu

QUANTITATIVE BRUNN-MINKOWSKI AND ISOPERIMETRIC INEQUALITIES: WHEN THE CAUCHY INEQUALITY BECOMES A FORMULA

In this talk we revisit the anisotropic isoperimetric and the Brunn-Minkowski inequalities for convex sets. The best known constant $C(n) = Cn^7$ depending on the space dimension n in both inequalities is due to Segal. We improve that constant to Cn^6 for convex sets and to Cn^5 for centrally symmetric convex sets. We also conjecture, that the best constant in both inequalities must be of the form Cn^2, i.e., quadratic in n. The tools are the Brenier's mapping from the theory of mass transportation combined with new sharp geometric-arithmetic mean and some algebraic inequalities plus a trace estimate by Figalli, Maggi and Pratelli. We also prove a new formula for the difference of arithmetic and geometric means, which provides with the necessary sharp versions of the Cauchy inequality.

A. Akbulut (Kirsehir, Turkey)
akbulut72@gmail.com

SOME EMBEDDING THEOREMS ON THE NIKOLSKII-MORREY TYPE SPACES

In this study, the Nikolskii-Morrey type spaces were introduced and studied. Some embedding theorems are obtained in these spaces with the help of Nikolskii type integral representation.

This work was supported by the Ahi Evran University Scientific Research Projects Coordination Unit. Project Number: FEF.A3.16.023.

REFERENCES

1. *Akbulut A., Eroglu, A. and Najafov A. M.* Some Embedding Theorems on the Nikolskii-Morrey Type Spaces. Advances in Analysis 2016. Vol. 1, No. 1, pp. 18–26.

2. *Besov O. V., Il'yin V. P. and Nikolskii, S. M.* Integral representations of functions and embeddings theorems. M. Nauka. 1996.

T. M. Andreeva, A. V. Abanin (Rostov-na-Donu, Russia)
metzi@yandex.ru, abanin@math.sfedu.ru

THE SURJECTIVITY OF CONVOLUTION OPERATORS ON HOLOMORPHIC WEIGHTED SPACES IN BOUNDED CONVEX DOMAINS

Let G be a domain in $\mathbb{C}$ and $H(G)$ the space of all holomorphic functions in G. For a continuous function (a weight) $v : G \to \mathbb{R}$ define the Banach space $H_v(G) := \left\{ f \in H(G) : ||f||_v := \sup\limits_{z\in G} |f(z)|e^{-v(z)} < \infty \right\}$. For an increasing sequence of weights $V = (v_n)$ define the inductive limit $\mathcal{V}H(G) := \mathrm{ind} H_{v_n}(G)$.

Let μ be an analytic functional on $\mathbb{C}$ carried by a convex compact set K. Under some restrictions on a weight sequence which are similar to those used by V.V. Napalkov ([2]) we study the continuity and surjectivity of the convolution operator $\mu * f(z) : f \mapsto \mu_w f(z+w)$ that maps $\mathcal{V}H(G+K)$ into (onto) $\mathcal{V}H(G)$. We establish the surjectivity criteria for the convolution operator in terms of its Laplace (Fourier-Borel) transform $\hat{\mu}(\zeta) := \mu_z e^{\langle z \cdot \rangle}$ via an appropriate description of the spaces that are conjugated to $\mathcal{V}H(G+K)$ and $\mathcal{V}H(G)$.

The main results are the following:

1) We obtain a criterion of continuity for the convolution operator $\mu* : \mathcal{V}H(G+K) \to \mathcal{V}H(G)$;

2) We establish a functional criterion of surjectivity for convolution operator in terms of the closure of the image of the multiplication operator $f \mapsto \hat{\mu} f$ that is conjugate to $\mu*$;

3) In the case $v_n(z) = n|z|^\alpha, \alpha > 0$, we find out a criterion of surjectivity for convolution operator in terms of regular growth of $\hat{\mu}$ (the lower estimate on $|\hat{\mu}|$ outside some exceptional set).

A similar research was presented in [1] for the spaces of functions that are holomorphic in a convex domain and have a polynomial growth near its boundary (the weight sequence $v_n(z) = n \ln(1+|z|)$).

The research was supported by Russian Foundation for Basic Research under Project 15-01-01404.

R E F E R E N C E S

1. *Abanin A. V., Ishimura R., Khoi L. H.* Convolution operators in $A^{-\infty}$ for convex domains //Arkiv for matematik. - 2012. - T. 50. - No. 1. - C. 1–22.

2. *Napalkov V. V.* Spaces of analytic functions of prescribed growth near the boundary //Math. USSR-Izv., 30:2 (1988), 263–281.

А. Б. Антоневич (Минск, Белосток), Е. Ю. Леонова (Минск)
antonevich@bsu.by, genieleo@mail.ru

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛА

Вариационным принципом для функционала f, заданного на пространстве $C(X)$ непрерывных функций на компактном пространстве X, называется его представление в виде

$$f(\varphi) = \sup_{\mu \in M} \left\{ \int_X \varphi(x) d\mu - g(\mu) \right\}, \quad \varphi \in C(X), \tag{1}$$

где g есть функционал на сопряженном пространстве $C(X)'$ и M есть некоторое подмножество в $C(X)'$.

В приложениях физический смысл имеет функция $a(x) = e^{\varphi(x)}$ и f порождает функционал $F(a) = f(\ln a)$, определеный на открытом конусе $\mathbf{K} \subset C(X)$, состоящем из строго положительных функций. Но условие строгой положительности функции a не оправдано физически, в связи с чем возникает задача о продолжении F на замкнутый конус $\overline{\mathbf{K}}$, состоящий из неотрицательных функций. Особенность этой задачи заключается в том, что, даже если функционал F непрерывен, у него может не существовать непрерывного продолжения на $\overline{\mathbf{K}}$. Исследование этой задачи потребовало обобщения некоторых классических результатов. В частности, получено следующее утверждение, которое является обобщением теоремы Дини.

Теорема 1. *Если монотонно убывающая последовательность полунепрерывных сверху функций f_n на компактном пространстве T сходится точечно к f, то функция f также полунепрерывна сверху и*

$$\lim_{n \to \infty} \max_{t \in T} f_n(t) = \max_{t \in T} f(t).$$

Теорема 2. *Если в представлении (1) функционала f множество M ограничено и состоит из (положительных) мер, то у функционала F на $\boldsymbol{K}$ существует только одно монотонное и полунепрерывное сверху продолжение $\overline{F}$ на $\overline{\boldsymbol{K}}$ и для этого продолжения справедлив вариационный принцип*

$$\overline{F}(a) = \sup_{\mu \in M} \left\{ \int_X \ln a(x) d\mu - g(\mu) \right\}, \quad a \in \overline{\mathbf{K}}.$$

E. G. Bakhtigareeva (Moscow, Russia)
salykai@yandex.ru

AN OPTIMAL IDEAL SPACE FOR A CONE OF DOUBLE MONOTONE FUNCTIONS

Let $T_0 \in (0,\infty]$, $\quad Y = Y(0,T_0)$ be an ideal space (shortly: IS), generated by ideal quasinorm (shortly: IQN) ρ; let M be the set of measurable almost everywhere finite functions, $M_+ = \{f \in M : f > 0\}$.

$$K_1 = \left\{ h \in Y : 0 \le h(t), \frac{h(t)}{\varphi(t)} \downarrow, \frac{h(t)}{\psi(t)} \uparrow \right\}; \rho_{K_1}(h) := \rho(h), \forall h \in K_1. \tag{1}$$

Here, $\varphi, \psi \in C(0, 2T_0)$ are given functions, $\lambda(t) := \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \uparrow$; $\quad \lambda \in \Delta_2$. $\lambda \in \Delta_2 \Leftrightarrow \sup_{t\in(0,T_0)} \left[\frac{\lambda(2t)}{\lambda(t)}\right] < \infty$. Next, we fix $t_0 \in (0,T_0)$ and consider

$$h_0(t) = \frac{\varphi(t)}{\varphi(t_0)}, \quad t \in (0, t_0]; \quad h_0(t) = \frac{\psi(t)}{\psi(t_0)}, \quad t \in (t_0, T_0). \tag{3}$$

We have $0 < \frac{h_0(t)}{\varphi(t)} \downarrow$, $\quad 0 < \frac{h_0(t)}{\psi(t)} \uparrow$. Let the condition be satisfied

$$\rho(h_0) < \infty. \tag{4}$$

Then $h_0 \in K_1$. Next, let the condition be satisfied, and : for $\forall \tau \in (0, T_0)$

$$\frac{\lambda(t)}{\lambda(t+\tau)} \uparrow \quad \text{on} \quad (0,T_0) \quad (\text{by} \quad t). \tag{5}$$

Consider the operator $A_0 : \quad M(0,T_0) \to M_+(0,T_0)$ (norm taken by τ):

$$(A_0 f)(t) = \varphi(t) \left\| \frac{f(\tau)}{\lambda(t+\tau)\psi(\tau)} \right\|_{L_\infty(0,T_0)}. \tag{6}$$

Theorem 1. *Under the conditions above consider the functional $\rho_0(f) = \rho(A_0 f)$, here A_0 is the operator (6). Then, ρ_0 is an IQN, and the space $X_0 = X_0(0,T_0) = \left\{ f \in Y : \|f\|_{X_0} = \rho(A_0 f) < \infty \right\}$, generated by ρ_0, is an IS, $X_0 \subset Y$; moreover X_0 is minimal among all IS $X = X(0,T_0)$ for embedding $K_1 \longmapsto X$.*

This work is supported by The Russian Foundation for Basic Research (pr. No. 15-01-02732).

REFERENCES

1. *E.G. Bakhtigareeva.* Construction of Optimal Ideal Spaces for Cones of Nonnegative Functions. Mathematical Notes. 2016, Vol. 99, No. 6, pp. 810-820.

A. A. Belyaev (Khimki, Moscow region, Russia)
alexei.a.belyaev@gmail.com

MULTIPLIERS ON BESSEL POTENTIAL SPACES

The objective of the talk is to give a complete description of the multipliers acting between Bessel potential spaces $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ and $H^t_q(\mathbb{R}^n)$, provided some assumptions on the indices s, p, t, q.

The importance of this problem in the case $s > 0$, $t < 0$ for the correct definition of elliptic operators with singular coefficients was pointed out in the paper of M. I. Neiman-zade and A. A. Shkalikov [1]. Our final result in this direction (see [2], where some important partial cases were considered) is the following.

Theorem 1. *Let $s,\ t \geqslant 0,\ p,\ q > 1,\ p \leqslant q'$ and let additionally either $s \geqslant t$ and $s > n/p$ or $t \geqslant s$ and $t > n/q$. Then*

$$M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_{q'}(\mathbb{R}^n)] = H^{-t}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n).$$

Here p' and q' are Hölder conjugate numbers to p and q.

Also we shall present an analogue of Theorem 1 for nonnegative smoothness indices $s > n/p$ and $t \geqslant 0$.

Theorem 2. *Let $p,\ q > 1,\ s > n/p,\ t \geqslant 0$ and let additionally $p \leqslant q,\ s - n/p \geqslant t - n/q$. Then*

$$M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)] = H^t_{q,\,unif}(\mathbb{R}^n).$$

In the case when the Strichartz-type condition $s > n/p$ does not hold, under some additional assumptions, we establish continuous embeddings of the type

$$H^t_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^t_q(\mathbb{R}^n)],$$

similar to the continuous embeddings, established earlier for the space $M[H^s_2(\mathbb{R}^n) \to H^{-t}_2(\mathbb{R}^n)]$ and for the space $M[H^s_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-s}_{q'}(\mathbb{R}^n)]$ (see [1] and [3] respectively).

Some results from the joint unpublished paper with A.A.Shkalikov will be used in the talk.

The research was supported by the RNF grant No 14-11-00754.

REFERENCES

1. *Neiman-Zade M. I., Shkalikov A. A.* Strongly elliptic operators with singular coefficients. Russ. J. Math. Phys. 2006. Vol. 13, No. 1, pp. 70–78

2. *Belyaev A. A.* Characterization of spaces of multipliers for Bessel potenti- al spaces. Math. Notes. 2014. Vol. 96, No. 6, pp. 634–646

3. *Belyaev A. A.* Multipliers in Bessel potential spaces and singular pertur- bations of elliptic operators (Ph.D. dissertation). 2016. Lomonosov Moscow State University.

G. I. Botirov, U. U. Qayumov (Tashkent, UZBEKISTAN)
botirovg@yandex.ru

FUNCTIONAL EQUATIONS FOR THE POTTS MODEL WITH COUNTABLE SPIN VALUES ON A CAYLEY TREE

The *infinity state Potts model* with external filed is defined by the formal Hamiltonian

$$H(\sigma) = -\sum_{<x,y>\in L} J_{xy}\delta_{\sigma(x),\sigma(y)} - \sum_{x\in V}\xi_{\sigma(x)}(x),$$

where $J_{xy}\in\mathbb{R}$ is the interaction energy along edge $<x,y>\in L$, $\xi(x)=(\dots,\xi_1,\xi_2,\dots)\in\mathbb{R}^\infty$ represents the external filed, and δ_{ij} is the Kronecker delta symbol (i.e., $\delta_{ij}=1$ if $i=j$ and $\delta_{ij}=0$ otherwise).

To be more precise, for a given vector filed $x\in V\to h(x)=(\dots,h_1(x),h_2(x),\dots)\in\mathbb{R}^\infty$. Fix a probability measure $\nu=\{\nu(i)>0, i\in\mathbb{Z}\}$ and $n=1,2,\dots$ consider the probability distribution $\mu^{(n)}$ on Ω_{V_n} defined by

$$\mu_n^h(\sigma_n) = Z_n^{-1}\exp\left(-\beta H_n(\sigma_n) + \beta\sum_{x\in W_n} h_{\sigma_n(x)}(x)\right)\prod_{x\in V_n}\nu(\sigma(x)), \qquad (1)$$

where $\beta=\frac{1}{T}$ is the inverse temperature, $Z_n=Z_n(\beta,h)$ is the normalizing factor. The probability distributions $\mu^{(n)}$ are compatible if for any $n\geq 1$ and $\sigma_{n-1}\in\Phi^{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\omega_n\in\Phi^{W_n}}\mu^{(n)}(\sigma_{n-1}\vee\omega_n) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}).$$

Here $\sigma_{n-1}\vee\omega_n$ is the concatenation of σ_{n-1} and ω_n.

Theorem 1. *Probability distributions $\mu^{(n)}(\sigma_n)$, $n=1,2,\dots$ in (1) are compatible iff for any $x\in V$ the following equation holds:*

$$h_{i,x} = \sum_{y\in S(x)}\ln\frac{(\theta-1)e^{h_{i,y}} + \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_0}^{\infty} e^{h_{n,y}} + 1}{\theta + \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_0}^{\infty} e^{h_{n,y}}}, \quad i\in\mathbb{Z}_0$$

Here, and below $h_{i,x}=\exp(h_{i,x}-h_{0,x})$, $i\in\mathbb{Z}_0$ and $h_x=(\dots,h_{1,x},h_{2,x},\dots)\in\mathbb{R}^\infty$.

REFERENCES

1. *Rozikov U. A.* Gibbs measures on Cayley trees// World Scientific, 2013, p.385.

E. Burtseva (Luleå, Sweden)
Evgeniya.Burtseva@ltu.se

BOUNDEDNESS OF WEIGHTED HARDY OPERATORS IN HÖLDER SPACES

We prove boundedness of weighted multidimensional Hardy type operators in Hölder spaces. We obtain the necessary and sufficient conditions for such boundedness in the settings both with and without compactification of $\mathbb{R}^n$.

The talk is based on the joint paper with L.-E. Persson and N. Samko.

B. G. Vakulov, Yu. E. Drobotov (Rostov-on-Don, Russia)
bvak1961@bk.ru, yu.e.drobotov@yandex.ru

TWO-POLE RIESZ TYPE POTENTIAL IN GENERALIZED HÖLDER SPACES

The problem to be considered is of investigating conditions for smoothness of the two-pole Riesz type potential operator over $\dot{\mathbb{R}}^n$

$$\left(I^{\alpha} f\right)(x)=\int\limits_{\dot{\mathbb{R}}^n} \frac{f(\sigma)}{|x-\sigma|^{n-\alpha}|x+\sigma|^{n-\alpha}} d\sigma, \quad x \in \dot{\mathbb{R}}^n,$$

where $\dot{\mathbb{R}}^n$ denotes the one-point compactification of $\mathbb{R}^n$, $r(x,y)=|x-y|$ is the Euclidean distance.

One of the ways to determine smoothness is using the terms of the generalized Hölder spaces. The generalized variable Hölder space $H^{\omega(\cdot)}$ is determined by the following norm:

$$\|f\|_{H^{\omega(\cdot)}(\Omega,w)}=\|f\|_{C(\Omega,w)}+\sup_{x\in\Omega,t>0}\frac{M_r(wf,x,t)}{\omega(x,t)},$$

where $\Omega \subseteq \dot{\mathbb{R}}^n$, w is a weight function, C denotes the space of continuous functions and the local continuity modulus is

$$M_r(f,x,t)=\sup_{y\in\Omega: r(x,y)\leq t}|f(x)-f(y)|,$$

where r is the notion for a metric.

Earlier, the two-pole Riesz type potential operator over a unit sphere $\mathbb{S}^{n-1}\subseteq\mathbb{R}^n$ was considered [1]. It has been proved, that the operator improves smoothness of functions from $H_k^{\omega}\left(\mathbb{S}^{n-1},\rho\right)$ exactly by an order $\mathfrak{R}\alpha$, where

$$H_k^{\omega}\left(\mathbb{S}^{n-1},\rho\right)=\left\{f\in C^k\left(\mathbb{S}^{n-1}\right): M_r\left(D^k f,t\right)\leq c\omega(t)\right\},$$

D^k denotes the sphere differentiation operator from a special class, $\rho(x) = |x-a|^\mu$, $0 < \mu < n$, and $x, a \in \mathbb{S}^{n-1}$. Here, stereographic projection v is applied in order to extend the results to the case of integrating over $\dot{\mathbb{R}}^n$:

$$|\xi - \sigma| = \frac{2|x-y|}{\sqrt{|x|^2+1}\sqrt{|y|^2+1}}, \quad d\sigma = \frac{2^n dy}{\left(|y|^2+1\right)^n},$$

where $x, y \in \dot{\mathbb{R}}^n$, $\xi = v(x)$, $\sigma = v(y)$, $\xi, \eta \in \mathbb{S}^n$.

R E F E R E N C E S

1. *Vakulov B. G., Karapetiants N. K.* Operatory tipa potenciala na sfere s osobennostyami na polyusah. Doklady Akademii Nauk. 2003. Vol. 392, No. 2, pp. 151–154.

А. С. Гаспарян (Переславль-Залесский, Россия)
armenak.gasparyan@yandex.ru

σ-ДЕТЕРМИНАНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ОПЕРАТОРОВ

Многие классические неравенства по сути являются детерминантными, например неравенства Ньютона на элементарные симметрические средние, неравенства типа Турана для ортогональных полиномов, неравенства А.Д.Александрова для смешанных дискриминантов, неравенство Ходжа на индексы пересечения, неравенство Грама и в частности неравенство Коши-Буняковского-Шварца, неравенства Чебышева, Грюсса, Островского и многие другие.

Автор доклада в течении нескольких лет занимался систематическим обобщением классических и новых детерминантных тождеств и неравенств на многомерные матрицы и определители. При этом, наряду с прямыми обобщениями, получено множество существенно новых неравенств.

В данной работе представлены обобщения множества названных неравенств на σ-детерминанты, отвечающие многомерным матрицам. σ-детерминант — это функция элементов многомерной матрицы, одновременно обладающая свойствами обычных определителей и перманентов. Сигнатура многомерного детерминанта задаётся последовательностью из нулей и чётного числа единиц: $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \in \{0,1\}^p$. σ-детерминант p-мерной кубической матрицы n-го порядка $A = \|A_{i_1 \ldots i_p}\|$ определяется по формуле

$$|A_{i_1 \ldots i_p}|^{(\sigma)} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi_1, \ldots, \pi_p \in S_n} \prod_{k=1}^{p} (\delta(\pi_k))^{\sigma_k} \prod_{r=1}^{n} A_{\pi_1(r) \ldots \pi_p(r)},$$

где $\delta(\pi)$ — знак перестановки π.

σ-детерминантные неравенства, полученные для конечных сумм и интегралов, далее обобщаются на положительные (или изотонные) линейные функционалы и операторы.

D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov (Tula, Russia), S. Yu. Tikhonov (Barcelona, Spain)
dvgmail@mail.ru, ivaleryi@mail.ru, stikhonov@crm.cat

BOUNDEDNESS OF THE RIESZ POTENTIALS FOR DUNKL TRANSFORM

Let $R \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ be a root system, R_+ positive subsystem, $G(R) \subset O(d)$ reflection group, and $k\colon R \to \mathbb{R}_+$ G-invariant multiplicity function.

Let also $v_k(x) = \prod_{a\in R_+} |(a,x)|^{2k(a)}$, $c_k^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k(x)\,dx$, $d\mu_k(x) = c_k v_k(x)\,dx$, $p \geq 1$, $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p\,d\mu_k\right)^{1/p}$ be the norm in $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$.

Define the Dunkl transform of f by $\mathcal{F}_k(f)$ and the generalized translation operator by $\tau^y f$. If $k \equiv 0$, then $\mathcal{F}_k(f)$ is the usual Fourier transform and $\tau^y f(x) = f(x+y)$ is the translation operator.

Set $\lambda_k = d/2 - 1 + \sum_{a\in R_+} k(a)$. S. Thangavelu and Y. Xu defined the weighted Riesz potential operator I_α^k on Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ by

$$I_\alpha^k f(x) = (d_k^\alpha)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \tau^{-y} f(x) |y|^{\alpha-(2\lambda_k+2)}\,d\mu_k(y),$$

where $d_k^\alpha = 2^{-\lambda_k-1+\alpha}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma(\lambda_k+1-\alpha/2)$, $0 < \alpha < 2\lambda_k+2$.

We are interested in the inequality

$$\||x|^{-\gamma} I_\alpha^k f\|_q \leq c(\alpha,\beta,\gamma,p,q,k) \||x|^\beta f\|_p,$$

on $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, with the sharp constant $c(\alpha,\beta,\gamma,p,q,k)$.

Theorem 1. *If $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma < \frac{2\lambda_k+2}{q}$, $\beta < \frac{2\lambda_k+2}{p'}$, $\gamma+\beta \geq 0$, $0 < \alpha < 2\lambda_k+2$, and $\alpha-\gamma-\beta = (\frac{1}{p}-\frac{1}{q})(2\lambda_k+2)$, then $c(\alpha,\beta,\gamma,p,q,k) < \infty$.*

If $\gamma = \beta = 0$, Theorem 1 was proved by S. Hassani, S. Mustapha and M. Sifi. If $k \equiv 0$, Theorem 1 was proved by G.H. Hardy and J.E. Littlewood ($d = 1$), S. Soboleff ($d > 1, \gamma = \beta = 0$), E.M. Stein and G. Weiss (the general case).

Theorem 2. *If $1 < p < \infty$, $\gamma < \frac{2\lambda_k+2}{p}$, $\beta < \frac{2\lambda_k+2}{p'}$, $\alpha > 0$, and $\gamma = \alpha - \beta$, then*

$$c(\alpha,\beta,\gamma,p,p,k) = 2^{-\alpha} \frac{\Gamma(\frac{\lambda_k+1}{p} - \frac{\alpha-\beta}{2})\Gamma(\frac{\lambda_k+1}{p'} - \frac{\beta}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda_k+1}{p'} + \frac{\alpha-\beta}{2})\Gamma(\frac{\lambda_k+1}{p} + \frac{\beta}{2})}. \tag{1}$$

If $k \equiv 0$, equality (1) was proved by I.W. Herbst ($\beta = 0$) and W. Beckner (the general case).

The authors were supported by RFBR N 16-01-00308.

R. C. Guerra (Aveiro, Portugal)
ritaguerra@ua.pt

ON THE INVERTIBILITY PROPERTIES OF A CLASS OF INTEGRAL EQUATIONS INVOLVING COSINE AND SINE KERNELS AND THEIR ASSOCIATED CONVOLUTIONS

We consider a class of integral equations characterized by kernels of cosine and sine type and study their solvability. Moreover, we analyse the integral operator T, which is generating those equations, by identifying its characteristic polynomial, characterizing its invertibility, spectrum, Parseval type identity and involution properties. Additionally, new convolutions are introduced, associated with T, for which we deduce corresponding factorizations properties. This is based on a joint work with L.P. Castro and N. M. Tuan.

R. C. Guerra is supported by Portuguese Foundation for Science and Technology (FCT) through the Ph.D. scholarship PD/BD/114187/2016.

V. Guliyev (Kirsehir, Turkey and Baku, Azerbaijan)
vagif@guliyev.com

CHARACTERIZATIONS FOR THE FRACTIONAL MAXIMAL OPERATOR, RIESZ POTENTIAL AND THEIR COMMUTATORS ON ORLICZ SPACES

In this talk, we shall give necessary and sufficient conditions for the strong and weak boundedness of the fractional maximal and Riesz potential operators on Orlicz spaces. Cianchi [1] found necessary and sufficient conditions on general Young functions Φ and Ψ ensuring that these operators are of weak or strong type from L^{Φ} into L^{Ψ}. Our characte-rizations for the boundedness of the above-mentioned operators are different from the ones in [1]. Moreover, we also give characterizations for the boundedness of the commutators of fractional maximal and Riesz potential operators on Orlicz spaces [2].

This work was supported by the Ahi Evran University Scientific Research Projects Coordination Unit. Project Number: FEF.A3.16.024.

REFERENCES

1. *Cianchi A.* Strong and weak type inequalities for some classical operators in Orlicz spaces. J. London Math. Soc. 1999. Vol. 2, No. 1, pp. 247–286.

2. *Guliyev V. S., Deringoz F. and Hasanov S. G.* Riesz potential and its commutators on Orlicz spaces. accepted in J. Inequal. Appl. 2017.

Р. В. Даллакян (Ереван, Армения)
dallakyan57@mail.ru

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ A_α^P

Исследованию весовых пространств A_α^p $(0 < p < +\infty,\ -1 < \alpha < +\infty)$ аналитических в единичном круге $|z| < 1$ функций [1, 2, 3], определяемых условием

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} (1-r)^\alpha \left|f(re^{i\theta})\right|^p r\, dr d\theta < +\infty$$

посвящено множество работ известных специалистов.

Доклад посвящен установленному недавно автором [4] обобщению одного из найденных М. М. Джрбашяном в 1948г. представлений классов A_α^2 $(-1 < \alpha < +\infty)$. А именно, утверждения о том, что если $f(z) \in A_\alpha^2$ при каком-либо $-1 < \alpha < +\infty$, то функция

$$\varphi_0(z) := \frac{\alpha+1}{\pi} \int\limits_0^1 (1-p)^{\frac{\alpha-1}{2}} f(\rho z)\, d\rho$$

принадлежит классу Харди H^2 в $|z| < 1$, и имеет место интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varphi_0(e^{i\theta}) d\theta}{(1-e^{-i\theta} z)^{\frac{\alpha+3}{2}}}\,, \quad |z| < 1.$$

(см. Теорему V в [1], а также [2]). Как отмечено в [1], ранее, при $\alpha = 0$, это представление было установлено М. В. Келдышем.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Джрбашян М. М.* О проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. инст. Мат. и Мех. АН Армянской ССР. 1948, вып. 2, стр. 3–40.
2. *Djrbashian A. E., Shamoyan F. A.* Topics in the theory of A_α^p spaces. Teubner-Texte zur Mathematic, Leipzig, 1988.
3. *Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K.* Theory of Bergman spaces. Springer Verlag, New York, 2000.
4. *Даллакян Р. В.* О представлении одного класса аналитических в единичном круге функций. Научные ведомости БелГУ. серия мат.-физ. 2013, т. 5(148), вып. 30, стр. 61–67.

В. В. Денисенко, В. М. Деундяк (Ростов-на-Дону, Россия)
ru.victa@gmail.com, vl.deundyak@gmail.com

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Условия ограниченности многомерных интегральных операторов с однородными ядрами в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, где $1 < p < +\infty$, получены Н. К. Карапетянцем [1], [2]. Цель настоящей работы — перенос результатов Н. К. Карапетянца на класс интегральных операторов с однородными ядрами, действующими в пространстве $L_p(\mathbb{H}_n)$, где $\mathbb{H}_n$ — группа Гейзенберга. Напомним, что группой Гейзенберга называется множество $\mathbb{H}_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ с операцией:

$$\forall (z,r),\ (w,q) \in \mathbb{H}_n : \quad (z,r)(w,q) = (z+w, r+q+2\mathrm{Im}(z \cdot w)),$$

(см. [3], с. 209).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карапетянц Н. К.* О необходимых условиях ограниченности оператора с неотрицательным квазиоднородным ядром // Математические заметки. 1981. Т. 30, № 5. С. 787–794.
2. *Karapetiants N., Samko S.* Equations with Involutive Operators. Boston: Birkhauser, 2001, 427 p.
3. *Krantz S. G.* Explorations in harmonic analysis: with applications to complex function theory and the Heisenberg group. Boston: Birkhauser, 2009, 360 p.

F. Deringoz (Kirsehir, Turkey)
deringoz@hotmail.com

PARAMETRIC MARCINKIEWICZ INTEGRAL OPERATOR AND HIGHER ORDER COMMUTATORS ON GENERALIZED WEIGHTED MORREY SPACES

In this talk, we present criteria for the boundedness of parametric Marcinkiewicz integral operator and its higher order commutator with rough kernels on generalized weighted Morrey spaces based on the works of Guliyev [1] and [2].

This work was supported by the Ahi Evran University Scientific Research Projects Coordination Unit. Project Number: FEF.A3.16.011.

REFERENCES

1. *Guliyev V. S.* Generalized weighted Morrey spaces and higher order commutators of sublinear operators. Eurasian Math. J. 2012. Vol. 3, No. 3, pp. 33–61.
2. *Guliyev V. S. and Aliyev S. A.* Boundedness of the parametric Marcinkiewicz integral operator and its commutators on generalized Morrey spaces. Georgian Math. J. 2012. Vol. 19, No. 2, pp. 195–208.

И.,В. Дикарев (Котбус, Германия)
dikarill@tu-cottbus.de

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ

В работе рассматривается обобщенная задача оптимального управления с бесконечным горизонтом и компактной областью управления $U \subset \mathbb{R}^m$. Допустимые траектории рассматриваются во взвешенном Соболевом пространстве $W_2^{1,n}(\mathbb{R}^{++}, \nu)$.

Вес ν выбирается таким образом, чтобы выполнялось $\nu(\mathbb{R}^{++}) < \infty$. Вводится класс $\mathcal{M}_U^\infty$ специальных семейств $\mu \hat{=} \{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ вероятностных мер μ_t для применения к задачам управления с бесконечным горизонтом. Класс $\mathcal{M}_U^\infty$ строится подобно множеству $\mathfrak{M}_U$ обобщенных управлений μ, введенному Гамкрелидзе в [1].

Вводя на оси времени некоторую меру ζ, определяя класс $\mathcal{M}_\zeta^U$ как множество функционалов π из двойственного пространства $C_0(\mathbb{R}^+ \times U)^*$ вида $\pi = \mu \otimes \zeta$ и получая изоморфизм $\mathcal{M}_U^\infty \simeq \mathcal{M}_\zeta^U$, была получена теорема о существовании решения следующей задачи обобщенного оптимального управления:

$$J(x,\pi) = \pi(r(t,x(t),v)) = \int_0^\infty \left\{ \int_U r(t,x(t),v)d\mu_t \right\} d\zeta \to Min!$$
$$\dot{x}(t) = \int_U f(t,x(t),v)d\mu_t \text{ п.в.}, \ x(0) = x_0,$$
$$x \in W_2^{1,n}(\mathbb{R}^{++},\nu),$$
$$\pi \in \mathcal{M}_\zeta^U, \ U \subset \mathbb{R}^m \text{ – компакт.}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gamkrelidze R. V.* Principles of Optimal Control Theory. Plenum Press. 1978.
2. *Бурбаки Н.* ИНТЕГРИРОВАНИЕ: меры на локально компактных пространствах, продолжение меры, интегрирование мер на отделимых пространствах. "Наука". 1977.

П. А. Иванов (Ростов-на-Дону, Россия)
pavel_rsm@mail.ru
С. Н. Мелихов (Ростов-на-Дону, Владикавказ, Россия)
melih@math.rsu.ru

ОПЕРАТОР ПОММЬЕ В ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть Ω_j, $1 \le j \le N$, — области в $\mathbb{C}$, содержащие 0; $\Omega := \prod_{j=1}^N \Omega_j$; $H(\Omega)$ — пространство Фреше всех функций, голоморфных в Ω. Определим частные операторы Поммье:

$$D_{j,0}(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t)-f(t_1,\dots,t_{j-1},0,t_{j+1},\dots,t_N)}{t_j}, & t_j \ne 0, \\ \frac{\partial f}{\partial t_j}(t_1,\dots,t_{j-1},0,t_{j+1},\dots,t_N), & t_j = 0, \end{cases}$$

и положим для $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^N \in \mathbb{N}_0^N$, где $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$D_0^\alpha := D_{1,0}^{\alpha_1} \cdots D_{N,0}^{\alpha_N}.$$

Оператор Поммье подробно исследован в различных пространствах голоморфных функций при $N = 1$: описаны перестановочные с ним операторы, его циклические векторы; он применялся при изучении рядов Ньютона и остатков рядов Тейлора для голоморфных функций (см. [1]).

В докладе идет речь о свойствах операторов D_0^α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, и ассоциированных с ними операторов сдвига T_z, $z \in \Omega$. Основой определения операторов T_z является равенство $T_z(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} z^\alpha D_0^\alpha(f)$, справедливое для многочленов f. С помощью операторов сдвига описан коммутант $\mathcal{K}(\mathcal{D}_0)$ системы $\{D_{j,0} : 1 \le j \le N\}$ в кольце всех линейных непрерывных в $H(\Omega)$ операторов. В топологическом сопряженном $H(\Omega)'$ к $H(\Omega)$ введено умножение $\circ$ функционалов. Оно обладает тем свойством, что алгебра $(H(\Omega)', \circ)$ изоморфна коммутанту $\mathcal{K}(\mathcal{D}_0)$ с обычным операторным умножением. Алгебра $(H(\Omega)', \circ)$ изоморфна также пространству $H_0(\mathbf{C}\Omega)$ ростков всех функций, голоморфных на $\prod_{j=1}^{N}(\mathbb{C} \setminus \Omega_j)$ и обращающихся в 0 в бесконечных точках, с умножением $(f, g) \mapsto (-1)^N z_1 \cdots z_N g(z) h(z)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций. Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, №. 2, стр. 114–137.

О. А. Иванова (Ростов-на-Дону, Россия)
neo_ivolga@mail.ru

ОБ АЛГЕБРЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ, ОПРЕДЕЛЯЕМОЙ ОПЕРАТОРАМИ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА

В работе [1] описаны операторы, линейно и непрерывно действующие в некотором счетном индуктивном пределе E весовых пространств Фреше целых (в $\mathbb{C}$) функций и перестановочные в нем с оператором Поммье D_{0,g_0}, ассоциированным с некоторой функцией $g_0 \in E$. Пусть E' – топологическое сопряженное к E. Как показано в [1], коммутант $\mathcal{K}(D_{0,g_0})$ оператора D_{0,g_0} в кольце всех линейных непрерывных операторов в E изоморфен алгебре E' с операцией умножения (свертки) $\otimes$, определяемой с помощью оператора сдвига для оператора Поммье. В докладе идет речь о свойствах этой алгебры. Доказано, что алгебры $(E', \otimes)$ и $\mathcal{K}(D_{0,g_0})$ также и топологически изоморфны, если E' снабдить слабой топологией, а $\mathcal{K}(D_{0,g_0})$ – топологией поточечной сходимости (когда в E введена слабая топология). Указанная "топологичность" изоморфизма применяется при решении задачи о представлении операторов из $\mathcal{K}(D_{0,g_0})$ в виде $D_{g_0,0}$-операторов бесконечного порядка. Кроме того, описаны мультипликативные функционалы на этих алгебрах. Если функция g_0 не имеет нулей, то такой функционал единственен. В общем случае таких функционалов "на 1 больше", чем нулей у g_0. Существенным побудительным мотивом к данному исследованию послужила статья В. А. Ткаченко [3]. В [3] установлены подобные свойства коммутанта оператора обобщенного интегрирования I_P в сильном сопряженном к весовому (LB)-пространству целых функций, рост которых определяется некоторой ρ-тригонометрически выпуклой функцией. При этом оператор I_P является сопряженным к оператору Поммье D_{0,e^P}, где P – некоторый многочлен. Приведенные результаты получены совместно с С.Н. Мелиховым и опубликованы в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций. Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, №. 2, стр. 114–137.

2. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об алгебре аналитических функционалов, связанной с оператором Поммье. Владикавк. матем. журн. 2016. Т. 18, №. 4, стр. 34–40.

3. *Ткаченко В. А.* Об операторах, коммутирующих с обобщенным интегрированием в пространствах аналитических функционалов. Матем. заметки. 1979. Т. 29, № 2, стр. 271—282.

А. С. Калитвин, А. И. Иноземцев (Липецк, Россия)
kalitvinas@mail.ru inozemcev.a.i@gmail.com

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ОДНОГО ТИПА УРАВНЕНИЙ С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

В пространстве непрерывных функций $C(G)$, где $G = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, рассматривается фредгольмовость уравнения

$$x(t,s,u) = \int_a^b l(t,s,u,\tau)x(\tau,s,u)\,d\tau + \int_c^d m(t,s,u,\sigma)x(t,\sigma,u)\,d\sigma +$$

$$+ \int_e^f n(t,s,u,v)x(t,s,v)dv + f(t,s,u) \equiv (Kx)(t,s,u) + f(t,s,u) \equiv$$

$$\equiv ((L+M+N)x)(t,s,u) + f(t,s,u) \qquad (1)$$

с непрерывными функциями l, m, n, f. Операторы K, L, M, N с ненулевыми ядрами не компактны. Отсюда следует, что уравнение (1) не является фредгольмовым в общем случае непрерывных ядер l, m, n. В работе [1] содержатся критерии фредгольмовости линейных операторов и уравнений с частными интегралами в $C(G)$, в случае $G = [a, b] \times [c, d]$. В данной заметке приводится критерий фредгольмовости оператора $I - K$ и уравнения (1) в $C(G) = C([a, b] \times [c, d] \times [e, f])$.

Если обратимы операторы $I-L$, $I-M$, $I-N$ и $(I-L)^{-1} = I+R_l$, $(I-M)^{-1} = I+R_m$, $(I-N)^{-1} = I+R_n$, где ядра частично интегральных операторов R_l, R_m, R_n непрерывны, то $I-K = \Theta[I-B_{12}-B_{13}-B_{23}-B_{123}]$, где $\Theta = (I-L)(I-M)(I-N)$, $B_{12} = LM + R_2LM + R_1LM + R_2R_1LM$, $B_{13} = LN + R_3LN + R_1LN + R_3R_1LN$, $B_{23} = MN + R_3MN + R_2MN + R_3R_2MN$, а B_{123} — компактный интегральный оператор в $C(G)$. Если теперь $(I - B_{12})^{-1} = I + R_{12}$, $(I - B_{13})^{-1} = I + R_{13}$,

$(I-B_{23})^{-1} = I + R_{23}$, то $I-K = \Theta\Delta[I-H_{123}]$, где $\Delta = (I-B_{12})(I-B_{13})(I-B_{23})$, а H_{123} — интегральный оператор с непрерывным ядром.

Таким образом, из обратимости операторов $I-L$, $I-M$, $I-N$, $I-B_{12}$, $I-B_{13}$, $I-B_{23}$ в $C(G)$ следует фредгольмовость оператора $I-K$. Верно и обратное утверждение.

Теорема. *Пусть функции l, m, n и f непрерывны. Тогда в $C(G)$ фредгольмовость оператора $I-K$ и уравнения (1) равносильны обратимости операторов $I-L$, $I-M$, $I-N$, $I-B_{12}$, $I-B_{13}$, $I-B_{23}$.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. Липецк, 2006.

A. Karapetyants (Rostov-on-Don, Russia), S. Samko (Faro, Portugal)

ON A CERTAIN NEW CLASSES OF BERGMAN TYPE SPACES

We present a new general approach to the definition of mixed norm Bergman space $\mathcal{A}^{q;X}(\mathbb{D})$, $1 \leqslant q < \infty$ on the unit disc $\mathbb{D}$. We study a problem of boundedness of Bergman projection in this general setting. Second, we apply this general approach for the new concrete cases when X is either Orlicz space or generalized Morrey space, or generalized complementary Morrey space, or generalized Orlich-Morrey type spaces.

L. P. Castro (Aveiro, Portugal)
castro@ua.pt

EXPLICIT RESOLVENT OPERATORS FOR BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN DIFFRACTION THEORY

The main aim of the talk is to present how to construct resolvent operators for certain classes of boundary value problems in diffraction theory. We will use an operator theory approach to analyse problems of wave diffraction from polygonal-conical screens. These are formulated as boundary value problems for the three-dimensional Helmholtz equation with Dirichlet or Neumann conditions on a plane screen of polygonal-conical form (including unbounded and multiply-connected screens), in weak formulation. The method is based upon operator theoretical techniques in Hilbert spaces, such as the construction of matricial coupling relations and certain orthogonal projections. Various cross connections will be exposed, particularly considering classical Wiener-Hopf operators in Sobolev spaces as general Wiener-Hopf operators in Hilbert spaces. This is based on joint works with R. Duduchava and F.-O. Speck.

А. В. Козак, Д. И. Ханин. (Южный федеральный университет)
avkozak@bmail.ru, dihan@mail.ru

ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МНОГОМЕРНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ СВЁРТКИ НА БОЛЬШИХ МНОЖЕСТВАХ С КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

В докладе рассматривается уравнение типа многомерной интегральной свёртки в $L_p(R^m)$ на большом множестве с кусочно-гладкой границей. Исходное множество разбивается на непересекающиеся части, в каждой из которых приближённое решение ищется отдельно. В центральной части решение ищется с помощью оператора свёртки по всему пространству, аналогично тому как это делалось для многогранников и докладывалось на конференции в 2015 году. Вместо оператора свёртки по всему пространству можно использовать оператор свёртки с периодическим ядром.

В окрестности фиксированной граничной точки решение предлагается искать с помощью оператора свёртки по полупространству, если указанная фиксированная точка принадлежит гладкому участку границы. В окрестностях же остальных граничных точек решение можно определить численно или с помощью операторов свёртки в некоторых конусах, если последние удастся эффективно обратить. Доказаны оценки погрешности в терминах операторных норм и убывающих функций специального вида, доказывающие эффективность метода для достаточно больших множеств.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Kozak A. V., Khanin D. I.* Approximate solution of integral equations with multidimensional convolution operators on large sets with piecewise smooth boundaries. Boletin de la Sociedad Matemática Mexicana. 2016. Volume 22, Issue 2, p. 487-–501.
2. *Козак А. В.* Локальный принцип в теории проекционных методов. Докл. АН СССР. 1973. Том 212, №6, с. 1287–1289.
3. *Симоненко И. Б.* Операторы типа свертки в конусах. Матем. сб.. 1967. 74(116):2, с. 298–313.
4. *Симоненко И. Б.* Обратимость оператора свёртки в больших областях. Математические исследования. 1980, с. 56-66.

А. В. Козак, Б. Я. Штейнберг, О. Б. Штейнберг
(Ростов-на-Дону, Россия)
avkozak@bmail.ru, borsteinb@mail.ru, olegsteinb@gmail.com

РАЗВИТИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ БЫСТРОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ СМАЗАННОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

В докладе рассматривается задача восстановления смазанного изображения полученного равномерно вращающейся камерой. Данную задачу моделирует система линейных алгебраических уравнений с циклической матрицей специального вида. Эта СЛАУ является уравнением свертки на циклической группе с ядром – характеристической функцией сегмента.

Как было исследовано авторами ранее [1]-[3], даже при идеальном горизонтальном смазе возникает плохо обусловленная система уравнений. В реальной задаче вращающаяся камера расположена под углом к горизонту и смаз на ее матрице происходит не горизонтально, а по некоторым кривым, что приводит к большим погрешностям и делает вос-становление изображения без учета геометрических искажений невозможным. В работе исследованы возникающие геометрические искажения и предложен метод их компенсации.

В предыдущих работах [1]-[3] исследовался случай, при котором матрица системы линейных уравнений, моделирующая смаз изображения, невырождена. Для этого случая был получен быстрый алгоритм восстановления изображения, требующий около 4 операций на пиксель. В данной работе рассматривается случай вырожденной матрицы, для которого также получен быстрый алгоритм. С полученным алгоритмом проводятся численные эксперименты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козак А.В., Штейнберг Б.Я., Штейнберг О.Б.* Уравнение дискретной свертки с характеристической функцией сегмента и его приложение. В сб. «Труды научной школы И.Б. Симоненко. Выпуск второй», 2015 г., Изд-во Южного федерального университета, г. Ростов-на-Дону, стр. 157-167.

2. *Козак А.В., Штейнберг Б.Я., Штейнберг О.Б.* Оценка погрешностей при решении уравнения свертки для восстановления смазанных изображений. Тезисы международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения VI".г. Ростов-на-Дону. 24 - 29 апреля 2016 года.

3. *Козак А.В., Штейнберг Б.Я., Штейнберг О.Б.* Быстрое и точное восстановление смазанного изображения, полученного вращающейся камерой. Труды Международной конференции по программной инженерии CEE-SECR '16, October 28-29, 2016, Moscow, Russian Federation © 2016 ACM.

В. Н. Козлов, А. А. Ефремов (Санкт-Петербург, Россия)
saiu@ftk.spbstu.ru

К УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПРОЕКЦИОННЫМИ ИНТЕРВАЛЬНО ДОПУСТИМЫМИ И ОПТИМАЛЬНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

Действующий в евклидовом пространстве управляемый разностный оператор

$$x_{k+1} = Hx_k + F_u u_k,\ y_k = cx_k,\ \ x_{k_0} = x_0 \in D,$$

4 где $E_{p\,n_y} \in R^{p\,n_y \times p\,n_y}$,$G \in R^{pn_y \times pn_u}$. Прогнозы Z_{kp} на $[k,\ k+p] \in N$ выходов и управлений заданы линейным многообразием

$$D_Z^0 = \left\{ Z_{kp} = (Y_{kp},\ U_{kp})^T \mid A\,Z_{kp} = b_k,\ \ A = \left[E_{p\,n_y} \mid -G \right] \in R^{p\,n_y \times\,(pn_y + pn_u)} \right\},$$

где $E_{p\,n_y} \in R^{p\,n_y \times p\,n_y}, G \in R^{pn_y \times pn_u}$, а ограничения – шарами

$$D_Z^1 = \left\{ Z_{kp} = (Y_k, U_k)^T \ \mid \| Z_{\,kp} \|_2^2 \ \le \ r^{\,2} \right\}.$$

Оператор интервально допустимого управления (ИДУ) с параметрами допустимости $\bar{\theta}_p \in [0,\ 1]$ и $\eta_k = \rho^{-1/2}\alpha^{1/2}(x_k)$ при управлении по состоянию имеет вид

$$\bar{U}_k\left(\bar{\theta}_p,\, x_k\right) = T_U\, P_A b_k\left(x_k\right) + \bar{\theta}_p T_U\, P^0 C\rho^{-1/2}\alpha^{1/2}\left(x_k\right),$$

где $b_k = b_k\left(x_k\right) = c\bar{H}x_k,\ P_A = A^T\left(AA^T\right)^{-1},\ P^0 = E_{n_y} - P_A A;$
$p_\theta\left(\theta\right) = 0,5\left(|\theta| - |\theta - 1| + 1\right) \in [0,\ 1]\,; \alpha^{1/2}\left(x_k\right) = \left[r^2 - p_\alpha\left(\|\, Q_k\|^2\right)\right]^{1/2},\ Q_k = P_A c\bar{H}x_k$. Проектор оператора ИДУ (2) вида

$$p_\alpha\left(\|\, Q_k\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left|\,\|\, Q_k\|^2 - \varepsilon^2\right| - \left|\,\|\, Q_k\|^2 - (r-\varepsilon)^2\,\right| + \varepsilon^2 + (r-\varepsilon)^2\right) \in \left[\varepsilon^2,\, (r-\varepsilon)^2\right],$$

липшицев: $\left|\alpha^{1/2}\left(c\right) - \alpha^{1/2}\left(d\right)\right| \le L_\alpha\left|\alpha\left(c\right) - \alpha\left(d\right)\right|, L_\alpha \in \left[0,1r^2;\ \ 0,9r^2\right]$. Эта постоянная – корректная, если $\|\, Q_k\|^2 \in \left[\varepsilon^2,\ (r-\varepsilon)^2\right]$. «Функция» гарантирует корректность квадратного корня с аргументом $\|\, Q_k\|^2$. Устойчивость следует из условия сжатия

$$\begin{gathered}\|\, X_{k+1} - X_*\,\| \ \ \le \ \|\, H\,\| \cdot \|\, X_k - X_*\,\| + \|\, F_u\,\| \cdot |\,\gamma\,| \cdot \|\, T_U\,\| \times \\ \left(\|\, P_A\,\| \cdot \left\|\,\bar{H}\,\right\| \cdot \|\, c\,\| + \left|\bar{\theta}_p\right| \cdot \left\|p_C^0\right\| L_\alpha L_{p\alpha}\,\|\, X_k + X_*\| \cdot \left\|\,\bar{D}\,\right\|\right)\,\|\, X_k - X_*\|\ ,\end{gathered}$$

определяющего параметры исследуемых операторов [1]

$$\begin{gathered}|\,\gamma\,| \ < \ (1 - \|\, H\,\|\,) \times \left(\,\|\, P_A\,\| \cdot \left\|\,\bar{H}\,\right\| \cdot \|\, c\,\| + \right.\\ \left. +2\left|\bar{\theta}_p\right| r \left\|\, p_C^0\,\right\| \ L_\alpha L_{p\alpha}\ \ \left\|\,\bar{D}\,\right\|\right)^{-1}(\|\, F_U\,\| \cdot \|\, T_U\,\|)^{-1}.\end{gathered}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В. Н.* Негладкие системы, операторы оптимизации и устойчивость. Изд-во Политехн. ун-та. СПб. 2012.

V. D. Kryakvin (Rostov-na-Donu, Russian Federation)
kryakvin@sfedu.ru

CHARACTERIZATION OF THE HÖLDER-ZYGMUND SPACES WITH VARIABLE SMOOTHNESS BY THE POISSON INTEGRAL

We consider the Hölder-Zygmund space $\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ of the distributions u $(\in S'(\mathbb{R}^n))$ for which the norm

$$\|u\|_{\Lambda^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{k\in\mathbb{N}}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|2^{ks(x)}\psi_k(D)u(x)\right|$$

is finite ([2]). The variable smoothness $s(\cdot)$ is the bounded real-valued function satisfied of the log-continuity condition and $\{\psi_k\}$ is the Littlewood-Paley partition of unity.

Known ([1]) characterization of these spaces for constant positive smoothness s by means of the Poisson integral

$$u(x,y)=\int P_y(t)u(x-t)\,dt,\quad P_y(t)=\frac{c_n y}{(|t|^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

transfers in the case of the variable smoothness $s(\cdot)$ with the use of the condition

$$\sup_{0<y<1}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial^k u(x,y)}{y^{s(x)-k}\partial y^k}\right|$$

where $k>\sup_{x\in\mathbb{R}^n}s(x)$ and $\inf_{x\in\mathbb{R}^n}s(x)>0$.

REFERENCES

1. *Stein E. M.* Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton. 1970.
2. *Kryakvin V. D.* Boundedness of pseudodifferential operators in Hölder-Zygmund spaces of variable order. Siberian Mathematical Journal. 2014. Vol. 55, No. 6, pp. 1073–1083.

М. В. Кукушкин (Железноводск, Россия)
kukushkinmv@rambler.ru

О СВОЙСТВЕ СИЛЬНОЙ АККРЕТИВНОСТИ ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Дифференциальным операторам второго порядка с дробной производной в младших членах посвящены работы [1-2]. В данной работе мы рассмотрим операторы дробного дифференцирования в различных смыслах. На компакте рассмотрим операторы: Киприянова, Римана-Лиувилля, Маршо [3]. На оси: Римана-Лиувилля, Маршо. Установим, что свойство сильной аккретивности [4] является общим свойством операторов дробного дифференцирования. Также докажем, что свойством секториальности [4], обладают дифференциальные операторы второго порядка с дробной производной в младших членах. Исследуем расположение спектра и резольвентного множества операторов второго порядка с дробной производной в младших членах. Покажем, что спектр суммы оператора и сопряженного является дискретным. В качестве приложения свойства секториальности сформулируем теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения второго порядка с дробной производной в младших членах. В качестве приложения свойства сильной аккретивности, получим оценку собственных значений оператора второго порядка с дробной производной в младших членах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киприянов И. А.* Оператор дробного дифференцирования и степени эллиптических операторов. Доклады Академии наук СССР. 1960. Том. 131, №. 2, стр. 238–241.
2. *Нахушев А. М.* Задача Штурма - Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах. Доклады Академии наук СССР. 1977. Том. 234, №. 2, стр. 308–311.
3. *Самко С. Г.,Килбас А. А.,Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск "Наука и техника". 1987.

4. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. 1966.

Д. А. Леонов, В. М. Деундяк (Ростов-на-Дону)
tori_92@inbox.ru

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДВУСТОРОННЕЙ СВЁРТКИ НА КОНЕЧНЫХ НЕКОММУТАТИВНЫХ ГРУППАХ.

Метод Фурье на коммутативных группах давно применяется во многих областях математики, физики и технических наук. Наряду с односторонними свёртками и соответствующими свёрточными уравнениями появились двусторонние свёртки на некоммутативных группах, которые возникают в силу некоммутативности групповой операции. Рассматриваются двусторонние свёртки на произвольных конечных некоммутативных группах. Приводится критерий обратимости оператора двусторонней свёртки и алгоритм решения уравнения двусторонней свёртки на произвольной конечной некоммутативной группе. Находятся оценки вычислительной сложности построенного алгоритма. Построенный алгоритм подробно рассматривается на примере конечной диэдральной группы $\mathbb{D}_m$ и группы Гейзенберга $\mathbb{H}(\mathbb{F}_p)$ над простым полем Галуа. Приводятся результаты численных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кисиль В. В.* Локальные алгебры двусторонних свёрток на группе Гейзенберга // Мат. заметки, т. 59, вып. 3, 1996.
2. *Деундяк В. М., Леонов Д. А.* Применение быстрого преобразования Фурье для решения сверточных уравнений на диэдральных группах // Вестник САФУ, 2015. No. 3. С. 97–107.
3. *Кириллов А. А.* Введение в теорию представлений и некоммутативный гармонический анализ // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. 1988. том 22. С. 5–162.
4. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. М.: Наука, 1975.
5. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1973. 280 с.

I. Louhichi (Sharjah, UAE)
ilouhichi@aus.edu

ON THE COMMUTATIVITY OF TOEPLITZ OPERATORS

Describing the commutant of a given Toeplitz operator, that is the set of all Toeplitz operators that commute with it, is one of the most challenging open questions in the theory of Bergman space Toeplitz operators. In this talk, I will survey former results and recent developments related to this problem, with a particular attention to the so-called quasihomogeneous Toeplitz operators.

К. В. Лыков (Самара, Россия)
alkv@list.ru

ЭКСТРАПОЛЯЦИОННОЕ ОПИСАНИЕ СИММЕТРИЧНО-НОРМИРОВАННЫХ ИДЕАЛОВ [1]

[1]Работа поддержана грантами РФФИ 16-41-630676 р_а и 17-01-00138 а.

Теорема 1. *Пусть X — банахова решетка односторонних числовых последовательностей, а $\mathfrak{X}$ — идеал компактных операторов, действующих в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, определенный условием*

$$A \in \mathfrak{X} \quad \Leftrightarrow \quad \|A\|_{\mathfrak{X}} := \left\| \left\{ \sum_{j=1}^{n} s_j \right\}_{n=1}^{\infty} \right\|_X < \infty,$$

где $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность s-чисел оператора A. Предположим, что в X действует ограниченно оператор $S : \{x_n\} \to \{x_{n^2}\}$. Тогда с некоторой константой C, не зависящей от $A \in \mathfrak{X}$, выполняются неравенства

$$C^{-1}\|A\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \left\| \left\{ \|A\|_{p(n)} \right\}_{n=1}^{\infty} \right\|_X \leqslant C\|A\|_{\mathfrak{X}},$$

где $\|A\|_{p(n)}$ — норма Шаттена-фон Неймана оператора A при $p = p(n) = \frac{\log n}{\log n - 1}$, $n \geqslant 3$, и $\|A\|_{p(n)} := \|A\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}}$ при $n = 1$ и $n = 2$.

Пусть A — компактный оператор в $\mathcal{H}$. Через

$$A_{\mathcal{R}} := \frac{1}{2}(A + A^*) \quad \text{и} \quad A_{\mathcal{J}} := \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

обозначим, соответственно, действительную и мнимую компоненту оператора A. С помощью теоремы 1 и известной теоремы Мацаева об оценке нормы Шаттена-фон Неймана действительной компоненты вольтеррова оператора через норму мнимой компоненты получаем следующий результат.

Теорема 2. *Предположим, что A — вольтерров оператор, а идеал $\mathfrak{X}$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Если $A_{\mathcal{J}} \in \mathfrak{X}$, то $A_{\mathcal{R}} \in \mathfrak{X}(\log^{-1})$, где идеал $\mathfrak{X}(\log^{-1})$ определяется условием конечности нормы*

$$\|T\|_{\mathfrak{X}(\log^{-1})} := \left\| \left\{ \frac{1}{\log(en)} \sum_{j=1}^{n} s_j \right\}_{n=1}^{\infty} \right\|_X .$$

M. V. Maliutina, S. S. Orlov (Irkutsk, Russia)
fanofevanescence2008@yandex.ru, orlov_sergey@inbox.ru

PERIODIC SOLUTION OF GENERALIZED ABEL INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND [1]

Let us consider the integral equation

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt = f(x),\ x \geq 0, \tag{1}$$

[1]The reported study was funded by Russian Foundation for Basic Research according to the research project No. 16-31-00291.

where f is given function, $\Gamma(\alpha)$ is gamma function of fixed value α. It is assumed that $\alpha > 0$. This case includes $0 < \alpha < 1$, when integral has a weak singularity and equation (1) is called generalized Abel equation.

In the academic literature little attention is paid to the problem of the existence of continuous periodic solutions of integral Volterra equations. We have studied this problem for the class (1) of Abel type equations.

Theorem. *Equation (1) has a unique continuous T-periodic solution if and only if the source f expression is of the form*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{[\alpha]+2} \frac{A_{i-1}x^{\{\alpha\}+i-2}}{\Gamma(\{\alpha\}+i-1)} + \frac{1}{\Gamma(\{\alpha\})}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{\{\alpha\}-1}\mathcal{E}(t)dt,$$

where $[\cdot]$ and $\{\cdot\}$ are floor and fractional value functions; $\mathcal{E}(x) \in C^{[\alpha]+1}_{[0;+\infty)}$ is T-periodic function such that $\mathcal{E}^{(i-1)}(0) = -A_{i-1}$ for all $i = 1, \dots, [\alpha]$. The solution is given by the formula

$$\varphi(x) = A_{[\alpha]+1} + \mathcal{E}^{([\alpha]+1)}(x),\ x \geq 0.$$

This theorem is true for $\alpha \notin \mathbb{N}$. The case of integer values of the parameter α is considered in [1].

REFERENCES

1. *Maliutina M. V.* Problema sushchestvovaniya nepreryvnykh periodicheskikh resheniy integral'nykh uravneniy Vol'terra (The Problem of Existence of Continuous Periodic Solutions of Integral Volterra Equations). Obozreniye prikladnoy i promyshlennoy matematiki. 2016. Vol. 23, Issue 4, pp. 369–370. (In Russian)

С. Н. Мелихов (Ростов-на-Дону, Владикавказ, Россия)
melih@math.rsu.ru

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ ОПЕРАТОРА ОБОБЩЕННОГО СДВИГА ВЛЕВО

В докладе идет речь о собственных замкнутых инвариантных подпространствах оператора обобщенного сдвига влево D_{0,g_0} (оператора Поммье) в (LF)-пространстве E целых функций, изоморфном посредством преобразования Лапласа сильному сопряженному к пространству $H(Q)$ всех ростков функций, аналитических на выпуклом локально замкнутом множестве $Q \subset \mathbb{C}$. Семейство таких множеств содержит все выпуклые открытые и выпуклые замкнутые множества в $\mathbb{C}$. Оператор D_{0,g_0} ассоциирован с некоторой функцией $g_0 \in E$ такой, что $g_0(0) = 1$. Он применяется при изучении разложений аналитических функций в ряды экспонент, уравнений свертки. Если $g_0 \equiv 1$, то D_{0,g_0} является классическим оператором Поммье. В [1] описаны все собственные замкнутые D_{0,g_0}-инвариантные подпространства E

в случае, когда функция g_0 не имеет нулей, т. е. $g_0(z) = e^{\lambda z}$, $z \in \mathbb{C}$, для некоторого $\lambda \in Q$.

Здесь мы приводим описание всех собственных замкнутых D_{0,g_0}-инвариантных подпространств E для функции g_0, имеющей конечное число нулей, т. е. для $g_0(z) = P(z)e^{\lambda z}$, $z \in \mathbb{C}$, где λ — некоторая точка из Q, а P — многочлен степени не меньше 1. Для такой функции g_0 оператор D_{0,g_0}, в отличие от случая $g_0 := e^{\lambda z}$, не является одноклеточным, т. е. его собственные замкнутые подпространства не образуют цепь. Их совокупность состоит уже из множеств двух видов. Первое (оно конечное) содержит пространства конечной коразмерности, а второе (оно счетное) — пространства конечной размерности. Получена аналитическая реализация $*$ в $H(Q)$ умножения $\otimes$, задаваемого оператором сдвига для оператора D_{0,g_0} в топологическом сопряженном E' к E. С помощью принципа двойственности описаны все собственные замкнутые идеалы в алгебре $(H(Q), *)$, изоморфной $(E', \otimes)$.

Приведенные результаты получены совместно с О.А. Ивановой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ivanova O. A., Melikhov S. N.* On the completeness of orbits of a Pommiez operator in weighted (LF)-spaces of entire functions. arXiv:1608.03850.

M. A. Muratov, J. S. Pashkova (Simferopol, Russia)
mamuratov@gmail.com

THE KLEINECKE-SHIROKOV THEOREM IN $*$-ALGEBRAS OF MEASURABLE OPERATORS

Let $\mathcal{M}$ be a von Neumann algebra of operators acting on a Hilbert space H, $S(\mathcal{M})$ $*$-algebra of all operators measurable with respect to the $\mathcal{M}$, and $P(\mathcal{M})$ a complete structure of orthogonal projections in $\mathcal{M}$.

Theorem 1. *If an operator $T \in S(\mathcal{M})$ is self-adjoint, then exists a dense invariant linear subspace $\mathcal{D} \subseteq H$, such that $\|T^k\| \le C_\xi^k \|\xi\|$ for any $\xi \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}_b(T)$).*

Theorem 2. *If $T, S \in S(\mathcal{M})$ are self-adjoint operators, then exists a strongly dense linear subspace $\mathcal{D} \subseteq H$, such that $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}_b(T) \cap \mathcal{H}_b(S)$.*

If $T, S \in S(\mathcal{M})$ are self-adjoint operators, and $[T, [T, S]] = 0$, then operators T and S commute as elements of the $*$-algebra $S(\mathcal{M})$.

Theorem 3. *If $\mathcal{G}$ be a real finite dimensional nilpotent Lie algebra and $\pi : \mathcal{G} \to S(\mathcal{M})$ be a its skew-symmetric representation in $S(\mathcal{M})$, then π is commutative that is, $[\pi(x), \pi(y)] = 0$ for all $x, y \in \mathcal{G}$.*

Let $f_i(t), g_i(s), \widetilde{f}_i(t), \widetilde{g}_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. the polynomials of one real variable, and $\mathcal{K}_1(t, s) = \sum_{i=1}^m f_i(t) g_i(s)$, $\mathcal{K}_2(t, s) = \sum_{i=1}^m \widetilde{f}_i(t) \widetilde{g}_i(s)$.

Theorem 4. *Let $T, S \in S(\mathcal{M})$ are self-adjoint operators, and exists a strongly dense linear subspace $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}_b(T) \cap \mathcal{H}_b(S)$, such that*

1). *$\mathcal{D}$ is invariant with respect to each of operators T and S;*
2). *$\mathcal{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n(H)$, $R_n \in P(\mathcal{M})$, $R_n \uparrow I$;*
3). *$TR_n\xi = R_nT\xi$ and $SR_n\xi = R_nS\xi$ for all $\xi \in \mathcal{D}$;*
4). *$TR_n, SR_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$ and $\|TR_n\| \le n$, $\|SR_n\| \le n$.*
If $\{(t,s)\colon \mathcal{K}_1(t,s) = 0\} = \{(t,s)\colon \mathcal{K}_2(t,s) = 0\}$, then

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(T)Sg_i(T) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \widetilde{f}_i(T)S\widetilde{g}_i(T) = 0.$$

REFERENCES

1. *Ostrovskyi V., Samoilenko Yu.* Introduction to the theory representation of finite presented *-algebras. I. Representations by bounded operators. Rev. Math. and Math. Phys., London. 1999.
2. *Muratov M., Samoilenko Yu.* On commutativity of measurable operators affiliated to a von Neumann algebra. Uch. Zap.Tavr. Nats. Univ. 2007. Vol. 20(59), №. 1, p. 70-79.

A. B. Muravnik (Voronezh, Russia)
amuravnik@yandex.ru

HALF-PLANE DIFFERENTIAL-DIFFERENCE ELLIPTIC PROBLEMS: SOLUTION ESTIMATES

The problem

$$u_{xx} + \sum_{k=1}^{m} a_k u_{xx}(x + h_k, y) + u_{yy} = 0, \ x \in (-\infty, +\infty), y > 0, \tag{1}$$

$$u\Big|_{y=0} = u_0(x), \ x \in (-\infty, +\infty), \tag{2}$$

where a_k and h_k, $k = \overline{1,m}$, are real parameters, there exists a positive constant C such that $1 + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos h_k\xi \ge C$ for any real x, and u_0 is a bounded continuous function, is considered.

In [1], the following integral representation of its solution is provided:

$$u(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x-\xi, y)u_0(\xi)d\xi, \tag{3}$$

where

$$\mathcal{E}(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-yG_1(\xi)} \cos\left[x\xi - yG_2(\xi)\right] d\xi,$$

$$G_{\left\{ {1 \atop 2} \right\}}(\xi) = \xi\sqrt{\frac{\varphi(\xi) \pm a\cos h\xi \pm 1}{2}}, \ \varphi(\xi) = \sqrt{a^2(\xi) + b^2(\xi) + 2a(\xi) + 1}\,,$$

$a(\xi)=\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos h_k\xi$, and $b(\xi)=\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \sin h_k\xi$.

Here, the following estimate for the function $u(x,y)$ is proved in the half-plane $(-\infty,+\infty)\times(0,+\infty)$:

$$|u(x,y)|\leq \sup_{\mathbb{R}^1}|u_0|. \tag{4}$$

REFERENCES

1. *Muravnik A. B.* Half-plane problems for differential-difference elliptic equations. Abstr. of the 13th International Conference "Operator Theory, Complex Analysis, and Mathematical Modeling". Southern Mathematical Institute of Vladikavkaz Scientific Centre of Russian Academy of Sciences. 2016, p. 128.

К. Г. Овсепян (Иджеванский Филиал Ереванского Государственного Университета)
karen.hovsep@gmail.com

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ C^*–АЛГЕБР, ПОРОЖДЕННЫХ ИНВЕРСНЫМИ ПОДПОЛУГРУППАМЫ БИЦИКЛИЧЕСКОЙ ПОЛУГРУППЫ

Рассмотрим бициклическую полугруппу S порожденную элементом a. Из равенства $a^*a=e$ непосредсвенно следует, что каждый элемент бициклической полугруппы имеет вид $a^m a^{*n}$, где m и n неотрицательные целые числа. Элемент вида $a^m a^{*n}$ назовем мономом. *Индексом* монома $b=a^m a^{*n}$ из S назовем число $m-n$ и обозначим через $\operatorname{ind}(b)$. Зафиксируем целое число $m\in\mathbb{N}$, и обозначим через $S_m=\{b\in S:\operatorname{ind}(b)=k\cdot m, k\in\mathbb{Z}\}$. Пусть $S(m)\subset S$ подпулугруппа порожденная элементом a^m. Понятно, что $S(m), S_m$ являются инверсными подполугруппами бициклической полугруппы S.

Рассмотрим точное бесконечномерное неприводимое представление бициклической полугруппы(см.[2]) $\pi\colon S\to B(l^2(\mathbb{Z}_+)), \pi(a^n a^{*m})=T^nT^{*m}$, где T – оператор сдвига на $l^2(\mathbb{Z}_+)$, то есть, на базисе $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ действует следующим образом: $Te_k=e_{k+1}$, и это представление порождает алгебру Теплица $\mathcal{T}$. Обозначим через $\mathcal{T}_m$ и $\mathcal{T}(m)$ – C^*-подалгебры алгебры Теплица $\mathcal{T}$, которые порождаются соответственно инверсным подполугруппами $\pi(S_m)$ и $\pi(S(m))$.

Лемма 1. *Для любого $m\in\mathbb{N}$ C^*-алгебра $\mathcal{T}_m$ является ядерной алгеброй.*

Определение 1. *Пусть заданны алгебры A и B, такие что $A\subset B$. Рассмотрим цепочку алгебр*

$$A\subsetneq A_1\subsetneq \ldots\subsetneq A_{n-1}\subsetneq B$$

Цепочка называется неуплотняемой, если нельзя вложить другую алгебру в эту цепочку. Типом алгебры B относительно алгебры A называется максимальная *длина неуплотняемых цепочек содержащихся между алгебрами A и B и обозначается через $t_B(A)$.*

Теорема 1. *Тип алгебры $\mathcal{K}_m$ относительно алгебры $\mathcal{K}(m)$ равен $m-1$:*

$$t_{\mathcal{K}_m}(\mathcal{K}(m)) = m-1.$$

, где $\mathcal{K}_m$ и $\mathcal{K}(m)$ подалгебры компактных операторов в алгебрах $\mathcal{T}(m)$ и $\mathcal{T}_m$ соответственно.

Теорема 2. *Тип алгебры $\mathcal{T}_m$ относительно алгебры $\mathcal{T}(m)$ равен $m-1$:*

$$t_{\mathcal{T}_m}(\mathcal{T}(m)) = m-1.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Barnes B. A.* Representation of the l^1-algebra of an inverse semigroup. Trans. of AMS. 1976. Том. 218, стр. 361–396.
2. *Овсепян К. Г.* О C^*–алгебрах порожденных инверсными подполугруппами бициклической полугруппы. Известия НАН Армении, математика. 2014, Том. 49, N 5, стр. 67–75.

А. Э. Пасенчук (Ростов-на-Дону, Россия)
pasenchuk@mail.ru

РАВНОСИЛЬНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОДНОГО КЛАССА ДВУМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТЕПЛИЦА

Пусть $\Gamma = \{\xi \in C : |\xi| = 1\}$, $\Gamma^2 = \Gamma \times \Gamma$. Обозначим через $L_2\left(\Gamma^2\right)$и $W\left(\Gamma^2\right)$ стандартные гильбертово пространство суммируемых с квадратом на торе Γ^2 функций и функций с абсолютно суммируемыми коэффициентами Фурье соответственно. Пусть $L_2^{++}\left(\Gamma^2\right)$ подпространство, состоящее из всех элементов $L_2\left(\Gamma^2\right)$, аналитически продолжимых в область $\left\{(\xi,\eta) \in C^2 : |\xi| < 1,\ \ |\eta < 1|\right\}$, а P^{++} - оператор проектирования на подпространство $L_2^{++}\left(\Gamma^2\right)$.

Рассматривается оператор Теплица $T_a : L_2^{++}\left(\,\Gamma^2\right) \to L_2^{++}\left(\,\Gamma^2\right)$, $(T_a\phi)(\xi,\eta) = P^{++}a(\xi,\eta)\,\phi(\xi,\eta)$, $\ (\xi,\eta) \in \Gamma^2$, где функция - $a(\xi,\eta) \in W\left(\Gamma^2\right)$ и называется символом оператора T_a. И.Б.Симоненко [1] получен следующий критерий нетеровости: оператор T_a нетеров тогда и только тогда, когда его символ удовлетворяет условиям $a(\xi,\eta) \neq 0,\ \ (\xi,\eta) \in \Gamma^2;\ \underset{\xi}{ind}\,a(\xi,\eta) = \underset{\eta}{ind}\,a(\xi,\eta) = 0$.

Теорема 1. *Пусть функция $a(\xi,\eta) = a^{\bullet -}(\xi,\eta)\,\eta^n$, где $a^{\bullet -}(\xi,\eta) \in W\left(\Gamma^2\right)$ аналитически продолжима в область $\{\eta \in C : |\eta| > 1\}$ при любом фиксированном $\xi \in \Gamma$ порождает нетеров оператор Теплица в пространстве $L_2^{++}\left(\Gamma^2\right)$. Тогда имеет место представление $T_a = T_{\eta^{-n}}T_{a^{--}}T_{a^{+-}}T_{a^{++}}T_{a^{-+}}T_{\eta^n}$, где $a^{\pm\mp}(\xi,\eta)$ компоненты канонической факторизации функции $a(\xi,\eta)$ в алгебре $W\left(\Gamma^2\right)$.*

При помощи представления, полученного в теореме, уравнение $T_a\phi = f$ приводится к равносильной системе из n уравнений. Оператор, порождаемый этой системой, действует в пространстве $(L^{+}(\Gamma))^{n}$ и представляет собой сумму матричного теплицева и вполне непрерывного операторов. Это приводит к построению равносильного регуляризатора, выписываемого через компоненты канонической факторизации матричного символа. При $n = 1$ регуляризатор выписывается в явной форме.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Симоненко И. Б.* О многомерных дискретных свертках. — В сб. "Матем. исследования Кишинев, Штиинца, 1968, в.1, с. 298-313.

Д. А. Полякова (Ростов-на-Дону, Владикавказ, Россия)
forsites1@mail.ru

ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В работе рассматриваются пространства $\mathcal{E}^{1}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ ультрадифференцируемых функций нормального типа на всей числовой прямой:

$$\mathcal{E}^{1}_{(\omega)}(\mathbb{R}) = \Big\{ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \, : \, \forall q \in (0,1)\,,\, \forall l \in (0,\infty) \\ \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sup_{|x|\le l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{e^{q\varphi^*_{\omega}(j/q)}} < \infty \Big\}\,.$$

Здесь ω — весовая функция, задающая пространство; φ^*_{ω} — сопряженная по Юнгу с $\omega(e^x)$.

В $\mathcal{E}^{1}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ исследуется однородное уравнение свертки

$$T_{\mu} f = 0\,. \tag{1}$$

Его символ μ представляет собой некоторую целую функцию, удовлетворяющую определенным ограничениям роста.

Как частный случай уравнения (1) включают в себя дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)} = 0$, а также некоторые разностные уравнения — например, уравнение $f(x+1) - f(x-1) = 0$.

Пусть $(\lambda_s)_{s=1}^{\infty}$ — нули символа $\mu(z)$ кратностей k_s. Этим нулям отвечают элементарные решения уравнения (1) вида $(-ix)^k e^{-i\lambda_s x}$, $0 \le k < k_s$. Как известно, в общем случае указанные элементарные решения не обязаны образовывать базис всего пространства решений уравнения (1).

В работе проведена группировка нулей символа $\mu(z)$, и установлено, что в пространстве решений имеется абсолютный базис, состоящий из линейных комбинаций элементарных решений, отвечающих сгруппированным нулям.

Исследование существенным образом опирается на критерий сюръективности оператора свертки T_μ, установленный в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абанин А. В., Абанина Д. А.* Теорема деления в некоторых весовых пространствах целых функций. Владикавк. мат. журн. 2010. Т. 12, №. 3, стр. 3–21.

S. A. Roshchupkin (Yelets, Russia)
roshupkinsa@mail.ru

THE THEOREM ON THE NORM OF OPERATOR

The norm of integro-differential operators (p.d.operators) in the scale of Sobolev spaces was studied by R. T. Sili [1]. In these investigations, a similar theorem is proved for s.p.d. operators Kipriyanov-Katrakhov. We follow the methods and approaches of the work of J. Kohn and L. Nirenberg [2].

For the symbol class $a(x;\xi)$ and the class of the operator A corresponding to these symbols in [3] we use the notation — Ξ_q^m.

Theorem 1. *Let $A \in \Xi_q^m$. Let's pretend that*

$$\max_{x,\xi\in\Sigma_n^+} |a(x,\xi)| = K$$

$K < \infty$. Then we have the equality

$$K = \inf_T \|A+T\|_{s,\gamma},$$

where $\|\|_{S,\gamma}$ is the norm of the operators in the scale H_γ^s and the lower bound is taken over all operators of order $m-1$.

Theorem 2. *Let $A \in \Xi_q^m$. Then the following statements are equivalent:*

I. The symbol of the operator A is identically equal to zero.

II. $A = 0$.

III. For some $l < m$, the operator A has order l.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сили Р. Т.* Интегро-дифференциальные операторы на векторных расслоениях // Сб. Математика. — 1967. — С. 57 — 97.
2. *Кон Дж., Ниренберг А.* Алгебра псевдодифференциальных операторов // Сб. Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир. — 1967.
3. *Катрахов В. В., Ляхов Л. Н.* Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов. Дифференц. Уравнен. — 2011, Т. 47. № 5. — С. 681 — 695.

G. Rozenblioum (Gothenburg, Sweden)
grigori@chalmers.se

TOEPLITZ OPERATORS WITH VERY SINGULAR SYMBOLS IN BERGMAN TYPE SPACES

We develop a new approach to defining Toeplitz operators in Bergman type spaces (the reproducing kernel spaces) based upon considering sesquilinear forms with special properties. The approach allows, in particular, to define operators and investigate boundedness and compactness conditions for highly singular symbols, in particular, involving distributions and hyperfunctions in certain classes. To check these conditions we introduce and study 'Carleson measures for derivatives'. Particular applications include operators in the classical Bergman space, the Fock space, and the Herglotz space of solutions of the Helmholtz equation. The talk is based upon a series of papers, joint with N.Vasilevski, Mexico.

REFERENCES

1. *Rozenblum G., Vasilevski, N.* Toeplitz operators defined by sesquilinear forms. Fock space case. J. Funct. Anal. 2014. Vol. 267. No. 11, pp. 4399–4430.

2. *Rozenblum, G., Vasilevski, N.* Toeplitz operators defined by sesquilinear forms. Bergman space case. J. Math. Sci. (N.Y.) 2016. Vol. 213. No. 4, pp. 582-609.

3. *Rozenblum, G., Vasilevski, N.* Toeplitz operators in the Herglotz space. Integral Equations Operator Theory 2016. Vol 86. No. 3, pp. 409–438.

А. Р. Рустанов (МПГУ, Россия)
aligadzhi@yandex.ru
С. В. Харитонова (ОГУ, Россия)
hcb@yandex.ru

СВОЙСТВА ИНТЕГРИРУЕМОСТИ NC_{10}-МНОГООБРАЗИЙ

Определение 1 [1]. *AC-структура, характеризуемая тождеством*

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = \xi\nabla_X(\eta)\Phi Y + \xi\nabla_Y(\eta)\Phi X +$$

$$+\eta(X)\nabla_{\Phi Y} + \eta(Y)\nabla_{\Phi X}\xi; X, Y \in X(M),$$

называется NC_{10}-структурой.

АС-многообразие, снабженное NC_{10}-структурой называется NC_{10}-многообразием.

Теорема 1. *NC_{10}-многообразие имеет замкнутую контактную форму тогда и только тогда, когда оно является точнейше косимплектическим многообразием, т.е. когда локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.*

Теорема 2. *Интегрируемая NC_{10}-структура является косимплектической структурой.*

Теорема 3. *Интегрируемая NC_{10}-структура локально эквивалентна произведению келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.*

Определение 2 [3], [4]. *Почти контактная метрическая структура называется нормальной, если* $N(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi = 0$.

Теорема 4. *Нормальная* NC_{10}*-структура является косимплектической, а значит, локально эквивалентна произведению келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.*

Теорема 5. *Пусть* $S = (\eta, \xi, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *–* AC*-структура. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $S = (\eta, \xi, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *– интегрируемая* NC_{10}*-структура;*

2) $S = (\eta, \xi, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *– нормальная* NC_{10}*-структура;*

3) $S = (\eta, \xi, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *– косимплектическая структура.*

Теорема 6. *Характеристический вектор* ξ NC_{10}*-структуры является вектором Киллинга.*

Теорема 7. *Контактная форма* η NC_{10}*-структуры является формой Киллинга.*

Теорема 8. NC_{10}*-многообразие с* $N^{(2)}(X,Y) = 0$ *локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.*

Теорема 9. *На* NC_{10}*-многообразии* $N^{(3)}(X,Y) = 0$ *тогда и только тогда, когда многообразие является точнейше косимплектическим многообразием. А значит, локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рустанов А. Р.* Многообразия класса NC_{10}. Преподаватель XXI век. - 2014. № 3, 2014, с. 209-218.

2. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Издание второе дополненное. Одесса: "Печатный дом 2013.

3. *Blair D.* Contact manifolds in Riemannian geometry. Lect. NotesinMath., 509, 1976, p. 1-146.

N. Samko (Luleå, Sweden)
Natasha.Samko@ltu.se

COMMUTATORS OF WEIGHTED HARDY OPERATORS ON MORREY TYPE SPACES

We prove theorems on the boundedness of commutators of the weighted multidimensional Hardy operator from a generalized local Morrey space to local or global space.

A. Sathish Kumar (Department of Mathematics, Visvesvaraya National Institute of Technology Nagpur Nagpur, Maharashtra-440010, India)
mathsatish9@gmail.com

APPROXIMATION BY GENERALIZED KANTOROVICH SAMPLING TYPE SERIES

In the present article, we analyse the behaviour of a new family of Kantorovich type sampling operators $(K_w^{\varphi} f)_{w>0}$. First, we give a Voronovskaya type theorem for these Kantorovich generalized sampling series and a corresponding quantitative version in terms of the first order of modulus of continuity. Further, we study the order of approximation in C(R) (the set of all uniformly continuous and bounded functions on R) for the family $(K_w^{\varphi} f)_{w>0}$. Finally, we give some examples of kernels such as B-spline kernels and Blackman-Harris kernel to which the theory can be applied.

REFERENCES

1. *Bardaro C., Mantellini I.* On convergence properties for a class of Kan-torovich discrete operators. Num. Funct. Anal. Optim. (2012). 33(4): 374-396.

2. *Bardaro C., Vinti G.* An abstarct approach to sampling type operators inspired by the work of P.L. Butzer. Part I-Linear operators. Sampl. Theor. Signal Image Process. (2003). 2(3): 271-296.

3. *Bardaro C., Vinti G., Butzer P. L., Stens R.L.* Kantorovich-type generalized sampling series in the setting of Orlicz spaces. Sampl. Theor. Signal Image Process. (2007). 6: 29-52.

V. V. Semenov (Kiev, Ukraine)
semenov.volodya@gmail.com

ON THE CONVERGENCE OF NEW METHOD FOR VARIATIONAL INEQUALITY PROBLEM OVER THE SET OF SOLUTIONS THE EQUILIBRIUM PROBLEMS

Let H be a real Hilbert space with inner product $(\cdot,\cdot)$. For operator $A : H \to H$, set $M \subseteq H$, and bifunction $F : H \times H \to \mathbb{R}$ we denote by $VI(A, M)$ and $EP(F, M)$ sets $\{x \in M : \ (Ax, y - x) \geq 0 \ \ \forall\, y \in M\}$ and $\{x \in M : \ F(x, y) \geq 0 \ \ \forall\, y \in M\}$, respectively.

We are interested in approximate solution of problems

$$\text{find } \ x \in VI(A, EP(F, C)), \tag{1}$$

and,

$$\text{find } \ x \in VI(A, EP(F_1, C_1) \cap EP(F_2, C_2)). \tag{2}$$

Problems of form (1) or (2) are referred as variational inequality over the set of solutions the equilibrium problem or over the set of solutions the system of equilibrium problems. This problems have found applications in a wide array of disciplines, including mechanics, economics, partial differential equations, approximation theory, signal and image processing, game theory, optimal transport theory, probability and statistics, and machine learning.

Motivated by the idea of Korpelevich's extragradient method and Antipin's extensions the extragradient method to equilibrium problem, we'll introduce a new and maybe efficient method for solving problem (2). One version of this method is following.

Select an arbitrary point $x_1 \in H$ and generates the sequence (x_n) iteratively by

$$\begin{cases} v_n = \mathrm{prox}_{\lambda_n F_1(x_n,\cdot)} x_n, \quad y_n = \mathrm{prox}_{\lambda_n F_1(v_n,\cdot)} x_n, \\ u_n = \mathrm{prox}_{\lambda_n F_2(x_n,\cdot)} x_n, \quad z_n = \mathrm{prox}_{\lambda_n F_2(u_n,\cdot)} x_n, \\ w_n = \frac{1}{2} y_n + \frac{1}{2} z_n, \\ x_{n+1} = w_n - \alpha_n A w_n. \end{cases}$$

where λ_n, $\alpha_n > 0$.

This method use the proximity operator. Principal difference here, at each iteration, we solve strongly convex programming problems only instead of a auxiliary equilibrium programming problems. We'll prove the strong convergence of these methods under mild conditions.

H. Khan (Doha, Qatar) safeer@qu.edu.qa ITERATIVE CONVERGENCE FOR QUASI-CONTRACTIVE TYPE OPERATORS

Let C be a nonempty convex subset of a normed space E and $T : C \to C$ an operator. We use the following quasi-contractive type operators

$$\max(\|Tx - p\|, \|Sx - p\|) \le \delta \|x - p\| \tag{1}$$

to apporoximate their common fixed points by using the following iterative process.

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ x_{n+1} = T y_n, \\ y_n = (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n S x_n, \ n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2}$$

The above mentioned operators are actually a two-mapping extension of the operators defined by Chidume and Olaleru [1] whereas the iterative process is a two-mapping extension of a new more general and faster iterative process due to Khan [2].

Our purpose in this talk is to discuss a convergence result for approximating common fixed points of two quasi-contractive type operators using (1) with (2) in normed spaces. Keeping in mind that approximating common fixed points has a direct link with the minimization problem, our extension makes sense. We also stress upon the fact that our result is in the setting of a normed space in contrast with a Banach space. It generalizes and improves upon the corresponding results of several authors including [1] in the following different directions: (ii) faster iterative process (iii) more number of operators.

REFERENCES

1. *Chidume C. E. and Olaleru J. O.* Picard iteration process for a general class of contractive mappings. 2014. Vol. 33, pp. 19–23.
2. *Khan S. H.* A Picard-Mann hybrid iterative process. Fixed Point Theory and Applications. 2013. Vol. 2013:69, pp. 1–10.

А. П. Чеголин (Ростов-на-Дону)
apchegolin@mail.ru

КОМПЛЕКСНЫЕ СТЕПЕНИ КЛАССИЧЕСКОГО ДВУМЕРНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО ОПЕРАТОРА

В работе в рамках пространств p-суммируемых функций явно восстановлены комплексные степени классического телеграфного оператора с отрицательной действительной частью порядка степени символа. При этом параметры символа имеют конкретный физический смысл и соответствуют телеграфному уравнению. Операторы с положительной действительной частью реализуются в аналогичных и весовых пространствах в виде аппроксимативных конструкций, построенных по множествам вырождения симола.

A. A. Shkalikov (Lomonosov Moscow State University, Russia)
shkalikov@mi.ras.ru **PT-SYMMETRIC OPERATORS WITH PARAMETER. CRITICAL PARAMETER VALUES**

We consider PT-symmetric Sturm-Liouville operators

$$T(\varepsilon) = -\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon P(x), \quad \varepsilon > 0,$$

in the space $L_2(-a,a)$, $0 < a \leqslant \infty$, where P is subject to the condition $P(x) = -\overline{P(-x)}$. The spectra of these operators are symmetric with respect to the real axis and discrete, provided that the interval $(-a,a)$ is finite and P is not a singular potential. We will show that the spectrum of the operator $T(\varepsilon)$ is real for sufficiently small values of the parameter ε and in this case $T(\varepsilon)$ is similar to a self-adjoint operator. For large values of ε the complex eigenvalues do appear and the number of non-real eigenvalues increases as $\varepsilon \to \infty$.

The aim of the talk is to cast some light to the following problems: How the eigenvalues of $T(\varepsilon)$ do behave when the parameter changes? Is it possible to evaluate or to calculate the critical value ε_0 of the parameter, such that $T(\varepsilon)$ are similar to self-adjoint operators for all $\varepsilon < \varepsilon_0$? We will find an explicit answer for some particular potentials.

The talk is based on the joint papers with S.Tumanov.

М. У. Яхшибоев, А. Газиев (Самарканд, Узбекистан)
yahshiboev@rambler.ru

О ДРОБНОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ТИПА АДАМАРА В КУСОЧНО-СТЕПЕННЫХ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В данной работе рассматривается ограниченность типа Адамара дробно интегрированных функций в пространстве $X^p_{\gamma,\nu}$.

Для функции $\varphi\left(x\right)$, заданной на полуоси R^1_+, интегралы

$$\left(J^\alpha_{+,\mu}\varphi\right)(x) := \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^\mu \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\varphi\left(t\right)\frac{dt}{t}, \quad x>0,\ \alpha>0,$$

$$\left(J^\alpha_{-,\mu}\varphi\right)(x) := \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_x^\infty \left(\frac{x}{t}\right)^\mu \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1}\varphi\left(t\right)\frac{dt}{t}, \quad x>0,\ \alpha>0,$$

называются интегралами дробного порядка α типа Адамара (соответственно, левосторонними и правосторонними). На действительной полуоси рассматривается интегральные операторы типа Адамара в пространстве

$$X^p_{\gamma,\nu} = \left\{\varphi : \int_0^1 x^{-\gamma}\left|\varphi(x)\right|^p\frac{dx}{x} + \int_1^\infty x^{-\nu}\left|\varphi\left(x\right)\right|^p < \infty,\ \gamma\geq 0, \nu\geq 0,\ 1\leq p<\infty\right\}$$

с нормой

$$\left\|\varphi\right\|_{X^p_{\gamma,\nu}} = \left\{\int_0^1 \left|f\left(x\right)\right|^p x^{-\gamma}\frac{dx}{x} + \int_1^\infty \left|f\left(x\right)\right|^p x^{-v}\frac{dx}{x}\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема. *Пусть*$\gamma,\nu\in R^1,\ 1\leq p\leq\infty,\ \alpha>0$ *и* $\mu\in C$.

a) Если $Re\mu > -\frac{m}{p},\ m=\min\left(\gamma,\nu\right),\ \gamma>0, v>0,$ *то оператор* $J^\alpha_{+,\mu}$ *ограничен в пространстве* $X^p_{\gamma,\nu}$, *и*

$$\left\|J^\alpha_{+,\mu}\varphi\right\|_{X^p_{\gamma,\nu}} \leq C^+_p\left\|\varphi\right\|_{X^p_{\gamma,\nu}},\ C^+_p = \left(\frac{p}{\mu\, p+m}\right)^\alpha, C^+_\infty = \left(\frac{1}{\mu+m}\right)^\alpha.$$

b) Если $Re\mu > \frac{M}{p},\ M=\max\left(\gamma,\nu\right),\ \gamma<0, v<0,$ *то оператор* $J^\alpha_{-,\mu}$ *ограничен в пространстве* $X^p_{\gamma,\nu}$, *и*

$$\left\|J^\alpha_{-,\mu}\varphi\right\|_{X^p_{\gamma,\nu}} \leq C^-_p\left\|\varphi\right\|_{X^p_{\gamma,\nu}},\ C^-_p = \left(\frac{p}{\mu\, p-M}\right)^\alpha, C^-_\infty = \left(\frac{1}{\mu-M}\right)^\alpha.$$

Session II

Function Theory and Approximation Theory

М. В. Бабушкин, В. В. Жук (Санкт-Петербург, Россия)
maxbabushkin@gmail.com, zhuk@math.spbu.ru

О СИЛЬНОЙ ФОРМЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ТИПА ВОРОНОВСКОЙ–БЕРНШТЕЙНА С ПОТОЧЕЧНОЙ ОЦЕНКОЙ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА

Для широкого круга методов приближения устанавливаются результаты, которые для полиномов Бернштейна (в упрощённом виде) выглядят следующим образом. Пусть Ω^* — множество всех выпуклых модулей непрерывности, $B_n(f,x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x)$ — полиномы Бернштейна, где $p_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.

Утверждение 1. *Пусть $p \geq 1$, $\omega \in \Omega^*$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, для ограниченной функции $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ при всех t таких, что $x+t \in [0,1]$, справедливо неравенство $|f(x+t) - f(x)| \leq \omega(|t|)$. Тогда*

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|^p p_{n,k}(x)\right)^{1/p} \leq \omega\left(\left(\sum_{k=0}^{n} \left|\frac{k}{n} - x\right|^p p_{n,k}(x)\right)^{1/p}\right),$$

в частности, при $p = 2$

$$\left(\left(B_n(f,x) - f(x)\right)^2 + B_n(f^2,x) - B_n^2(f,x)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \omega\left(\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right).$$

Утверждение 2. *Пусть $\omega \in \Omega^*$, $n \in \mathbb{N}$, ограниченная функция $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ имеет в точке $x \in [0,1]$ производную, при всех t таких, что $x+t \in [0,1]$, справедливо представление $f(x+t) = f(x) + f'(x)t+$
$+\varepsilon(t)t$, где $|\varepsilon(t)| \leq \omega(|t|)$; $\alpha_n(x) = \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$. Тогда*

$$\sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) - f'(x)\left(\frac{k}{n} - x\right) \right| p_{n,k}(x) \leq \alpha_n(x)\omega\left(\alpha_n(x)\right).$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Теляковский С. А.* О скорости приближения функций многочленами Бернштейна. Тр. ИММ УрО РАН. 2008. Том. 14, №. 3, стр. 162–169.

2. *Жук В. В.* О сильном приближении функций посредством положительных операторов. Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Том. 440, стр. 68–80.

Х. Х. Бурчаев (Грозный), В. Г. Рябых (Ростов-на-Дону), Г. Ю. Рябых (Ростов-на-Дону)
ryabich@aaanet.ru

О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ АНАЛИТИЧЕСКИМИ [1]

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $T = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$, $A_p(H_p)$ – обычные пространства Бергмана (Харди) по единичному кругу; $\omega \in L_p(D) = L_p$. Изучается задача о свойствах функции

$$X \in A_p : \min_{x \in A_p} \|\omega - x\|_{L_p} = \|\omega - X\|_{L_p}.$$

Теорема 1. *Если $1 < p < p_1 < 2$ и $\omega = (1 - |z|)k$, где $k \in L_{2p_*} \bigcap W^{1,p_1}(D)$, $p_* = p_1/(2 - p_1)$, то $X \in \bigcap\limits_{\gamma < p_*} H_\gamma$.*

Теорема 2. *Если $1 < p < p_1$, $2 < p_1 < \infty$ и $\omega = (1 - |z|)k$, где $k \in L_\infty \bigcap W^{1,p_1}(D)$, то модуль внешней функции $X(z)$ принадлежит $Lip((1-2/p_1)/p; T)$.*

В частности функция $\omega = (1 - |z|)\bar{k}$, $k \in A_{p_1}$, удовлетворяет условиям, указанным в теоремах 1 и2.

В [1] доказано, что при $\omega \in W^{1,p}$, $1 \le p < \infty$, функция $X \in H_p$. Подобная задача в H_p исследована в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khavinson D., M^c Carhtyt John E. and Shapiro H.* Best approximation in the Mean by analytic and Harmonic Functions // Ark. Mat. 39(2001). P. 339–359.
2. *Рябых В. Г.* Приближение неаналитических функций аналитическими // Мат. сборник. 2006. Т. 197, № 2. С. 87–96.

Д. А. Закора (Симферополь, РФ)
dmitry.zkr@gmail.com

О Р-БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГИДРОДИНАМИКИ

Рассматривается задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и находящейся в невесомости

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-00331).

(см. [1]):

$$\frac{\partial\mathbf{u}(t,x)}{\partial t} = -a_\infty^2\rho_0^{-1}\nabla\rho(t,x)+ \\ + a_\infty^2\sum_{l=1}^{m}\int_0^t e^{-b_l(t-s)}k_l\nabla\rho(s,x)\,ds + \mathbf{f}(t,x) \ \ (\text{в } \Omega),$$

$$\frac{\partial\rho(t,x)}{\partial t} + \rho_0\mathrm{div}\mathbf{u}(t,x) = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \quad \mathbf{u}(t,x)\cdot\mathbf{n} = 0 \ \ (\text{на } \partial\Omega),$$

$$\mathbf{u}(0,x) = \mathbf{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x).$$

Здесь $\mathbf{u}(t,x)$, $\rho(t,x)$ — поле скоростей и динамическая плотность жидкости, ρ_0 — плотность жидкости, a_∞ — скорость звука в сжимаемой жидкости, $\mathbf{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное, $\mathbf{n}$ — внешний единичный нормальный к $\partial\Omega$ вектор, остальные параметры в уравнениях — это положительные физические константы.

С рассматриваемой задачей ассоциирован операторный блок, действующий в ортогональной сумме гильбертовых пространств. Доказано, что система корневых элементов этого операторного блока образует p-базис в соответствующем пространстве. Решение рассматриваемой динамической задачи представлено в виде ряда по возникающей системе элементов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids. Birkhäuser Verlag. 2003.

В. П. Заставный, А. Д. Манов (Донецк)
zastavn@rambler.ru, manov.ad@ro.ru

ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ОПРЕДЕЛЁННОСТЬ КОМПЛЕКСНОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ И НЕКОТОРЫЕ ЕЁ ПРИМЕНЕНИЯ

Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ называется положительно определённой на $\mathbb{R}$ ($f\in\Phi(\mathbb{R})$), если при любых $m\in\mathbb{N}$, $\{x_k\}_{k=1}^m\subset\mathbb{R}$ и $\{c_k\}_{k=1}^m\subset\mathbb{C}$ выполняется неравенство $\sum\limits_{k,j=1}^{m} c_k\overline{c_j}f(x_k-x_j)\geqslant 0$.

Рассматривается следующая задача. Для заданных $\alpha\in(0,1)$ и $c=h+i\beta$, $h,\beta\in\mathbb{R}$, функция $f_{\alpha,c}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ определяется следующим образом: 1) функция $f_{\alpha,c}$ является эрмитовой, т.е. $f_{\alpha,c}(-x)=\overline{f_{\alpha,c}(x)}$, $x\in\mathbb{R}$; 2) $f_{\alpha,c}(x)=0$ при $x>1$, а на отрезках $[0,\alpha]$ и $[\alpha,1]$ функция $f_{\alpha,c}$ является линейной и $f_{\alpha,c}(0)=1$, $f_{\alpha,c}(\alpha)=c$, $f_{\alpha,c}(1)=0$. Для каждого фиксированного $\alpha\in(0,1)$ требуется найти множество всех $c\in\mathbb{C}$, для которых $f_{\alpha,c}\in\Phi(\mathbb{R})$

Если $c = h \in \mathbb{R}$, то это задача Р.М. Тригуба, которая решена авторами в [1].

В общем случае получена следующая

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$, $c = h + i\beta$, $h, \beta \in \mathbb{R}$, $m(\alpha) = 0$, *если* $1/\alpha \notin \mathbb{N}$, *и* $m(\alpha) = -\alpha$, *если* $1/\alpha \in \mathbb{N}$. *Тогда функция* $f_{\alpha,c} \in \Phi(\mathbb{R}) \iff m(\alpha) \leqslant h \leqslant 1-\alpha$ *и* $|\beta| \leqslant \gamma(\alpha,h)$, *где*

$$\gamma(\alpha,h) := \inf_{t\in\mathbb{R}\setminus N_{G_\alpha}} \frac{F_{\alpha,h}(t)}{|G_\alpha(t)|},\ N_{G_\alpha} := \{t \in \mathbb{R} : G_\alpha(t) = 0\},$$

$$F_{\alpha,h}(t) = \frac{(1-\alpha-h)(1-\cos(\alpha t)) + \alpha h(1-\cos t)}{\alpha(1-\alpha)t^2},\ F_{\alpha,h}(0) := \frac{\alpha+h}{2},$$

$$G_\alpha(t) = \frac{\sin(\alpha t) - \alpha\sin t}{\alpha(1-\alpha)t^2},\ G_{\alpha,h}(0) := 0.$$

Если $m(\alpha) < h < 1-\alpha$ *и* $\alpha \in \mathbb{Q}$, *то* $\gamma(\alpha,h) > 0$, *и* $\gamma(\alpha,h) = 0$ *в остальных случаях* : *a)* $\alpha \notin \mathbb{Q}$; *b)* $h = 1-\alpha$; *c)* $h = m(\alpha)$.

Найдены значение константы $\gamma(\alpha,h)$ для $\alpha = 1/2$, $1/3$ и $2/3$. С помощью теоремы 1 получен критерий вполне монотонности функций вида $f(x) = (Ax^2 + B + Cx)/(x(x^2+1)(x^2+\alpha^2))$ и доказано точное неравенство для тригонометрических многочленов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Manov, V. Zastavnyi* Positive definiteness of piecewise-linear function. Expo. Math. (принята в печать, DOI: 10.1016/j.exmath.2016.12.002)

Е. В. Иконникова (г. Воронеж, Россия)
uralochka_87@mail.ru

ОБ УРАВНЕНИЯХ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В данной работе доказана компактность множества решений задачи Коши для дифференциальных уравнений нейтрального типа с быстро осциллирующей правой частью следующего вида:

$$\begin{cases} z'(\tau) = F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, z(\tau-\varepsilon h), z'(\tau-\varepsilon h), \varepsilon\right), \tau \in [0,d]; \\ z(\tau) = \varphi_0,\ \varphi_0 \equiv const, \tau \leq 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $h \equiv const$, $h \in \mathbb{R}^1_+$, а F удовлетворяет следующим условиям:

A1)$F : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное по совокупности переменных отображение;

A2) Функция $F(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ является T-периодической по первой переменной;

A3) $F(\cdot,\cdot,\cdot,\varepsilon)$ удовлетворяет условию Липшица по первой, второй и третьей переменным с константами $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$ и $0 \leq k_3 < 1$ соответственно.

Изучены свойства предельных точек в пространстве $C([0,d],\mathbb{R}^n)$ таких решений. Было установлено, что для решений задачи (1) результат классического принципа усреднения Н.Н. Боголюбова-Н.М. Крылова в общем случае не верен. Указаны частные случаи функции F, для которых принцип усреднения верен. Это уравнения, линейные по $z'(\tau-\varepsilon h)$, то есть:

$$\begin{cases} z'(\tau) = F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, z(\tau-\varepsilon h)\right) + a\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) z'(\tau-\varepsilon h), \tau \in [0,d]; \\ z(\tau) = \varphi_0,\ \varphi_0 \equiv const, \tau \leq 0, \end{cases}$$

где $a(\cdot)$ удовлетворяет условиям:

D1) оператор $a(\xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ линеен и T-периодичен по ξ;

D2)$\|a(\xi)\|_{\mathbb{R}^n} < 1$;

D3) $a(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $k_3 \geq 0$.

А. С. Калитвин, Н. И. Трусова (Липецк)
kalitvinas@mail.ru, trusova.nat@gmail.com

РАЗРЕШИМОСТЬ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БАРБАШИНА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ $C^{(1),n}(D)$

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x_i(t,s)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n}\left[a_{ij}(t,s,x_j(t,s)) + \int\limits_c^d c_{ij}(t,s,\sigma,x_j(t,\sigma))d\sigma\right] + g_i(t,s), \qquad (1)$$

с начальным условием

$$x_i(a,s) = \varphi_i(s), \qquad (2)$$

где $i = 1,\cdots,n$, $t \in [a,b]$, $s \in [c,d]$, $a_{ij}(t,s,u)$, $c_{ij}(t,s,\sigma,u)$ и $g_i(t,s)$ — заданные на $D = [a,b]\times[c,d]\times(-\infty,+\infty)$, $D\times[c,d]\times(-\infty,+\infty)$ и D соответственно функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Предполагается, что $[a,b]$ и $[c,d]$ — конечные отрезки, а решением задачи (1)/(2) считается вектор-функция $x = (x_1,\ldots,x_n)$ (x_i — непрерывная вместе с $(x_i)'_t$ функция), удовлетворяющая системе (1) и начальному условию (2). Пусть $C(D)$ — пространство непрерывных на D функций, а $C^{(1),n}(D)$ — пространство вектор-функций $x(t,s)$ со значениями в R^n и с $(x_i)'_t$, $(x_i)'_s \in C(D)$ $(i = 1,\cdots,n)$.

Теорема. *Пусть функции a_{ij} и c_{ij} непрерывны вместе с частными производными по переменной s,*

$$|a_{ij}(t,s,\tau,u) - a_{ij}(t,s,\tau,v)| \leq L_{ij}|u-v|,$$

$$|c_{ij}(t,s,\tau,\sigma,u) - c_{ij}(t,s,\tau,\sigma,v)| \leq N_{ij}|u-v|,$$

где L_{ij} и N_{ij} — некоторые константы, $\varphi_i \in C([c,d])$, $g_i \in C(D)$ $(i,j=1,\cdots,n)$.

Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение в $C^{(1),n}(D)$.

Для доказательства отметим, что задача сводится к эквивалентной системе нелинейных уравнений с частными интегралами и с применением методов из [1] доказывается существование и единственность ее решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра - Фредгольма с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2006. – 177 с.

Armen Kamalyan
kamalyan_armen@yahoo.com

О НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРАХ ТИПА СВЁРТКИ

Вводятся одномерные операторы типа свертки в определении которых роль преобразование Фурье играет спектральное преобразование некоторого самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля на оси. Рассматривается задачи связанные с теорией Фредгольма и с теорией обратимости этих операторов.

D. B. Karp (Vladivostok, Russia)
dimkrp@gmail.com

GENERALIZED HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS AS COMPLETELY MONOTONIC, STIELTJES AND RADIAL POSITIVE DEFINITE FUNCTIONS

In the talk we discuss various aspects of the theory of generalized hypergeometric functions discovered recently by E.G.Prilepkina, J.L.López and the author. In particular, we demonstrate representations of these functions as Laplace, generalized Stieltjes and Schoenberg transforms. In all cases the measure being transformed is expressed in terms of Meijer's G function. Applying the positivity conditions for this functions found by us earlier, we give rather complete description of cases when generalized hypergeometric function is completely monotonic, generalized Stieltjes and radial positive definite. We calculate its exact Stieltjes order, relate the representing measures for the original function and for the function of the reciprocal argument and negative reciprocal argument and examine various consequences of such representations. We further employ some recent results from [1] to discuss when the generalized hypergeometric function is radial positive definite for $\mathbb{R}^n$ but not for $\mathbb{R}^{n+1}$. Most results presented in the talk are contained in [2-4] and our forthcoming paper [5].

R E F E R E N C E S

1. *Golinskii L., Malamud M. and Oridoroga L.* Radial Positive Definite Functions and Schoenberg Matrices with negative Eigenvalues, Transactions of AMS, 2016, DOI:10.1090/tran/6876
2. *Karp D.* Representations and inequalities for generalized hypergeometric functions, Journal of Mathematical Sciences, 2015, Volume 207, Issue 6, 885-897. DOI:10.1007/s10958-015-2412-7
3. *Karp D. and López J.L.* Representations of hypergeometric functions for arbitrary values of the parameters and their use, to appear in Journal of Approximation Theory, 2017. Preprint arXiv:1609.02340
4. *Karp D. and Prilepkina E.* Hypergeometric functions as generalized Stieltjes transforms, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 393, Issue 2 (2012), 348–359. DOI:10.1016/j.jmaa.2012.03.044
5. *Karp D. and Prilepkina E.* Stieltjes and completely monotonic generalized hypergeometric functions and related integral evaluations, in preparation.

M. Lanza de Cristoforis (Padova, Italy)
mldc@math.unipd.it

ANALYTIC DEPENDENCE OF A PERIODIC ANALOG OF A FUNDAMENTAL SOLUTION UPON THE PERIODICITY PARAMETERS

We prove an analyticity result for the periodic analog of the fundamental solution of an elliptic partial differential operator upon the parameters which determine the periodicity cell. Then we show concrete applications to the Helmholtz and the Laplace operators. In particular, we show that the periodic analog of the fundamental solution of the Helmholtz and of the Laplace operator are jointly analytic in the the spatial variable and in the parameters which determine the size of the periodicity cell. The analysis of the present paper is motivated by the application of the potential theoretic method to boundary value problems corresponding to anisotropic periodic problems in which the 'degree of anisotropy' is a parameter of the problem.

Based on joint work with Paolo Musolino (Aberystwyth, Wales UK)
musolinopaolo@gmail.com

М. В. Невский, А. Ю. Ухалов (Ярославль, Россия)
mnevsk55@yandex.ru, alex-uhalov@yandex.ru

О МИНИМАЛЬНОЙ НОРМЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПРОЕКТОРА

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = [0,1]^n$. Для n-мерного невырожденного симплекса S через σS обозначим образ симплекса при гомотетии относительно его центра тяжести с коэффициентом σ. Положим $\xi(S) = \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}$, $\xi_n = \min\{\xi(S) :$

$S \subset Q_n\}$. В случае $S \subset Q_n$ через P обозначим интерполяционный проектор, действующий из $C(Q_n)$ на пространство линейных функций n переменных, узлы которого совпадают с вершинами S. Пусть $\theta_n = \min\{\|P\| : S \subset Q_n\}$, где $\|P\|$ — норма P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$.

При любом n справедливы неравенства

$$\frac{n+1}{2n}(\theta_n - 1) + 1 \le \xi_n \le \frac{n+1}{2}(\theta_n - 1) + 1. \tag{1}$$

Точные значения θ_n известны лишь для $n = 1, 2, 3, 7$. Для этих n правое неравенство в (1) обращается в равенство. Имеют место соотношения $\theta_n \asymp n^{1/2}$, $n \le \xi_n < n+1$. Если существует матрица Адамара порядка $n+1$, то $\xi_n = n$. По поводу этой проблематики и разнообразных оценок см. [1].

В докладе предполагается привести некоторые новые результаты ([2], [3]). Доказано, что

$$\theta_5 < 2.44804, \quad \xi_5 = 5, \quad \xi_6 < 6.0166, \quad \xi_9 = 9.$$

Таким образом, существуют такие n, для которых $n+1$ не является числом Адамара и, тем не менее, $\xi_n = n$. По предположению авторов,

$$\theta_4 = \frac{7}{3} = 2.3333\ldots, \quad \xi_4 = \frac{19 + 5\sqrt{13}}{9} = 4.1141\ldots$$

Если это предположение верно, то минимальное n, при котором правое неравенство в (1) является строгим, равно 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Невский М. В.* Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции. Ярославль: ЯрГУ. 2012.
2. *Невский М. В., Ухалов А. Ю.* О числовых характеристиках симплекса и их оценках. Модел. и анализ информ. систем. 2016. Том 23, № 5, стр. 603–619.
3. *Невский М. В., Ухалов А. Ю.* Новые оценки числовых величин, связанных с симплексом. Модел. и анализ информ. систем. 2017. Том 24, № 1, стр. 94–110.

В. В. Новиков (Энгельс, Россия)
vvnovikov@yandex.ru

ЯВЛЕНИЕ ГИББСА ДЛЯ ЛАКУНАРНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Обозначим через $Q_n(f, x)$ тригонометрический (0,2,3) интерполяционный многочлен Биркгофа (см., например, [1]) 2π-периодической функции f с узлами $\{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1)\}_{k=-n}^{n}$ такой, что

$$Q_n(f, x_{k,n}) = f(x_{k,n}),\; Q_n''(f, x_{k,n}) = Q_n'''(f, x_{k,n}) = 0,\; k = \overline{-n, n}.$$

В теории рядов Фурье по различным ортогональным системам хорошо известно явление Гиббса. Не менее известным фактом является сходство между частичными суммами ряда Фурье и некоторыми интерполяционными полиномами. В связи с этим возникает вопрос о наличии аналога явления Гиббса для различных интерполяционных процессов. Относительно недавно, в 1994 году [2], наличие явления Гиббса было установлено для интерполяционного процесса Лагранжа. Как в указанной статье, так и в ряде последующих работ, рассматривалась тригонометрическая интерполяция Лагранжа с равноотстоящими узлами или алгебраическая интерполяция с узлами Чебышева 1 рода. Следующее утверждение дает частичный ответ на вопрос о наличии явления Гиббса для других типов интерполяционных процессов.

Теорема. *Аналог явления Гиббса имеет место для лакунарного интерполяционного процесса* $\{Q_n(f,x)\}_{n=1}^{\infty}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lorentz G. G., Jetter K., Riemenshcneider S. D.* Birkhoff interpolation. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1983.
2. *Helmberg G.* The Gibbs phenomenon for Fourier interpolation. J. Approx. Theory 1994. V. 78. P. 41–63.

М. В. Норкин (Ростов-на-Дону, Россия)
norkinmi@mail.ru

КАВИТАЦИОННОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА В ЖИДКОСТИ ПОСЛЕ УДАРА

Рассматривается вертикальный и безотрывный удар эллиптического цилиндра, полупогруженного в идеальную несжимаемую жидкость конечной глубины. Предполагается, что после удара скорость цилиндра уменьшается по линейному закону (происходит торможение тела в жидкости). При больших ускорениях возникают области низкого давления вблизи тела и образуются присоединенные каверны. Отрыв возникает сразу по конечным участкам поверхности тела. При этом важную роль играют начальные зоны отрыва и контакта, которые определяются на основе решения смешанной краевой задачи теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела в первоначально невозмущенной области Ω:

$$\Delta\Phi_1 = 0, \quad R \in \Omega, \qquad \Phi_1 = -f(\Phi_0), \quad R \in S_2$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \omega n_y, \quad p_0 - \Phi_1 - f(\Phi_0) - Fr^{-2}y \geqslant 0, \quad R \in S_{11}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \geqslant \omega n_y, \quad p_0 - \Phi_1 - f(\Phi_0) - Fr^{-2}y = 0, \quad R \in S_{12}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2}, \quad y = -H; \qquad f(\Phi_0) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\nabla\Phi_0\right)^2$$

Здесь S_{11} и S_{12} – начальные зоны контакта и отрыва; S_2 – невозмущенная свободная граница жидкости; H – глубина жидкости; Φ_0 – потенциал скоростей, приобретенных частицами жидкости в результате удара; ω – безразмерное ускорение цилиндра; p_0 – безразмерное атмосферное давление; Fr – число Фруда.

На основе решения этой задачи определяются возмущения внутренней и внешней свободных границ жидкости на малых временах. Приводятся примеры численных расчетов образования одной и двух каверн вблизи границы тела. В частном случае кругового цилиндра поставленная задача изучена в статье [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Норкин М. В.* Кавитационное торможение кругового цилиндра в жидкости после удара. Прикладная механика и техническая физика. 2017. Том. 58, №. 1(341), стр. 102–107.

A. S. Silva (Aveiro, Portugal)
anabela.silva@ua.pt

AN INVERTIBILITY CRITERION FOR WIENER-HOPF PLUS HANKEL OPERATORS ON VARIABLE EXPONENT LEBESGUE SPACES

In this talk, we present an invertibility criterion for Wiener-Hopf plus Hankel operators acting between variable exponent Lebesgue spaces on the real line. This is obtained by a so-called odd asymmetric factorization which is applied to the Fourier symbols of the operators under study.

This is based on a joint work with L.P. Castro. A.S. Silva is supported by FCT–*Portuguese Foundation for Science and Technology* through the postdoctoral scholarship SFRH/BPD/96763/2013.

Smirnova I.Yu. (Rostov-on-Don, Russia)

ON A CLASS OF MIXED NORM BERGMAN TYPE SPACES

We introduce and study the weighted mixed norm Bergman type space on the unit disc $\mathbb{D}$ in the complex plane. We prove boundedness of the Bergman projection and provide characterization of a function in such spaces in terms of behavior of their Taylor coefficients.

Л. В. Стефаненко (Ростов-на-Дону, Россия)
stefanenko.lv@mail.ru

О СЮРЬЕКТИВНОСТИ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ РОСТКОВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ НА ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ

Пусть Q – собственное выпуклое подмножество $\mathbb{C}$, обладающее счетным базисом окрестностей, состоящим из выпуклых областей. Семейство таких множеств содержит все выпуклые области и выпуклые компакты в $\mathbb{C}$. Далее $H(Q)$ – пространство ростков всех функций, голоморфных на Q. Зафиксируем выпуклый компакт K в $\mathbb{C}$ и линейный непрерывный функционал μ на $H(K)$. Оператор свертки $T_\mu(f)(z) := \mu_t(f(t+z))$ отображает $H(Q+K)$ в $H(Q)$.

Большое число работ посвящено проблеме сюръективности операторов свертки T_μ для различных классов множеств Q, как выше. Для выпуклых областей и компактов Q доказаны критерии сюръективности T_μ (в терминах асимптотического поведения символа $\widehat{\mu}$ функционала μ; см., например, обзор [1]). Пусть $S := \{a \in \mathbb{C} \,|\, |a| = 1\}$; $H_Q(z) := \sup\limits_{t\in Q} \mathrm{Re}(te^{ia})$, $z \in \mathbb{C}$, – опорная функция Q; R_Q – множество всех $a \in S$ таких, что $H_Q(a)$ отлично от бесконечности и не существует окрестности a, в которой функция H_Q гармонична. Для $A \subset S$ положим $\Gamma(A) := \{ta \,|\, t \geq 0,\, a \in A\}$. Основным результатом является

Теорема. *Пусть внутренность Q непуста. Если оператор $T_\mu : H(Q+K) \to H(Q)$ сюръективен, то для любого компакта A в R_Q функция $\widehat{\mu}$ медленно убывает на $\Gamma(A)$.*

При доказательстве применяется идущая от Л. Эренпрайса техника с использованием субгармонических мажорант. Отметим, что во многих случаях для выпуклых множеств со смешанной геометрической структурой сюрьективность оператора T_μ, помимо регулярности роста $\widehat{\mu}$, влечет специальное поведение направлений сгущения нулей $\widehat{\mu}$ в зависимости от геометрии части (относительной) границы множества Q, содержащейся в Q. Для множеств Q, как выше, сюрьективность оператора T_μ не накладывает таких дополнительных ограничений на распределение нулей $\widehat{\mu}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коробейник Ю. Ф.* О разрешимости в комплексной плоскости некоторых классов линейных операторных уравнений. Ростов-наДону: изд-во ЮФУ. 2009.

Ф. С. Стонякин (Симферополь, Россия)
fedyor@email.ru

СУБЛИНЕЙНЫЙ АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ БАНАХА-МАЗУРА В ВЫПУКЛЫХ КОНУСАХ С НОРМОЙ

Весьма хорошо известна теорема Банаха-Мазура, которая утверждает, что всякое сепарабельное банахово пространство изометрически изоморфно некоторому подпространству пространства $C[0;1]$ непрерывных функций $\varphi : [0;1] \to \mathbb{R}$ со стандартной sup-нормой. В [1] доказан аналог этого результата для сепарабельных пространств с несимметричной нормой, который утверждает их вложение в $C[0;1]$, наделённое несимметричной нормой. Такое вложение, вообще говоря, не может быть изометричным относительно стандартной sup-нормы в $C[0;1]$. Нами получен аналог теоремы Банаха-Мазура в следующем классе выпуклых конусов.

Определение 1. *Будем называть выпуклый конус X с нормой отделимым, если для $x_1 \neq x_2$ из X существует линейный функционал $\ell : X \to \mathbb{R}$ такой, что $\ell(x) \leqslant ||x||$ для всех $x \in X$ и $\ell(x_1) \neq \ell(x_2)$, причём $\ell(x_1) > 0$ или $\ell(x_2) > 0$.*

Отметим, что норма в выпуклом конусе аналогично случаю линейного пространстве, но с заменой аксиомы однородности на положительную однородность. Можно доказать, что во всяком отделимом нормированном конусе X существует однородная метрика d и на её базе ввести свойство d-сепарабельности отделимого нормированного конуса X как метрического пространства (X, d). В частности, если пространство E с несимметричной нормой $\| \cdot |$ сепарабельно по согласованной с ней симметричной норме [1], то $(E, \| \cdot |)$ — d-сепарабельный отделимый нормированный конус. Сформулируем теперь аналог теоремы Банаха-Мазура для d-сепарабельных отделимых нормированных конусов.

Теорема 1. *Пусть X — d-сепарабельный отделимый нормированный конус. Тогда X сублинейно инъективно изометрично вложен в пространство непрерывных функций $C[0;1]$ с sup-нормой и естественным частичным порядком.*

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых учёных-кандидатов наук, код МК-176.2017.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бородин П. А.* Теорема Банаха–Мазура для пространств с несимметричной нормой и ее приложения в выпуклом анализе. Матем. заметки. 2001. Том. 69, вып. 3, стр. 329 –337.

Wolfgang Sproessig (Institute of Applied Analysis, TU Freiberg, Germany)
sproessig@math.tu-freiberg.de

HYPERCOMPLEX ANALYSIS IN APPLICATIONS

Hypercomplex analysis can be seen as some kind of „complex function theory“ for higher dimensions, where complex numbers are replaced by quaternions, coquaternions, split quaternions, Clifford numbers, octonions, sedenions etc.. Hyperholomorphic functions play the role of holomophic functions of the complex function theory in the plane. They are zero solutions of higher-dimensional versions of Cauchy-Riemann equations (Riesz system, Fueter system, system of Moisil-Teodorescu, etc.).In this talk we reduce our considerations to quaternion valued functions over 3D-domains. As in the classical function theory also in higher dimensional versions some operators are important: Dirac operator, Teodorescu transform, Cauchy-Fueter operator as well as the orthoprojections on the Bergman space of the Hilbert space (module) and on its complement. For boundary value problems we also need so-called projections of Plemelj type which are connected with the Cauchy-Fueter operator. We use and derive analoga of basic theorems of the plane function theory. Using Bergman-Hodge decompositions boundary value problems can be considered. In this talk will be magnetic fluid flow and shallow water problems in the focus of applications. Further results belonging to Appell polynomials, hypercomplex parabolic Dirac operators, Dunkl operators, generalized Eisenstein series, Clifford transform analysis, spaces of holomorphic functions, etc.. are shortly explained.

REFERENCES

1. *Guerlebeck K., Habetha., K. Sproessig W.* Application of holomorphic functions in two and higher dimensions. Birkhauser, Basel. (2016).

S. M. Tabatabaie (Qom, Iran)
sm.tabatabaie@qom.ac.ir

COORBIT SPACES RELATED TO LOCALLY COMPACT HYPERGROUPS

Coorbit spaces were introduced in a series of papers by H. G. Feichtinger and K. H. Grochenig in 1980's and 1991. By using coorbit spaces and their related concepts, via a voice transform one can construct a full scale of smoothness spaces. In this paper, we initiate coorbit spaces on locally compact weighted hypergroups and specially, we give some necessary and sufficient conditions for the extended coorbit space to be complete. In particular, we find admissible vectors of the left regular representation of compact commutative hypergroups, and we study the coorbit space related to the dual of an important class of hypergroups, introduced by Dunkl and Ramirez.

REFERENCES

1. *Bloom W. R. and Heyer H.* Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroups, De GruYter, Berlin, 1995.
2. *Feichtinger H. G. and Grochenig K. H.*, Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decompositions II, Monatsh. Math. 1989. Vol. 108, pp. 129–148.
3. *Tabatabaie S. M.*, The Problem of density on $L^2(G)$, Acta Math. Hungar. 2016. Vol. 150, pp. 339–345.

T. E. Tileubayev (Astana, Republic of Kazakhstan)
Tileubaev@email.ru

THE INVERSE THEOREMS OF APPROXIMATION THEORY OF FUNCTIONS IN Lpw SPACES

Let $1 < p < \infty$. Denote by $L_p^{\alpha,\beta}$ be the space of all functions f measurable on $[-1,1]$ with the finite norm

$$\|f\|_p = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p (1-x)^\alpha (1+x)^\beta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

In the case $p = \infty$ we set $L_p^{\alpha,\beta} := C[-1,1]$ and $\|f\|_\infty = \max_{[-1,1]} |f(x)|$.

For $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$. We conseder the system $P_n^{\alpha,\beta}(x)$, $n \in Z_+$ is orthogonal on $[-1,1]$ with weight $w = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ and normalized by the condition

$$R_n(x) := R_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{P_n^{\alpha,\beta}(x)}{P_n^{\alpha,\beta}(1)}$$

For $f \in L_p^{\alpha,\beta}$,$1 < p < \infty$ we define the Jacobi generalized shift operator

$$T^s f(t) = \int_{-1}^{+1} f(z)K(t,s,z)(1-z)^\alpha(1+z)^\beta dz, -1 < t,s,z < 1.$$

We note some properties of the functions$K(t,s,\theta)$ to be used in the future [1,2]:

$$K(t,s,\theta) \geq 0, 0 < t,s,\theta < \pi$$

$$\int_{-1}^{+1} K(t,s,z)(1-z)^\alpha(1+z)^\beta dz = 1$$

$$R_n(t)R_n(s) = \int_{-1}^{+1} R_n(z)K(t,s,z)(1-z)^\alpha(1+z)^\beta dz.$$

For $f \in L_p^{\alpha,\beta}$ we define the $k-th$ generalized Jacobi difference by the rule $\triangle_h^1 f(t) = T^s f(t) - f(t)$, $\triangle_h^k f(t) = \triangle_h^1(\triangle_h^{k-1} f(t))$, $k = 2,3,...$ The $k-th$ generalized Jacobi modulus of smoothness is defined by the equation $\Omega_k(f,\delta)_p = \sup_{0<h<\delta} \|\triangle_h^k f(\bullet)\|_p$.

Theorem 1. *If $f \in L_p^{\alpha,\beta}$, $1 < p < \infty$, then*

$$\Omega_k(f,\frac{1}{n})_p \leq \frac{c}{n^{2k}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2kp-1} E_\nu^p(f)_p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 < p \leq 2$$

$$\Omega_k(f,\frac{1}{n})_p \leq \frac{C}{n^{2k}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{4k-1} E_\nu^2(f)_p\right)^{\frac{1}{2}}, 2 \leq p < \infty$$

where $C = C(k,\alpha,\beta)$ is a positive constant.

Theorem1 is a strengthening of theorem 4.4 from [3, 160p.]

Theorem 2. *If $f \in L_p^{\alpha,\beta}$, $1 < p < \infty$ and series*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{2r-1} E_\nu(f)_p < \infty,$$

then a function f belongs to the Sobolev space W_p^r and for every positive integer $n \in N$, we have for $1 < p \leq 2$

$$\Omega_k(B^r f,\frac{1}{n})_p \leq \frac{C}{n^{2k}} \left[\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{(2k+2r)p-1} E_{\nu-1}^p(f)_p\right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{2r-1} E_{\nu-1}(f)_p\right]$$

and for $2 \le p < \infty$

$$\Omega_k(B^r f, \frac{1}{n})_p \le \frac{C}{n^{2k}} \left[\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{4k-1} E_\nu^2(f)_p \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{2r-1} E_{\nu-1}(f)_p \right],$$

where $C = C(k, \alpha, \beta)$ *is a positive constant.*

Theorem 2 is a strengthening of theorem 4.5 from [3, 161p.]

REFERENCES

1. *Gasper G.* Positivity and the convolution structure for Jacobi series //Ann.Math,1971,Vol 93,No 1,pp. 112-118.
2. *Gasper G.* Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel//Ann. Math.1972.Vol 95.No. 2,pp. 260-280.
3. *Platonov S. S.* Fourier-Jacobi harmonic analysis and approximation of functions //Izb. RAN.ser.Mat.2014, Vol.78, No.1, pp.117-166.

Р. М. Тригуб (Израиль)
roald.trigub@gmail.com

О ПОЛИНОМАХ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1) Приближение гладких функций на отрезке вещественной оси целочисленными полиномами [1].

2) Приближение констант и гладких функций полиномами с натуральными коэффициентами [1].

3) Целочисленный трансфинитный диаметр. Связь с распределением простых чисел. См. науно-популярную статью [2]

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р.М. Тригуб* О приближении гладких функций и констант многочленами с целыми и натуральными коэффициентами. Матем. зам, 70:1 (2001), 123-136.
2. *R.M. Trigub* Polynomials with integer coefficients and Chebyshev polynomials. J. Math. Sciences, 6:222 (May, 2017), 797-818.

A. Yu. Trynin (Saratov, Russia)
tayu@rambler.ru

SINC APPROXIMATION OF BOUNDED VARIATION FUNCTION

E. Borel and E.T. Whittaker introduced independently the notion of a cardinal and a truncated cardinal function, whose restriction on the segment $[0, \pi]$ reads as follows:

$$C_\Omega(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(\Omega x - k\pi)}{\Omega x - k\pi} f\Big(\frac{k\pi}{\Omega}\Big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin \Omega x}{\Omega x - k\pi} f\Big(\frac{k\pi}{\Omega}\Big), \qquad (1)$$

here $\Omega > 0$ and $n = [\Omega]$ is integer part $\Omega \in \mathbb{R}$. The function $\frac{\sin(\Omega x)}{\Omega x}$ called sinc- function. At present, the problem on sinc approximation of function decaying exponentially at infinity and analytic in a strip containing the real axis is studied in great details.

Theorem 1. *Let $0 \le a < b \le \pi$, $0 < \varepsilon < (b-a)/2$ and $V_f[a,b]$— total variation continuous function f on $[0,\pi]$. If $V_f[a,b] < \infty$, then we have*

$$\lim_{\Omega\to\infty} \|f - C_\Omega(f,\cdot)\|_{C[a+\varepsilon,b-\varepsilon]} = 0.$$

Here operator $C_\Omega(f,\cdot)$ defined in (1).

A. I. Fedotov (Kazan, Russia)
fedotov@mi.ru

BOUNDNESS OF THE LAGRANGE IMTERPOLATION OPERATORS IN MULTIDIMESIONAL SOBOLEV SPACES

Let $\mathcal{L}_n$ be the usual polynomial Lagrange interpolation operator of order $n \in N$ w.r.t. the equally-spaced collocation points on $[-\pi,\pi]$ and H^s be Sobolev space.

Theorem 1. *The operator $\mathcal{L}_n$ is bounded and the following estimate is valid*

$$\|\mathcal{L}_n\|_{H^s\to H^s} \le \sqrt{1+\zeta(2s)}, \quad n = 1,2,...,$$

where $\zeta(t) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-t}$- is the Riemann's ζ-function bounded and decreasing for $t > 1$.

Let $L_{\mathbf{n}}$ be the polynomial Lagrange m-dinesional interpolation operator of order $\mathbf{n} \in N^m$ w.r.t. the equally-spaced by each dimension collocation points on $[-\pi,\pi]^m$ and H^s be m-dimesional Sobolev space.

Theorem 2. *For all $s \in R$, $m \in N$, $m \ge 2$, $s > m/2$, and $\mathbf{n} \in N^m$ the following estimate holds:*

$$\|L_{\mathbf{n}}\|_{H^s\to H^s} \le 2^{\frac{m-s}{2}} m^{\frac{s+1}{2}} M^s(\mathbf{n})\sqrt{1+\zeta(2s-m+1)},$$

$$M(\mathbf{n}) = \left(\frac{\sqrt{\mathbf{n}^2}}{\min(\mathbf{n})}\right),$$

The same results are valid for the polynomial Lagrange interpolation operators in weighted Sobolev spaces.

REFERENCES

1. *Fedotov A. I.* On the asymptotic convergence of the polynomial collocation method for singular integral equations and periodic pseudodifferential equations. Archivum Mathematicum. 2002. Tomus. 38, No. 1, pp. 1–13.
2. *Fedotov A. I.* Estimate of the norm of the Lagrange interpolation operator in a multidimensional Sobolev space. Mathematical Notes. 2007. Vol. 81, No. 3, pp. 373–378.
3. *Fedotov A. I.* Estimate of the norm of the Lagrange interpolation operator in a multidimensional weighted Sobolev space. Mathematical Notes. 2016. Vol. 99, No. 5, pp. 747–756.

D. V. Fufaev (Moscow, Russia)
fufaevdv@rambler.ru

TENSOR PRODUCTS AND CONVERGENCE ALMOST EVERYWHERE

A lot of classical results of harmonic analysis on the convergence almost everywhere for summable functions could be formulated in terms of weak type property for the maximal operator, associated with some family of linear operators for the general case of abstract measure spaces. Namely, the following theorem generalizes the result [1, XVII.3.1]:

Theorem 1. *Let* (X, μ) *be a space with finite measure,* $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— sequence of linear operators,* $T_n : L^1(X) \to L^1(X)$*. Assume that*

1) corresponding maximal operator $T : L^1(X) \to L^0(X)$, $Tf(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |T_n f(x)|$, *is of weak type (1,1), that is, there exists* $C > 0$ *such that for any* $\lambda > 0$, $f \in L^1(x)$ *the following inequality holds:* $\mu\{x \in X : Tf(x) > \lambda\} \le \frac{C\|f\|_1}{\lambda}$;

2) for any $\phi \in L$, *where* L *is a dense subspace of* $L^1(X)$, *we have* $\lim\limits_{n\to\infty} T_n\phi(x) = \phi(x)$ *a.e. on* X.

Then $\lim\limits_{n\to\infty} T_n f(x) = f(x)$ *a.e. on* X *for any* $f \in L^1(X)$.

However, this result doesn't provide convergence a.e. of rectangular Fejer-Chesaro means for $f \in L(\log^+ L)^{d-1}(\mathbb{T}^d)$ (see [1, XVII.2.14]). To obtain such results, we need to consider the products of measure spaces $(X^1 \times X^2, \mu^1 \otimes \mu^2)$ and tensor product of operators: $T^1 \hat{\otimes} T^2 : L^1(X^1 \times X^2) \to L^1(X^1 \times X^2)$. In these terms we can generalize result about rectangular Fejer means by the following theorem:

Theorem 2. ([2]) *Let* $(X^i, \mu^i), i = 1, \dots, d$ *be spaces with finite measures* $X = \prod\limits_{i=1}^{d} X^i$, $\{T^i_{n^i}\}_{n^i\in\mathbb{N}}$ *— sequences of integral linear operators,* $T^i_{n^i} : L^1(X^i) \to L^1(X^i)$. *Assume that*

1) corresponding maximal operators $T^i : L^1(X) \to L^0(X)$, $Tf(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |T_n f(x)|$, *are of weak type (1,1);*

2) for any $i, i = 1, \dots, d$, $\phi \in L$, *where* L *is a dense subspace of* $L^1(X^i)$, *we have* $\lim\limits_{n\to\infty} T^i_n\phi(x) = \phi(x)$ *a.e. on* X^i.

Then $\lim\limits_{\min\limits_i (n^i)\to\infty} \hat{\bigotimes}_{1\le i\le d} T^i_{n^i} f = f$ *a.e. for any* $f \in L(\log^+ L)^{d-1}(X)$.

REFERENCES

1. *Zigmund A.* Trigonometric Series, Vol. 1, 2. Mir, Moscow. 1965.
2. *Fufaev D. V.* Convergence of products of operator orientations. Moscow University Mathematics Bulletin. 2016. Vol. 71, No. 4, pp. 151–160.

I. G. Tsar'kov (Moscow, Russia)
tsar@mech.math.msu.su

ε-SELECTION ON LINEAR SUBSPACES IN L_p [1]

[1]This research was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (grant no. 16-01-00295)

In what follows, X is real Banach space and $B(x,r)$ is the closed ball with centre x and radius $r \geqslant 0$. The best approximation, that is, the distance of a given element $x \in X$ from a given non-empty set $M \subset X$ is, by definition, $\varrho(x,M) := \inf\limits_{y \in M} \|x-y\|$. The set of all nearest points in M is denotes by $P_M x$, i.e. $P_M x := \{y \in M \mid \varrho(x,M) = \|x-y\|\}$. The best approximation operator P_M is well known to be poorly stable even Chebyshev subspaces M. In order to improve this situation we consider the concept of ε-selection.

Definition 1. *Let $\varepsilon > 0$ and $M \subset X$. A map $\varphi : X \to M$ is called a multiplicative (additive) ε-selection if for all $x \in X$ $\|x-\varphi(x)\| \leqslant (1+\varepsilon)\varrho(x,M)$ (respectively, $\|x-\varphi(x)\| \leqslant \varrho(x,M)+\varepsilon$), that is $\varphi(x) \in B(x,(1+\varepsilon)\varrho(x,M)) \cap M$ (respectively, $\varphi(x) \in B(x,\varrho(x,M)+\varepsilon) \cap M$).*

The existence of continuous ε-selections have been studied by Konyagin, Marinov, Tsar'kov, Albrecht, Rutin, Livshits, and others (see [1]–[4]). In particular Albrecht proofs that on a finite subspaces ℓ of $L_p[0,1] (1 < p < \infty)$ there exists a multiplicative Lipschitz ε-selection with constant equals to $C\varepsilon^{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|}$, where is $C > 0$ depends on $n = \dim \ell$. The next assertion make more precise Albrecht's rezult for $p > 2$.

Theorem 1. *Let be $p > 2$, $\varepsilon > 0$, $L_p = L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, let be ℓ a subspace of L_p and $n = \dim \ell$. Then there exists a multiplicative Lipschitz $\varepsilon^{\frac{1}{p}}$-selection on ℓ with constant equals to $Cn^{\frac{p-2}{p}}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$, where is $C > 0$ doesn't depends on ε and n.*

REFERENCES

1. *Alimov A. R., Tsar'kov I. G.* Connectedness and solarity in problems of best and near-best approximation//Russian Mathematical Surveys. 2016. Vol. 71, No. 1. P. 1-77
2. *Tsar'kov I. G.* Continuous ε-selection// Sbornik: Mathematics. 2016. Vol. 207, No. 2. P. 267-285.
3. *Tsar'kov I. G.* Local and global continuous ε-selection// Izv. Math. 2016. Vol. 80, No. 2. P. 442-461.
4. *Al'brecht P. V.* Orders of moduli of continuity of operators of almost best approximation// Russian Academy of Sciences. Sbornik. Mathematics, 1995, Vol. 83, No. 1, P. 1–22.

М. М. Цвиль (Ростов-на-Дону, Россия)
tsvilmm@mail.ru

ФАБЕРОВСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО ЯДРА КОШИ

Пусть $D^+ = D_1^+ \times D_2^+ \times \ldots \times D_n^+$, $D^- = D_1^- \times D_2^- \times \ldots \times D_n^-$ — полицилиндрическая область в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ с остовом $\sigma = L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_n$; где D_k^+ — конечная односвязная область в плоскости C^1, ограниченная спрямляемой жордановой кривой L_k; D_k^- — ее дополнение до всей плоскости; функция $z_k = \psi_k(w_k)$
конформно и однолистно отображает внешность единичного круга $\{|w_k| > 1\}$ на область D_k^- при условиях $\psi_k(\infty) = \infty$, $\psi_k'(\infty) > 0$; функция $w_k = \varphi_k(z_k)$ — обратная к $\psi_k(w_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Обозначим через T^n — единичный тор; $\Pi^n = \{\theta \in \mathbb{R}^n\colon\ -\pi < \theta_k < \pi,\ k = 1, 2, \dots, n\}$ — n-мерный куб; Z^n — множество векторов $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ с целочисленными координатами; Z^n_+ — множество векторов $\ell \in Z^n$ с неотрицательными координатами.

Рассмотрим в D^+ функцию $f(z)$ n комплексных переменных, которая представима интегралом типа Коши с плотностью $\tau(\zeta)$. В работе [1] построен аналог формулы В. К. Дзядыка суммирования обобщенных рядов Фабера n переменных:

$$P_{\Omega_+}(z) = \frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Pi^n} S_\Omega(\theta)d\theta \int\limits_{\sigma} \frac{\tau(\zeta\langle -\theta\rangle)}{g(\zeta\langle -\theta\rangle)}\cdot\frac{g(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^I} =$$

$$= \sum_{\ell\in\Omega_+} \lambda_\ell a_\ell \Phi_\ell(z, g), \quad z \in D^+,\ \Omega_+ = \Omega \cap Z^n_+, \tag{1}$$

где $S_\Omega(\theta) = \sum\limits_{\ell\in\Omega} \lambda_\ell e^{i|\ell\theta|}$ — произвольный тригонометрический полином n переменных, Ω — конечное подмножество решетки Z^n, $\Phi_\ell(z, g)$ — обобщенные полиномы Фабера n-переменных, $I = (1, 1, \dots, 1)$.

Во внутреннем интеграле формулы (1) проведем замену переменной интегрирования по формулам

$$\eta_k = \zeta_k\langle -\theta_k\rangle, \quad \zeta_k = \eta_k\langle \theta_k\rangle, \quad d\zeta_k = \psi_k'(\varphi_k(\eta_k)e^{i\theta})e^{i\theta}\varphi'(\eta)d\eta.$$

Затем в полученном интеграле вместо η поставим ζ, поменяем порядок интегрирования. В результате получим

$$P_{\Omega_+}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\sigma}\tau(\zeta)\left\{\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Pi^n} S_\Omega(\theta)\frac{g(\zeta\langle\theta\rangle)\psi'[\varphi(\zeta)e^{i\theta}]}{[\zeta\langle\theta\rangle - z]^I}e^{i\theta}d\theta\right\}\frac{\varphi'(\zeta)}{g(\zeta)}d\zeta.$$

Величину, стоящую в фигурных скобках, обозначим $H_{\Omega_+}(\zeta, z)$. Для неё имеем представление

$$H_{\Omega_+}(\zeta, z) = \sum_{\ell\in\Omega_+} \frac{\lambda_\ell \Phi_\ell(z; g)}{\varphi^{\ell+I}(\zeta)}, \quad \zeta \in \sigma, \tag{2}$$

где $\varphi^{\ell+I} = [\varphi_1(\zeta_1)]^{\ell_1+1} \dots [\varphi_1(\zeta_n)]^{\ell_n+1}$. Тогда равенство (1) приводится к виду

$$P_{\Omega_+}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\sigma} \tau(\zeta) H_{\Omega_+}(\zeta, z)\frac{\varphi'(\zeta)}{g(\zeta)}d\zeta$$

и

$$f(z) - P_{\Omega_+}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\sigma} \tau(\zeta)\left[\frac{1}{(\zeta - z)^I} - H_{\Omega_+}(\zeta, z)\frac{\varphi'(\zeta)}{g(\zeta)}\right]d\zeta.$$

Таким образом, возникает задача о наилучшем приближении многомерного ядра Коши суммами вида (2).

Более подробно рассматривается случай $g(z) \equiv 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цвиль М. М.* О суммировании кратных обобщенных рядов Фабера // Тез. докл. Международного семинара «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения». Ростов-на-Дону, 2013. С. 42–43.

А. Ф. Чувенков (Ростов-на-Дону, Россия)
chuvenkovaf@mail.ru

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ ГРАНД-ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

Вводимые гранд-пространства (в частности, $L^a_{M),s}(\Omega,\omega)$) строятся на основе весовых пространств Орлича $L_M(\Omega,\omega)$, порожденных N-функциями $M(u)$, имеющих различные скорости убывания в нуле (p_1) и роста в бесконечности (p_2).

Предполагаем, что выполняются ограничения $1 < p_1 < \infty$, $1 < p_2 < \infty$, $p = \min\{p_1, p_2\}$. Для любого положительного веса $a(x)$ из пространства $L_M(\Omega,\omega)$ определяем новый (дополнительный) вес формулой

$$\omega_\delta(x) \equiv \omega_\delta(a, M) = (p\delta)^{\frac{1}{p}} M^\delta(a(x)) \cdot \omega(x), \quad 0 < \delta < 1 - 1/p.$$

Через $L^a_{M),s}(\Omega,\omega)$ обозначаем гранд-пространство Орлича с весом $\omega_\delta(x)$:

$$\left\{ f:\ \rho_{a,s}(f, M, \omega) = \left(\int\limits_0^{\delta_0} \left[\int\limits_\Omega M^{1-\delta}(|f(x)|)\omega_\delta(a, M)dx \right]^{\frac{s}{1-\delta}} d\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} < \infty \right\},$$

где $f \in L_M(\Omega,\omega)$, $s \in [1,\infty]$, $\delta_0 \in (0, 1 - 1/p)$. В случае, когда $M(u) = \frac{u^p}{p}$, $1 < p < \infty$, $s = \infty$, имеем гранд-пространство Лебега $L_{p)}(\Omega)$ функций, заданных на ограниченных множествах Ω ([2]), и на неограниченных – $L^a_{p)}(\Omega)$ ([3]).

Теорема. *Пусть функция f принадлежит пространству Орлича $L_M(\Omega,\omega)$, $1 < p = \min\{p_0, p_\infty\} < \infty$, a – положительный вес. Для верной оценки*

$$\rho_{a,s}(f, M, \omega) \le C_{p,a}\rho(f, M, \omega),$$

с точной константой $C_{p,a}$, необходимо и достаточно, чтобы $a \in L_M(\Omega,\omega)$.

Сообщаются первоначальные основные свойства введенных гранд-пространств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rao M. M., Ren Z. O.* Theory of Orlicz Spaces, Crc Press.1991, p. 472.
2. *Iwaniec T., Sbordone C.* On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses. // Arch. Rational Mech. Anal., 1992. № 119. С. 129–143.
3. *Умархаджиев С. М.* Обобщение понятия гранд–пространства Лебега. Известия вузов. Математика, 2014,№ 4, с. 42-51.

В. В. Шустов (Москва, Россия)
vshustov@gosniias.ru

О ПРИБЛИЖЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СОСТАВНЫХ ДВУХТОЧЕЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА

В рамках продолжения работы по интегрированию функций с использованием производных, представленной в [1], рассматривается случай, когда производные заданы не только на концах, но и внутри отрезка интегрирования. Для построения квадратурных формул [2] используется двухточечные многочлены Эрмита [3].

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[x_0,x_n]$ и имеет достаточный набор производных на этом отрезке. Пусть также в узловых точках $x_i = x_0 + i(x_n\text{-}x_0)/n$, i=0,1,... n этого отрезка заданы значения функции $f(x)$ и ее производных до порядка m включительно:

$$f^{(j)}(x_i) = f_i^{(j)}, \quad j = 0, 1, ..., m, \;\; i = 0, 1, ...n. \qquad (1)$$

Необходимо построить квадратурную формулу для определенного интеграла от этой функции и оценить ее остаточный член.

Теорема. *Пусть функция f(x) удовлетворяет условиям* (1). *Тогда для определенного интеграла функции имеет место формула*

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} D_m^j h^{j+1}[f_i^{(j)} + (-1)^j f_{i+1}^{(j)}] + r_m,$$

$$D_m^j = \frac{c_{m+1}^{j+1}}{(j+1)!c_{2m+2}^{j+1}}, b_m = \frac{(m+1)!(m+1)!}{(2m+3)!},$$

$$r_m = \frac{(-1)^{m+1} b_m n h^{2m+3}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\eta),$$

L=x_n-x_0 , h=L/n *и точка* $\eta \in (x_0,x_n)$.

Результаты сопоставляются с формулой Эйлера-Маклорена, даются численные примеры с данными о погрешности и о ее оценке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шустов В. В.* О представлении интегралов значениями функции и ее производных на основе использования двухточечных многочленов Эрмита // «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование». Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2016. С. 85-87.

2. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. М.: Наука, 1988.

3. *Шустов В. В.* О приближении функций двухточечными интерполяционными многочленами Эрмита // ЖВММФ. 2015. Т. 55, № 7, С. 1091.

A. Zh. Ydyrys (Astana, Kazakhstan)
aizhanyd@gmail.com

MULTIPLIERS OF FOURIER SERIES

This paper is about the multipliers of multiple Fourier series for a regular system on anisotropic Lorentz spaces. In particular, we show the sufficient conditions for a sequence of complex numbers $\{\lambda_k\}_{k\in Z^n}$ in order to make it a multiplier of multiple trigonometric Fourier series of space $L_p[0;1]^n$ in the $L_q[0;1]^n,\ p<q$.

Let $1\le p\le q\le\infty$. It is said that the sequence of complex numbers $\lambda=\{\lambda_k\}_{k\in Z}$ is a trigonometrical Fourier series multiplier from $L_p[0,1]$ to $L_q[0,1]$, if for every function $f\in L_p[0,1]$ with Fourier series $\sum\limits_{k\in Z}\hat f(k)e^{2\pi ikx}$ there exists a function f_λ from $L_q[0,1]$ a Fourier series which coincides with the series $\sum\limits_{k\in Z}\lambda_k\hat f(k)e^{2\pi ikx}$ and an operator $T_\lambda,\ T_\lambda f=f_\lambda$ which is a bounded operator from $L_p[0,1]$ to $L_q[0,1]$.

Our aim is to find characteristics for a sequence $\lambda=\{\lambda_k\}_{k\in Z}$, such that operator T_λ is bounded from $L_p[0,1]$ to $L_q[0,1]$, i.e. λ is multiplier.

Let $E=\{\varepsilon=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_m):\ \varepsilon_i=0\quad or\quad \varepsilon_i=1,\ i=1,...,m\}$.

Theorem. *Let* $1<\mathbf{p}=(p_1,...,p_m)<\mathbf{q}=(q_1,...,q_m)<\infty,\ 0<\mathbf{r}=(r_1,...,r_m)\le\infty,\ 0<\alpha<1-\frac{1}{\mathbf{p}}+\frac{1}{\mathbf{q}}$ *and* $\beta=\alpha+\frac{1}{\mathbf{p}}-\frac{1}{\mathbf{q}}$. *If the sequence of complex numbers* $\lambda=\{\lambda_k\}_{k\in N^m}$ *satisfy the following properties for every* $\varepsilon\in E$

$$\sup_{k_i\in N}\prod_{i=1}^m k_i^{\varepsilon_i-\alpha_i}\left(\prod_{j=1}^m s_j^{\beta_j}\left|\Delta_\varepsilon\lambda_s\right|\right)^{*_\varepsilon}(k_1,...,k_m)\le\mu,$$

where $\Delta_\varepsilon\lambda_s=\Delta_{\varepsilon_1}...\Delta_{\varepsilon_m}\lambda_{s_1,...,s_m},\quad f^{*_\varepsilon}=f^{*_1^{\varepsilon_1},...,*_m^{\varepsilon_m}}$, *then* $\lambda\in m_{\mathbf{p},\mathbf{r}}^{\mathbf{q},\mathbf{r}}$ *and*

$$\|\lambda\|_{m_{\mathbf{p},\mathbf{r}}^{\mathbf{q},\mathbf{r}}}\le c\mu,$$

here constant $c>0$ *depends only on* $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}$ *and* α.

REFERENCES

1. *Nursultanov E. D.* Multipliers of multiple Fourier series. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 1999. pp. 237–242.

2. *Persson L.-E., Sarybekova L. O., Tleukhanova N. T.* A Lizorkin theorem on Fourier series multipliers for strong regular systems. Analysis for science, engineering and beyond, Springer, Heidelberg. 2012. Vol. 6. pp. 305–317.

Session III

Differential Equations and Mathematical Physics

С. А. Авдонин, К. Б. Нуртазина (Фэрбенкс, США; Астана, Казахстан)
s.avdonin@alaska.edu, nurtazina.k@gmail.com

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕПЛОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ-ДЕРЕВЕ

Исследование идентифицируемости распределенных параметров для параболического уравнения на графах опирается на результаты [1, 2]. На графе-дереве рассматриваем задачу (1)-(3):

$$u_t - u_{xx} + q(x)u = p(t)h(x), \quad t \in (0,T). \tag{1}$$

$$\begin{cases} \sum_{e_j \sim v} \partial u_j(v,t) = 0 \text{ в каждой вершине } v \in V \setminus \partial\Omega, \text{ и } t \in [0,T] \\ u(\cdot,t) \text{ непрерывны в каждой вершине для всех } t \in [0,T], \end{cases} \tag{2}$$

$$\partial u = f \text{ на } \partial\Omega \times [0,T], \; u|_{t=0} = 0 \text{ на } \Omega. \tag{3}$$

где (2) – условие согласования Кирхгофа-Неймана, $\partial u_j(v,\cdot)$ – производная функции u в вершине v, взятая вдоль ребра e в направлении от вершины, $e_j \sim v$ означает ребро e_j, входящее в вершину v, а сумма берется по всем ребрам, входящим в v.

Пусть $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ и $\mathcal{F}^T = L^2([0,T];\mathbb{R}^m)$. В предположении p известным решена задача: при заданных $\left\{\partial u|_{\partial\Omega\times[0,T]}\right\}$ и наблюдениях $\left\{u|_{\partial\Omega\times[0,T]}\right\}$ однозначно определить u, q, h.

Предполагаем, что $p \in H^1(0,T)$. Задаем оператор отклика $R^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$ как $(R^T f)(t) = u^f(\cdot,t)$, $t \in [0,T]$.

Решена обратная задача, которая состоит в восстановлении топологии графа, длин ребер и векторов $q(\cdot)$ и $h(\cdot)$ по оператору R^T, известному при произвольном фиксированном $T > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Avdonin S., Bell J.* Determining a distributed conductance parameter for a neuronal cable model defined on a tree graph. J. Inv. Probs and Imaging. 2015. No 9. P. 645–659.

2. *Avdonin S, Bell J., Nurtazina K.* Determining distributed parameters in a neuronal cable model on a tree graph. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2017.

Г. М. Айрапетян (Ереванский государственный университет, Армения)
hhayrapet@gmail.com

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ

Рассматривается граничная задача Римана в единичном круге $D^+ = \{z; |z| < 1\}$ в следующей постановке: определить аналитическую в $D^+ \bigcup D^-$, $D^- = \{z; |z| > 1\}$ функцию $\Phi(z)$, $\Phi(\infty) = 0$ так чтобы имело место

$$\lim_{r\to 1-0} \|\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_{L^p(\rho)} = 0, \tag{1}$$

где $1 < p < \infty$, $\rho(t) = \prod_{k=1}^{\infty} |t_k - t|^{\delta_k}$, $t \in T$, $T = \{z; |z| = 1\}$, $\delta_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty$.

При $1 < p < \infty$ устанавливается что эта задача нормально разрешима т.е. однородная задача имеет конечное число линейно независимых решений , а неоднородная -разрешима при наличие конечного числа условий на функцию f. При $p = 1$, $a \equiv 1$ устанавливается, что функция

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{t_k - z},$$

где $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < \infty$. Общее решение задачи (1) можно представить в виде $\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z)$, где $\Phi_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{1k}(z)$,

$$\Phi_{1k}(z) = \frac{1}{t_k - z} \frac{1}{2\pi i} \int_{T_k} \frac{f(t)(t_k - t)}{t - z} dt.$$

Причем интервалы T_k, $k = 1, 2, \dots$ не пересекаются, $t_j \notin T_k$, $j \neq k$, $t_j \in T_j$, $T = \cup T_k$. Когда $a = B^{-1}$, где B произведение Бляшке с нулями α_k, $k = 1, 2, \dots$, установливается, что эта задача однозначно разрешима, когда нули функции B имеют пределльную точку, отличную от точек t_k, $k = 1, 2, \dots$.

Задача (1) исследуется также в случае, когда $a \in C^\alpha$. Так как $a(t) = S^+(t)(S^-(t))^{-1}$, то общее решение задачи можно представить в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z)$$

где

$$\Phi_0(z) = S^{\pm}(z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{t_k - z}, \Phi_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{1k}(z),$$

причем

$$\Phi_{1k}(z) = \frac{S(z)}{t_k - z} \frac{1}{2\pi i} \int_{T_k} \frac{f(t)(t_k - t)}{S^+(t)(t - z)} dt.$$

T. N. Harutyunyan (Yerevan, Armenia)
hartigr@yahoo.co.uk

THE DIRECT AND INVERSE STURM-LIOUVILLE AND DIRAC PROBLEMS

First, we investigate the dependence of spectral data of Sturm-Liouville operator on parameters defining the boundary conditions. With this aim we introduce the concept of "Eigenvalues function of family of Sturm-Liouville operators"(EVF) and investigate its properties.

Secondly we solve the inverse Sturm-Liouville problem by EVF.

We also provide an analogue of uniqueness theorem (in inverse problem) of Marchenko and one generalization of theorem of Ambarzumian.

New uniqueness theorems we also prove in inverse problems for canonical Dirac systems.

We give the description of isospectral Dirac operators.

We have proved, that in common case the analogue of Ambarzumian theorem for Dirac operator is not true, but in the same time, we describe particular cases, when there are analogues of Ambarzumian theorem.

We also give some new results in constructive solution of inverse problem for Dirac system.

Acknowledgement This work was supported by State Committee of Science MES RA in frame of the research project No. 15T-1A392.

Г. Д. Анисимова (Омск, Российская Федерация)
gdanisimova@gmail.com

КРИТЕРИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ДИХОТОМИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ФДУ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

1. Работа примыкает к [1]. Рассматривается в $\Pi = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ задача Коши

$$\begin{cases} Lu = Du + \int_0^1 [dB(s)]\, u(x, t-s) = 0, \quad t > 1, \\ u\,|_{\Pi_0} = \varphi \in \mathrm{E}, \quad \Pi_0 = \mathbb{R} \times [0,1]. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $D = \frac{d}{dt} + A\frac{d}{dx}$, $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_N)$, $a_1 > \ldots > a_N$, $a_k \neq 0$, $B\colon [0,1] \to \mathbb{C}^{N \times N}$, $\bigvee_0^1 (B) < \infty$, $u = \left(u^1, \ldots, u^N\right)^T$, E – банахово пространство непрерывных ограниченных функций $\Pi_0 \to \mathbb{C}^N$ с нормой $\sup |\varphi|$.

Через каждую точку $(x_0, y_0) \in \Pi$ проходят характеристики $q_1, \ldots, q_N$ с уравнениями $x = \sigma_k(t, x_0, t_0) = x_0 + a_k(t - t_0)$. Оператор D далее понимается в обобщённом смысле $D = \operatorname{diag}(D_1, \ldots, D_N)$, где $D_k u^k$ – производная по t вдоль q_k. Под решением задачи (1) понимается функция $u \in \mathrm{C}(\Pi, \mathbb{C}^N)$ с гладкими вдоль “своих” характеристик q_k компонентами u_k, удовлетворяющая (1). Имеет место однозначная разрешимость в этом классе, обозначаемом далее C^1_x.

В работе исследуется дихотомия решений задачи (1) сведением к такой же проблеме для разностной задачи Коши вида

$$u_n = \Gamma u_{n-1}, n = 1, 2, \ldots, \quad u_0 = \varphi \in \mathrm{E} \tag{2}$$

с компактным оператором Γ в фазовом пространстве E.

2. Определим операторы из End(E) формулами

$$B_0\varphi = \int_0^t [dB\,(s)]\varphi\,(x, t-s)\,, B_1\varphi = \int_t^1 [dB\,(s)]\varphi\,(x, 1+t-s)\,,$$

$$S\varphi = \int_0^t \begin{bmatrix} \varphi^1\,(\sigma_1\,(\tau, x, t)\,, \tau) \\ \dots \\ \varphi^N\,(\sigma_N, (\tau, x, t)\,, \tau) \end{bmatrix} d\tau, P\varphi = \begin{bmatrix} \varphi^1\,(x - a_1 t, 1) \\ \dots \\ \varphi^N\,(x - a_N t, 1) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Лемма. 1^0. *Оператор* $I + SB_0$ *имеет ограниченный обратный* $\mathrm{E} \to \mathrm{E}$.
2^0. *Формула* $\Gamma = (I + SB_0)^{-1}\,(P - SB_1)$ *задаёт компактный оператор* $\mathrm{E} \to \mathrm{E}$.
3^0. *Функция* $u\colon \Pi \to \mathbb{C}^N$ *является решением класса* C^1_x *задачи* (1) *точно тогда, когда последовательность* $u_n\,(x,t) = u\,(x, t+n)\,, (x,t) \in \Pi_0, n = 0, 1, \dots$ *является решением задачи* (2) *с оператором* 2^0.

3. Будем говорить, что имеет место экспоненциальная дихотомия решений задачи Коши (1), если это верно для решений задачи (2): фазовое пространство E распадается в прямую сумму подпространств $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \dot{+} \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_k \neq \{0\}$, так, что для решений задачи (2) верны при некоторых $\mu, \nu > 0$ оценки

$$\varphi \in \mathrm{E}_1 \Rightarrow \|\Gamma^n\varphi\|_{\mathrm{E}} \leq \mu e^{-\nu n}\|\varphi\|_{\mathrm{E}},$$
$$\varphi \in \mathrm{E}_2 \Rightarrow \|\Gamma^n\varphi\|_{\mathrm{E}} \geq \mu e^{\nu n}\|\varphi\|_{\mathrm{E}}.$$

Поставим в соответсвие оператору (1) матричный пучок

$$\Delta\,(\lambda, \mu) = \lambda I + \mu A + \int_0^1 e^{-\lambda s} dB\,(s).$$

Теорема. *Экспоненциальная дихотомия решений задачи Коши (1) имеет место точно тогда, когда при каждом* $\mu \in i\mathbb{R}$ *уравнение*

$$\det \Delta\,(\lambda, \mu) = 0$$

не имеет λ*-корней на мнимой оси и имеет хотя бы один корень в полуплоскости* $\mathrm{Re}\lambda > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романовский Р. К., Назарук Е. М.* О дихотомии линейных автономных систем функционально-дифференциальных уравнений // Матем. заметки. –2014. – Т. 35. – № 1. – С. 129–135.

A. H. Babayan, S. H. Abelyan (Yerevan, Armenia)
barmenak@gmail.com; seyran.abelyan@gmail.com

ON AN EFFECTIVE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR SIXTH ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

Let $D = \{z : |z| < 1\}$ be a unit disk and $\Gamma = \partial D$ its boundary. We consider the properly elliptic sixth order differential equation

$$\sum_{k=0}^{6} A_k \frac{\partial^6 u}{\partial x^k \partial y^{6-k}}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D, \tag{1}$$

where A_k are such complex constants ($A_0 \neq 0$), that the numbers λ_j ($j = 1, \ldots, 6$) – the roots of characteristic equation $\sum_{k=0}^{6} A_k \lambda^{6-k} = 0$, satisfy the condition

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = i \neq \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_3,\ \Im\lambda_3 > 0,$$

$$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 \neq -i, \quad \Im\lambda_4 < 0.$$

We suppose, that the multiplicity k may be equal to $k = 1, 2, 3$, if $k = 3$, then we have only triple root i in the upper half-plane. The solution of the equation (1) to be found in the class $C^6(D) \bigcap C^{(2,\alpha)}(\overline{D})$, and on the boundary Γ satisfy Dirichlet conditions:

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial\, r^i}\right|_{\Gamma} = g_i(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, i = 0, 1, 2; \quad z = re^{i\theta}. \tag{2}$$

Here g_i are given functions from the class $C^{(2-i,\alpha)}(\Gamma)$. The case of second order elliptic equation (1) was considered in [1], further results and the case of fourth order equation may be found in [2]. We obtain the following theorem.

Theorem 1. *If $k = 3$ then the problem (1), (2) is uniquely solvable. If $k = 1, 2$ it is obtained the new formula for the determination of the defect numbers of the problem (numbers of linearly independent solutions of the homogeneous (when $g_i \equiv 0$) problem and linearly independent solvability conditions of the inhomogeneous problem) and it was proved, that if $k = 2$, then these defect numbers may be equal only zero and one.*

REFERENCES

1. *Tovmasyan N. E.* Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields. World Scientific Co. Ltd. 1998.
2. *Babayan A. H., Babayan V. A.* Defect Numbers of the Dirichlet Problem for Higher Order Partial Differential Equations in the Unit Disc. Caspian Journal of Computational and Mathematical Engineering (CJCME). 2016. No. 1, pp. 4–20.

П. В. Бабич (Ростов-на-Дону, Россия), В. Б. Левенштам (Ростов-на-Дону, Владикавказ, Россия)
vleven@math.rsu.ru

ВОССТАНОВЛЕНИЕ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО СВОБОДНОГО ЧЛЕНА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПО ЧАСТИЧНОЙ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ

В докладе речь пойдет о начально-краевой задаче для одномерного гиперболического уравнения с быстро осциллирующей по времени правой частью (свободным членом), которая здесь не известна. Решается вопрос о ее восстановлении при тех или иных сведениях (дополнительных условиях) о решении. Такого рода задачи относятся к известному широкому классу обратных коэффициентных задач.

Обратные задачи составляют важное активно развиваемое направление современной математики (см., например, [1] и библиографию в ней). Однако задачи с быстро осциллирующими слагаемыми в этой теории почти не представлены. При этом, обычно используемые в обратных задачах дополнительные условия (значения решения в фиксированной точке пространства, интегральные условия и т.д.), для задач с быстро осциллирующими данными, как правило, труднопроверяемы (даже при наличии суперкомпьютера). Условия указанного типа здесь естественно ставить только на несколько первых коэффициентов асимптотики решения. Сколько этих коэффициентов должно быть задействовано определяется при решении прямой задачи, то есть при построении асимптотического разложения решения. В настоящее время опубликована, по-видимому, лишь одна работа [2] об обратной задаче с быстро осциллирующими данными.

В данном докладе задача о восстановлении свободного члена вида

$$f(x,t)r(t,\omega t), \omega \gg 1,$$

гиперболического уравнения решена в следующих четырех случаях: 1) не известна функция $r(t,\tau)$; 2) не известна функция $f(x,t)$; 3) в паре f, r известно лишь среднее r_0 функции $r(t,\tau)$ по τ; 4) не известны оба сомножителя f и r. Каждая из этих задач снабжена, разумеется, соответствующими дополнительными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. М.:МГУ. 1994.
2. *Babich P. V., Levenshtam V. B.* Direct and inverse asymptotic problems high-frequency terms. Asymptotic Analysis. 2016. Том. 97, стр. 329–336.

В. А. Батищев (Ростов-на-Дону, Россия)
batishev-v@mail.ru

БИФУРКАЦИИ ВРАЩЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ МАРАНГОНИ ПРИ ОХЛАЖДЕНИИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

Пограничные слои Марангони возникают при наличии продольного градиента температуры на свободной поверхности жидкости. Интерес к этой проблеме возник во второй половине прошлого столетия в связи с экспериментами в космосе. В докладе представлены условия возникновения вращения жидкости в тонком пограничном слое вблизи свободной границы. Результаты работы могут объяснить одну из причин возникновения вращения жидкости вблизи границы раздела двух жидких сред, в том числе и возникновение торнадо.

На основе системы Навье – Стокса рассчитано стационарное осесимметричное термокапилляроe течение однородной жидкости в полубесконечном горизонтальном слое, при локальном охлаждении свободной границы. Предполагается, что вне тонкого пограничного слоя имеется внешний незакрученный поток, описываемый в первом приближении уравнениями Эйлера.

Рассчитаны два типа режимов течений жидкости – основные и вращательные. Основные режимы описывают течение без вращения. Вращательные режимы возникают в результате бифуркации основных решений. При охлаждении границы возникает пара автомодельных решений. Эти режимы существуют только, если скорость внешнего невязкого потока превышает свое критическое значение, зависящее от температуры границы. Исследовано ветвление основных режимов. Найдено бифуркационное значение скорости внешнего потока. Получены асимптотические разложения вращательных режимов вблизи точки бифуркации. Построено уравнение разветвления, коэффициенты которого найдены численно. Показано, что в точке бифуркации от основного режима ответвляются два вращательных режима. Эти режимы отличаются друг от друга только направлением вращения. Вращение жидкости возникает только при локальном охлаждении свободной поверхности, например возникновение торнадо может происходить при охлаждении границы раздела жидких фаз потоком холодного воздуха.

А. О. Ватульян, С. А. Нестеров (Владикавказ, Россия)
vatulyan@math.rsu.ru, 1079@list.ru

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Задачи идентификации теплофизических и термомеханических характеристик функционально-градиентных материалов формируют важный с точки зрения различных технических приложений класс коэффициентных обратных задач (КОЗ) математической физики.

КОЗ для неоднородных материалов, как правило, нелинейны. Решение КОЗ теплопроводности строится на основе итерационного процесса, на каждом этапе которого решается линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода [1,2]. Итерационный процесс стартует с некоторого начального приближения, поиск которого в [1,2] осуществляетсяся в классе линейных функций на основе минимизации функционала невязки.

В данной работе представлен новый более быстрый способ нахождения начального приближения на основе проекционного метода Галеркина. После применения преобразования Лапласа к уравнению теплопроводности трансформанта температуры представляется в виде конечного разложения по некоторой системе базисных функций, а коэффициент теплопроводности и удельная теплоемкость в виде линейных функций. После подстановки разложений в уравнение теплопроводности в трансформантах и проектирования результатов на все присутствующие в аппроксимации базисные функции поиск начального приближения осуществляется путем решения системы алгебраических уравнений при значениях параметра преобразования Лапласа, равного значениям полюсов трансформанты дополнительной информации.

Представлены численные результаты по нахождению начального приближения удельной теплоемкости.

Работа выполнена при поддержке программы № 114072870112 Президиума РАН «Фундаментальные проблемы математического моделирования».

REFERENCES

1. *Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A.* On reconstruction of thermalphysic characteristics of functionally graded hollow cylinder. Applied Mathematical Modelling. 2016. Vol. 40, № 4, pp. 2711–2719.

2. *Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A.* Identification of thermal conductivity coefficient and volumetric heat capacity of functionally graded materials. Int. Journal of Heat and Mass transfer. 2016. Vol. 102, pp. 213–218.

А. О. Ватульян, В. О. Юров (Ростов-на-Дону)
vatulyan@math.rsu.ru, vitja.jurov@yandex.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИСПЕРСИОННЫХ СВОЙСТВ НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛНОВОДОВ

Рассмотрена новая задача для матричного спектрального пучка с двумя спектральными параметрами. Она порождена задачей для неоднородного по радиальной координате цилиндрического волновода с модифицированными граничными условиями третьего рода на боковой поверхности. В граничные условия введены две жесткости, которые связывают перемещения на внешней границе с нормальными и касательными напряжениями на ней. Такого рода задача может служить для описания волновых процессов в трубопроводе, погруженном в грунт. Задача заключается в изучении свойств дисперсионных соотношений при осесимметричном напряженном состоянии и сводится к матричному дифференциальному уравнению первого порядка, где матрица с переменными коэффициентами порождает квадратичный пучок, зависящий от двух спектральных параметров (частота и волновое число). Система сформирована таким образом, что основная матрица не содержит производных от материальных характеристик. Это позволяет исследовать с помощью метода пристрелки произвольные законы неоднородности. Проведено численное и асимптотическое исследование дисперсионного множества в зависимости от коэффициентов жесткости. В случае нулевой касательной жесткости выявлено существование дисперсионной ветви, имеющей линейный участок и выходящей из начала координат. Построена асимптотика для угла наклона этого участка путем разложения по малому параметру и использования условий разрешимости для неоднородных задач. Для однородного волновода получена явная формула для угла наклона, а для неоднородного волновода угол наклона выражен через решение вспомогательной краевой задачи. Наличие касательной жесткости существенно меняет структуру дисперсионного множества, появляется частота запирания, начало координат не является точкой дисперсионного множества. Представлен приближенный способ определения жесткостей для граничных условий через механические характеристики внешней среды, заключающийся в оценке ее потенциальной энергии через граничные значения. Предельные по жесткостям случаи дисперсионных соотношений получены для волновода со свободной и жестко защемленной границей, а также для цилиндра, находящегося в жесткой обойме без трения.

L. Z. Gevorgyan (Yerevan, Armenia)
levgev@hotmail.com

A NEW METHOD OF SOLUTION OF NONLINEAR EQUATIONS

Let f be analytic in some domain $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ function, having a set of (not obligatory simple) zeros. In [2] generalizing the well-known Ramanujan algorithm of solution of equations with analytic functions (cf., e.g. [1] and [3]) the following assertion is proved. Consider the equation

$$f(z) = 0. \tag{1}$$

Denote

$$P_n(z) = d^n(1/f(z)), n \in \mathbb{Z}^+,$$

where d is the differentiation operator.

Theorem. *Let P_0 be meromorphic in $\mathcal{D}, z \in, \mathcal{D}, f(z) \neq 0$. The formula*

$$a = z + \lim_{n\to\infty} n\frac{P_{n-1}(z)}{P_n(z)}$$

defines the nearest to z zero of f. If there are many such zeros, then a is the zero of the highest order. The limit does not exist if there are many concurrent zeros of the highest order in the same distance from z.

In the present talk we propose a discrete version of the above formula

$$z_{n+1} = z_n + \frac{D_{n-1}}{D_n}, n \in \mathbb{N},$$

where D_n is the $n-th$ divided difference of the function $g(z)=1/f(z)$, $D_0=g[z_0]=g(z_0)$ and

$$D_n=\frac{g[z_1,z_2,\cdots,z_n]-g[z_0,z_1,\cdots,z_{n-1}]}{z_n-z_0}, n\in\mathbb{N}$$

and z_0 and z_1 are two initial approximate roots of equation (1).

REFERENCES

1. *Berndt B.* Ramanujan's notebooks, Part-1, Springer-Verlag, USA 1985.
2. *Gevorgyan L. Z.* On Ramanujan method of solutions of equations with analytic functions, Rep. Nat. Acad. Sci. 2016. Vol. 116, No. 4, pp. 278–284.
3. *Muthumalai R. K.* Generalization of Ramanujan method of approximating root of an equation, arXiv:1112.5092v1.

А. В. Гиль, В. А. Ногин (Ростов-на-Дону)
gil@sfedu.ru

КОМПЛЕКСНЫЕ СТЕПЕНИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, СВЯЗАННОГО С ОПЕРАТОРОМ ГЕЛЬМГОЛЬЦА И ШРЕДИНГЕРА

В работе исследуются комплексные степени одного дифференциального оператора в $\mathbb{R}^n$ с комплексными коэффициентами в главной части:

$$G_{\overline{\lambda}}=m^2I+\Delta-\sum_{k=1}^{l}i\lambda_k\frac{\partial^2}{\partial x_k^2},\quad m>0, \tag{1}$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа, $\overline{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_l)$, $0<\lambda_k<1$, $1\leq l\leq n$. Комплексные степени оператора $G_{\overline{\lambda}}$ с отрицательными вещественными частями на "достаточно хороших"функциях $\varphi(x)$ определяются как мультипликаторные операторы, действие которых в образах Фурье сводится к умножению на соответствующую степень символа рассматриваемого оператора:

$$(\widehat{G_{\overline{\lambda}}^{-\alpha/2}\varphi})(\xi)=\left(m^2-|\xi|^2+i\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\xi_k^2\right)^{-\alpha/2}\widehat{\varphi}(x),\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad \operatorname{Re}\alpha>0.$$

Получены интегральные представления для комплексных степеней (1) в виде интегралов типа потенциала с нестандартной метрикой. Соответствующие дробные потенциалы имеют вид:

$$(B_{\overline{\lambda}}^{\alpha}\varphi)(x)=C_{l,\alpha}(\overline{\lambda})\int\limits_{\mathbb{R}^n}b_{\overline{\lambda}}^{\alpha}(y)\varphi(x-y)dy,$$

где $K_{\frac{n-\alpha}{2}}(mw_{\overline{\lambda}}(y))$ – функция Макдональда порядка $\frac{n-\alpha}{2}$,

$$b_{\overline{\lambda}}^{\alpha}(y)=\frac{K_{\frac{n-\alpha}{2}}(mw_{\overline{\lambda}}(y))}{(w_{\overline{\lambda}}(y))^{\frac{n-\alpha}{2}}},$$

$$w_{\overline{\lambda}}(y)) = \sqrt{-\sum_{k=1}^{l} \frac{y_k^2}{1+\lambda_k^2} - |\tilde{y}|^2 - i\sum_{k=1}^{l} \frac{\lambda_k y_k^2}{1+\lambda_k^2}}, \quad l \le n-1,$$

$\tilde{y} = (y_{l+1}, \ldots, y_n)$ и

$$w_{\overline{\lambda}}(y)) = \sqrt{-\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{1+\lambda_k^2} - i\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k y_k^2}{1+\lambda_k^2}}, \quad \text{если} \quad l = n;$$

$$C_{l,\alpha}(\overline{\lambda}) = \frac{m^{\frac{n-\alpha}{2}} 2^{1-\frac{\alpha}{2}} \exp(-\frac{n-l}{2}\pi i)}{(2\pi)^{n/2}\Gamma(\frac{\alpha}{2}) \prod\limits_{k=1}^{l} \sqrt{-1+i\lambda_k}}, \quad l \le n.$$

Получены оценки для оператора $B^{\alpha}_{\overline{\lambda}}$ из L_p в $L_p + L_s$ в случае $l < n$ и из L_p в L_p в случае $l = n$ (во втором случае показано, что $b^{\alpha}_{\overline{\lambda}}(y) \in L_1$). В рамках метода АОО построено обращение потенциалов $B^{\alpha}_{\overline{\lambda}}\varphi$, $\varphi \in L_p$, и дано описание образа $B^{\alpha}_{\overline{\lambda}}(L_p)$ в терминах оператора, левого обратного к $B^{\alpha}_{\overline{\lambda}}$.

Ю. А. Гладышев, В. В. Калманович$^{\alpha}$, М. А. Степович$^{\beta}$ (Калуга, Россия)
$^{\alpha}$v572264@yandex.ru, $^{\beta}$m.stepovich@rambler.ru

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИЛОЖЕНИЯ АППАРАТА БЕРСА К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА, ОБУСЛОВЛЕННОГО ЭЛЕКТРОНАМИ В ПЛАНАРНОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

Для количественного описания явлений тепломассопереноса, обусловленного электронным пучком в полупроводниковой мишени, может использоваться т.н. модель независимых источников, в которой сначала рассматривается процесс тепломассопереноса от каждого микрообъема полупроводника, а общий результат находится суммированием (интегрированием) полученных распределений от каждого из микрообъемов. Такой подход позволяет находить искомые распределения как в однородных, так и в планарных многослойных полупроводниках, однако для многослойных структур при стандартном подходе даже при небольшом числе слоёв для расчётов приходится использовать довольно громоздкие выражения. По этой причине в настоящее время имеются аналитические решения только для двухслойной и трёхслойной мишеней.

В настоящей работе для решения дифференциального уравнения тепломассопереноса для многослойных сред предлагается использовать матричный метод, позволяющий сравнительно несложно проводить расчёты для произвольного числа слоёв. Метод основан на применении аппарата обобщенных степеней Берса и сводится к последовательному умножению функциональных матриц, компоненты которых в каждой точке определяются физическими и геометрическими параметрами текущего слоя [1]. Некоторые возможности применения этого метода к расчетам для стационарной задачи теплопроводности рассмотрены в настоящей работе. Показано, что основным достоинством этого метода может быть возможность его применения к большому числу слоев.

Исследования проведены при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16–03–00515).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А.* Приложение методов аппарата Берса к задачам процессов переноса в многослойной среде. Вестник Калужского университета. 2015. № 3, стр. 5–10.

А. А. Григорьян (Билефельд, Германия)
grigor@math.uni-bielefeld.de
А. Г. Лосев (Волгоград, Россия)
alexander.losev@volsu.ru

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Данная работа посвящена изучению ограниченных решений стационарного уравнения Шредингера

$$Lu = \Delta u - q(x)u = 0 \tag{1}$$

на произвольном некомпактном римановом многообразии M. Здесь $q(x)$ – непрерывная неотрицательная на M функция. Далее решения уравнения (1) будем называть q-гармоническими функциями.

Ранее, в работе [1] была доказана точная оценка размерностей пространств ограниченных гармонических функций на некомпактных римановых многообразиях в терминах массивных множеств. Целью данного исследования является доказательство аналогичного результата для ограниченных решений уравнения (1).

Пусть M – гладкое связное некомпактное риманово многообразие. Открытое собственное подмножество $\Omega \subset M$ будем называть q-массивным, если на M существует нетривиальная q-субгармоническая функция такая, что $u = 0$ на $M \setminus \Omega$ и $0 \le u \le 1$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $q(x)$ – нетривиальная, неотрицательная на M функция, а $m \ge 1$ – натуральное число. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. размерность пространства ограниченных q-гармонических функций на M не менее m;
2. в M найдется m попарно не пересекающихся q-массивных подмножеств.

Замечание. *В случае $q(x) \equiv 0$, данное утверждение верно только для $m \geq 2$.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области (проект 15-41-02479 р_поволжье_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорьян А. А.* О размерности пространств гармонических функций. Мат. заметки. 1990. Том. 48, №. 5, стр. 55–60.

Д. Б. Диденко (Воронеж, Россия)
dmixtry@gmail.com

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРНЫХ ПОЛИНОМОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство с нормой $||\cdot||$, $\operatorname{End}\mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — линейный оператор с непустым резольвентным множеством $\rho(A)$ и B_1 и B_2 — операторы из алгебры $\operatorname{End}\mathcal{X}$.

Определение 1. Пусть $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \subset \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ — замкнутый оператор. Рассмотрим следующие условия: 1) $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \{0\}$, т.е. оператор $\mathcal{B}$ инъективен; 2) $1 \leq n = \dim\operatorname{Ker}\mathcal{B} < \infty$; 3) $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$ — бесконечномерное подпространство из $\mathcal{Y}$; 4) $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$ — дополняемое подпространство в $\mathcal{Y}$; 5) $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{B}} = \operatorname{Im}\mathcal{B}$; 6) $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{B}} \neq \operatorname{Im}\mathcal{B}$; 7) $\operatorname{Im}\mathcal{B}$ — замкнутое дополняемое подпространство из $\mathcal{Z}$ конечной коразмерности ($\operatorname{codim}\operatorname{Im}\mathcal{B} = m < \infty$); 8) $\operatorname{Im}\mathcal{B}$ — замкнутое дополняемое подпространство из $\mathcal{Z}$ бесконечной коразмерности; 9) $\operatorname{Im}\mathcal{B} = \mathcal{Z}$, т.е. $\mathcal{B}$ — сюръективный оператор; 10) $\overline{\operatorname{Im}\mathcal{B}} \neq \mathcal{Z}$; 11) оператор $\mathcal{B}$ непрерывно обратим, т.е. $\mathcal{B}^{-1} \in \operatorname{Hom}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})$.

Если для оператора $\mathcal{B}$ выполнены все условия из совокупности непротиворечивых условий $S \subset \{1, 2, \ldots, 11\}$, то будем говорить, что оператор $\mathcal{B}$ находится в состоянии обратимости S. Множество состояний обратимости оператора $\mathcal{B}$ обозначим символом $\operatorname{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{B})$.

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A} = A^2 + B_1 A + B_2 : D(A^2) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ с областью определения $D(\mathcal{A}) = D(A^2)$.

Наряду с оператором $\mathcal{A}$ определим оператор $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, заданный с помощью матрицы $\begin{pmatrix} A & -I \\ B_2 & A + B_1 \end{pmatrix}$.

Теорема 1. *Множества состояний обратимости операторов $\mathcal{A} : D(A^2) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ и $\mathbb{A} : D(A) \times D(A) \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ совпадают, т.е.*

$$\operatorname{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{A}) = \operatorname{St}_{\mathrm{inv}}(\mathbb{A}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков А. Г., Кабанцова Л. Ю, Коструб И. Д., Смагина Т. И.* Линейные дифференциальные операторы и операторные матрицы второго порядка. Дифференц. уравнения. 2017. Том. 59, №. 1, стр. 1–10.

2. *Баскаков А. Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе лиеных дифференциальных операторов. Функц. анализ и его прил. 1996. Том. 30, Вып. 3, стр. 1–11.

Т. Ф. Долгих (Ростов-на-Дону, Россия)
dolgikh@sfedu.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЗОНАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОФОРЕЗА

Рассматривается задача о зональном электрофорезе — методе разделения смеси на отдельные компоненты. В работе представлена модель бездиффузионного процесса переноса вещества в двухкомпонентной смеси. Известно, что в случаях, когда проводимость смеси уменьшается при увеличении концентраций компонентов, тип уравнений, описывающих зональный электрофорез, изменяется с гиперболического на эллиптический [1, 2].

Эллиптические уравнения зонального электрофореза в инвариантах Римана с заданными начальными условиями и имеют вид

$$\boldsymbol{K}|\boldsymbol{K}|^2\boldsymbol{K}_t + \boldsymbol{K}_x = 0, \qquad \boldsymbol{K}\Big|_{t=t_0} = \boldsymbol{K}_0(\tau). \tag{1}$$

Для исследования сплошных сред, которые описываются эллиптическими уравнениями, используются, как правило, периодические данные $\boldsymbol{K}_0(\tau)$, определенные в начальный момент времени [2, 3]. С помощью таких начальных данных в представленной работе удалось проследить образование пространственно-временных структур, возникающих при эволюции неявного решения $p(x,t)$ и $q(x,t)$: наблюдается переход от пространственно-периодического возмущения к солитоноподобным профилям для $q(x,t)$ и кинкоподобным профилям для $p(x,t)$. Таким образом, можно выдвинуть гипотезу, что в эллиптическом случае задача (1) описывает некоторую квазигазовую неустойчивую среду типа газа Чаплыгина.

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ № 1.5169.2017/БЧ по теме «Фундаментальные и прикладные задачи математического моделирования».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуков М. Ю.* Массоперенос электрическим полем. Ростов н/Д: Изд. РГУ, 2005.

2. *Жуков М. Ю.*, *Ширяева Е. В.*, *Долгих Т. Ф.* Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений. Ростов н/Д: Изд. ЮФУ, 2015. 3. *Долгих Т. Ф.* Уравнения эллиптического типа для зонального электрофореза // Труды XVIII Межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», 7.11-10.11.2016. Ростов н/Д: Изд. ЮФУ, 2016. Т. 1. С. 179–183.

Дударев В. В., Мнухин Р. М. (Ростов-на-Дону, Россия)
dudarev_vv@mail.ru

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УРОВНЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПРЕДНАПРЯЖЕНИЙ В ЭЛЕКТРОУПРУГОМ СТЕРЖНЕ И ДИСКЕ

На основе общей постановки задачи о движении электроупругого тела при наличии неоднородного предварительного напряженно-деформированного состояния (ПНДС) сформулированы задачи об установившихся колебаниях стержня и диска [1]. Продольные колебания консольно-закрепленного стержня вызываются периодической нагрузкой, приложенной на свободном конце. Считается, что рассматриваемое ПНДС в стержне является одноосным. Решение прямой задачи об определении функции смещения получено численно с помощью метода пристрелки. Проведен графический анализ изменения амплитудно-частотной характеристики стержня в зависимости от уровня ПНДС. Сформулировано несколько обратных задач об определении ПНДС в зависимости от дополнительной информации.

Рассмотрение задачи об установившихся радиальных колебаниях пьезоэлектрического диска малой толщины проведено в рамках обобщенного плоского напряженного состояния. Колебания вызываются периодической нагрузкой приложенной на внешней границе диска. Учитывая неоднородность ПНДС решение прямой задачи об определении радиальной функции смещения также сведено к решению системы дифференциальных уравнений первого порядка с помощью метода пристрелки. В качестве конкретного примера рассмотрено ПНДС, соответствующее задачи Ляме. Проведен анализ влияния уровня ПНДС на значения первых резонансных частот. Выявлено, что изменение первой частоты наиболее существенно. Сформулирована и решена обратная задача об определении уровня ПНДС по значению резонансной частоты. Представлены результаты численных экспериментов.

Работы выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МК-3179.2017.1), РФФИ (проект 16-01-00354 А), Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН № 1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования» (114072870112) «Математическое моделирование неоднородных и многофазных структур».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kuang Z. B.* Theory of Electroelasticity. Springer. 2014.

K. S. Yeletskikh (Yelets, Russia)
kostan.yeletsky@gmail.com

ON THE MIXED FOURIER-BESSEL TRANSFORMATION OF A RADIAL BESSEL J-FUNCTION OF INTEGER AND HALF-INTEGRAL INDEX

We consider the mixed Fourier-Bessel transformation in the Euclidean space $\mathbb{R}_N^+ = \{x = (x', x''),\ x_1 > 0, \ldots, x_n > 0,\ 1 \leq n \leq N\}$ [1]. The Bessel j-function by j_ν, $j_\nu = J_\nu(t)/t^\nu$. The Bessel transformation (with respect to the Bessel j-functions) acts on n variables, the Fourier transformation acts on the remaining variables. By applying the formula for the weighted spherical mean of the kernel of this transformation

$\Lambda(x\xi) = \prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x\xi)\, e^{-i(x'',\xi'')}$

the Fourier-Bessel transformation of the function $j_\nu(a\,|x|)$ has been obtained for the cases when $\nu > \frac{N+|\gamma|-1}{2}$ (and $N = n = 1$). We give this formula

$$F_B[j_\nu(a\,|x|)](\xi) = \begin{cases} \frac{(a^2-|\xi|^2)^{\nu-\frac{N+|\gamma|}{2}}}{a^{2\nu}\ A(\nu,N,n,\gamma)} & ,\ \xi \in \{|\xi| < a\}^+ , \\ 0 & ,\ \xi \notin \{|\xi| < a\}^+ , \end{cases}$$

For $-\frac{1}{2} < \nu \leq \frac{N+|\gamma|-1}{2}$, the Fourier-Bessel transformation of $j_\nu(a\,|x|)$ can be calculated within the weight distributions S'_{ev}. Following [1], we introduce the Kipriyanov distributions that are concentrated on the surface of the n-half-sphere in $\mathbb{R}_N^+$ acting on the basic functions $\varphi \in S_{ev}$ by the following formulas

a) for an even $N + |\gamma|$

$$\left(I_a^k, \varphi\right)_\gamma = \frac{1}{a^{2k}} \left(\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k-1} \left[a^{N+|\gamma|-2} \int\limits_{S_1^+(N)} \varphi(a\xi)\,(\xi')^\gamma\, dS(\xi)\right],$$

b) for an odd $N + |\gamma|$

$$\left(I_a^{k-\frac{1}{2}}, \varphi\right)_\gamma = \frac{1}{a^{2k-1}} \left(\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}-k} \left[a^{N+|\gamma|-2} \int\limits_{S_1^+(N)} \varphi(a\xi)(\xi')^\gamma dS(\xi)\right].$$

The Fourier-Bessel transformation of the function $j_\nu(a\,|x|)$ in the sense of the space S'_{ev}, for the integer $|\gamma|$, the integer index $\nu = k$ and the half-integer $\nu = k - \frac{1}{2}$:

a) for an even $N + |\gamma|$ $\quad F_B[j_k(a|x|)](\xi) = A'_\nu \cdot I_a^k$,

b) for an odd $N + |\gamma|$ $\quad F_B[j_{k-\frac{1}{2}}(a|x|)](\xi) = A''_\nu \cdot I_a^{k-\frac{1}{2}}$.

REFERENCES

1. *Киприянов И. А.* Преобразование Фурье-Бесселя и теоремы вложения для весовых классов. // Тр. МИАН. 1967. Т. LXXXIX. С. 130-213.

М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева (Ростов-на-Дону, Россия)
myuzhukov@gmail.com, evshiryaeva@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГОДОГРАФА К СИСТЕМАМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для систем квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка, допускающих запись в инвариантах Римана и являющихся полугамильтоновыми, на основе обобщенного метода годографа разработан метод восстановления явного решения из его неявной формы задачи с начальными, в частности, периодическими, возможно разрывными, данными.

Метод основан на преобразовании неявной формы решения, полученного на основе обобщенного метода годографа, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрен ряд задач математической физики, допускающих применение указанного метода, в частности, задачи о переносе массы внешним полем, задачи о солитонном газе, задачи для опрокинутой мелкой воды. В случае двух уравнений инварианты Римана всегда существуют (возможно комплексные), система является полугамильтоновой и обобщенный метод годографа тесно связан с методом годографа на основе законов сохранения [1–4]. При наличии явного выражения для функции Римана–Грина удается построить явное решение задачи с начальными данными. Этот способ позволяет конструировать многие решения для задачи о неустойчивых сплошных средах, описанных в [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части государственного задания № 1.5169.2017/БЧ Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Senashov S. I., Yakhno A.* Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity. SIGMA. 2012. Vol. 8, № 071.

2. *Senashov S. I., Yakhno A.* Application of conservation laws to Dirichlet problem for elliptic quasilinear systems. Int. J. of Non-Linear Mech. 2016. 85.

3. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Долгих Т. Ф.* Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений. М.: Изд-во ЮФУ. 2015.

4. *Елаева М. С., Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.* Взаимодействие слабых разрывов и метод годографа для задачи о фракционировании двухкомпонентной смеси электрическим полем. ЖВМ и МФ. 2016. Т. 56, № 8.

5. *Жданов С. К. Трубников Б. А.* Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука. 1991.

В. В. Казак (ЮФУ, Россия), Н. Н. Солохин (ДГТУ, Россия)
vkazak136@gmail.com, nik2007.72@mail.ru

КВАЗИКОРРЕКТНОСТЬ УСЛОВИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Рассмотрим вдоль края ∂S поверхности S векторное поле $\bar{\ell}$, определяемое соотношением $\bar{\ell} = \bar{\ell}_0 \cos\alpha - \bar{n}\sin\alpha$, где $\bar{\ell}_0 \in S$, $|\bar{\ell}_0| = 1$, $\alpha = \angle(\bar{\ell}_0, \bar{\ell})$, $\alpha \in (0, \pi)$.

Изучим для поверхности S характер внешней связи

$$a(\overline{U},\bar{\ell})+b(\overline{V},\bar{n})=c, \tag{1}$$

Краевая задача

$$\begin{cases} d\overline{U}d\overline{r}=0, \\ a(\overline{U},\bar{\ell})+b(\overline{V},\bar{n})=c, \end{cases} \tag{2}$$

эквивалентна краевой задаче теории обобщённых аналитических функций

$$\begin{cases} w_{\bar{z}}=0, & z\in D, \\ \operatorname{Re}\{A(t)w_t+\varepsilon B(t)w\}=c, & t\in\partial D, \end{cases} \tag{3}$$

К этой задаче применимы результаты работы И.И.Данилюка.

Для односвязной области краевая задача (3) эквивалентна интегральному уравнению $F+T_\varepsilon F=P$, где F - комплексный вектор с компонентами w, w_z, $\overline{w}$, оператор T_ε может иметь лишь дискретный спектр.

При этих условиях справедливо утверждение:

Пусть S - поверхность второго порядка с краем $\partial S\in C^{1,\mu}$, $0<\mu<1$ в евклидовом пространстве E^3. Тогда условие (1) квазикорректно с $p=2n+3$ степенями свободы для всех значений ε, $\varepsilon\in(-\infty;\infty)$, исключая, быть может дискретный ряд значений ε_k, $k=1,2,\dots$ $(0<|\varepsilon_1|<|\varepsilon_2|<\dots)$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Данилюк И. И.* О задаче с наклонной производной // СМЖ. Том 3. №1 — 1962. — С. 17–55.

2. *Казак В. В., Солохин Н. Н.* О квазикорректности смешанного краевого условия для одного класса поверхностей. // Современные проблемы математики и механики, том VI, выпуск 2. Издательство Московского уни-верситета, 2011. – С. 212 – 216.

А. С. Калитвин (Липецк)
kalitvinas@mail.ru

О НЕЛИНЕЙНОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ БАРБАШИНА С ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Интегро-дифференциальным уравнением Барбашина (ИДУБ) мы будем называть интегро-дифференциальное уравнение, в котором неизвестная функция содержится под знаком частной производной и под знаком интеграла, причем частная производная этой функции вычисляется по одной переменной, а ее интегрирование производится по другой переменной.

Основы теории линейных ИДУБ с частной производной первого порядка и некоторые их приложения изложены в [1].

В данной заметке рассматривается нелинейное ИДУБ

$$\frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial t^2} = c(t,s)x(t,s) + \int_c^d n(t,s,\sigma,x(t,\sigma))d\sigma + f(t,s) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(a,s) = \varphi(s), x'_t(a,s) = \psi(s), \tag{2}$$

где $t \in J$, $J = [a,b]$ или $J = [a,+\infty)$, $s \in [c,d]$, $[a,b]$ и $[c,d]$ — конечные отрезки, заданные функции c, n, f, φ, ψ непрерывны, функция n удовлетворяет условию Липшица $|n(t,s,\sigma,u) - n(t,s,\sigma,v)| \leq n_0(t,s,\sigma)|u-v|$ с некоторой непрерывной функцией n_0, а решением задачи (1)-(2) считается непрерывная на $J \times [c,d]$ вместе с $x''_{tt}(t,s)$ функция $x(t,s)$, удовлетворяющая ИДУБ (1) и начальным условиям (2). Задача (1)-(2) эквивалентна нелинейному интегральному уравнению с частными интегралами, которое мы обозначим через $\mathbf{A}$.

При $J = [a,b]$ это уравнение имеет единственное решение.

Если $J = [a,+\infty)$, $D = J \times [c,d]$, X — банахово пространство равномерно непрерывных и ограниченных на D функций с супремум нормой и $\|(t-\tau)c(\tau,s)\|_{L^1(J)} \leq \varepsilon$, $\|(t-\tau)n_0(\tau,s,\sigma)\|_{L^1(D)} \leq \varepsilon$ при $t > r$, где $r \geq a$ — некоторое число и $0 < \varepsilon < 1$, то уравнение $\mathbf{A}$ однозначно разрешимо в X.

В силу эквивалентности задачи (1)-(2) интегральному уравнению $\mathbf{A}$ задача (1)-(2), при сделанных предположениях имеет единственное решение при $J = [a,b]$ или $J = [a,+\infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. — New York-Basel: Marcel Dekker. 2000.

В. А. Калитвин(Липецк)
kalitvin@mail.ru

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БАРБАШИНА С ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В работе рассматривается численное решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения Барбашина (ИДУБ)

$$\frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial t^2} = c(t,s)x(t,s) + \int_c^d n(t,s,\sigma,x(t,\sigma))d\sigma + f(t,s) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(a,s) = \varphi(s), x'_t(a,s) = \psi(s), \tag{2}$$

где $t \in J = [a,b]$, $s \in [c,d]$, $[a,b]$ и $[c,d]$ — конечные отрезки, заданные функции c, n, f, φ, ψ непрерывны, функция n удовлетворяет условию Липшица $|n(t,s,\sigma,u) - n(t,s,\sigma,v)| \leq n_0|u-v|$ с некоторой константой n_0, а решением задачи (1)-(2) считается непрерывная на $J \times [c,d]$ вместе с $x''_{tt}(t,s)$ функция $x(t,s)$, удовлетворяющая ИДУБ (1) и начальным условиям (2).

Задача (1)-(2) эквивалентна нелинейному интегральному уравнению с частными интегралами, которое имеет единственное непрерывное вместе с $x''_{tt}(t,s)$ решение.

Для численного решения линейных и нелинейных интегральных уравнений часто применяется метод механических квадратур (ММК), обоснование которого обычно связано с полной непрерывностью интегральных операторов. Операторы с частными интегралами свойством полной непрерывности не обладают. Поэтому применение ММК для численного решения нелинейных интегральных уравнений с частными интегралами требует обоснования. Обоснования применения ММК для решения полученного нелинейного уравнения с частными интегралами можно избежать, преобразовав это уравнение к эквивалентному нелинейному двумерному интегральному уравнению с непрерывным ядром, удовлетворяющим условию Липшица, так как для уравнений такого типа обоснование ММК дано Г.М. Вайникко в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вайникко Г. М.* Возмущенный метод Галёркина и общая теория приближенных методов для нелинейных уравнений. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1967. Том. 7, №. 4, стр. 723–751.

G. A. Karapetyan (Yerevan, Armenia)
Garnik_Karapetyan@yahoo.com

INTEGRAL REPRESENTATION OF FUNCTIONS AND EMBEDDING THEOREMS FOR GENERAL MULTIANISOTROPIC SPACES

Introduction. This paper is a continuation of [1]-[2], in which we proved embedding theorems for multianisotropic spaces on a plane. In current paper an integral representation of functions and embedding theorems were proven for the n-dimensional multianisotropic spaces with one points of anistropicity. The paper generalizes the known embedding theorems for isotropic and anisotropic spaces. For the history of the problem see [3].

For any parameter $\nu > 0$ and a natural number k denote

$$P(\nu,\xi) = \left(\nu\xi^{\alpha^1}\right)^{2k} + \cdots + \left(\nu\xi^{\alpha^n}\right)^{2k} + \left(\nu\xi^{\alpha^{n+1}}\right)^{2k}.$$

$$G_0(\nu;\xi) = e^{-P(\nu,\xi)}.$$

$$G_{1,j}(\nu,\xi) = 2k\left(\nu\xi^{\alpha^j}\right)^{2k-1} e^{-P(\nu,\xi)}, (j = 1,\dots,n+1).$$

For any function f consider the regularization with the kernel $\hat{G}_0(t,\nu)$:

$$f_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{R^n} f(t)\hat{G}_0(t-x,\nu)dt.$$

The following integral representation holds:

Theorem 1. *Let the function f have the Sobolev weak derivatives $D^{\alpha^i}f$, $(i = 1,\dots,n+1)$, where α^i are the vertices of the completely regular polyhedron $\mathfrak{N}$ and $D^{\alpha^i}f \in L_p(R^n)$, $1 \le p < \infty$, $(i = 1,\dots,n+1)$. Then for almost all $x \in R^n$ it has the representation*

$$f(x) = f_h(x) + \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\varepsilon}^{h} d\nu \int\limits_{R^n} D^{\alpha^i}f(t)\hat{G}_{1,i}(t-x,\nu)dt.$$

Let $\mathfrak{N}$ be a completely regular polyhedron, then

$$W_p^{\mathfrak{N}}(R^n) = \{f : f \in L_p(R^n), D^{\alpha^i}f \in L_p(R^n), i = 1,\dots,n+1\}$$

is called a multianisotropic Sobolev space.

Let us prove the embedding theorems for $W_p^{\mathfrak{N}}$.

Theorem 2. *Let $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-j} \le \alpha_{n-j+1} \le \dots \le \alpha_n$, $1 \le p \le \infty$ or $1 \le p < \infty$ and $q = \infty$, $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ be a multi-index. Denote*

$$\chi = \max_{i=1,\dots,n}\left(\left|\mu^i\right| + \left(m,\mu^i\right)\right) - \min_{i=1,\dots,k}\left|\mu^i\right|\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right).$$

If $\chi < 1$, then $D^m W_p^{\mathfrak{N}}(R^n) \hookrightarrow L_q(R^n)$ and the following inequality holds

$$\|D^m f\|_{L_q R^n} \le h^{1-\chi}\left(a_{k+l}|\ln h|^{k+l} + \dots + a_0\right)\sum_{i=1}^{n+1}\left\|D^{\alpha^i}f\right\|_{L_p(R^n)} +$$

$$+h^{-\chi}\left(b_{k+l}|\ln h\ |^{k+l} + \dots + b_0\right)\|f\|_{L_p(R^n)},$$

where k, $(k \le j)$ is the number of multi-index α and l is the number of inequalities between the coordinates of the vector $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.

REFERENCES

1. *Karapetyan G. A.* Integral representation of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces on a plane with one vertex of anisotropicity. // Proceedings of NAS RA - Mathematics, 2016 (in press).

2. *Karapetyan G. A.* Integral representation of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces on a plane. // Proceedings of NAS RA - Mathematics, 2016 (in press).

3. *Besov O. V., Il'in V. P., Nikloskii S. M.* Integral representations of functions and embedding theorems. // Nauka, Moscow, 1975 (in Russian), p. 480.

D. B. Katz (Kazan, Russia)
Katzdavid89@gmail.com

PERIODIC AND DOUBLY PERIODIC RIEMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NON-RECTIFIABLE CURVES

The doubly periodic Riemann boundary value problem is stated as follows. Given Hölder continuous functions $G(t) \neq 0$ and $g(t)$ on Γ. To find a function $\Phi(z)$ analytic in D^+ and in D^-, satisfying the periodicity conditions

$$\Phi(z + \tau_j) = \Phi(z), \quad j = 1, 2,$$

and the conjugation condition

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \mathbf{\Gamma}.$$

Here $G(t)$ and $g(t)$ are extended onto $\mathbf{\Gamma}$ by periodicity, and $\Phi^+(t)$ and $\Phi^-(t)$ are the limit values of $\Phi(z)$ for z tending to $t \in \mathbf{\Gamma}$ from D^+ and D^- correspondingly.

This problem is one of versions of the Riemann boundary value problem (see [1]). Its detailed solution for piecewise smooth curves Γ was obtained by L.I. Chibrikova (see [2]). In all studies of this class of boundary value problems assumption of piecewise smoothness of the curves is essential, because their solutions base on certain properties of curvilinear integrals over Γ. That integrals are defined in customary sense for rectifiable Γ only, and properties of corresponding integral operators are connected with smoothness of contours of integration.

The Riemann boundary value problem (for non-periodic case) on non-rectifiable curves was solved in earlier 1980th (see [3]). Recently these results were improved by means of new metric characteristics of non-rectifiable curves, so called Marcinkiewicz exponents (see [8], [9], [10]). In the present report we apply these characteristics (and also one interesting generalisation of curvilinear integrating on non-rectifiable curve case) for solution of this problem which leads to a new results.

REFERENCES

1. *Gakhov F. D.* Boundary value problems. Nauka. 1977.
2. *Chibrikova L. I.* The main boundary value problems for analytic functions. Kazan University. 1977.
3. *Kats B. A.* Riemann boundary value problem on non-rectifiable Jordan curve. Doklady AN USSR. 1982. Vol. 267, No. 4, pp. 789–792.
4. *Katz D. B.* The Marcinkiewicz exponents with applications on boundary value problems. Izvestia vuzov. Matematika. 2014. No. 3, pp. 68–71.

Н. Д. Копачевский (Симферополь, Россия)
kopachevsky@list.ru

О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ ДВУХ ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ, ЗАПОЛНЯЮЩИХ НЕПОДВИЖНЫЙ СОСУД [1]

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №14-21-00066 и проект №16-11-10125), выполняемого в Воронежском госуниверситете.

1. Будем считать, что произвольный сосуд с липшицевой границей заполняют в состоянии покоя две вязкоупругие жидкости модели Олдройта и занимают соответственно области Ω_1 и Ω_2. Границами этих областей являются твёрдые стенки S_1 и S_2 сосуда, а также горизонтальная разграничивающая поверхность Γ.

Рассмотрим малые движения жидкостей, близкие к состоянию покоя. Тогда возникает следующая начально-краевая задача:

$$\rho_k\frac{\partial\vec{u}_k}{\partial t}=-\nabla p_k+\mu_k\triangle(I_{0,k}(t)\vec{u}_k)+\rho_k\vec{f}(t,x),\ \ \mathrm{div}\vec{u}_k=0,\ x\in\Omega_k,\ k=1,2,$$
$$\vec{u}_k=\vec{0}\ \text{ (на } S_k),\quad \vec{u}_1=\vec{u}_2\ \text{ (на } \Gamma),\quad \vec{u}_1\cdot\vec{e}_3=\vec{u}_2\cdot\vec{e}_3=\frac{\partial\zeta}{\partial t}\ \text{ (на } \Gamma),$$
$$\mu_1\tau_{j3}(I_{0,1}(t)\vec{u}_1)=\mu_2\tau_{j3}(I_{0,2}(t)\vec{u}_2),\quad j=1,2\ \text{ (на } \Gamma), \tag{1}$$
$$[-p_1+\mu_1\tau_{33}(I_{0,1}(t)\vec{u}_1)]-[-p_2+\mu_2\tau_{33}(I_{0,2}(t)\vec{u}_2)]=-g(\rho_1-\rho_2)\zeta\ \text{ (на } \Gamma),$$
$$I_{0,k}(t)\vec{u}_k:=\vec{u}_k(t,x)+\alpha_k\int\limits_0^t e^{-\beta_k(t-s)}u_k(s,x)\mathrm{d}s,\quad \tau_{jk}(\vec{u})=\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_j},$$
$$\vec{u}_k(0,x)=\vec{u}_k^0(x),\ x\in\Omega_k,\ \ \vec{u}_1^0(x)=\vec{u}_2^0(x),\ x\in\Gamma,\ \ \zeta(0,x)=\zeta^0(x),\ x\in\Gamma.$$

Здесь ρ_k и μ_k — плотности и динамические вязкости жидкостей соответственно, $\vec{u}_k(t,x)$ и $p_k(t,x)$ — искомые поля скоростей и давлений, $\zeta(t,x)$ — вертикальное отклонение границы раздела, α_k и β_k — характеристики вязкоупругости жидкостей, g — ускорение силы тяжести, $\vec{f}(t,x)$ — малые внешние силы, наложенные на гравитационное поле.

2. В работе выводится закон баланса полной энергии в задаче (1), а затем выбираются необходимые функциональные пространства, в которых естественно исследовать эту проблему. Далее вводится определение обобщённого решения задачи, а также операторы вспомогательных краевых задач. Это позволяет привести проблему (1) к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в некотором гильбертовом пространстве относительно функции, выражающейся через искомые поля $\vec{u}_k(t,x)$ и функцию $\zeta(t,x)$ отклонения границы раздела. Основной операторной матрицей в этой задаче Коши является генератор сжимающей полугруппы. Это позволяет доказать теорему о сильной разрешимости полученной задачи Коши, а на её основе — теорему о сильной разрешимости исходной задачи (1).

3. Нормальными движениями гидросистемы называют решения однородной задачи (1), зависящие от времени по закону $e^{-\lambda t}$. Исключение всех переменных, кроме пары полей скоростей, приводит для амплитудных функций к спектральной проблеме для некоторого нового операторного пучка (оператор-функции) от переменной λ — комплексного декремента затухания. Частными случаями этого

пучка являются: а) известный и хорошо изученный операторный пучок С.Г. Крейна; б) пучок, возникающий в проблеме нормальных колебаний одной вязкоупругой жидкости в частично заполненном сосуде; в) пучок, возникающий в проблеме нормальных колебаний вязкоупругой жидкости в полностью заполненном сосуде (см. [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kopachevsky Nikolay D., Krein Selim G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids // Operator Theory: Advances and Applications (Birkhauser Verlag, Basel/Switzerland). – 2003. – Vol.146. – 444 p.

Н. Д. Копачевский, А. Р. Якубова (Симферополь, РФ)
nikolay-d-kopachevsky.com, alika.yakubova.1993@mail.ru

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ И НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ПОЛУТОРАЛИНЕЙНОЙ ФОРМОЙ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

1. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим ограниченную на $H^1(\Omega)$ и равномерно аккретивную полуторалинейную форму

$$\Phi_\varepsilon(\eta,u) := (\eta,u)_{H^1(\Omega)} + 2\varepsilon\sum_{k=1}^{m} c_k\left[\left(\eta,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)_{L_2(\Omega)} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k},u\right)_{L_2(\Omega)}\right], \qquad (1)$$

$\eta,u\in H^1(\Omega),\ c_k\in\mathbb{R},\ k=\overline{1,m},\ \varepsilon\in\mathbb{R}$, соответствующую обобщенную формулу Грина для оператора Лапласа:

$$\Phi_\varepsilon(\eta,u) = \langle\eta,L_\varepsilon u\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle\gamma\eta,\partial_\varepsilon u\rangle_{L_2(\Gamma)},\quad \Gamma:=\partial\Omega, \qquad (2)$$

$$L_\varepsilon u := u-\Delta u+\varepsilon\varphi\gamma u,\quad \varphi:=\sum_{k=1}^{m} c_k\cos(\widehat{\vec{n},\vec{e}_k}),\quad \gamma u:=u\,|_\Gamma,$$

$$\partial_\varepsilon u := \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma - \varepsilon\varphi\gamma u,\quad L_\varepsilon(u)\in(H^1(\Omega))^*,\ \partial_\varepsilon u\in H^{-1/2}(\Gamma),$$

а также оператор A_ε полуторалинейной формы:

$$\Phi_\varepsilon(\eta,u) = \langle\eta,A_\varepsilon u\rangle_{L_2(\Omega)},\quad \forall\,\eta,u\in H^1(\Omega),$$

$$A_\varepsilon\in\mathcal{L}(H^1(\Omega);(H^1(\Omega))^*),\quad \exists\,A_\varepsilon^{-1}\in\mathcal{L}((H^1(\Omega))^*;H^1(\Omega)).$$

2. Для формы (1) и формулы Грина (2) рассмотрены краевые задачи Дирихле и Неймана-Ньютона, а на их основе - спектральные проблемы Дирихле, Неймана-Ньютона, Стеклова, Стефана, С. Крейна (колебания вязкой жидкости в частично заполненном контейнере), М. Аграновича (теория дифракции), Чуешова (поверхностная диссипация энергии). В несимметрическом случае ($\varepsilon\neq0$) исследован

спектр этих проблем, вопросы полноты и базисности системы собственных и присоединенных (корневых) функций.

3. Изучены начально-краевые задачи, порождающие вышеупомянутые проблемы, выявлены условия существования их сильных решений на произвольном отрезке времени, установлены гильбертовы пространства, в которых для искомых решений выполнены уравнения и граничные условия.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете). Материалы доклада опубликованы в главе 6 монографии [3], а также в рукописи [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копачевский Н. Д., Якубова А. Р.* О краевых, спектральных и начально-краевых задачах, порожденных полуторалинейными формами. XXIV Международная конференция Математика. Экономика. Образование. IX Международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения. 2016, стр. 57–63.

2. *Копачевский Н. Д., Якубова А. Р.* О некоторых спектральных и начально-краевых задачах, порожденных полуторалинейными формами.XXVII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2016). 2016, стр. 20.

3. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. Симфферополь: ООО ФОРМА, 2016. – 280 с.

4. *Якубова А. Р.* Эволюционные и спектральные задачи, порожденные полуторалинейными формами. Выпускная магистерская работа (рукопись, 70 стр.).

А. А. Корнута (Симферополь, Россия)
korn_57@mail.ru

СТАЦИОНАРНЫЕ СТРУКТУРЫ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПОВОРОТА НА ОКРУЖНОСТИ

На окружности $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ рассматривается параболическое функционально - дифференциальное уравнение с преобразованием пространственной переменной:

$$\begin{gathered}\partial_t u + u = \mu\partial_{xx}u + L\,(\mathrm{Q}_\pi u) + \Lambda\,(\mathrm{Q}_\pi u)^2 + (\mathrm{Q}_\pi u)^3\,,\\ u\,(x+2\pi,t) = u\,(x,t)\,,\quad u(x,0)=u_0(x),\quad 0<x<2\pi,\end{gathered}\tag{1}$$

где $u = u(x,t)$, $\mathrm{Q}_\pi u = \mathrm{Q}_\pi u(x,t) = u(x+\pi,t)$; $\quad L,\ \Lambda = -\sqrt{\frac{3|L|}{\operatorname{ctg}\omega}}$, $\mu>0$ - параметры [1, 2].

Уравнение (1) в соболевском пространстве $H^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ $2\pi-$ периодичных функций при каждом значении параметра μ порождает динамическую систему.

Используя метод центральных многообразий, доказана теорема о существовании пространственно неоднородных решений $\varphi_1(x,\mu)$, бифурцирующих из пространственно однородного асимптотически устойчивого нулевого решения при уменьшении параметра μ и прохождении бифуркационных значений $\mu_k^*, k=1,2,...$ Теорема носит локальный характер по параметру μ.

Для исследования динамики стационарных структур $\varphi_1(x,\mu)$ при отходе параметра μ от бифуркационного значения μ_k^* строится иерархия упрощённых моделей задачи (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахманов. С.А., Воронцов. М.А., Иванов. В.Ю.* Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // Новые принципы оптической обработки информации. Наука. 1990.
2. *Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. ФИЗМАТЛИТ. 2005.

Vladislav V. Kravchenko (Queretaro, Mexico)
vkravchenko@math.cinvestav.edu.mx

TRANSMUTATIONS AND NEUMANN SERIES OF BESSEL FUNCTIONS IN SOLUTION OF STURM-LIOUVILLE EQUATIONS

Let $q \in C[-b,b]$ be a complex valued function. Consider the Sturm-Liouville equation

$$Ay := y'' - q(x)y = -\omega^2 y. \tag{1}$$

It is well known (see, e.g., [4]) that there exists a Volterra integral operator T called the transmutation (or transformation) operator defined on $C[-b,b]$ by the formula

$$Tu(x) = u(x) + \int_{-x}^{x} K(x,t)u(t)dt$$

such that for any $u \in C^2[-b,b]$ the following equality is valid

$$ATu = Tu''$$

and hence any solution of (1) can be written as $y = T[u]$ where $u(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$ with c_1 and c_2 being arbitrary constants.

In the talk several new results concerning the properties and construction of the kernel K are discussed. In particular, different exact representations for K in the form of functional series are presented admitting efficient numerical implementation.

As corollaries of these results, new representations of solutions to equation (1) are obtained possessing the following feature important for practical applications. Partial sums of the series approximate the solution uniformly with respect to ω which makes it especially convenient for the approximate solution of spectral problems. Numerical methods based on the proposed approach allow one to compute large sets of eigendata with a nondeteriorating accuracy. The talk is based on [1-3].

Additionally other applications of the main result are discussed such as construction of complete systems of solutions of partial differential equations including the extension of the method of fundamental solutions onto the PDEs with variable coefficients.

REFERENCES

1. *Kravchenko V. V., Navarro L. J. and Torba S. M.* Representation of solutions to the one-dimensional Schrödinger equation in terms of Neumann series of Bessel functions. Submitted for publication, available at arXiv:1508.02738.

2. *Kravchenko V. V., Torba S. M., Castillo-Perez R.* A Neumann series of Bessel functions representation for solutions of perturbed Bessel equations. Applicable Analysis, 2017, http://dx.doi.org/10.1080/00036811.2017.1284313.

3. *Kravchenko V. V.* Construction of a transmutation for the one-dimensional Schrödinger operator and a representation for solutions, available at arXiv: 1612.09577.

4. *Marchenko V. A.* Sturm-Liouville Operators and Applications.Birkhäuser, Basel, 1986.

V. V. Kravchenko[1], S. M. Torba[1] and E. L. Shishkina[2] ([1]Querétaro, Mexico; [2]Voronezh, Russia)
ilina_dico@mail.ru

EXPLICIT REPRESENTATION FOR THE KERNEL OF A TRANSMUTATION OPERATOR FOR PERTURBED BESSEL OPERATORS

We deal with the perturbed Bessel equation

$$-u''(x)+\left(\frac{l(l+1)}{x^2}+q(x)\right)u(x)=\lambda u(x),\quad l\geq-\frac{1}{2},\quad x\in(0,b]. \tag{1}$$

In [1] and [2] it was shown that there exists a Volterra integral operator T defined on suitable functions φ by the expression

$$T[\varphi](x)=\varphi(x)+\int\limits_0^x K(x,t)\varphi(t)dt$$

with a continuous kernel K and such that a regular solution of (1) can be written as

$$u(x,\lambda)=T[d_l(x,\lambda)]$$

where $d_l(x,\lambda):=\sqrt{x}J_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}x)$ is a regular solution of the equation

$$-y''(x)+\frac{l(l+1)}{x^2}y(x)=\lambda y(x),\qquad l\geq-\frac{1}{2},\qquad x\in(0,b].$$

In our talk, developing an approach presented in [3] an explicit representation of the kernel $K(x,t)$ will be presented.

REFERENCES

1. *Stashevskaya V. V.* The inverse problem of spectral analysis for differential operators with a singularity at the origin. Kharkov. Uchenye zapiski Kharkov. Mat. Obsch. 1957. (In Russian).

2. *Volk V. Ya.* On inversion formulas for a differential equation with a singularuty at $x=0$, Uspehi Matem. Nauk (N.S.), 1953. no. 4 (56). pp. 141–151. (In Russian).

3. *Kravchenko V. V., Torba S. M., Castillo-Perez R.* A Neumann series of Bessel functions representation for solutions of perturbed Bessel equations. 2017. Applicable Analysis, http://dx.doi.org/10.1080/00036811.2017.1284313.

А. Н. Куликов, Д. А. Куликов (Ярославль, Россия)
kulikov_d_a@mail.ru

ОБОБЩЕННОЕ "КОНСЕРВАТИВНОЕ" УРАВНЕНИЕ КУРАМОТО-СИВАШИНСКОГО

Предполагается рассмотреть ряд вопросов относящихся к анализу локальных бифуркаций краевой задачи

$$u_t + u_{xxxx} + bu_{xx} + cu_{xxx} + a_1(u^2)_{xx} + a_2(u^2)_{xxx} = 0, \tag{1}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{2}$$

где $a_1, a_2, b, c \in R, a_1^2 + a_2^2 \neq 0$. Уравнение (1) было использовано в работе [1] в качестве одной из версий модели для описания механизма формирования неоднородных структур в физике пограничных явлений. Например, в задаче о формировании неоднородного рельефа на поверхности полупроводниковых материалов под воздействием ионной бомбардировки [2]. Краевая задача (1), (2) допускает семейство решений $u(t,x) = const \in R$.

В работе изучен вопрос об их устойчивости, а также локальные бифуркации при смене ими устойчивости [3-4]. В частности, при $a_1 = 0$ показано существование локального аттрактора, все решения на котором периодические функции переменного t и неустойчивы в смысле определения Ляпунова.

При обосновании утверждений использованы такие методы теории динамических систем как метод интегральных многообразий и аппарат теории нормальных форм.

Работа выполнена при поддержке инициативной НИР ЯрГУ ВИП-008.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Gelfand M. P., Bradley R. M.* One dimensional conservative surface dynamics with broken parity: Arrested collapse versus coarsening. Physics Letters A. 2015. V. 379, No. 3, p. 199–205.

2. *Bradley R. M., Harper J. M. E.* Theory of ripple topography by ion bombardment. J. Vac. Technol.A. 1988. V. 6, No. 4, p. 2390-2395.

3. *Kulikov A. N., Kulikov D. A.* Formation of wavy nanostructures on the surface of flat substrates by ion bombardment. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2012. V.52, No. 5, p. 800-814.

4. *Kulikov A. N., Kulikov D. A.* Bifurcations in Kuramoto-Sivashinsky equation. Pliska Studia Mathematica. 2015. No. 25, p. 101-110.

К. С. Лапин (Саранск, Россия)
klapin@mail.ru

РАВНОМЕРНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ ПО ПУАССОНУ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ [1]

Пусть задана произвольная система дифференциальных уравнений от n переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$:

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации № МК-139.2017.1

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x), \quad F(t,x) = (F_1(t,x), \ldots, F_n(t,x))^T, \tag{1}$$

правая часть которой задана и непрерывна в $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

Для произвольного $t_0 \in \mathbb{R}^+$ обозначим через $\mathbb{R}^+(t_0)$ множество $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geqslant t_0\}$. Любую неотрицательную возрастающую числовую последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i\geqslant 1}$, $\lim\limits_{i\to\infty} \tau_i = +\infty$, назовём $\mathcal{P}$-последовательностью. Для каждой $\mathcal{P}$-последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i\geqslant 1}$ обозначим через $M(\tau)$ множество $\bigcup_{i=1}^{\infty}[\tau_{2i-1}; \tau_{2i}]$.

Определение 1. *Будем говорить, что решения системы* (1) *равномерно ограничены по Пуассону, если для системы* (1) *найдется такая $\mathcal{P}$-последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i\geqslant 1}$, и для каждого числа $\alpha \geqslant 0$ существует такое число $\beta > 0$, что для любого решения $x(t, t_0, x_0)$ системы* (1), *где $t_0 \in M(\tau)$ и $\|x_0\| \leqslant \alpha$, выполнено условие $\|x(t, t_0, x_0)\| < \beta$ при всех $t \in R^+(t_0) \bigcap M(\tau)$.*

Теорема 1. *Для того, чтобы решения системы* (1), *у которой правая часть имеет непрерывные частные производные по $x_1 \ldots, x_n$, были равномерно ограничены по Пуассону, необходимо и достаточно существование $\mathcal{P}$-последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i\geqslant 1}$ и функции $V(t,x) \geqslant 0$, удовлетворяющей условию Липшица по t и x, заданной в $\mathbb{R}^+(\tau_1) \times \mathbb{R}^n$, которые обладают следующими свойствами:*

1). $b(\|x\|) \leqslant V(t,x) \leqslant a(\|x\|)$, для всех $(t,x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$, где $a(r) \geqslant 0$ – возрастающая функция, $b(r) \geqslant 0$ – неубывающая функция и $b(r) \to \infty$ при $r \to \infty$

2). $V'^{+}_{F(t,x)}(t,x) \leqslant 0$ для всех $(t,x) \in \mathbb{R}^+(\tau_1) \times \mathbb{R}^n$, где $V'^{+}_{F(t,x)}(t,x)$ – верхняя производная Дини функции $V(t,x)$ в силу системы (1).

Кроме того, в работе введены понятия частичной равномерной ограниченности по Пуассону и частичной равномерной ограниченности по Пуассону с частичным контролем начальных условий решений системы (1) и получены необходимые и достаточные условия соответствующих видов ограниченности решений.

В. А. Лукьяненко (Симферополь, РФ)
art-inf@yandex.ru

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА

Интегральное уравнение типа свертки – уравнение плавного перехода Ю. И. Черский методом конформного склеивания свел к задаче Карлемана для полосы и решил в замкнутом виде [1]. Как интегральное уравнение, так и задача Карлемана нашли широкие приложения в задачах теории упругости, теплопроводности, математической физики, теории волноводов. Следуя конструктивному подходу Ю. И. Черского, получены различные обобщения на дифференциальные уравнения, дифференциально-разностные, интегральные уравнения, бесконечные системы алгебраических уравнений; многоэлементные, двумерные, операторные и экстремальные задачи [2–6]. Продолжая данные направления, исследуются обобщенные краевые задачи типа Карлемана, задачи для двух функций и эквивалентные им интегральные уравнения.

Краевая задача для двух функций на отрезке решается с помощью соответствующей факторизации коэффициента. В дальнейших преобразованиях используется дискретное преобразование Фурье. Решение строится в замкнутом виде в зависимости от индекса соответствующей функции.

Анализируются экстремальные задачи для интегральных уравнений с оператором сдвига.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. – М.: Наука. – 1978. – 296 с.
2. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.
3. *Лукьяненко В. А.* Дифференциально-разностные уравнения типа плавного перехода в особом случае // Таврический вестник информатики и математики, № 1, 2002. – С. 104-113.
4. *Лукьяненко В. А.* Обобщенная краевая задача Карлемана // Динамические системы, вып. 19, 2005. – С. 129–144.
5. *Лукьяненко В. А.* Уравнения плавного перехода в семействе пространств обобщенных функций // Таврический вестник информатики и математики, № 2, 2005. – С. 90–106.
6. *Лукьяненко В. А.* Интегральные уравнения и краевые задачи для функций от двух переменных // Динамические системы, 2014, том 4(32), № 1–2, С. 143–152.

Л. Н. Ляхов (Воронеж, Россия)
levnlya@gmail.com

ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ КИПРИЯНОВА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ

Пусть Ω — выпуклая область евклидова пространства $\mathbb{R}_n$ и x^0 фиксированная точка области Ω. Через (x^0, ρ, Θ) обозначим сферические координаты точки $x \in S_\rho(n) = \{x :\ |x - x^0| = \rho\}$. Дробные операторы Киприянова, порожденные сферической симметрией, имеют вид (см. [1], см. также [2], где приведен разностный вариант)

$$D^\alpha f(x) = \rho^{\alpha+2-n} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\rho\, \partial\rho} \int_0^\rho \frac{f(x_0, \rho, \Theta)}{(\rho^2 - \tau^2)^{-\alpha}}\ \tau^{n-1}\, d\tau\, .$$

Такого рода операторы оказались связанными с интегральным преобразованием Фурье-Бесселя, с формулами обращения преобразованием Радона функций от сферических симметрий и с формулами обращения преобразования Радона-Киприянова.

В данном докладе остановимся на формулах решения задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу. Функцию $u = u(x, t)$ считаем измеримой и определенной в области $t \in \mathbb{R}_1^+,\ \ x \in \mathbb{R}_{n'}^+ \times \mathbb{R}_n''$, $n = n' + n''$. Полагаем $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n'})$, где γ_i — фиксированные положительные числа при $i = 1, ..., n'$. Мультииндексу γ

ставим в соответствие сингулярный дифференциальный оператор $(\Delta_B)_x = \Delta_\gamma = \sum_{i=1}^{n'} B_{\gamma_i} + \sum_{i=n'+1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Пусть $\beta > 0$ — фиксированное положительное число. Рассмотрим следующую задачу

$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\beta}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) = \Delta_\gamma u(x,t)\,, \quad (x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0.$

Пусть $f \in C_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$. Тогда решение определяется посредством применения общего вида дробного оператора Киприянова порядка $\alpha = \frac{n+|\gamma|-1}{2}$ формулой

$u(x,t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-1-\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-1}{2}\right)} \frac{t^{1-\beta}}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{[\alpha]+1} \int\limits_0^t \frac{r^{n+|\gamma|-1}\, M_r^\gamma f(x)}{(t^2-r^2)^{\{\alpha\}}}\, dr$, где $M_r^\gamma f(x)$ сферическое среднее функции на сфере $S_r(n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киприянов И. А.* Преобразование Фурье-Бесселя и теоремы вложения для весовых классов. // Тр. МИАН. 1967. Т. LXXXIX. С. 130-213.

2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. -Минск: Наука и техника, 1987. -687 с.

M. S. Mateljevic (Belgrade, Serbia)
miodrag@matf.bg.ac.rs

ESTIMATE FOR ELLIPTIC PDE AND DISTORTION OF QUASICONFORMAL, HARMONIC MAPS

We study the groth of gradient of mappings which satisfy certain PDE equations (or inequalities) using Green-Laplacian formula for functions and its derivatives. If in addition the considered mappings are quasiconformal (qc) between C^2 domains, we show that they are Lipschitz. Some of the obtained results can be considered as versions of Kellogg-Warshawski type theorem for qc-mappings.

More precisely, developing further methods from Heinz paper 2., we prove

Theorem 1. (i) *Let Ω be a Jordan domain in $\mathbb{R}^n$ with C^2 boundary and $f : \mathbb{B}_n \xrightarrow{onto} \Omega$ be C^2, which has continuous extension on $\overline{\mathbb{B}}$.*

(ii) *Suppose that f satisfy Poisson-Laplace type inequality on $B_0 = B(z_0, r_0) \cap \mathbb{B}$, where $x_0 \in \mathbb{S}$ and $r_0 > 0$.*

(I) *There is $0 < r_1 < r_0$, $c > 0$ and and a unit vector fields X on $B_1 = B(x_0, r_1) \cap \mathbb{B}$ such that $|df_x(X)| \le c$ for every $x \in B_1$ and $X \in T_x\mathbb{B}$.*

If in addition f is qc in B_0, then f is Lipschitz continuous on B_1.

Every Lyapunov domain in plane is exhausted by a monotonous sequence of C^∞-domains which are Lyapunov - uniformly bounded. Hence we can prove (qc) harmonic between Lyapunov-domains (in particular C^2-domains), we show that they are Lipschitz.

We also plan to discuss a major breakthrough concerning the initial Schoen Conjecture: A quasiconformal map of the sphere $\mathbb{S}^2$ admits a harmonic quasi-isometric extension to the hyperbolic space $\mathbb{H}^3$.

Among the other things, as tool we use the interior estimates for Poisson type inequality and try to imply it to study boundary regularity of Dirichlet Eigenfunctions on bounded domains which are C^2 except at a finite number of corners (Y. Sinai's question).

REFERENCES

1. *Gilbarg, D., Trudinger, N.* Elliptic partial Differential Equation of Second Order. Springer Verlag Second Edition, 1983.
2. *Heinz, E.* On certain nonlinear elliptic differential equations and univalent mappings, J. d' Anal. 5, 1956/57, 197-272.
3. *Kalaj D., Mateljević M.* Inner estimate and quasiconformal harmonic maps between smooth domains. Journal d'Analise Math.2006. Vol. 100,pp.117-132

Ю. М. Мешкова (Санкт-Петербург, Россия)
juliavmeshke@yandex.ru

ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ УСРЕДНЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ, ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область класса $C^{1,1}$. В $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассматривается самосопряженный матричный дифференциальный оператор $B_{D,\varepsilon}$ при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. Оператор предполагается сильно эллиптическим. Считаем, что $B_{D,\varepsilon} > 0$. Коэффициенты оператора $B_{D,\varepsilon}$ периодичны относительно некоторой решетки в $\mathbb{R}^d$ и зависят от $\mathbf{x}/\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Поэтому они быстро осциллируют при $\varepsilon \to 0$.

Усреднение резольвенты $(B_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ получено в [2].

Теорема 1. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $\zeta = |\zeta|e^{i\phi}$, $|\zeta| \geqslant 1$. *Пусть* $c(\phi) = |\sin\phi|^{-1}$ *при* $\phi \in (0,\pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$ *и* $c(\phi) = 1$ *при* $\phi \in [\pi/2, 3\pi/2]$. *Тогда при достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *выполнено*

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (B_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_1 c(\phi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2}. \tag{1}$$

Здесь B_D^0 *— эффективный оператор с постоянными коэффициентами. Постоянная* C_1 *зависит только от данных задачи. При фиксированном* ζ *оценка (1) имеет точный порядок* $O(\varepsilon)$.

Результаты такого типа называют операторными оценками погрешности в теории усреднения. Доказательство основано на продолжении во все пространство $\mathbb{R}^d$ и использовании результатов усреднения в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, установленных в [1]. С помощью обратного преобразования Лапласа из (1) выводим следующий результат.

Теорема 2. *При достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *имеем*

$$\|e^{-B_{D,\varepsilon}t} - e^{-B_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_2 \varepsilon (t+\varepsilon^2)^{-1/2} e^{-C_3 t}, \quad t \geqslant 0;$$
$$\left\|\left(\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(t(B_D^0)^{1/2})\right)(B_D^0)^{-2}\right\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_4 \varepsilon \left(1 + |t|^5\right),$$

$t \in \mathbb{R}$. Постоянные C_2, C_3 и C_4 зависят только от данных задачи. При фиксированном t эти оценки имеют точный порядок $O(\varepsilon)$.

Теорема 2 применяется к вопросу об усреднении решений задачи Коши для параболических и гиперболических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Meshkova Yu. M., Suslina T. A.* Two-parametric error estimates in homogenization of second-order elliptic systems in $\mathbb{R}^d$. Applicable Analysis. 2016. Vol. 95, № 7, pp. 1413–1448.
2. *Meshkova Yu., Suslina T.* Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: Two-parametric error estimates. arXiv:1702.00550. 2017.

A. B. Morgulis (Rostov-na-Donu - Vladikavkaz, Russia)
morgulisandrey@gmail.com

ONSET OF SINGULARITIES OF STEADY SOLUTIONS TO THE INCOMPRESSIBLE EULER EQUATIONS DESCRIBING THE OPEN FLOWS IN FINITE CHANNELS

We study the boundary value problems for the Euler equations of inviscid incompressible fluid which we are considered in the curvilinear quadrangles (channels). On their boundaries, the normal velocities are prescribed everywhere except for the vertices. It is supposed that the normal velocity does not change its sign on the sides of the quadrangle so that one side in whole is the flow inlet, the opposite side in whole is the outlet and the other pair of sides represents fully impermeable walls. In addition, the boundary conditions prescribe the flow vorticity on the inlet.

For every problem formulated as described above there exists a weak solution which turns out to be smooth provided that the correspondent vector field of the flow velocity has no zeroes [1-2]. Such solutions are referred to as through flows. The talk we present is focused on the conditions being necessary for existence of through flows depending on the given channel and boundary conditions. These results imply that the appearance of stagnation points and singularities of the solution are inevitable for rather wide classes of boundary data; see [3] for more details.

REFERENCES

1. *Alekseev G. V.* On vanishing viscosity in the two dimensional steady problems of dynamics of an incompressible fluid. Dyn. Continuous Media (Dinamica Sploshnoy Sredy). 1972. Vol. 10, pp. 5–28 (Russian).
2. *Alekseev G. V.* Uniqueness and smoothness for the vortex flows of ideal incompressible fluid. Dyn. Continuous Media (Dinamica Sploshnoy Sredy). 1973. Vol. 15, pp. 7–18 (Russian).
3. *Morgulis A. B.* Variational principles and stability of the inviscid open flows. Siberian Electronic Mathematical Reports. 2017. Vol. 14, pp. 218–251. DOI 10.17377/semi.2017.14.0222017 (Russian).

В. А. Мозель (Одесса)
mozel@ukr.net

О БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЕ ОПЕРАТОРОВ ТИПА БЕРГМАНА С АВТОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СДВИГАМИ

Пусть $\{W_G = \{W_g \in G\}\}$ - параболическая или гиперболическая бесконечная циклическая группа, либо эллиптическая конечная группа, D – единичный круг (см., напр., монографию 1.) Пусть, далее, $A=\sum_g a_g W_g$. Пусть также норма в алгебре определяется правилом: $|||A|||_1=\sum_g a_g W_g$. Пусть B - известный оператор типа Бергмана (напр., поли-Бергман или анти-поли-Бергман оператор; см., напр., совместную статью Ю. И. Карловича и автора 2., а также указанную там литературу.) Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть группа G удовлетворяет указанным выше свойствам, B описан выше. Тогда оператор $B=\sum_{g\in G} A_g W_g$ фредгольмов (нётеров) в банаховом пространстве $L_p(D)$, если и только если его символ невырожден.*

Замечание. *Автоморфные функции, указанные выше, известны достаточно давно. См., напр., книгу В. В. Голубева, цитируемую ниже, а также первую часть монографии Б. В. Шабата, тоже приведенную ниже.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бердон А.* Геометрия дискретных групп.– М. : Наука. Гл. ред. физ-мат. лит, 1986. - 304 с. (- С. 99).

2. *Karlovich Yu. I., Mozel V. A.* C*-algebras of Bergman-type operators with piece continuous coefficients and shifts // Complex Variables and Elliptic Equations: An International Journal. 2012. V. 57, № 7-8. - P. 841–865.

3. *Крейн С. Г., Ушакова В.Н.* Математический анализ элементарных функций.– Изд. 2-е . – М. : Наука, 1966 . – 184 с.

4. *Голубев В. В.* Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции.– М. : Физматгиз, 1961. - 456 с. (- С. 260 и ниже.)

5. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч.1. Функции одного переменного: Учебник для университетов.– Изд. 3-е . – М. : Наука, 1985 . - С. 253–256.

В. Моршнева
(Ростов-на-Дону, Россия)
morsh@math.sfedu.ru

БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ 2 В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Рассматриваются бифуркации коразмерности 2 в динамических системах, инвариантных относительно группы O(2). Для исследования используется метод сведения на центральное многообразие. Построены амплитудные системы в окрестности значений параметров, при которых нейтральный спектр линейного оператора состоит из двух пар чисто мнимых собственных значений.

Проведено исследование амплитудных систем на инвариантных подпространствах. Показано, что в условиях общего положения возможно возникновение периодических решений типа бегущих волн и их нелинейных смесей, а также возникновение квазипериодических решений. Получены явные выражения для асимптотик возникающих решений и для величин, определяющих характер их ветвления и устойчивость. Приводятся применения теории к задачам конвекции.

В. Г. Николаев (Великий Новгород, Росиия)
vg14@inbox.ru

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ШВАРЦА В 4-МЕРНОМ СЛУЧАЕ

Пусть матрица $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ не имеет вещественных собственных чисел. Аналитической по Дуглису [1], или J-аналитической с матрицей J называется комплексная n-вектор-функция $\phi = \phi(z) \in C^1(D)$, для которой в области $D \subset \mathbb{R}^2$ выполнено уравнение $\dfrac{\partial\phi}{\partial y} - J \cdot \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = 0$, $z \in D$. В скалярном случае, при $J = \lambda$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ функцию $\phi = f_\lambda(z) \in C^1(D)$ будем называть λ-голоморфной в области D.

Рассмотрим следующую краевую *задачу Шварца* [1]. Пусть конечная односвязная область $D \subset \mathbb{R}^2$ ограничена контуром Γ. Требуется найти J-аналитическую с матрицей J в области D функцию $\phi(z) \in C(\overline{D})$, которая удовлетворяет краевому условию $\operatorname{Re}\phi(z)\big|_\Gamma = \psi(t)$, где вещественная вектор-функция $\psi(t) \in C(\Gamma)$ задана.

Пусть $n = 4$. Обозначим через $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}$ комплексное сопряжение векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^4$. Рассмотрим следующие матрицы:

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} Q = \big(\mathbf{x},\, \mathbf{y},\, \overline{\mathbf{x}} + l_1\mathbf{x},\, \overline{\mathbf{y}} + l_2\mathbf{y}\big), \quad l_1, l_2 \in \mathbb{C}, \\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^4, \quad (\operatorname{Im}\lambda)\cdot(\operatorname{Im}\mu) > 0, \\ \begin{cases} |l_1| = 1, \quad |l_2| = \{0; 1\}, & \text{если } \lambda \neq \mu, \\ l_1, l_2 - \text{произвольные}, & \text{если } \lambda = \mu. \end{cases} \end{array}$$

Имеет место

Теорема 1. *Пусть матрица $J = QJ_1Q^{-1}$, где матрицы Q и J_1 определены выше. Пусть $\Gamma = \partial D$ – контур Ляпунова, граничная функция $\psi(t) \in C^{1,\sigma}(\Gamma)$. Тогда задача Шварца имеет единственное* (*с точностью до вектор-постоянной*) *решение* $\phi(z) \in H^\sigma(\overline{D})$.

Доказательство основано на следующем факте. Обозначим: $f_1 = yf'_\lambda + h_\lambda$, $g_1 = yg'_\mu + h_\mu$. Можно показать, что задача Шварца для данного случая равносильна приведенной ниже паре граничных задач для скалярных функциональных уравнений:

$$f_\lambda + \overline{g}_\mu + l_1 g_\mu\big|_\Gamma = \varphi_1, \;\; f_1 + \overline{g}_1 + l_2 g_1\big|_\Gamma = \varphi_2, \;\; \begin{cases} f_\lambda, g_\mu \in C^{1,\sigma}(\overline{D}), \\ h_1, h_2 \in H^\sigma(\overline{D}), \end{cases}$$

где скалярные функции $\varphi_1 = \varphi_1(\psi)$, $\varphi_2 = \varphi_2(\psi) \in C^{1,\sigma}(\Gamma)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Николаев В. Г., Солдатов А. П.* О решении задачи Шварца для J-аналитических функций в областях, ограниченных контуром Ляпунова. Дифференциальные уравнения. 2015. Том. 51, №. 7, стр. 965–969.

Л. В. Новикова (Ростов-на-Дону, Россия)
lvnovikova@sfedu.ru

ТОПОЛОГИЯ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА НЕКОТОРОГО НЕЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим неоднородное нелинейное уравнения теплопроводности

$$u_t = \nu x^2 u_{xx} + \alpha u + \beta u^2 \tag{1}$$

с периодическими краевыми условиями $u(x+2\pi, t) \equiv u(x,t)$ и начальным условием $u(\cdot, 0) \in W_1$, где $W_1 = \left\{u(\cdot)\colon u(x) = \sum_{n\in Z} u_n e^{inx};\ \sum_{n\in Z} n^2|u_n|^2 < \infty\right\}$.

Пространство W_1 с нормой $\|u\|_{W_1} = \left(\sum \_n \in Z(n^2+1)|u_n|^2\right)^{1/2}$ является банаховой алгеброй. Уравнение (1) можно рассматривать как эволюционное уравнение $\frac{du}{dt} = Au + \Phi(u)$ в W_1, где $A = \nu x^2 \frac{d^2}{dx^2} + \alpha$, $\Phi(u) = \beta u^2$. Собственным функциям $\varphi_n = x^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ оператора A отвечают собственные значения $\lambda_n = \nu_n(n-1) + \alpha$. Используя для функций $u(x,t)$ и $\beta u^2(x,t)$ разложение в ряда Тейлора:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) x^k; \quad \beta u^2(x,t) = \beta \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{i+j=k} u_i u_j \Big)$$

уравнение (1) можно представить в координатной форме

$$\frac{du_k}{dt} = (\nu k^2 - \nu k + \alpha) u_k + \beta \sum_{i+j=k} u_i u_j; \quad k, i, j = 0, 1, 2, \dots$$

Используя бесконечномерный аналог теоремы Зигеля для эволюционных уравнений в банаховых пространствах в применении к уравнению (1) получаем следующий результат.

Теорема. *Существует аналитический по Фреше диффеоморфизм $H\colon W_1 \to W_1$ некоторой окрестности S нуля банаховой алгебры W_1 на свой образ, с тождественной в нуле линейной частью: $H'(0) = I$, такой, что замена переменных $u = H(v)$ приводит нелинейное уравнение (1) в окрестности S к линейному неоднородному уравнению теплопроводности $v_t = \nu x^2 v_{xx} + \alpha v$, если для всех целых чисел $n \in Z$ и некоторого $s > 0$ выполнены неравенства*

$$|\nu n + k\alpha| \geqslant 1/k^s, \quad k = 2, 3, \dots$$

Если числа ν и α считать чисто мнимыми, то сформулированная теорема позволяет полностью узнать топологию фазового уравнения (1) в окрестности нуля в W_1: фазовый портрет оказывается расслоен на конечномерные и бесконечномерные инвариантные торы.

И. В. Островская (Ростов-на-Дону, Россия)
ivostrovskaya@sfedu.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТОМСОНОВСКОГО ВИХРЕВОГО МНОГОУГОЛЬНИКА ВНЕ КРУГА В СЛУЧАЕ НЕНУЛЕВОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ ОБТЕКАНИЯ ГРАНИЦЫ

Рассматривается система n точечных вихрей одинаковой интенсивности $\varkappa$, расположенных равномерно на окружности радиуса R_0 вне круговой области радиуса R. Предполагается обтекание круговой границы с ненулевой циркуляцией Γ. Движение такой вихревой конфигурации описывается гамильтонианом:

$$H = -\frac{\varkappa^2}{4\pi}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\ln\left|z_j - z_k\right|^2 + \frac{\varkappa^2}{8\pi}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left|R^2 - z_j\bar{z}_k\right|^2$$
$$-\frac{\varkappa^2 n}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}\ln\left|z_k\right|^2 - \frac{\varkappa\Gamma}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}\ln\left|z_k\right|^2.$$

Здесь $z_k = x_k + iy_k$, x_k, y_k – координаты k-го вихря, $\widehat{z}_k = \dfrac{R^2}{\overline{z}_k}$ – отражение k-го вихря границей круга.

Задача имеет решение, являющееся стационарным вращением

$$z_k = e^{i\omega t}u_k, \quad u_k = R_0 e^{2\pi i(k-1)/n}, \quad k = 1,\dots,n,$$
$$\omega = \omega_n = \frac{\varkappa}{4\pi R_0^2}\left(3n - 1 - \frac{2n}{1-q^n}\right) + \frac{\varkappa\Gamma}{2\pi R_0^2}, \quad q = \frac{R^2}{R_0^2} < 1.$$

Проведен анализ устойчивости этого режима в рамках подхода, развитого В. И. Юдовичем для задачи устойчивости стационарных движений динамических систем, обладающих группой симметрии. Устойчивость здесь понимается как устойчивость по Раусу (орбитальная устойчивость стационарного движения).

В работе исследована квадратичная часть приведенного гамильтониана и собственные значения матрицы линеаризации. Показано, что все пространство параметров задачи (q,Γ) разбивается на три части: область устойчивости по Раусу в точной нелинейной постановке, область экспоненциальной неустойчивости и область в которой требуется нелинейный анализ. Для случаев $n = 3$, 5 найдены все резонансы до четвертого порядка включительно.

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ (Задание № 1.5169.2017/БЧ).

E. Yu. Panov (Veliky Novgorod, Russia)
Eugeny.Panov@novsu.ru

ON THE LONG TIME BEHAVIOR OF PERIODIC VISCOSITY SOLUTIONS TO A HAMILTON-JACOBI EQUATION WITH SINGLE SPACE VARIABLE

In the half-plane $\Pi = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ we consider a first order Hamilton-Jacobi equation

$$u_t + f(u_x) = 0, \quad u = u(t,x),\ (t,x) \in \Pi, \tag{1}$$

with merely continuous hamiltonian function $f(v) \in C(\mathbb{R})$. We study the long time behavior of x-periodic viscosity solutions $u(t,x) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T})$ of (1), where $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ is a circle. Let $-\infty \le a < 0$, $0 < b \le +\infty$ be points of extended real line such that (a,b) is the maximal interval, where $f(v) = f(0) + cv$ for some $c \in \mathbb{R}$. If such intervals do not exist, i.e. the function $f(v)$ is not affine in any vicinity of 0, we set $a = b = 0$. The main our result is the following

Theorem 1. *There exists a periodic function $w(y) \in C(\mathbb{T})$ (the traveling wave profile) and the constant c (the speed) such that*

$$u(t,x) + f(0)t - w(x-ct) \underset{t\to+\infty}{\rightrightarrows} 0.$$

Moreover, the function $w(y)$ satisfies one-sided Lipschitz conditions:

$$a(y_2 - y_1) \le w(y_2) - w(y_1) \le b(y_2 - y_1) \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, y_1 < y_2, \tag{2}$$

while the speed c is determined by the requirement $f(v) = f(0) + cv$ on (a,b). In the case $a = b = 0$ the function $w \equiv \mathrm{const}$, in view of (2), and the value of c does not matter.

The proof of Theorem 1 is essentially based on recent results [1,2] concerning the long time behavior of periodic entropy solutions to the conservation law $v_t + f(v)_x = 0$ corresponding to (1).

The research was carried out under support of the Russian Foundation for Basic Research (grant no. 15-01-07650-a) and the Ministry of Education and Science of Russian Federation (project no. 1.445.2016/ФПМ).

R E F E R E N C E S

1. *Panov E. Yu.* On a condition of strong precompactness and the decay of periodic entropy solutions to scalar conservation laws// Netw. Heterog. Media. 2016. Vol. 11, No. 2, pp. 349–367.

2. *Panov E. Yu.* Long time asymptotics of periodic generalized entropy solutions of scalar conservation laws// Mathematical Notes. 2016. Vol. 100, No. 1, pp. 113–122.

C. E. Pastukhova (Moscow, Russia)
pas-se@yandex.ru

HIGHER INTEGRABILITY PROPERTY OF SOLUTIONS TO $p(x)$-LAPLACIAN AND DOUBLE-LOG CONDITION ON $p(x)$

Elliptic equations of $p(x)$-Laplacian type are studied in $\mathbb{R}^n$. We assume that the measurable exponent $p(x)$ satisfies the restriction

$$1 < \alpha \leq p(x) \leq \beta < \infty.$$

There is a well-known logarithmic condition (or briefly log-condition) on the modulus of continuity of the nonlinearity exponent $p(x)$, which ensures that a Laplacian with variable order of nonlinearity inherits many properties of the usual p-Laplacian of the constant order. One of these is so-called higher integrability of the gradient of the solution. In [1] it is established that this property holds also under a slightly more general condition on the exponent $p(x)$, although then the improvement of integrability is logarithmic rather than power-like as in the previous cases mentioned before. This more general condition may be called as "double-log condition". It implies that

$$|p(x) - p(y)| \leq \omega(|x - y|), \quad |x - y| \leq \frac{1}{4},$$

where

$$\omega(t) = \frac{k_0 \, ln \, ln(1/t)}{ln(1/t)}, \quad k_0 > 0.$$

The property of higher integrability is proved in the case: $k_0 < \alpha/n$.

The method put forward in [1] is based on a special generalization of Gering's lemma (see [2]), which relies upon the reverse Hoelder inequality "with increased support and exponent on the right-hand side".

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* Improved integrability of the gradients of solutions of elliptic equations with variable nonlinearity exponent, Sbornik: Mathematics **199**:12 1—33.

2. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* On Gering's lemma, Dokl. Math. **77**:2(2008) 243—248.

В. Э. Петров (Санкт-Петербург, Россия)
vladimir.petrov@twell.ru

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФАЗОЙ

Рассматриваются уравнения на полуоси, содержащие линейные комбинации sin- и cos-преобразований Фурье:

$$\mathbf{A}[u](\xi) = a(\xi) \int_0^\infty u(y) \, \cos \xi y \, dy + b(\xi) \int_0^\infty u(y) \, \sin \xi y \, dy = f(\xi), \tag{1}$$

$$\mathbf{A}^*[u](\xi) = \int\limits_0^\infty \overline{a(y)}\, u(y)\, \cos \xi y\, dy + \int\limits_0^\infty \overline{b(y)}\, u(y)\, \sin \xi y\, dy = f(\xi). \qquad (2)$$

Указан способ сведения этих уравнений к задаче Римана на оси (см. [1]). Например, уравнению (1) соответствует задача:

$$\frac{a\big(|\xi|\big) - i\,\mathrm{sign}\xi\, b\big(|\xi|\big)}{a\big(|\xi|\big) + i\,\mathrm{sign}\xi\, b\big(|\xi|\big)}\, U^+(\xi) + U^-(\xi) = \frac{2f\big(|\xi|\big)}{a\big(|\xi|\big) + i\,\mathrm{sign}\xi\, b\big(|\xi|\big)}. \qquad (3)$$

При $b(0) \neq 0$ и (или) $f(0) \neq 0$ коэффициент и правая часть могут быть разрывны. Это определит индекс задачи и классы решений. Важным приложением является построение целого класса явно решаемых уравнений Ханкеля на полуоси. Нормируем коэффициенты:

$$a(\xi) = \cos\varphi(\xi),\ b(\xi) = \sin\varphi(\xi).$$

Тогда оператор $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ является оператором Ханкеля:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}[u](x) = \pi u(x) + \int\limits_0^\infty k(x+y)\, u(y)\, dy, \quad k(t) = \int\limits_0^\infty \cos\big(\xi t - 2\varphi(\xi)\big)\, d\xi.$$

Теорема 1. *Если* $\mathrm{Ind}\,\exp\Big\{-i\varphi\big(|\xi|\big)\,\mathrm{sign}\xi\Big\} = 0$, *то уравнение Ханкеля*

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}[u](x) = f(x),\ f(|x|) \in \{\{0\}\}\ (\text{см. [1]}),$$

имеет единственное ограниченное решение, представляемое конечными квадратурами.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. Москва, “Наука”, 1978.

С. П. Плышевская (Симферополь, Россия)
splyshevskaya@email.ru

ДИНАМИКА СТАЦИОНАРНЫХ СТРУКТУР В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ НА ОТРЕЗКЕ

На отрезке рассматривается динамика стационарных структур в параболическом уравнении [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + \Lambda u^2 - u^3, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \qquad (1)$$

с краевыми условиями второго рода:

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0, \qquad (2)$$

где μ, Λ - положительные параметры.

Методом центральных многообразий доказана теорема о существовании и устойчивости пространственно-неоднородных стационарных решений $\varphi_1(x,\mu), \quad \varphi_1(\pi-x,\mu)$, ответвляющихся от нулевого решения при $\mu=1$. Утверждения теоремы о существовании, форме и устойчивости носят локальный по параметру μ характер. Проведённые численные расчёты позволяют утверждать, что полученные в теореме асимптотические разложения решений $\varphi_1(x,\mu), \quad \varphi_1(\pi-x,\mu)$ в окрестности $\mu=1$ являются приближенными решениями рассматриваемой задачи на достаточно широком интервале изменения параметра μ.

При $\Lambda=0.001$ был проведен анализ галёркинской 30-ти модовой аппроксимации задачи (1)-(2). Согласно этому анализу стационарные решения являются неустойчивыми с индексом неустойчивости 1 на всём промежутке $(0,1)$ изменения параметра μ. Подчеркнём, что при малых μ $\varphi_1(x,\mu)$ является решением (1)-(2) типа внутреннего переходного слоя с одной точкой перехода, которая приближается к 0 при $\mu\to 0$. При прохождении параметра μ через значение $\dfrac{1}{k^2}$ пара стационарных решений $u=\varphi_k(x,\mu),\ u=\varphi_k(\pi-x,\mu)$ рождается неустойчивой с индексом неустойчивости k и сохраняет индекс неустойчивости k при дальнейшем уменьшении параметра μ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир. 1985.

Н. М. Полякова (Ростов-на-Дону, Россия)
zhuk_nata@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСЫХАЮЩЕЙ КАПЛИ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ

При описании математической модели высыхающей капли использовалась система уравнений, описывающая сплошную среду, состоящую из упругого каркаса и жидкости [1]

$$\rho_f \boldsymbol{v}_t = -\nabla p + \mu\Delta\boldsymbol{v} + \Gamma(\boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{v}),$$

$$\rho\boldsymbol{u}_{tt} = \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} - \Gamma(\boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{v}),$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^e + \boldsymbol{\sigma}^d + \boldsymbol{\sigma}^a.$$

Здесь ρ_f, ρ — плотности жидкости и упругого каркаса, p — давление, $\boldsymbol{v}$ — скорость течения жидкости, μ — динамическая вязкость жидкости, $\boldsymbol{u}$ — вектор перемещений упругого каркаса, Γ — трение между каркасом и жидкостью, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжения для каркаса.

Для идентификации активной части тензора $\boldsymbol{\sigma}^a$ к исходным уравнениям следует добавлять уравнения, описывающие химическую кинетику процесса.

Для описания грубых пространственных структур, возникающих при испарении капли, оказалось достаточным рассматривать бездиссипативные модели. Поведение свободной поверхности капли $h(r,t)$ в предположении вращательной симметрии задается уравнением [2]

$$\eta_t + \eta\eta_r = -v_0 r^2,$$

где v_0 — параметр, связанный со скоростью испарения капли.

Анализ результатов численного решения модели показал возможность ее использования для описания процесса образования пространственных структур при высыхании капли [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части государственного задания 1.5169.2017/БЧ Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Banerjee S., Marchetti M. C.* Instabilities and Oscillations in Isotropic Active Gels arXiv:1006.1445v1 [cond-mat.soft], 2010.

2. *М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева, Н. М. Полякова.* Моделирование испарения капли жидкости. Ростов-на-Дону, Изд-во ЮФУ 2015.

3. *Brutin D., Sobac B., Loquet B., Sampol J.* Pattern formation in drying drops of blood. 2011, JFM, 667, pp. 85–95.

К. А. Радомирская (Симферополь, Россия)
radomirskaya@mail.ru

СПЕКТРАЛЬНЫЕ И ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ

На базе общего подхода к исследованию абстрактных краевых задач сопряжения (см. [1], [2]) разобраны спектральные задачи сопряжения для одной и двух областей. В результате их исследования возникает операторный пучок

$$L(\lambda,\mu)\varphi := (I - \mu B_2 - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)\varphi = 0, \quad \varphi \in H, \;\; \lambda, \; \mu \in \mathbb{C},$$

$$H = L_2(\Omega), \;\; 0 \leqslant B_k = B_k^* \in \mathfrak{S}_\infty(H), \; k = \overline{2,4}, \; 0 < A = A^* \in \mathfrak{S}_\infty(H).$$

Пучок зависит от двух параметров λ и μ. Рассматривается оба возможных случая, когда один из параметров спектральный, а другой является фиксированным, в зависимости от этого выведены свойства решений. В частности, если λ — спектральный параметр, а μ — фиксированный и меньше нуля, то возникает хорошо изученный операторный пучок Крейна. Если наоборот μ — спектральный параметр, а $\lambda < 0$ — фиксированный, то по теореме Гильберта – Шмидта система собственных элементов образует ортонормированный базис в $H_1 = H \ominus H_0$. Если λ — спектральный параметр, $\mathrm{Re}\mu \leqslant 0$, получаем слабо возмущенный пучок

Крейна. Имеется полнота, асимптотика собственных значений и базис по Абелю – Лидскому. Если μ — спектральный параметр, $\mathrm{Re}\lambda \leqslant 0$, то получаем слабое возмущение оператора B_2, одну конечную ветвь спектра, бегущую к ∞ и базис по Абелю – Лидскому.

Также изучены начально – краевые задачи математической физики, порождающие задачи сопряжения. Получены теоремы о существовании и единственности сильного решения со значениями в соответствующем гильбертовом пространстве.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Копачевский Н. Д., Радомирская К. А.* Об абстрактных краевых и спектральных задачах сопряжения. Международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - VI"(Ростов-на-Дону). 2016, стр. 28.

2. *Копачевский Н. Д., Радомирская К. А.* Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения и их приложения. Современная математика. Фундаметальные направления. 2016. Том. 61, стр. 67-102.

А. Б. Расулов (НИУ "МЭИ Москва, Россия),
А. П. Солдатов (НИУ БелГУ, Белгород, Россия)
rasulov_abdu@rambler.ru, soldatov48@gmail.com

ЗАДАЧА ТИПА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОШИ–РИМАНА С ОДНОЙ СИЛЬНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ В МЛАДШЕМ КОЭФФИЦИЕНТЕ

Пусть область G содержит точку $z = 0$ и ограничена простым гладким контуром ∂G, ориентированным против часовой стрелки. Удобно положить $G_0 = G \setminus \{0\}$, $G_\varepsilon = G \cap \{|z| > \varepsilon\}$ с малым $\varepsilon > 0$ и пусть для краткости

$$\rho(z) = \bar{z}|z|^{n-1},\ n > 1; \quad \rho_1(z) = |z|^m,\ 0 < m < 1.$$

В области G_0 рассмотрим уравнение Коши–Римана с сингулярными коэффициентами следующего вида:

$$u_{\bar{z}} - \frac{a}{\rho}u + \frac{b}{\rho_1}\bar{u} = f,$$

где $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y,\ \ a, b \in C(\overline{G})$ и правой частью $f \in L^p(G)$, где и $p > 2$.

Под его решением понимается функция $u \in C(\overline{G}) \cap C^1(G_0)$, допускающая обобщенную производную по $\overline{z}$ из класса $L^p(G_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$.

Основная цель работы – построить представление общего решения этого уравнения и использовать это решения для постановки и исследования краевых задачи типа Гильберта.

F. Razavinia (Moscow, Russia)
f.razavinia@phystech.edu

WEAK FADDEEV-TAKHTAJAN-VOLKOV ALGEBRAS

In this article we will try to construct a new Poisson bracket on our simplest example sl_2 and then we will try to give a universal construction based on our universal variables and then will try to construct lattice W_2 algebras which will play a key role in our other constructions on lattice W_3 algebras and finally we will try to find the only non trivial dependent generator of our lattice W_4 algebras and so on for lattice W_n algebras.

Definition 1. *Let us define our lattice W-algebra based on its generators according to [2] [1];*
Generators of lattice W-algebra associated with simple Lie algebra g constitute the functional basis of the space of invariants

$$\tau_i := \mathrm{Inv}_{U_q(n_+)}(\mathbb{C}_q[X_i^{ji} | i \in \mathbb{Z}])$$

with additional requirements $H_{X_i^{ji}}(\tau_i) = 0$ and $D_{X_i^{ji}}(\tau_i) = 0$. *For* $D^{(n)}_{X_i^{ji}} := \{S_{X_i^{ji}}, \tau_1[\cdots, X_1, X_2, X_3, \cdots]\}$ *and*

$$H_{X_i^{ji}} := \sum_i X_i \frac{\partial \tau_1[\cdots, X_1, X_2, X_3, \cdots]}{\partial X_i}$$

and $S_{X_i^{ji}}$ *the screening operators.*

Main result 1. *Lattice W_n algebra; main generator;*
Here for sl_n, we skip to write down all steps which we have done in previous sections and just will write down our main generator of the lattice W_n algebra.
The functional dependent nontrivial solution for the whole system of first order partial differential equations will be as what comes in follow:

$$\tau_1^{(n)} = \frac{\left(\sum_{1 \le i_1 \le i_2 \cdots \le i_{n-1} \le 2} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \cdots x_{i_{n-1}}^{(n-1)}\right)\left(\sum_{1 \le i_1 \le i_2 \cdots \le i_{n-1} \le 2} x_{i_1+1}^{(1)} x_{i_2+1}^{(2)} \cdots x_{i_{n-1}+1}^{(n-1)}\right)}{x_2^{(1)} \cdots x_2^{(n-1)} \left(\sum_{1 \le i_1 \le i_2 \cdots \le i_{n-1} \le 3} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \cdots x_{i_{n-1}}^{(n-1)}\right)};$$

REFERENCES
1. *Razavinia F.* Local coordinate systems on quantum flag manifolds. arXiv preprint arXiv:1610.09443 (2016).
2. *Pugay Ya. P.* Lattice W algebras and quantum groups. Theoretical and Mathematical Physics 100.1 (1994): 900-911.

E. N. Ryzhov (Volgograd,Russia)
rzhvt@mail.ru

DESIGNING OF UNIFORMLY ATTRACTIVE SETS OF DYNAMICAL SYSTEMS

The paper proposes a method of designing of simply connected compact surfaces having a uniform attraction for the orbits of differentiable actions of the additive group of real numbers. The results of the paper are based on the theory of stability of invariant sets [1-3]. Consider a set of linear combinations on the domain $\mathbf{D}^{\mathrm{n}}$, $\bar{\xi}\,(\mathbf{x},\,\mu) = \bar{\xi}_\alpha(\mathbf{x}) + \mu\bar{\xi}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\,\mu)$, $\mathbf{x} \in \mathbf{D}^{\mathrm{n}}$, $\mathbf{D}^{\mathrm{n}} \subseteq \mathbf{R}^{\mathrm{n}}$, $\mu \in \mathrm{R}$,$\bar{\xi}_\alpha(\mathbf{x})$ and one-parameter set of field $\bar{\xi}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\,\mu)$, so that field on $\bar{\xi}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\,\mu)$ defines a differentiable action of the additive group of real numbers; fields $\bar{\xi}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\,\mu)$ satisfy the equation:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{\alpha\beta,i}(\mathbf{x},\,\mu)\partial_{\mathrm{x}_i}\varphi_\alpha(\mathbf{x}) - \varphi_\beta(\mathbf{x})\varphi_\alpha(\mathbf{x}) + \mu\varphi_\beta(\mathbf{x}) = 0,$$

for $\mu \in \Im_\varepsilon(\mathbf{0})\backslash\{\mathbf{0}\}$, φ_α, φ_β – some twice continuously differentiable functions, $\Im_\varepsilon(\mathbf{0})$– some zero neighborhood of the mapping image $\varphi_{\alpha,\,\beta} : \mathbf{D}^{\mathrm{n}} \mapsto \mathrm{R}$. The main results of the method are formulated in the following statement.

Theorem. *Let a function $\varphi_\alpha(\mathbf{x})$ be positively defined invariant of the group $\mathrm{g}^{\mathrm{t}}_{\xi_\alpha}$, $\varphi_\beta(\mathbf{x})$– sign- definite function. Then there exists a point $\mu_0 \in \Im_\varepsilon(\mathbf{0})\backslash\{\mathbf{0}\}$ such that the set of mappings $\mathrm{g}^t_{\xi(\mathbf{x},\,\mu_0)}$ is a group of diffeomorphisms of some compact domain $\mathbf{G}$ bounded by the surface homeomorphic to the sphere $\mathbf{S}^{n-1}$ with the properties: $\mathrm{g}^t_{\xi(\mathbf{x},\,\mu_0)}\partial\mathbf{G} = \partial\mathbf{G}$, $\mathrm{orb}\mathbf{x}_0 \subset \mathrm{int}\mathbf{G}\ \forall\mathbf{x}_0 \in \mathrm{int}\mathbf{G}$, $\mathrm{orb}\mathbf{x}_0 = \left\{\mathbf{x} \in \mathrm{int}\mathbf{G} \middle| \, \mathbf{x} = \mathrm{g}^t_{\xi(\mathbf{x},\,\mu_0)}\mathbf{x}_0,\ \mathrm{t} \in \mathrm{R}\right\}$, where $\mathrm{int}\mathbf{G}$– interior of the domain $\mathbf{G}$,$\mathrm{orb}\mathbf{x}_0$– orbit of the point $\mathbf{x}_0$. Moreover if $\varphi_\beta(\mathbf{x})$ is negatively defined on $\mathbf{G}$, then the boundary $\partial\mathbf{G}$ contains a uniformly attracting set for the orbits starting in the domain $\mathbf{G}$; if $\varphi_\beta(\mathbf{x})$ is positively defined, then the boundary $\partial\mathbf{G}$ is the boundary of the domain $\mathbf{G}$ of uniform attraction of the vector field $\bar{\xi}(\mathbf{x},\,\mu_0)$ zero.*

The main results of the method are illustrated by a numerical simulation.

REFERENCES

1.*Zubov V. I.* Stability motion. M.:High School. 1973.

2. *Grigoryeva O. E., Ryzhov E. N.* Feed-back Control Stabilisation of Oscillations in the Sphere Neighbourhood// Stability and Control Processes: Proceedings of the International Conference in memory of V.I. Zubov, 2005, pp. 1347–1352.

3.*Gorobtzov A. S., Grigoryeva O. E., Ryzhov E. N.* Attracting Ellipsoids and Synthesis of Oscillatory Regimes. Automation and Remote Control. 2009. Vol. 70, No. 8, pp. 1301–1308.

А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин (Москва, РФ), Э. Шроэ (Ганновер, ФРГ)
antonsavin@mail.ru, sternin@mail.ru, schrohe@math.uni-hannover.de

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ГРУППАМИ КВАНТОВАННЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

С представлением группы Ли G квантованными каноническими преобразованиями $\Phi_g : H^s(M) \to H^s(M)$, $g \in G$, на гладком замкнутом многообразии M ассоциирован класс G-*операторов* вида

$$D = \int_G D_g \Phi_g dg : H^s(M) \longrightarrow H^s(M), \tag{1}$$

где D_g — гладкое семейство (псевдо)дифференциальных операторов на M. В докладе даётся понятие символа и устанавливается фредгольмовость эллиптических операторов вида (1). Отметим, что операторы (1) представляют интерес со многих точек зрения. Например, они интересны с точки зрения некоммутативной геометрии, так как символы таких операторов образуют существенно некоммутативные алгебры — скрещенные произведения с группой G. Укажем также, что ранее в литературе рассматривались G-операторы, в которых операторы Φ_g были просто операторами сдвига (замены переменных), индуцированными действием группы на основном многообразии.

В нашей работе рассматривается существенно более общий случай квантованных канонических преобразований. Одной из мотивировок для такого обобщения могут служить недавние работы Bär C., Strohmaier A. (2015) об индексе краевых задач для оператора Дирака в лоренцевой геометрии (в которой проблема индекса сводится на границу к тёплицеву аналогу оператора (1)), а также работы Walters S. (2015) по некоммутативным орбифолдам. Наконец, наши результаты в качестве частных случаев дают теоремы конечности во многих известных теориях (в трансверсальной эллиптической теории (Атья и Зингер), в теории операторов со сдвигами (Антоневич и Лебедев), в случае G-операторов, ассоциированных с действиями компактных групп Ли (Савин и Стернин) и др.)

Работа поддержана Немецким научно-исследовательским обществом (DFG) и РФФИ, проекты No. 16-01-00373, 15-01-08392.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Savin A., Schrohe E., Sternin B.* Elliptic operators associated with groups of quantized canonical transformations. ArXiv: 1612.02981. 2016.

Л. В. Сахарова (Ростов-на-Дону, Россия)
L_Sakharova@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ ДЛЯ ИСПАРЕНИЯ КАПЛИ ЖИДКОСТИ

Рассмотрена нелинейная устойчивость решения краевой задачи, представляющей собой модель высыхания тонкого слоя невязкой, нетемпературопроводной жидкости. Рассматриваются: 1) стандартные обезразмеренные уравнения Обербека-Буссинеска, а также уравнение для пассивной примеси для случая «протяженной» капли [1], (функции не зависят от переменной y):

$$div\boldsymbol{v} = 0; \qquad \boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\nabla q + \mu \triangle \boldsymbol{v} + (\beta_0 \Theta - \beta_c c)\, \boldsymbol{k} \tag{1}$$

$$\Theta_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \Theta = \delta \triangle \Theta; \qquad c_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla c = D_c \triangle c; \tag{2}$$

где $\boldsymbol{v} = (u, w)$, Θ, q, c — обезразмеренные поле скоростей, приведенная температура, конвективное давление, концентрация твердой примеси; μ, β_0, δ, D_c, β_c — кинематическая вязкость, коэффициент температурного расширения, температуропроводность, коэффициенты диффузии примеси и концентрационного сжатия; 2) краевые условия на границе двухфазного контакта жидкость-твердое основание: $\boldsymbol{v} = 0$, $\Theta = 0$; 3) краевые условия на границе $z = h(x)$ двухфазного контакта жидкость-пар, соответствующие условию энергетического баланса, а также условиям баланса нормальных и касательных напряжений на границе контакта [2]:

$$J + \left(E^2 D^{-2} L^{-1}\right) J^3 = \left(\Theta_x h_x - T_z\right) \left(1 + h_x^2\right)^{-0,5}; \tag{3}$$

$$-1,5 E^2 D^{-1} J^2 + q - 2\left(u_x (h_x^2 - 1) - h_x (u_z + w_x)\right) \left(1 + h_x^2\right)^{-1} =$$

$$= -3S(1 - C\Theta) h_{xx} \left(1 + h_x^2\right)^{-1,5}; \tag{4}$$

$$(u_z + w_x)\left(1 - h_x^2\right) - 4 u_x h_x = -2MP^{-1}\left(\Theta_x + \Theta_z h_x\right)\left(1 + h_x^2\right)^{0,5}, \tag{5}$$

где J — поток испаряющейся жидкости через поверхность, E, D, L, S, C, M, P — параметры. Задача (1)– (5) исследована на устойчивость, рассмотрены случаи равновесного и квазиравновесного испарения при различных соотношениях между параметрами модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуков М. Ю., Ширяева Е. В., Полякова Н. М.* Моделирование испарения капли жидкости: монография. Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015.

2. *Burelbach J. P., Bankoff S. G., Davis S. H.* Nonlinear stability of evapo- rating/condensing liquid films. J. Fluid Mech. 1988. Vol. 195, pp. 463–494.

Nikita N. Senik (St. Petersburg, Russia)
nnsenik@gmail.com **ON HOMOGENIZATION FOR LOCALLY PERIODIC STRONGLY ELLIPTIC OPERATORS**

In homogenization theory, one is interested in studying asymptotic properties of solutions to differential equations with rapidly oscillating coefficients. In this talk, we consider such a problem for a matrix strongly elliptic operator $\mathcal{A}^\varepsilon = -\operatorname{div} A(x, x/\varepsilon)\nabla$, where A is Lipschitz in the first variable and periodic in the second. We do not require that $A^* = A$, so $\mathcal{A}^\varepsilon$ need not be self-adjoint. It is well known that the resolvent $(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$ converges, in some sense, as ε tends to 0. Here, we will discuss results regarding convergence in the uniform operator topology on $L_2(\mathbb{R}^d)^n$, the strongest type of operator convergence. We present two terms in the approximation for $(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$ and a first term in the approximation for $\nabla(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$. Particular attention will be paid to the rates of the approximations.

L. I. Serbina (Ставрополь, Росссия)
lserbina@mail.com

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИИ

Одним из классов качественно новых задач, не имеющих аналогов в математической физике, являются краевые задачи для дифференциальных уравненийс частными производными с нелокальными краевыми условиями. Особый интерес среди нелокальных задач представляют задачи для дифференциальных уравнений с интегральными краевыми условиями.Это объяснимо тем, что имея важное прикладное значение, они вместе с тем порождают большое количество вопросов, связанных с вопросами их разрешимости. В работе, в рамках решения проблемы теоретического исследования в области математического моделирования нелинейных процессов переноса в водонасыщенных пористых средах, для которых характерно наличие особых, так называемых аномальных режимов, рассматривается постановка нелокальной краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения параболического типа. Отличительной характеристикой рассмотренной задачи и поиска метода ее решения, является наличие нелокального краевого условия типа условия Самарского, которое не позволяет непосредственно применять для ее разрешимости известные аналитические методы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сербина Л. И.* . Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. 2014. Том. 16, №. 1, стр. 77–83.
2. *Нахушев А. М.* Нагруженные дифференциальные уравнения и их применение.М: Наука. 2012.

Е. В. Серегина$^{\alpha}$, М. А. Степович$^{\beta}$, А. М. Макаренков$^{\gamma}$ (Калуга, Россия)
$^{\alpha}$evfs@yandex.ru, $^{\beta}$m.stepovich@rambler.ru, $^{\gamma}$amm2005@rambler.ru

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД ГАЛЁРКИНА РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

Ранее [1, 2] нами было проведено обоснование и рассмотрен вопрос вычислительной устойчивости модифицированной проекционной схемы метода наименьших квадратов для моделирования одномерного процесса диффузии в полубесконечной области. Модельные расчёты были проведены для распределения неосновных носителей заряда, генерированных в полупроводниковом материале широким электронным пучком.

В настоящей работе на примере трёхмерного уравнения диффузии рассмотрены возможности использования проекционного метода Галеркина для решения стационарного уравнения тепломассопереноса в полубесконечной области. Исходная задача решена в цилиндрической системе координат, решение найдено в виде частичной суммы двойного ряда Фурье по системе модифицированных функций Лагерра. Установлена сходимость невязки, соответствующей приближенному решению стационарного уравнения диффузии. Приведены результаты расчетов для двумерной модельной задачи.

Исследования проведены при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16–03–00515), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 14–42–03062).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренков А. М.* О модифицированной проекционной схеме метода наименьших квадратов для моделирования распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в однородном полупроводниковом материале. Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2013. № 11, стр. 65–69.

2. *Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренков А. М.* Модифицированная проекционная схема метода наименьших квадратов для моделирования концентрации неосновных носителей заряда в полупроводниковых материалах. Успехи прикладной физики. 2013. Том. 1, № 3, стр. 354–358.

М. М. Сиражудинов, С. П. Джамалудинова (Махачкала, Россия)
sirazhmagomed@yandex.ru, dzh-saida2012@yandex.ru

О G-КОМПАКТНОСТИ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

Пусть $W_0(Q)$ — подпространство пространства Соболева $W_2^2(Q)$ комплекснозначных функций над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. И пусть $\Lambda : W_0(Q) \to L_2(Q)$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Грант №16-01-00508)

обратимый эллиптический оператор второго порядка с постоянными коэффициентами; Q — односвязная область плоскости с гладкой границей. Рассмотрим класс $A(\nu_0, \nu_1; Q)$ операторов, действующих из $W_0(Q)$ в $L_2(Q)$, вида

$$Au = \mu_1 \partial^2_{z\bar z} u + \mu_2 \partial^2_{zz} u + \mu_3 \partial^2_{\bar z \bar z} u + \mu_4 \partial^2_{z\bar z} \bar u + \mu_5 \partial^2_{zz} \bar u + \mu_6 \partial^2_{\bar z \bar z} \bar u,$$

где $\partial_{\bar z} = 2^{-1}(D_1 + iD_2)$, $\partial_{\bar z} = 2^{-1}(D_1 - iD_2)$, i — мнимая единица, $D_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, 2$; коэффициенты μ_j $(j = 1, \ldots, 6)$ — измеримые комплекснозначные функции, такие что в любой гладкой односвязной подобласти $Q_1 \subset Q$ имеют место неравенства:

$$\mathrm{Re} \int_{Q_1} Au \cdot \Lambda v \, dx \leqslant \nu_1 \left(\mathrm{Re} \int_{Q_1} Au \, \overline{\Lambda u} \, dx, \right)^{\frac{1}{2}} \cdot ||\Lambda u||_{L_2(Q_1)},$$

$$||\Lambda u||^2_{L_2(Q_1)} \leqslant \nu_0 \, \mathrm{Re} \int_{Q_1} Au \, \overline{\Lambda u} \, dx, \qquad u, \, v \in W_0(Q_1),$$

где ν_0, $\nu_1 > 0$ — фиксированные постоянные.

Любой оператор $A : W_0(Q) \to L_2(Q)$ обратим и имеют место оценки

$$\lambda_0 ||u||_{W_2^2(Q_1)} \leqslant ||Au||_{L_2(Q_1)} \leqslant \lambda_1 ||u||_{W_2^2(Q_1)}, \quad \forall u \in W_0(Q_1),$$

где λ_0, $\lambda_1 > 0$ — константы, зависящие только от ν_0, ν_1.

Определение. *Скажем, что последовательность операторов* $\{A_k\} \subset A(\nu_0, \nu_1; Q)$ *G-сходится в области Q, если имеет место слабая сходимость* $A_k^{-1} \rightharpoonup A^{-1}$, *где* $A \in A(\nu_0 . \nu_1; Q)$.

Теорема. *Класс* $A(\nu_0 . \nu_1; Q)$ *G-компактен.*

Аналогичный результат для операторов первого порядка был получен в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сиражудинов М. М.* О G-компактности одного класса эллиптических систем первого порядка. Дифф.ур. 1990. Том. 26, №. 2, стр. 298–305.

С. М. Ситник (Воронеж)
mathsms@yandex.ru

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ — ИСТОРИЯ И СОВРЕМЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В докладе излагается краткая история метода операторов преобразования, который имеет многочисленные приложения в дифференциальных уравнениях, теории функций и функциональном анализе, дробном исчислении, в задачах, связанных со специальными функциями и интегральными преобразованиями, приложениями к теории рассеяния и обратным задачам, томографии и преобразованию Радона, а также ряду других приложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sitnik S. M.* Buschman–Erdélyi transmutations, classification and applications. Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: AMADE 2012 (Edited by M.V.Dubatovskaya, S.V.Rogosin). 2013. Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, p. 171–201. (arXiv version http://arxiv.org/abs/1304.2114v1).

2. *Sitnik S. M.* Transmutations and Applications: a Survey. 2012. arXiv:1012.3741, 141 P.

3. *Ситник С. М.* Операторы преобразования и их приложения. В сб. Исследования по современному анализу и математическому моделированию. (Редакторы Коробейник Ю. Ф., Кусраев А. Г.) 2008. Владикавказ, стр. 226–293.

4. *Ситник С. М.* Обзор основных свойств операторов преобразования Бушмана–Эрдейи. Челябинский физ.–мат. журнал. 2016. Том 1, вып. 4. стр. 63–93.

5. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Композиционный метод построения B–эллиптических, B–гиперболических и B–параболических операторов преобразования. ДАН СССР. 1994. Том 337, № 3. стр. 307–311.

6. *Ситник С. М.* Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана–Эрдейи. ДАН СССР. 1991. Том 320, № 6. стр. 1326–1330.

7. *Sitnik S. M.* Some problems in the modern theory of transmutations. Spectral theory and differential equations. International conference in honor of Vladimir A. Marchenko's 90th birthday. 2012. Kharkiv, p. 101–102.

8. *Ситник С. М.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с частными производными с сингулярными коэффициентами. Дифференциальные уравнения. 2016. Том. 52, № 11. стр. 1582–1583.

А. М. Столяр (Ростов-на-Дону, Россия)
ajoiner@mail.ru

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

В работе рассматривается широкий класс задач динамики упругопластических цилиндрических панелей/пластин и сферических оболочек; проводится интегрирование нелинейных уравнений математической физики, описывающих колебания оболочек как для сжимаемого, так и для несжимаемого материала. Математическая модель оболочки содержит, помимо уравнений движения, начальных и граничных условий, так называемые определяющие соотношения, устанавливающие связь между напряжениями и деформациями в случае учёта пластических свойств материала. Разработаны алгоритмы численного интегрирования уравнений математической модели. Вводится понятие «универсальной кривой» зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций [1]. Движение изображающей точки по данной кривой отражает процесс упругопластического деформирования элемента оболочки в каждый момент времени. Для учёта пластических свойств материала применяются модифицированные соотношения деформационной теории Генки–Надаи–Ильюшина. Алгоритмы численного интегрирования учитывают возможность неоднократного упрочнения материала элемента оболочки после предшествующей разгрузки. Приводятся результаты численных расчетов колебаний и динамического прощёлкивания цилиндрических панелей, арок и сферических оболочек и их сравнение с результатами других авторов, полученных с применением различных вариантов теории течения. Кроме этого, численно подтверждается результат (асимптотического интегрирования) о предельном переходе от уравнений колебаний узких упругих цилиндрических панелей со свободными продольными границами к соответствующим уравненбиям арки и в случае упругопластической оболочки [1].

Algorithms of numerical integration have been developed and applied to the problems of elastic-plastic shells oscillations and dynamical buckling. The results of numerical analysis have been considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Столяр А. М.* Поведение узких панелей и сферических оболочек в условиях статического и динамического нагружения. Асимптотический и численный анализ. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ. 2014.

М. А. Сумбатян, Я. А. Бердник (ЮФУ, Ростов-на-Дону, Россия)
sumbat@math.sfedu.ru

ГРАНИЧНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ С ОСТРОЙ ЗАДНЕЙ КРОМКОЙ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕЕ УСЛОВИЕ КУТТА-ЖУКОВСКОГО

Задача обтекания крылового профиля потоком идеальной несжимаемой жидкости может быть сведена к граничному интегральному уравнению (ГИУ) относительно нормальной производной функции тока ψ на граничном контуре ℓ профиля:

$$\int\limits_{\ell} \frac{\partial\psi(y)}{\partial n_y}\,\Phi(x,y)d\ell_y = v_0 x_2, \qquad x=(x_1,x_2)\in\ell, \quad y=(y_1,y_2), \tag{1}$$

где $\Phi(x,y) = -\ln|x-y|/(2\pi)$ – двумерная функция Грина для оператора Лапласа, v_0 – скорость набегающего потока вдоль оси x_1.

Обычно профиль обладает острой задней кромкой, которая должна обеспечивать сход с нее потока. Математически это выражается гипотезой Кутта-Жуковского (К-Ж), утверждающей, что в окрестности этой кромки решение уравнения (1) должно оставаться ограниченным. Между тем, прямое численное решение уравнения (1) удовлетворяет гипотезе К-Ж лишь для симметричных профилей. Многочисленные расчеты показывают, что для несимметричного профиля критическая точка никогда не выходит на острую кромку, что нарушает условие К-Ж.

В данной работе предлагается метод, который позволяет преодолеть эту трудность. В поток добавляется вихрь заранее неизвестной интенсивности с центром, расположенным внутри контура (для исключения особенностей решения вне контура ℓ). При этом вместо (1) имеем уравнение

$$\int\limits_{\ell} \frac{\partial\psi(y)}{\partial n_y}\,\Phi(x,y)d\ell_y = v_0 x_2 + A\ln(x_1^2+x_2^2), \quad x\in\ell, \tag{2}$$

где A - неизвестная константа, связанная с интенсивностью вихря. Решение уравнения (2) зависит от константы A, которая находится из условия К-Ж об ограниченности решения на острой кромке.

Работа выполнена в рамках Госзадания Минобрнауки РФ, проект 9.5794.2017/БЧ.

T. A. Suslina (St. Petersburg, Russia)
t.suslina@spbu.ru

HOMOGENIZATION OF HIGHER-ORDER ELLIPTIC EQUATIONS WITH PERIODIC COEFFICIENTS

In $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, we consider a selfadjoint strongly elliptic operator

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D}), \qquad \varepsilon > 0.$$

Here $g(\mathbf{x})$ is a periodic bounded and positive definite matrix-valued function, $b(\mathbf{D})$ is a matrix differential operator of order p. It is assumed that the symbol $b(\boldsymbol{\xi})$ has maximal rank. We study the behavior of the resolvent $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$, where $\zeta = |\zeta| e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, for small ε. In [1], it was proved that

$$\|(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le C_1(\varphi)\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\|(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad \le C_2(\varphi)\varepsilon\big(|\zeta|^{-1+1/2p} + |\zeta|^{-1/2+1/2p}\big), \end{aligned} \tag{2}$$

for $0 < \varepsilon \le 1$. Here $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ is the effective operator and $K(\varepsilon;\zeta)$ is a corrector (note that $\|K(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2\to H^p} = O(\varepsilon^{-p})$). Estimates (1) and (2) are order-sharp for small ε.

Now, let $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ be a bounded domain of class C^{2p}. By $A_{D,\varepsilon}$ we denote the operator in $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ given by $b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D})$ with the Dirichlet boundary condition. In [2], the following error estimates are proved for $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ (ε_0 is sufficiently small) and $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \ge 1$:

$$\|(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \le C_3(\varphi)\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\|(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})} \\ &\qquad \le C_4(\varphi)\big(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p\big). \end{aligned} \tag{4}$$

Here A_D^0 is the effective operator and $K_D(\varepsilon;\zeta)$ is the corresponding corrector. Estimate (3) is order-sharp for small ε. The order of estimate (4) is worse than the order of (2) because of the boundary layer effect.

The constants $C_j(\varphi)$, $j = 1, \dots, 4$, are uniformly bounded in any sector $\varphi_0 \le \varphi \le 2\pi - \varphi_0$ with $\varphi_0 > 0$. The analogs of (3), (4) for $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| < 1$, are also obtained (with different dependence on ζ).

REFERENCES

1. *Kukushkin A. A., Suslina T. A.* Homogenization of high-order elliptic operators with periodic coefficients. Algebra i Analiz. 2016. Vol. 28, No. 1, pp. 89–149.
2. *Suslina T. A.* Homogenization of the Dirichlet problem for higher-order elliptic equations with periodic coefficients. Algebra i Analiz. 2017. Vol. 29, No. 2, pp. 139–192.

E. V. Tyurikov (Rostov-on-Don)
etyurikov@hotmail.com

SOME NEW RESULTS ON THE MEMBRANE THEORY OF CONVEX SHELLS

The systematic application of methods of complex analysis to study primary objective of the general (moment) theory of shallow shells was laid in the works of I. N. Vekua. The task of building a membrane theory of convex shells with piecewise smooth edge (i. e., with piecewise smooth boundary to its medial surface) was made by A. L. Goldenveizer [1]. Significant progress in this direction is connected with the fundamental work of I. N. Vekua [2], which developed a general method for the study of common problems of the membrane theory of convex shells of arbitrary shape with a smooth edge and any number of holes. Defining fact here is that momentless stressed equilibrium state of the shell is completely determined by the solution of Riemann–Hilbert with Gilderoy coefficient boundary conditions for generalized analytic functions. However, the tasks for a membrane with piecewise smooth edge provided by A. L. Goldenveizer no longer fit into the framework of the mathematical part of the theory of I. N. Vekua. Its further development in the author's works [3] with application to problems of the theory of infinitesimal bending leads to the necessity of such formulation of a boundary problem, which would take into account the specificity of the stress equilibrium provided the concentration of stresses at corner points. Such a formulation is given for the shell with middle surface connected with the use of special boundary conditions of the Riemann–Hilbert problem, which allows to give a transparent geometric interpretation of the stress state of equilibrium provided the concentration of stresses at corner points, and also «to compare» the different states of equilibrium. This approach combined with technique [3] allows to formulate a criterion for the correctness of the task. The class of shells for which the task is quasicorrect has been allocated.

REFERENCES

1. *Goldenveizer A. L.* The Theory of Elastic Thin Shells. Moscow: Nauka. 1976.
2. *Vekua I. N.* Generalized Analytic Functions. Moscow: Fizmatgiz. 1959.
3. *Tyurikov E. V.* Geometric Analogue of the Vekua–Goldenveizer Problem // Doklady Mathematics. 2009. Vol. 79, No 1. pp. 83–86.

Ю. А. Хазова (Симферополь, Россия)
hazova.yuliya@hotmail.com

РЕШЕНИЕ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

На окружности рассматривается параболическая задача с преобразованием поворота

$$v_t + Lv = \Lambda \frac{1}{6} \cdot Qv^3, \tag{1}$$

где $L = L(D) = 1 - D\triangle + \Lambda Q$, оператор $Qv(x,t) = v(x + \frac{2\pi}{3}, t)$ с условиями на окружности $v(x,t) = v(x + 2\pi, t)$.

Для нахождения решений уравнения (1) строится галеркинская аппроксимация в виде

$$v = \sum_{k=1}^{N} z_k \exp(ikx) + \sum_{k=1}^{N} z_k \exp(-ikx),$$

которая приводит уравнение (1) к системе

$$\begin{gathered} \dot{z}_k = \lambda_k z_k + g_k(z, \overline{z}), \\ \dot{\overline{z}}_k = \overline{\lambda}_k \overline{z}_k + g_k(z, \overline{z}), \quad k = \overline{1, N}, \end{gathered}$$

где $\lambda_k = -1 - k^2 D - \Lambda \exp(ik\frac{2\pi}{3})$, $\overline{\lambda}_k = -1 - k^2 D - \Lambda \exp(-ik\frac{2\pi}{3})$.

При уменьшении параметра D и его проходе через критическое значение D^*, такое что $Re(\lambda_1(D^*)) = 0$ нулевое решение (1) теряет устойчивость колебательным образом. В результате от нулевого решения (1) ответвляется периодическое по t решение типа бегущей волны.

В работах [1,2] исследовались решения уравнения (1) с преобразованием отражения $Qv(x,t) = v(\pi - x, t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хазова Ю. А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Таврический вестник информатики и математики. 2015. Т. 28. № 3 С. 82-95.
2. *Хазова Ю. А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2015. № 8-4 (19-4). С. 314-317.

S. A. Khoury (Sharjah, UAE)
skhoury@aus.edu

SOLUTION OF STOKES FLOW PROBLEMS THAT ARE MODELED BY THE BIHARMONIC EQUATION: A BIORTHOGONALITY CONDITION APPROACH

In this talk, an approach is presented and described for the solution of a class of partial differential equations that model creeping viscous incompressible flow through cavities that arise in fluid dynamics (see [1] and [2] and the references therein). Such flows are modeled by the biharmomic equation. The strategy leads to the development of a class of biorthogonality conditions and an algorithm for the computation of the coefficients in the eigenfunction expansion. Properties of solutions of the biharmonic equation as well as the more general polyharmonic equation are explored. Numerical experiments will be reported to confirm the validity and applicability of the proposed strategy.

REFERENCES

1. *Khuri S. A. and Wang C. Y.* Stokes flow around a bend. Quarterly of Applied Mathematics. 1997. Vol. 55, No. 3, pp. 573–600.
2. *Khuri S. A.* Biorthogonal series solution of Stokes flow problems in sectorial regions. 1996. Vol. 56, No. 1, pp. 19–39.

M. M. Kabardov , B. A. Plamenevskii, O. V. Sarafanov, N. M. Sharkova (Saint-Petersburg, Russia)
kabardov@bk.ru, boris.plamen@gmail.com, oleg.saraf@gmail.com, n-sharkova@yandex.ru

ASYMPTOTIC AND NUMERICAL STUDY OF TWO CHANNEL RESONANT TUNNELING OF ELECTRONS IN TWO-DIMENSIONAL QUANTUM WAVEGUIDES

The waveguide coincides with a strip having two narrows of width ε. The electron wavefunction satisfies the Dirichlet boundary value problem for the Helmholtz equation. The part of the waveguide between the narrows acts as a resonator and there may arise conditions for electron resonant tunneling. We use the asymptotic formulas ([1] and [2]) for the wavefunction and the transmission and reflection coefficients as $\varepsilon \to 0$. The results of the asymptotics are compared with those of numerical computations of the waveguide scattering matrix on the interval between the second and third thresholds. This comparison allows to find the range of the parameter ε where the asymptotic and numerical approaches are consistent. Besides we discussed some threshold phenomenon [3].

REFERENCES

1. *Baskin L. M., Neittaanmäki P., Plamenevskii B. A., Sarafanov O. V.* Resonant tunneling (Subtitle: Quantum waveguides of variable cross-section, Asymptotics, Numerics, and Applications), Springer International Publishing, Switzerland, Monograph, 275 pages , 2015.
2. *Baskin L. M., Neittaanmäki P., Plamenevskii B. A., Sarafanov O. V.* Asymptotic theory of resonant tunneling in 3D quantum waveguides of variable cross-section, SIAM J. Appl. Math., 70 (2009), no. 5, pp. 1542—1566.
3. *Kabardov, M. M., Plamenevskii, B. A., Sharkova, N. M.* Computation of waveguide scattering matrix near thresholds, Applicable Analysis, pp. 1-8.

E. L. Shishkina (Voronezh, Russia)
ilina_dico@mail.ru

SINGULAR CAUCHY PROBLEM FOR THE B-HYPERBOLIC EQUATION

Let $\mathbb{R}_n^+=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}_n,\ \ x_1>0,\ldots,x_n>0\}$, $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ is a multi-index consisting of the fixed positive numbers $\gamma_i>0$, $i=1,...,n$ and $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$.

Following [1] we will solve the singular Cauchy problem for the equation

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial v}{\partial t},\quad i=1,...,n,\quad 0<k<1 \tag{1}$$

with the initials conditions

$$v(x,0)=0,\qquad \lim_{t\to 0}t^k\frac{\partial v}{\partial t}=\varphi(x). \tag{2}$$

Let $q\geq 0$ is the smallest positive integer number such that $2-k+2q>n+|\gamma|-1$ then we have the formula for the solution of (1)-(2) for appropriate function φ:

$$v=\frac{\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-k+2q-n-|\gamma|+1}{2}\right)}{2^{n+q}(1-k)\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-k+2q}{2}\right)}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q\times$$

$$\times\left(t^{1-k+2q}\int\limits_{B_1^+(n)}[\,{}^\gamma T^{ty}f(x)](1-|y|^2)^{\frac{2-k+2q-n-|\gamma|-1}{2}}y^\gamma dy\right),$$

where $B_1^+(n)=\{y\in\mathbb{R}_n^+\colon \sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2\leq 1\}$ and ${}^\gamma T^{ty}$ is multidimensional generalized translation (see [2]).

REFERENCES

1. *Tersenov S. A.* Introduction in the theory of equations degenerating on a boundary. USSR, Novosibirsk state university. 1973. (In Russian).
2. *Lyakhov L. N., Polovinkin I. P., Shishkina E. L.* Formulas for the Solution of the Cauchy Problem for a Singular Wave Equation with Bessel Time Operator. Doklady Mathematics. 2014. Vol. 90, No. 3, pp. 737–742.

А. Я. Якубов, Я. А. Якубов, (Грозный, Россия)
Л.Д. Шанкишвили (Тбилиси, Грузия)
yakub@inbox.ru

ПРОБЛЕМА ЧЕБЫШЕВА ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

Статьи Чебышева [1] и [2] посвящены изучению свойств дополнительного члена R_n в обобщенной формуле Парсеваля. В частном случае $n = 1$ Чебышев получил оценку вариационного характера

$$\int_a^b pdt \int_a^b pfgdt - \int_a^b pfdt \int_a^b pgdt = q \not\equiv 0$$

Чебышев установил, что в классе монотонных на отрезке $[a, b]$ функций, величина q сохраняет один и тот же знак на всем отрезке $[a, b]$.

Этот результат Чебышева обратил на себя особое внимание многих ученых математиков как отечественных так и зарубежных.

Возникла проблема: "Описать все измеримые функции, заданные на отрезке $[a, b]$, для которых справедлив результат Чебышева".

В этой работе вводятся специальные классы интегрально синхронных функций, в которых результаты Чебышева выполняются с необходимостью.

Определение 1. *Измеримые функции f, g, заданные на отрезке $[a, b]$, будем называть интегральными синхронными на $[a, b]$, если существует число $q > 0$ такое, что справедливо соотношение*

$$\int_a^b \int_a^b p(t)p(\tau)[f(t) - f(\tau)][g(t) - g(\tau)]dtd\tau q > 0$$

на всех подинтервалах $[\alpha, \beta] \in [a, b]$, $a \leq \alpha$, $\beta \leq b$

где p - некоторая весовая функция.

Заметим здесь, что класс IS достаточно широк, он содержит классы Бэра K_0, K_1, K_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чебышев П. Л.* Об одном ряде, доставляющем предельные величины интегралов. Опубликовано в Приложении к XLVII тому Имп. Акад. Наук №4 (1883) Собр. соч. П.Л. Чебышева под ред. А.А. Маркова и Н.Я. Сонина том II. СПб. 1907, стр. 405-417.

2. *Чебышев П. Л.* О приближенных выражениях одних интегралов через другие (взятые в тех же пределах). Опубликовано в сообщениях и протоколах заседания мат. общества при Харьковском Имп. Унив. П(1882) стр.93-98. Собр. соч. П.Л. Чебышева под ред. А.А. Маркова и И.Я. Сонин, Том II СПб 1907 стр. 716-719.

Session IV

Hausdorff Operators and Related Topics

R. A. Bandaliyev (Baku, Azerbaijan)
bandaliyev.rovshan@math.ab.az

THE BOUNDEDNESS OF HAUSDORFF OPERATOR IN L_P SPACES FOR $0 < P < 1$

The investigation of Hausdorff operator can be traced back to 1917 by Hurwitz and Silverman in [1] with summability of number series. Therefore Hausdorff operator have become an essential part of modern harmonic analysis. In particular, the study of Hausdorff operator has attracted resurgent attentions in recent years. The Hausdorff operator has received extensive study in recent years, particularly its boundedness on the Lebesgue space L_p and the Hardy space H_p (see [2]-[4]).

For a fixed function $\phi \in L_1^{loc}(0, \infty)$ the one-dimensional Hausdorff operator is defined in the integral form by

$$H_\phi(f)(x) = \int_0^\infty \frac{\phi\left(\frac{x}{y}\right)}{y} f(y)\, dy.$$

Remark 1. *Many important operators of harmonic analysis are special cases of the Hausdorff operator, by taking suitable choice of ϕ. For example, the Hardy operator, the adjoint Hardy operator, the Cesàro operator, the Hardy-Littlewood-Pólya operator, the Riemann- Liouville fractional derivatives and others can be derived from the Hausdorff operator.*

In this report we study the boundedness of Hausdorff operator in Lebesgue spaces L_p for $0 < p < 1$. Moreover, we investigate boundedness of Hausdorff operator in variable Lebesgue spaces.

This is joint work with Przemysław Górka.

REFERENCES

1. *Hurwitz W. A., Silverman L. L.* The consistency and equivalence of certain definitions of summabilities. Trans. Amer. Math. Soc. 1917. Vol. 18, No. 1, pp. 1–20.
2. *Liflyand E., Miyachi A.* Boundedness of the Hausdorff operators in H^p spaces, $0 < p < 1$. Studia Math. 2009. Vol. 194, No. 3, pp. 279–292.
3. *Liflyand E.* Hausdorff operators on Hardy spaces. Eurasian Math. J. 2013. Vol. 4, No. 4, pp. 101–141.
4. *Ruan J., Fan D.* Hausdorff operators on the power weighted Hardy spaces. J. Math. Anal. Appl. 2016. Vol. 433, No. 1, pp. 31–48.

S. Tikhonov (ICREA, Spain)
tikhonov.work@gmail.com

OLD AND NEW RESULTS ON POLYNOMIAL INEQUALITIES

In this talk, we will discuss several basic polynomial inequalities (Bernstein, Remez, Nikolskii). In particular, recent results on their interrelations as well as inequalities for hyperbolic cross polynomials will be surveyed.

Session V

Probability-Analytical Models and Methods

Э. М. Асадуллин (Уфа, Россия)
mrsine@mail.ru

О СПОСОБЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ С ЗАВИСИМЫМИ ВИНЕРОВСКИМИ ПРОЦЕССАМИ В ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ

Для моделирования задачи фильтрации диффузионных процессов с зависимыми винеровскими процессами необходимо получить (смоделировать) траектории рассматириваемых в задаче диффузионных процессов, которые являются решением системы уравнений Ито:

$$dx(t) = b_1(t, x(t), y(t))dt + \sigma_1(t, x(t), y(t))dW_t,$$
$$dy(t) = b_2(t, x(t), y(t))dt + \sigma_2(t, y(t))dN_t,$$

где W_t и N_t – зависимые винеровские процессы, такие что:

$$E(W_t^2) = \int_0^t Q(s)ds, \quad E(N_t^2) = \int_0^t R(s)ds, \quad E(W_tN_t) = \int_0^t S(s)ds.$$

Моделирование траекторий $x(t)$ и $y(t)$ можно разделить на два этапа: моделирование траекторий зависимых винеровских процессов и моделирование траекторий диффузионных процессов с использованием полученных траекторий винеровских процессов.

Оказывается, что траектории винеровских процессов W_t и N_t с требуемыми параметрами коррелированности можно получить из траекторий стандартных независимых винеровских процессов $w_1(t)$, $w_2(t)$ по формулам

$$v_1(t) = w_1(t)\sqrt{Q(t) - \frac{S^2(t)}{R(t)}} + w_2(t)\sqrt{\frac{S^2(t)}{R(t)}} + C_1(t),$$
$$v_2(t) = w_2(t)\sqrt{R(t)} + C_2(t),$$

где функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ – решения следующий уравнений:

$$C_1'(t) = -\frac{w_1(t)\left(Q(t)-\frac{S^2(t)}{R(t)}\right)'}{2\sqrt{Q(t)-\frac{S^2(t)}{R(t)}}} - \frac{w_2(t)\left(\frac{S^2(t)}{R(t)}\right)'}{2\sqrt{\frac{S^2(t)}{R(t)}}}, \qquad C_2'(t) = -\frac{w_2(t)R'(t)}{2\sqrt{R(t)}}.$$

Диффузионные процессы имеют следующую структуру:

$$x(t) = \varphi(t, W(t)) = \widetilde{x}(t, W(t) + C_1(t)),$$
$$y(t) = \psi(t, N(t))) = \widetilde{y}(t, N(t) + C_2(t)),$$

где $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ – известные функции, полученные из цепочки уравнений

$$\int \frac{d\varphi}{\sigma_1(t,\varphi,\psi(t,N(t)))} = u_1 + C_1(t), \qquad \int \frac{d\psi}{\sigma_2(t,\psi)} = u_2 + C_2(t),$$

На неизвестные функции $C_1(t)$, $C_2(t)$ имеются следующие уравнения:

$$C_1'(t) = \frac{b_1 - \frac{1}{2}\left[(\sigma_1)'_x\sigma_1 Q(t) - (\sigma_1)'_y\sigma_2 S(t)\right] - \frac{\partial}{\partial_1}\widetilde{x}(t,W(t)+C_1(t))}{\frac{\partial}{\partial_2}\widetilde{x}(t,W(t)+C_1(t))},$$
$$C_2'(t) = \frac{b_2 - \frac{1}{2}(\sigma_2)'_y\sigma_2 R(t) - \frac{\partial}{\partial_1}\widetilde{y}(t,N(t)+C_2(t))}{\frac{\partial}{\partial_2}\widetilde{y}(t,N(t)+C_2(t))},$$

где функция σ_2 зависит от аргументов $(t, \widetilde{y}(t, N(t) + C_2(t)))$, а функции b_1, b_2, σ_1

– от $(t, \widetilde{x}(t, W(t) + C_1(t)), \widetilde{y}(t, N(t) + C_2(t)))$.

Последние уравнения являются обыкновенными дифференциальными уравнениями без стохастических интегралов, но со случайными коэффициентами, которые решаются стандартными численно-аналитическими методами с использованием начальных условий вида

$\widetilde{x}(0, W(0) + C_1(0)) = x_0, \qquad \widetilde{y}(0, N(0) + C_2(0)) = y_0.$

Власков Г. А. (Ростов-на-Дону, Россия)
vls1958@mail.ru

МОДЕЛЬ ВЫСОКОШИРОТНОЙ ИОНОСФЕРЫ В УСЛОВИЯХ СТОХАСТИЧЕСКОЙ КОНВЕКЦИИ

Различные модели распределения электронной концентрации N_e в $F-$области полярной ионосферы опираются на два определяющих фактора: ионизация и перенос ионосферной плазмы в результате воздействия крупномасштабного электрического поля магнитосферной конвекции [1]. Эти модели имеют детерминированный характер, так как их исходные данные и решения описываются однозначными функциями координат и времени. Однако, измерения показывают,например, что электрическое поле испытывает серьёзные флуктуации, особенно в авроральной зоне. Очевидно, что стохастические воздействия влияют на пространственно-временные параметры электронной концентрации. Предлагается в уравнении неразрывности $\frac{\partial N_e}{\partial t} + (\vec{v} + \vec{v_{st}})\nabla N_e = q - \beta N_e$, где $\beta-$ коэффициент рекомбинации, $q-$ функция ионообразования, разделить поле скоростей переноса на детерминированную $\vec{v}$ и случайную $\vec{v_{st}}$ составляющие. Используя традиционный лагранжев подход и учитывая вмороженность ионосферной плазмы в геомагнитное поле, предположим, что магнитные силовые трубки совершают хаотическое движение, имеющее броуновский характер. Тогда величина электронной концентрации является случайной величиной для каждой трубки, то весь их набор образует случайное поле. Рассмотрение упрощённых задач, допускающих аналитическое решение, показало, что наличие стохастических флуктуаций конвекции должно приводить к размыванию средних значений электронной концентрации [2]. Наиболее действенными остаются численные методы, в частности, метод Монте-Карло. Численные расчёты позволили рассмотреть особенности распределения электронной плотности в некоторых характерных зонах верхней полярной ионосферы, построить гистограммы, карты математического ожидания и дисперсии величины N_e.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дёминов М. Г.* Ионосфера Земли: закономерности и механизмы. Сборник статей "Электромагнитные и плазменные процессы от недр Солнца до недр Земли с.295-346, ИЗМИРАН. 2015.

2. *Власков Г. А., Можаев А. М.* О моделировании стохастически конвектирующей попярной ионосферы.- в кн. Исследования высокоширотной ионосферы, Апатиты, изд.КНЦ АН СССР, 1986, с.42-45.

B. O. Volkov (Moscow, Russia)
borisvolkov1986@gmail.com

LEVY-LAPLACE OPERATOR IN STOCHASTIC ANALYSIS AND YANG-MILLS EQUATIONS

We define infinite dimensional differential operators on a Sobolev space over the Wiener measure P by analogy with the classical Levy Laplacian. We consider differential equations with these operators and their connection with the Yang-Mills equations (see [4]).

Let $W_0^{2,1}([0,1],\mathbb{R}^d)$ be the Cameron-Martin space of P. Let $\{p_\mu\}_{\mu=1}^d$ be an orthonormal basis in $\mathbb{R}^d$. Let $h_n(t)=\sqrt{2}\sin(2\pi nt)$. The value of the Lévy Laplacian on a function F on $W_0^{2,1}([0,1],\mathbb{R}^d)$ can be defined by

$$\Delta_L F=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{d} d_{p_\mu h_k} d_{p_\mu h_k} F.$$

It is known that the parallel transport (considered as an operator-valued function on $W_0^{2,1}([0,1],\mathbb{R}^d)$) is a solution to the Laplace equation for the Levy Laplacian if and only if the associated connection is a solution to the Yang-Mills equations (see [1-3]).

We show that the definition of the Levy Laplacian can be transferred to the Sobolev space $W_2^1(P)$ over P. We find the value of this Laplacian on the stochastic parallel transport. It is shown that the Yang-Mills equations and the Levy-Laplace equation for such Laplacian are not equivalent in contrast to the deterministic case (cf. [2]).

Finally, we consider an infinite dimensional divergence defined by analogy with the Levy Laplacian. We obtain an equation containing this divergence which is equivalent to the Yang-Mills equations. The resulting equation is an analog of the equation of motion of chiral fields.

REFERENCES

1. *Accardi L., Gibilisco P., Volovich I. V.* Yang-Mills gauge fields as harmonic functions for the Levy-Laplacians. Russian Journal of Mathematical Physics. 1994. Vol. 2, No. 2, pp. 235–250.
2. *Leandre R., Volovich I. V.* The Stochastic Lévy Laplacian and Yang-Mills equation on manifolds. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 2001. Vol. 4, No. 4, pp. 151–172.
3. *Volkov B. O.* Levy Laplacians and instantons. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2015. Vol. 290, pp. 210–222.
4. *Volkov B. O.* Stochastic Lévy Differential Operators and Yang-Mills Equations. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics (to appear).

Т. А. Волосатова (Ростов-на-Дону, Россия)
kulikta@mail.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ В СЛУЧАЕ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ПРИОРИТЕТОВ[1]

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00184).

Доклад является продолжением работы [1], а также сообщения Волосатовой Т.А. и Данекянц А.Г. на конференции ОТНА-2016. В этих работах была представлена математическая модель экономической системы с тремя детерминированными приоритетами. Рассмотрим теперь модель с m приоритетами (m<∞). Целевая функция арбитра имеет вид: $F = F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2} \ldots F_m^{1-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{m-1})}$, где $F_i(x) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^i x_k + b_i\right) I_{\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^i x_i + b_i > 0\}}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $a_i^k, b_i \in R$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, I_A есть индикатор множества А. Нас будут интересовать ситуации, когда существуют точки локальных и глобальных максимумов функции , поэтому в дальнейшем мы считаем, что $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} B_i$, где $B_i = \{F_i > 0\}$. Если существует стационарная точка x , то система векторов $\left\{a^1, a^2, \ldots, a^m\right\}$ линейно зависимая. Пусть целевая функция $F(x)$ имеет стационарную точку. Остановимся на модели в которой $\left\{a^1, \ldots, a^m\right\}$ линейно зависима, а подсистема $\left\{a^1, \ldots, a^{m-1}\right\}$ линейно независима. Тогда вектор a^m можно записать в виде $a^m = \dfrac{\alpha_1 c_1}{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{m-1}) - 1} a^1 + \ldots + \dfrac{\alpha_{m-1} c_{m-1}}{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{m-1}) - 1} a^{m-1}$, где постоянные $\dfrac{\alpha_i c_i}{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{m-1}) - 1} a^i < 0$. Введем обозначения $s_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^i x_k$, тогда целевая функция примет вид:

$$F(\overrightarrow{s}) = (s_1 - b_1)^{\alpha_1} \ldots (s_{m-1} - b_{m-1})^{\alpha_{m-1}} \cdot \Big(\frac{\alpha_1 c_1}{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{m-1}) - 1} s_1 + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha_{m-1} c_{m-1}}{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{m-1}) - 1} s_{m-1} + b_m\Big)^{1-(\alpha_1+\ldots+\alpha_{m-1})}$$

Предложение. *Функция* $F(\overrightarrow{s})$ *имеет единственную стационарную точку* $M(s_1, ..., s_{m-1})$*, координаты которой вычисляют по формуле:*

$$s_j = \frac{1}{c_j} \left((b_m - c_j b_j)(1 - (\alpha_1 + ... + \alpha_{m-1})) + \sum_{i=1}^{m-1} (c_i b_i - c_j b_j) \alpha_i \right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волосатова Т.А., Данекянц А.Г.* Оптимизация квазилинейных сложных систем: случай трех детерминированных приоритетов. Международный научно-исследовательский журнал. 2016. № 10-2 (52). С. 127-132.

Yu. E. Gliklikh (Voronezh, Russia)
yeg@math.vsu.ru

STOCHASTIC LEONTIEFF TYPE EQUATIONS WITH CURRENT VELOCITIES

In papers by A.L. Shestakov and G.A. Sviridyuk [1,2] a new model of the description of dynamically distorted signals in some radio devises is suggested in terms of so-called

Leontieff type equations (a particular case of algebraic-differential equations). After that the problem of taking into account the noise (in standard way expressed in terms of the white noise) in this theory has been arisen. A special feature of Leontieff type equation is that for finding a solution one has to use derivatives of constant terms, in this case – derivatives of white noise that requires using the generalized functions.

Then two alternative approaches were elaborated by A.L. Shestakov and G.A. Sviridyuk and by Yu.E. Gliklikh and E.Yu. Mashkov where the influence of noise is expressed in terms of the so-called current velocities (symmetric mean derivatives) of the Wiener process instead of using white noise. This allows the authors to avoid using the generalized function. It should be pointed out that by physical meaning, the current velocity is a direct analog of physical velocity for the deterministic processes. Note that the use of current velocity of the Wiener process means that in the construction of mean derivatives the σ-algebra “present” for the Wiener process is under consideration while there is also another possibility: to deal with the “present” σ-algebra of the solution as it is usually done in the theory of stochastic differential equation with mean derivatives. This approach is eleaborated by Yu.E. Gliklikh and E.Yu. Mashkov under various assumptions.

In this talk we give a survey of results in this direction. A brief introduction into the Theory of Mean Derivatives is also given.

The research is supported in part by RFBR Grant 15-01-00620.

R E F E R E N C E S

1. *Shestakov A.L., Sviridyuk G.A.* A new approach to measurement of dynamically distorted signals. Bulletin of South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming & Computer Software”. 2010. No. 16(192), pp. 116-120 (Russian)

2. *Shestakov A.L., Sviridyk G.A.* Optimal measurement of dynamically distorted signals. Bulletin of South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming & Computer Software”. 2011. No. 17(234), pp. 70-75. (Russian)

А. С. Гречко О. Е. Кудрявцев (Ростов-на-Дону, Россия)
alex@itparadigma.ru

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОДРАЗУМЕВАЕМОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ[1]

Прогнозирование финансовых временных рядов очень сложная задача из-за нестационарности и наличия шума в данных. Более того остается открытым вопрос, насколько прошлое поведение финансовых рынков в полной мере содержит информацию о зависимостях между будущими ценами и прошлыми.

Рассмотрим задачу прогнозирования подразумеваемой волатильности (implied volatility) опционов на индекс РТС по прошлым значениям данного параметра и реализованной волатильности. По сути задача прогнозирования рыночной волатильности - это задача прогнозирования рыночной цены опциона. Основная идея

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект №15-32-01390.

заключается в том, чтобы выявить паттерны поведения при принятии решения о текущем значении подразумеваемой волатильности, так как цена формируется в результате влияния человеческого фактора. В результате приходим к задаче машинного обучения - "задаче обучения с учителем". Для упрощения задача сводится не к прогнозированию конкретного значения подразумеваемой волатильности, а к вопросу будет она расти или падать. Соответственно, дается рекомендация купить или продать оцион, то есть мы переходим к задаче бинарной классификации.

В работе использовались различные методы машинного обучения, но основной упор делался на нелинейные методы: нейронный сети, SVM и случайные леса. Рассматривается эффективность того или иного метода для данной задачи, приводятся оценки ошибок. Сравнивается данный непараметрический подход с параметрическими методами оценки с помощью моделей Леви.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Murphy K. P.* Machine Learning: A Probabilistic Perspective. The MIT Press. 2012.
2. *Marsland S.* Machine Learning: An Algorithmic Perspective. CRC Press 2011.
3. *Anderson T., Bollerslev T.* Intraday periodicity and volatility persistence in financial markets. Journal of Empirical Finance. 1997, No. 4, pp. 115–158.

А. Г. Данекянц (Ростов-на-Дону, Россия)
dangegik@mail.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ : СЛУЧАЙ ТРЕХ ПРИОРИТЕТОВ ВЕРОЯТНОСТНОГО ХАРАКТЕРА[1]

Настоящий доклад является продолжением работ [1-2], в которых представлены результаты исследования потенциала квазилинейных моделей, в том случае, когда целевая функция воспроизводит разнонаправленные требования всевозможных экономических структур, с учетом случайной расстановки приоритетов неким посредником – арбитром.

В соответствии с [1-2] в пространстве R^n рассмотрим неотрицательные ненулевые непрерывные функции $F_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, дважды непрерывно дифференцируемые на открытых множествах $B_i = \{F_i > 0\}$, где $i = 1, 2, 3$. Мы будем исследовать только те модели, в которых существуют точки локальных и глобальных максимумов функции F , поэтому $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i$. При таком подходе целевая функция арбитра имеет вид $F = E\left[F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2} F_3^{\alpha_3}\right]$, показатели (приоритеты) которой носят вероятностный характер и удовлетворяют условиям : $P(\alpha_i > 0) > 0$, $P(\alpha_i < 1) > 0$, где $i = 1, 2, 3$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Считаем, что функции F_i являются функциями «квазилинейного» вида: $F_i(x) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^i x_k + b_i\right) I_{\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^i x_i + b_i > 0\}}$, $i = 1, 2, 3,$ где I_A

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00184).

есть индикатор множества A. Обозначим через S множество стационарных точек функции $F(x)$. Предположим, что $S \neq \varnothing$. Легко видеть, что тогда система векторов $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$ линейно зависима. Предположим, что в этой системе существует пара линейно независимых векторов. Не нарушая общности, считаем, что линейно независимы $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$. Тогда вектор $\vec{a_3}$ представим в виде: $\vec{a_3} = c_1\vec{a_1} + c_2\vec{a_2}$. В докладе будет рассмотрена экстремальная задача для функции $F(x)$ при выполнении этого соотношения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вагин В.С., Павлов И.В.* Моделирование и оптимизация квазилинейных сложных систем с учетом вероятностного характера приоритетов. Научно-технический журнал «Вестник РГУПС» –Ростов-на-Дону, 2016. №1(61). – С. 135-139.
2. *Волосатова Т.А., Данекянц А.Г.* Оптимизация квазилинейных сложных систем: случай трех детерминированных приоритетов. Международный научно-исследовательский журнал. 2016. № 10-2 (52).– С. 127-132.

С. А. Евпак (Ростов-на-Дону, Россия)
syevpak@yandex.ru

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ МЕТОД В ОЦЕНКЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КЛЮЧЕЙ

В докладе исследуются теоретико–кодовые полилинейные системы распределения ключей (см. [1]). На основе результатов работ [2, 3, 4] с использованием методов теории вероятностей предложен новый способ оценки эффективности систем распределения ключей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сидельников В. М.* Теория кодирования. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
2. *Деундяк В. М., Евпак С. А.* Уязвимости полилинейной системы распределения ключей // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - V: тез. докл. V Международной конференции. Ростов-на-Дону, 2015. С. 154–155.
3. *Деундяк В. М., Евпак С. А.* Уязвимости полилинейной системы распределения ключей в случае превышения порога мощности коалиции злоумышленников // Труды научной школы И. Б. Симоненко. Выпуск второй. Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2015. С. 105–115.
4. *Деундяк В. М., Евпак С. А., Таран А. А.* Об оценивании вероятности уязвимостей полилинейной системы распределения ключей // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - VI: тез. докл. VI Международной конференции. Ростов-на-Дону, 2016. С. 127–128.

I. M. Erusalimskiy (Rostov-on-Don, Russian Federation)
ymerusalimskyi@sfedu.ru

2-2 WAYS ON A GRAPH-LATTICE

Graph-lattice has vertices at points with non-negative integer coordinates. Each vertex has two outgoing edges: horizontal edge and vertical edge to the neighboring vertices (right and top). Graph-lattice has a fractal structure — subgraph generated by any vertex and the set of vertices that are reachable from it, is the graph-lattice. In the first part we considered the problem of reachability for 2-2 ways. 2-2 way consists of alternating pieces of horizontal edges or vertical edges, each of which (except, perhaps, the final piece) has an even length. We obtained formulas for the number of 2-2 ways, leading from the vertex to the vertex. In the second part we investigate the problem of random walks via 2-2 ways. The process of random walk on the 2-2 paths isn't Markov process. It is shown that it is locally reduced to the Markov process on the subgraph which determined by the starting vertex. We obtained the formula for probability of transition from the vertex to the vertex via 2-2 ways.

R E F E R E N C E S

1. *Erusalimskij Ja. M.* Grafy s ventil'noj dostizhimost'ju. Markovskie processy i potoki v setjah. /Ja. M. Erusalimskij, V. A. Skorohodov / Izvestija vuzov. Severo-Kavkazskij region. Estestvennye nauki. 2003, No. 2, pp. 3–5.

2. *Erusalimskij Ja. M.* Sluchajnye processy v setjah s bipoljarnoj magnitnost'ju. / Ja. M. Erusalimskij, A. G. Petrosjan / Izvestija vuzov. Severo-Kavkazskij region. Estestvennye nauki .Pril., 2005, No. 11, pp. 10–16.

3. *Erusalimskij Ja. M.* Sluchajnye bluzhdanija po grafu-reshjotke i kombinatornye tozhdestva. // Inzhenernyj vestnik Dona, No. 2 ch.2 (2015), 12 p. http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/2964

В. Г. Задорожний (Воронеж, Россия)
zador@amm.vsu.ru

МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассматриваются линейные дифференциальные уравнения, коэффициенты которых являются случайными процессами. Задача состоит в нахождении моментных функций решений таких уравнений. Предполагается, что случайные коэффициенты заданы характеристическим функционалом [1]. Задача сводится к не случайным дифференциальным уравнениям с обычными и вариационными производными [1].

В частности рассмотрена задача Коши для системы дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = \varepsilon(t,\omega)Ax + f(t,x), x(t_0) = x_0(\omega)$, где $x : [t_0,t_1] \to R^n$ – искомая векторная функция, A – матрица ω – случайное событие, ε – случайный процесс, f – векторный случайный процесс, x_0 – случайный вектор. Предполагается, что известен характеристический функционал [1]

$$\psi(u,v) = \exp(i\int_{t_0}^{t_1}[\varepsilon(s,\omega)u(s)+ < f(s,\omega), v(s) >]ds),$$

где $< \cdot,\cdot >$ – скалярное произведение в R^n.

Пусть $y(t,u,v) = M(x(t)\exp(i\int_{t_0}^{t_1}[\varepsilon(s,\omega)u(s)+ < f(s,\omega), v(s) >]ds)$, где M – знак математического ожидания по функции распределения процессов ε, f. При этом $y(t,00) = Mx(t)$,

$$\frac{\partial y(t,u,v)}{\partial t} = -iA\frac{\delta y(t,u,v)}{\delta u(t)} - i\frac{\delta\psi(u,v)}{\delta v(t)},$$

$$y(t_0,u,v) = M(x_0)\psi(u,v).$$

Решение этой задачи находится в аналитическом виде

$$y(t,u,v) = M(x_0)\psi(uE - iA\chi(t_0,t),v) - i\int_{t_0}^{t_1} \frac{\delta\psi(uE - iA\chi(s,t),v)}{\delta v(s)},$$

где E – единичная матрица, $\chi(t_0,t)$ – характеристическая функция отрезка $[t_0,t]$. При $u=0, v=0$ получаем выражение для математического ожидания $Mx(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Задорожний В. Г.* Методы вариационного анализа. М.-Ижевск: РХД, 2006.

Д. С. Климентов Ростов-на-Дону, Россия)
dklimentov75@gmail.com

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ОГРАНИЧЕННОГО ИСКРИВЛЕНИЯ ДВУМЯ СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

В работе [1] было показано, что для поверхностей ограниченного искривления имеет место формула

$$K(G) = \iint_G \frac{LN - M^2}{EG - F^2} d\sigma,$$

где $K(G)$ – кривизна множества G. Пусть на поверхности ограниченного искривления F заданы два винеровских процесса X_t и Y_t с переходной плотностью $p_t(x,y)$ и переходной функцией $P(t,x,\Gamma)$. В работе [2] была выведена формула, позволяющая вычислить кривизну гладкой поверхности через приведённые характеристики случайных процессов. Этот результат обобщается на поверхность ограниченного искривления следующим образом:

Теорема 1. *Для поверхности ограниченного искривления F имеет место формула*

$$K(G) = \iint_G \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\lambda} d\sigma,$$

где $b_{ij} = \frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t} \cdot \int P\left(t,x,dy\right) \frac{y_i y_j}{1+\delta_{ij}}$, $\lambda = \frac{\Delta p_t^1}{\partial_t p_t^1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бакельман И.Я.* Дифференциальная геометрия гладких нерегулярных поверхностей. УМН. 11:2(68) (1956). 67–124.
2. *Климентов Д.С.* Стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей положительной кривизны. Известия ВУЗов Северо-Кавказский регион. Естественные науки, 2013, 6, с. 24-27.

Н. П. Красий (Ростов-на-Дону)
krasnad@yandex.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ [1]

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00184).

В докладе продолжаются исследования возможности оптимизации квазилинейных моделей, описывающих взаимодействие в единой системе структур с различными целями, приоритеты между которыми распределяются по решению арбитра — лица, заинтересованного в наиболее эффективном функционировании системы в целом.

Полагаем, что система состоит из трех структур, цели которых выражаются положительными непрерывными функциями квазилинейного типа

$$F_j(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i + b_j\right) I_{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}x_i + b_j > 0\right\}}, j = 1, 2, 3.$$

Пусть $\alpha_j = \alpha_j(\omega),\ j = 1, 2, 3$ — произвольные независимые случайные величины, принимающие значения на отрезке [0;1], определенные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, причем $P\left(\alpha_j > 0\right) > 0$ и $P\left(\alpha_j < 1\right) > 0$. Целевая функция арбитра при этом $F(x) = E\left(F_1^{\alpha_1}\right) E\left(F_2^{\alpha_2}\right) E\left(F_3^{\alpha_3}\right)$.

Считаем, что множество стационарных точек $S \neq \emptyset$. Для того, чтобы функция $F(x)$ имела стационарные точки, необходимо, чтобы система векторов $\left\{\overline{a}^{(1)}, \overline{a}^{(2)}, \overline{a}^{(3)}\right\}$, где каждый вектор $\overline{a}^{(j)}$ составлен из коэффициентов целевых функций конкурирующих структур $F_j\left(x\right), j = 1, 2, 3$, была линейно зависима. Предположим, что два из трех векторов системы линейно независимы, и пусть, не нарушая общности, это будут векторы $\overline{a}^{(1)}$ и $\overline{a}^{(2)}$. Тогда справедливо равенство

$$a^{(3)} = -c_1 a^{(1)} - c_2 a^{(2)} \text{ , где}$$

$$c_1 = \frac{E\left(\alpha_1 F_1^{\alpha_1 - 1}\right) E\left(F_3^{\alpha_3}\right)}{E\left(F_1^{\alpha_1}\right) E\left(\alpha_3 F_3^{\alpha_3 - 1}\right)},\ c_2 = \frac{E\left(\alpha_2 F_1^{\alpha_2 - 1}\right) E\left(F_3^{\alpha_3}\right)}{E\left(F_2^{\alpha_2}\right) E\left(\alpha_3 F_3^{\alpha_3 - 1}\right)} \text{ на множестве } S.$$

Цель данного доклада — изучение множества S.

O. E. Kudryavtsev (Rostov-on-Don, Russia)
koe@donrta.ru

A NUMERICAL WIENER-HOPF FACTORIZATION APPROACH IN COMPUTING RISK MEASURES [1]

In recent years more and more attention has been given to stochastic models of financial markets which depart from the traditional Gaussian model. The models admitting jumps (e.g. Lévy models) are among the most popular.

Among the risk management tools promoted by the Basel committee, the most popular is the Value-at-Risk (VaR) which measures the potential loss in value of a risky asset or portfolio over a defined period for a given confidence interval. However,

[1]The work was financially supported by RFBR grant (project 15-32-01390).

the measure does not give us the probability of the likely loss within that horizon. The latter risk measure is known as intra-horizon VaR (or iVaR) [1]. In the case of Lévy models, the problem of the iVaR evaluation is equivalent to solving a complex partial inregro-differential equation subject to certain initial and boundary conditions. A similar risk measure arises in ruin theory and insurance framework.

On the other side, it is also important to measure liquidity risks. According to [2], an expected difference between the maximal stock price over the period and the price in the end of the period gives an upeer bound for the value of the stock illiquidity.

In both frameworks, the key quantity of interest is the joint law of the current position and the running extrema of a Lévy process at a fixed time. In the talk, an efficient numerical method to compute an expectation of the laws of this type with application to risk measures is suggested. As well as in [3] we use a new numerical realization of the Fast Wiener-Hopf factorization method.

REFERENCES

1. *Bakshia G., Panayotov G.* First-Passage Probability, Jump Models, and Intra-Horizon Risk. Journal of Financial Economics. 2010. Vol. 95, No. 1, pp. 20–40.

2. *Longstaff F. A.* How Much Can Marketability Affect Security Values? Journal of Finance. 1995. Vol. 5, pp.1767–1774.

3. *O. Kudryavtsev* Advantages of the Laplace transform approach in pricing first touch digital options in Lévy-driven models. Bol. Soc. Mat. Mex. 2016. Vol. 22, No. 2, pp. 711–731.

V. V. Rodochenko (Rostov-on-Don, Russia)
vrodochenko@gmail.com
O. E. Kudryavtsev (Rostov-on-Don, Russia)
koe@donrta.ru

A HYBRID APPROACH FOR EVALUATING BARRIER OPTIONS IN BATES MODEL USING A FAST WIENER-HOPF FACTORIZATION[1]

Derivative pricing is an example of a problem of both great practical value and mathematical complexity.

Bates option pricing model, first published in [1], being rather comp-lex in computational sense, is nonetheless a quite popular stochastic volatility model with jumps.

We present a new approach to option pricing under Bates model. The method is based on Markov chain approximation for variance which is similar to the one in [2,3].

Like in [4], we use Carr randomization technique to be able to operate on sufficiently small time intervals and consider the problem of option pricing as a recurrent scheme which involves an iterative calculation of a sequence of mathematical expectations.

To calculate the arising expectations we use the approach based on the Wiener-Hopf factorization formulae from [5] which admits an efficient numerical realization by means of the Fast Fourier Transform.

[1]Supported by RFBR grant (project 15-32-01390).

Numerical experiments show that the scheme proposed leads to accu-rate results and offers a fast convergence.

REFERENCES

1. *D.S. Bates* Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutshe Mark Options. Review of Financial Studies. 1996. Vol. 9, pp. 69–107.
2. *M. Briani, L. Caramellino, A. Zanette* A hybrid tree-finite difference approach for the Heston model. 2014. arXiv:1307.7178 [q-fin.CP]
3. *E. Appolloni, L. Caramellino, A. Zanette* A robust tree method for pricing American options with CIR stochastic interest rate. IMA Journal of Management Mathematics. 2015. Vol. 26, pp. 345–375.
4. *O. Kudryavtsev, V. Rodochenko* A Wiener-Hopf Factorization Approach for Pricing Barrier Options in the Heston Model. Applied Mathematical Scien-ces. 2017. Vol. 11, No. 2, pp. 93–100.
5. *O. Kudryavtsev* Advantages of the Laplace transform approach in pricing first touch digital options in Lévy-driven models. Bol. Soc. Mat. Mex. 2016. Vol. 22, No. 2, pp. 711–731.

Л. Э. Мелкумова, С. Я. Шатских (Самара, Россия)
lana.melkumova@gmail.com, s.shatskikh@inbox.ru

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ РЕГРЕССИИ МНК, RIDGE И LASSO В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ДАННЫХ[1]

Используя стандартизованные исходные данные $\mathbf{W}, \mathbf{V}$, задачи оценки регрессионных коэффициентов B с помощью методов НК, Ridge и Lasso можно сформулировать в виде:

$$\begin{aligned}
&1^\circ \quad \| \mathbf{V} - \mathbf{W}B \|^2 \longmapsto \min,\\
&2^\circ \quad \| \mathbf{V} - \mathbf{W}B \|^2 + \lambda \| B \|_2 \longmapsto \min,\\
&3^\circ \quad \| \mathbf{V} - \mathbf{W}B \|^2 + \lambda \| B \|_1 \longmapsto \min,
\end{aligned}$$

С использованием статистического пакета R был проведен анализ данных Wine Quality (см. [1]) объемом 4898 наблюдений (11 физико-химических характеристик белого вина «Vinho Verde» (предикторы), оценка качества вина по шкале от 0 до 10 (отклик)).

Таблица 1: Коэффициенты увеличения дисперсии $VIF_j,\ j = \overline{1,11}$

VIF_1	VIF_2	VIF_3	VIF_4	VIF_5	VIF_6	VIF_7	VIF_8	VIF_9	VIF_{10}	VIF_{11}
2.691	1.141	1.165	12.644	1.237	1.788	2.239	28.236	2.196	1.139	7.707

В ситуациях мультиколллинеарности, когда коэффициент увеличения дисперсии предикторов $VIF_j > 5$ (а тем более, > 10), методы Ridge и Lasso по сравнению с МНК-регрессией позволяют увеличить точность прогноза и улучшить интерпретируемость модели [2].

Методом кросс-валидации были найдены подходящие значения λ для Ridge ($\lambda = 0.156$) и Lasso ($\lambda = 0.014$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cortez, P. (et al)* Modeling Wine Preferences by Data Mining from Physicochemical Properties. Decision Support Systems. 2009. V. 47, №. 4, p. 547–553.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00184).

Таблица 2: Оценки регрессионных коэффициентов $\mathbf{b_j}$, $j = \overline{1, 11}$

Метод	$\mathbf{b_0}$	$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{b_2}$	$\mathbf{b_3}$	$\mathbf{b_4}$	$\mathbf{b_5}$	$\mathbf{b_6}$	$\mathbf{b_7}$	$\mathbf{b_8}$	$\mathbf{b_9}$	$\mathbf{b_{10}}$	$\mathbf{b_{11}}$
МНК	150.193	0.066	-1.863	0.022	0.081	-0.247	0.004	-0.0003	-150.284	0.686	0.631	0.193
Ridge	42.881	-0.027	-1.538	0.0566	0.028	-1.874	0.004	-0.0008	-40.270	0.246	0.405	0.239
Lasso	18.708	-0.034	-1.848	0	0.026	-0.673	0.003	0	-16.495	0.139	0.307	0.331

2. *James, G., Witten, D., Hastie, T., Tibshirani, R.* An Introduction to Statistical Learning with Applications in R. Springer. 2013.

В. В. Мисюра, М. Н. Богачева (Ростов-на-Дону, Россия)
vvmisyura2011@gmail.com

ПРЕДСКАЗАНИЕ ТЕНДЕНЦИЙ РАЗВИТИЯ ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ОСНОВЕ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК[1]

Цель исследования заключается в оценке возможности использования порядковых статистик для предсказания тенденции развития во времени финансовых временных рядов. Для описания эволюции величин S_t, соответствующих цене некоторого финансового инструмента в момент времени t, обратимся к случайному процессу $h_t = (h_t)_{1 \le t \le n}$ с дискретным временем, где $h_t = ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$. Определим функцию $Trend_i$, прогнозирующую тенденцию развития временного ряда на один временной период.

$$Trend_i = \begin{cases} -1, & \theta^i_+ < 0; \\ 0, & (\theta^i_- < 0) \& (\theta^i_+ > 0); \\ 1, & \theta^i_- > 0. \end{cases}$$

Функция содержит три значения -1, 0 и 1, которые характеризуют спад, стабильное состояние и подъем рынка соответственно и определяется пороговыми переменными (θ^i_-, θ^i_+). Пороговые переменные предлагается вычислять по формулам $\theta^i_\pm = \eta^i_{(h_k)} \pm \alpha\sqrt{\eta^i_{(\sigma^2_k)}}$, где $\eta^i_{(h_k)}$ – порядковая статистика, вычисленная по случайной последовательности h_t за k временных периода предшествующих уровню i, $\eta^i_{(\sigma^2_k)}$ – порядковая статистика вычисленная по случайной последовательности $\sigma^2_k = (h - \eta^i_{(h_k)})^2$ за k временных периода предшествующих уровню i, коэффициент α может быть настроен для каждой случайной последовательности. В качестве порядковых статистик $\eta^i_{(h_k)}$ могут применяться медиана, статистика Ходжеса-Лемана, статистика Диксона, статистика Огавы, статистика Пирсона-Тьюки, статистика Кенуя [1, 2]. Верификация предложенного метода выполнялась на примере активов компаний, представленных на российском фондовом рынке. Ошибка прогноза составила от 12 до 29%.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-01-00888 А

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хеттманспергер Т.* Статистические выводы, основанные на рангах / Пер с англ. М.: Финансы и статистика, 1987. 334 с.

2. *Кобзарь А.И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников: научное изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 816 с.

Н. В. Неумержицкая (Ростов-на-Дону)
neunata@yandex.ru

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ И КОНЦЕНТРАЦИИ ДРЕВЕСНОЙ ПЫЛИ В АТМОСФЕРНОМ ВОЗДУХЕ

Целью настоящего доклада является стохастическое моделирование движения от деревообрабатывающего цеха атмосферных загрязнителей PM_{10} и $PM_{2,5}$. Моделирование производилось посредством анализа отборов пыли.

Автором доклада был произведен отбор пыли в точках, находящихся на разных расстояниях от деревообрабатывающего цеха: на территории промплощадки (25м, 50м) и на границе санитарно-защитной зоны (100 м) [1]. Время отбора в каждой точке равнялось 20 минутам. Контроль метеорологических условий при отборе проб древесной пыли осуществлялся согласно требованиям [2]. Условия проведения замеров были таковы: относительная влажность воздуха $\varphi = 72\%$, температура воздуха $t = 18^0$C.

Ясно, что концентрация пыли определяется, в частности, характером ее движения. Предлагается вероятностная модель движения пыли в виде склеенных трехмерных винеровских процессов с различными сносами. На всех трех участках (0–25 м, 25–50 м, 50–100 м) снос определяется весом частицы и скоростью ветра. При этом частица, достигшая на каком-либо из участков поверхности земли, считается застывшей. При пересечении частицей условных вертикальных барьеров (на расстоянии 25, 50 и 100 м) вектор сноса изменяется. Концентрация частиц может быть определена с использованием функции распределения момента пересечения частицей условной границы и вероятностью того, что частица не осела на землю до этой границы.

ЛИТЕРАТУРА

1. СанПиН 2.2.1/2.1.1.1200-03 Санитарно-защитные зоны и санитарная классификация предприятий, сооружений и иных объектов. – Москва, 2003.

2. РД 52.04.186-89 Руководство по контролю загрязнения атмосферы. – Москва : Гидрометеоиздат, 1991. – 635 с. (в редакции приказов Федеральной службы по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды от 04.09.2014 г. № 493, от 02. 02.2016 г. № 46, от 02. 02.2016 г. № 47, от 02. 02.2016 г. № 48).

I. V. Pavlov (Rostov-on-Don)
pavloviv2005@mail.ru

NEW FAMILY OF ONE-STEP PROCESSES ADMITTING SPECIAL INTERPOLATION MARTINGALE MEASURES [1]

Denote by $Z = (Z_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^1$ a one-step process, where $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \oslash\}$, $\mathcal{F}_1$ is generated by a decomposition of Ω into a countable number of atoms B_k^i ($k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $1 \le i < m_k + 1$, $1 \le m_k \le \infty$), $Z_0 = a, Z_1(B_k^i) = b_k$ (b_k are different real numbers, $b_k \ne a \; \forall k \in \mathbb{N}$). Suppose that $\inf_k b_k < a < \sup_k b_k$. Denote by $\mathcal{P}$ the set of martingale measures P on $\{\Omega, \mathcal{F}_1\}$ such that $p_k^i := P(B_k^i) > 0$ and $b_l \ne \frac{\sum_J b_k p_k^i}{\sum_J p_k^i}$, $\forall l (1 \le l < \infty)$ and for all subsets $J \subset \{(k, i), 1 \le k < \infty, 1 \le i < m_k + 1\}$ with finite J^c. $\mathcal{P}$ is called set of special interpolation martingale measures.

Theorem. *If number a is irrational and all numbers b_k ($k \in \mathbb{N}$) are rational, then $\mathcal{P} \ne \oslash$.*

In [1] the following proposition was proved: if $m_k = 1 \; \forall k \in \mathbb{N}$, $\{b_k\}$ is exponentially increasing positive sequence and $b_1 < a < b_2$, then $\mathcal{P} \ne \oslash$. Recently V.V. Shamrayeva has essentially improved this result in another direction (see her absracts in the proceedings of this conference). Up to now there were not other results providing non-emptiness of the set $\mathcal{P}$. Remark that if $k \le n < \infty$, the corresponding facts can be found in [2-3].

The importance of all these results lies in the possibility to transform (with the help of measures $P \in \mathcal{P}$) arbitrage-free incomplete financial (B,S)-markets to arbitrage-free and complete ones and to construct hedging strategies (see, for example, the absracts of I.V. Tsvetkova in the proceedings of this conference).

R E F E R E N C E S

1. *Pavlov I.V., I.V. Tsvetkova I.V, Shamrayeva V.V.* // Some results on martingale measures of static financial markets models relating noncoincidence barycenter condition. Vestn. Rostov Gos. Univ. Putei Soobshcheniya, 2012, Vol. 45, No. 3, pp. 177–181.

2. *Bogacheva M.N., Pavlov I.V.* // Haar extensions of arbitrage-free financial markets to markets that are complete and arbitrage-free. Russian Math. Surveys, 2002, Vol. 57, No. 3, pp. 581–583.

3. *Pavlov I.V., I.V. Tsvetkova I.V, Shamrayeva V.V.* // On the existence of martingale measures satisfying the weakened condition of noncoincidence of barycenters in the case of countable probability space. Theory Probab. Appl., 2017, Vol. 61, Issu 1, pp. 167-175.

М. В. Платонова (Санкт-Петербург, Россия)
mariyaplat@rambler.ru

ВЕРОЯТНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

[1] This work was supported by the RFBR (project 16-01-00184).

Хорошо известно, что решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,x) = \varphi(x)$$

можно представить как математическое ожидание функционала от винеровского процесса

$$u(t,x) = \mathbf{E}\varphi(x - w(t)), \tag{1}$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Если рассмотреть задачу Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования порядка $m > 2$ вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c_m}{m!}\frac{\partial^m u}{\partial x^m}, \quad u(0,x) = \varphi(x), \tag{2}$$

где

$$c_m = \begin{cases} \pm 1, & m = 2k+1, \\ (-1)^{k+1}, & m = 2k, \end{cases}$$

то представление решения задачи Коши, аналогичное (1), но с заменой $w(t)$ на некоторый другой случайный процесс, невозможно, так как в этом случае фундаментальное решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c_m}{m!}\frac{\partial^m u}{\partial x^m}$ уже не является вероятностной мерой.

Мы построим вероятностную аппроксимацию в $W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$, $l > 0$ для решения задачи Коши (2), используя методы теории обобщенных функций и теории точечных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Платонова М. В.* Вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования высокого порядка. Записки научных семинаров ПОМИ. 2016. Том. 454, стр. 92–106.

D. B. Rokhlin (Southern Federal University, Russia)
rokhlin@math.rsu.ru

ASYMPTOTIC EFFICIENCY OF THE PROPORTIONAL COMPENSATION SCHEME FOR A LARGE NUMBER OF PRODUCERS[1]

We consider a manager, who allocates some fixed total payment amount between N rational agents in order to maximize the aggregate production. The profit of i-th agent is the difference between the compensation (reward) obtained from the manager and the production cost. We compare (i) the *normative* compensation scheme, where the manager enforces the agents to follow an optimal cooperative strategy; (ii) the *linear piece rates* compensation scheme, where the manager announces a reward per unit

[1]The research is supported by the Russian Science Foundation, project No 17-19-01038.

good; (iii) the *proportional* compensation scheme, where agent's reward is proportional to his contribution to the total output. The game, related to (iii) is a special case of the Cournot oligopoly: [1], and it fits into the extensively studied theory of contests: see [2].

Denoting the correspondent total production levels by s^*, $\hat{s}$ and $\overline{s}$ respectively, where the last one is related to the unique Nash equilibrium, we examine the limits of the prices of anarchy $A_N = s^*/\overline{s}$, $A'_N = \hat{s}/\overline{s}$ as $N \to \infty$. These limits are calculated for the cases of identical convex costs with power asymptotics at the origin, and for power costs $\varphi_i(x) = c_i x^\alpha$, $\alpha > 1$ corresponding to the Coob-Douglas and generalized CES production functions with decreasing returns to scale. Our results show that asymptotically no performance is lost in terms of A'_N, and in terms of A_N the loss does not exceed 31%.

The case of linear cost functions $\varphi_i(x) = c_i x$ appears to be more complex from the asymptotical point of view, although there is known an explicit expression for $\overline{s}$ in this case. To obtain a meaningful asymptotic result we assume that c_i are independent identically distributed random variables and $c_i \geq \underline{c} > 0$. Under this assumption our numerical experiments support the following conjecture: $\lim_{N\to\infty} A_N = 1$, a.s. Also, the proportion of active players tends to zero.

The talk is based on the on the joint work [3] with A.B. Usov.

REFERENCES

1. *von Mouche P., Quartieri F. (editors)* Equilibrium theory for Cournot oligopolies and related games. Springer. 2016.
2. *Vojnović M.* Contest theory: incentive mechanisms and ranking methods. Cambridge University Press. 2016.
3. *Rokhlin D. B., Usov A. B.* Asymptotic efficiency of the proportional compensation scheme for a large number of producers. Preprint arXiv:1701.06038 [q-fin.EC], 2017, 17 pages.

V. N. Rusev, A. V. Skorikov (Gubkin University, Moscow, Russia)
vnrusev@yandex.ru, skorikov.a@gubkin.ru

THE MEAN RESIDUAL LIFE (MRL) OF THE WEIBULL-GNEDENKO DISTRIBUTION

Средняя остаточная наработка (среднее остаточное время жизни - mean residual life (MRL))

$$\mu(t) = M(T - t\,|T > t)$$

является мерой процессов старения в приложениях теории надежности . В работе проводится исследование средней остаточной наработки для двупараметрического распределения Вейбулла–Гнеденко. Найдены аналитические представления через неполные гамма-функции $\gamma\,(a,\ x)$, $\Gamma\,(a,\ x)$ и гипергеометрическую функцию Куммера ${}_1F_1\,(a;\ b;\ x)$.

При использовании представлений через $\gamma\,(a,\ x)$, ${}_1F_1\,(a;\ b;\ x)$ вычисления , проведенные, как с помощью пакета Wolfram Mathematica, так и пакета Maple, показывают наличие осцилляции значений $\mu(t)$ при больших значениях параметра β (=8). Представление через $\Gamma\,(a,\ x)$ не дает осцилляцию при вычислениях. Отметим, что представление $\mu(t)$ через $\gamma\,(a,\ x)$ было известно [1]. Однако эффект осцилляции не был отмечен.

Также получено преставление $\mu(t)$ в виде ряда

$$\mu(t) = T_0 \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\alpha t)^{\beta k}}{k!} \left(1 - \frac{\alpha t k!}{\Gamma\left(k+1+\frac{1}{\beta}\right)}\right) + R_N(t)$$

с оценкой погрешности $R_N(t)$.

Получено асимптотическое представление для $\mu(t)$ при $t \to +\infty$, из которого, в частности, следует

$$\mu(t) \sim \frac{1}{\alpha^\beta \beta} t^{1-\beta}, \qquad \beta > 1, \quad (t \to +\infty).$$

Найдены формулы для дисперсии остаточной наработки:

$$\sigma^2(t) = \ 2e^{(\alpha t)^\beta} \cdot \frac{1}{\alpha^2 \beta} \cdot \Gamma\left(\frac{2}{\beta},\ (\alpha t)^\beta\right) - 2t \cdot \mu(t) - \mu^2(t).$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1.*Nassar, M.M., Eissa, F.H.* On the Exponentiated Weibull Distrbution. Communications in Statistics - Theory and Methods. 2003. Vol. 32, № 7, p. 1317 – 1336.

Н. В. Смородина (С.-Петербург, Россия)
smorodina@pdmi.ras.ru

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ: ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Будет изложен новый способ построения вероятностного представления решения начально-краевых задач с краевым условием Неймана для ряда эволюционных уравнений (в частности, для уравнения Шрёдингера) в ограниченной области D на плоскости с гладкой границей ∂D, основанный на построении специального продолжения начальной функции с области D на всю плоскость. Данный способ дает новый подход к построению "отражающегося от границы" винеровского процесса, впервые введенного А.В.Скороходом [1].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Скороход А. В.* Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами. Теория вероятн. и ее примен. 1961. Том. 6, №. 3, стр. 267–298.

С. И. Углич (Ростов-на-Дону)
uglitch@inbox.ru

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В МОДЕЛЯХ С ПРИОРИТЕТАМИ[1]

Работа выполнена в рамках научной тематики кафедры высшей математики ДГТУ. Исследуются возможности оптимизации квазилинейных моделей, описывающих взаимодействие различных конкурирующих структур с учетом случайной расстановки приоритетов сторонним лицом — арбитром, принимающим решения на основе экспертных рекомендаций.

Полагаем, что система состоит из трех структур, цели которых выражаются положительными непрерывными функциями квазилинейного типа:

$$F_j(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i + b_j\right) I_{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}x_i + b_j > 0\right\}}, j = 1, 2, 3.$$

Пусть $\alpha_j = \alpha_j(\omega)$ — произвольные независимые случайные величины, определенные на некотором вероятностном пространстве и принимающие значения на отрезке [0;1]. Рассматривается следующая целевая функция арбитра:

$$F = E(F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2} F_3^{\alpha_3}) = E(F_1^{\alpha_1})E(F_2^{\alpha_2})E(F_3^{\alpha_3}).$$

Дальнейшие вычисления проводятся в предположении, что все α_j равномерно распределены. Вводятся новые переменные:

$$t_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_i; t_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i2}x_i; t_3 = \sum_{i=1}^{n} a_{i3}x_i.$$

Для моделей со стацианарными точками, не нарушая общности, можно считать, что $t_3 = -c_1t_1 - c_2t_2$ (c_1, c_2 — некоторые положительные константы). Тогда $F(t_1, t_2) = f_1(t_1)f_2(t_2)f_3(t_1, t_2)$, где $f_1(t_1) = \frac{t_1+b_1-1}{ln(t_1+b_1)}$, $f_2(t_2) = \frac{t_2+b_2-1}{ln(t_2+b_2)}$, $f_3(t_1, t_2) = \frac{-c_1t_1-c_2t_2+b_3-1}{ln(-c_1t_1-c_2t_2+b_3)}$.

Область определения функции F задается системой неравенств: $t_1 + b_1 > 0; t_2 + b_2 > 0; -c_1t_1 - c_2t_2 + b_3 > 0$. Эти неравенства определяют в плоскости t_1, t_2 треугольную область. В докладе описывается численное нахождение максимума функции $F(t_1, t_2)$. Например, при значениях параметров $c_1 = 1.5, c_2 = 2, b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 3$ максимум функции F достигается при $t_1 = 0.435, t_2 = 0.0184$ и $F_{max} = 1.902$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00184).

И. В. Цветкова (Ростов-на-Дону)
pilipenkoIV@mail.ru

КВАНТИЛЬНОЕ ХЕДЖИРОВАНИЕ СТАТИЧЕСКОГО РЫНКА СО СЧЁТНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ [1]

Рассматривается статический $(1, Z)$-рынок, заданный на фильтрованном пространстве $(\Omega, \mathbf{F})$, $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k=0}^{1}$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(B_1, B_2, \dots)$ — σ-алгебра, порождённая разбиением Ω на счётное число атомов $B_1, B_2, \dots$.
Пусть $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^{1}$ — $\mathbf{F}$-адаптированный случайный процесс (дисконтированная стоимость акции), $\mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ — множество вероятностных мер P, для которых случайный процесс $(Z_k, \mathcal{F}_k, P)_{k=0}^{1}$ является мартингалом. Если рассматриваемый $(1, Z)$-рынок неполон, то переход к полному осуществляется с помощью построения интерполяционных рынков. Для этого рассмотрим специальную хааровскую интерполирующую фильтрацию
$\mathbf{H} = (\mathcal{H}_n)_{n=0}^{\infty}$ $(\mathcal{H}_0 = \mathcal{F}_0,\ \mathcal{H}_1 = \sigma\{B_{n_1}\}, \mathcal{H}_2 = \sigma\{B_{n_1}, B_{n_2}\}, \dots, \mathcal{H}_\infty = \sigma\{B_{n_1}, B_{n_2}, \dots\}$, $\mathcal{H}_\infty = \mathcal{F}_1$, $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ — произвольная фиксированная перестановка натуральных чисел). Пусть $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ удовлетворяет ОСУХЕ [1]. Построим мартингальную хааровскую интерполяцию $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n, P)_{n=0}^{\infty}$ случайного процесса Z следующим образом: $Y_n = E^P[Z_1 \mid \mathcal{H}_n]$. Полученный рынок, интерполирующий исходный, является полным, т.е. для любого финансового обязательства существует реплицирующий его самофинансируемый портфель $\pi = (\beta_n, \gamma_n)_{n=0}^{\infty}$ [2]. При практическом расчёте компонент портфеля π мы будем использовать квантильное хеджирование. Для этого по любому сколь угодно малому ε (точность вычисления) определяется вычислительный горизонт $N : \sum\limits_{i=1}^{N} P(B_{n_i}) > 1-\varepsilon$. В докладе будет представлен алгоритм вычисления горизонта N, а также программная реализация построения простейшего хеджа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Данекянц А. Г., Павлов И. В.* Об ослабленном свойстве универсальной хааровской единственности // Обозрение прикл. и промышл. матем.,М.: 2004. Т. 11. № 3. С. 506-508.
2. *Цветкова И. В., Шамраева В. В.* Расчёт компонентов хеджирующего портфеля с помощью процедуры хааровской интерполяции. // Интернет-журнал Науковедение. 2013. №3.(16). С. 145.

Е. Г. Чуб (Ростов-на-Дону, Россия)
elenachub111@ gmail.com

УРАВНЕНИЯ ОЦЕНИВАНИЯ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО НАВИГАЦИОННОГО КОМПЛЕКСА

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00184).

Предлагается новая методика, основанная на методе моментов, позволяющая существенно повысить точность оценивания инерциальной навигационной системы железнодорожного комплекса. Применение метода моментов к определению апостериорной плотности вероятности вектора состояния инерциальной навигационной системы железнодорожного навигационного комплекса позволяет свести решение исходного интегро-дифференциального уравнения в частных производных Стратоновича к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. Наличие смешанных моментов, возникающих при решении данной задачи, устанавливает корреляционные связи между координатами вектора состояния инерциальной навигационной системы железнодорожного навигационного комплекса, что делает отличным представляемую модель от уже имеющихся. [2,3]. Предложенный подход позволяет существенно упростить вычислительные затраты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991. – 608 с.

2. *Погорелов В.А., Чуб Е.Г. Митькин А.С.* Использование распределений Пирсона при синтезе субоптимального алгоритма фильтрации многомерного марковского процесса// «Общие вопросы радиоэлектроники», вып №1 2014 с.149-156.

3. *Погорелов В.А., Чуб Е.Г. Митькин А.С.* Использование распределения Пирсона для синтеза субоптимальных алгоритмов фильтрации многомерных марковских процессов // Известия вузов Радиофизика 2015 т.58, с.244-253.

В. В. Шамраева (Ростов-на-Дону)
shamraeva@mail.ru

УСЛОВИЕ НЕСОВПАДЕНИЯ БАРИЦЕНТРОВ НА СЧЕТНОМ ВЕРОЯТНОСТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

Рассмотрим фильтрованное пространство $(\Omega,\mathbf{F})$ с фильтрацией $\mathbf{F}=(\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1)$, где $\mathcal{F}_0=\{\Omega,\oslash\}$, а $\mathcal{F}_1=\sigma\{B_i, i\in\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}: \cup_{i=1}^{\infty}B_i=\Omega, B_i\cap B_j=\oslash\,(i\neq j)\}$. Рассмотрим случайный процесс $Z=(Z_n,\mathcal{F}_n)_{n=0}^{1}$, где $Z_0:=a$, $Z_1|_{B_i}:=b_i$.

Через $\mathcal{P}(Z,\mathbf{F})$ обозначим множество мартингальных мер (м.м.) P процесса Z таких, что $p_i:=P(B_i)>0$ $(i\in\mathbb{N})$, и будем говорить, что $P\in NBC$ (удовлетворяет **условию несовпадения барицентров**), если абсолютно сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_ip_i$ и

$$\forall I,J\subset\mathbb{N}\ (I\cap J=\oslash, |I|\leqslant|J|)\ \frac{\sum_I b_ip_i}{\sum_I p_i}\neq\frac{\sum_J b_jp_j}{\sum_J p_j}.$$

В случае конечной σ-алгебры $\mathcal{F}_1$ множество NBC изучено довольно подробно (см., например, [1-2]). В частности, в указанных работах было установлено, что $NBC\neq\oslash$, если $\mathcal{P}(Z,\mathbf{F})\neq\oslash$ и $a\neq b_i,\forall i$. До настоящего времени вопрос о

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00184).

непустоте NBC в случае счетнопорожденной $\mathcal{F}_1$ оставался открытым. Следующая теорема дает частичный ответ на данный вопрос.

Теорема. *Пусть* $b_1 < a < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 < \ldots$, *причём* $b_i - b_{i-1} \geqslant b_{i-1}, \forall i \geqslant 2$. *Тогда* $NBC \neq \oslash$.

Заметим, что если неравенство, определяющее NBC, выполняется лишь для таких I и J, для которых $|I| = 1$, а $\mathbb{N} \setminus J$ конечно, то получаем определение **ослабленного условия несовпадения барицентров** и соответствующего множества $WNBC$. Достаточные условия, обеспечивающие непустоту $WNBC$, получены в [2-3].

Результаты, анонсируемые в данных тезисах, а также полученные ранее в работах [1-3], касаемые множеств NBC и $WNBC$, успешно используются при расчетах цен различных финансовых обязательств и построении хеджирующих портфелей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богачева М.Н., Павлов И.В.* // О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных. Успехи матем. наук, 2002, т. 57, вып. 3, с.143-144.
2. *Павлов И.В., Цветкова И.В., Шамраева В.В.* // Некоторые результаты о мартингальных мерах одношаговых моделей финансовых рынков, связанные с условием несовпадения барицентров. Вестник РГУПС, 2012, N 3, с.177-181.
3. *Павлов И.В., Цветкова И.В., Шамраева В.В.* // О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров, в случае счётного вероятностного пространства. Теория вероятностей и её применения, 2016, т.61, вып.1, с.173-181.

E. B. Yarovaya (Moscow, Russia)
yarovaya@mech.math.msu.su

OPERATOR MODELS OF BRANCHING RANDOM WALKS AND THEIR SPECTRAL ANALYSIS [1]

Nowadays it is commonly accepted to describe stochastic processes with generation and transport of particles, used in statistical physics, chemical kinetics, population dynamic studies etc., in terms of branching random walks. We consider a continuous-time symmetric irreducible branching random walk on a multidimensional lattice with a finite set of the particle generation centres, i.e. branching sources. Behavior of branching random walks in many ways determined by properties of a particle motion and a dimension of the space in which the particles evolve. Despite the probabilistic background of the problem, the work is essentially deals with functional analytic methods and, more precisely, with the methods of spectral theory. The main object of study is the evolutionary operator for the mean number of particles both at an arbitrary point and on the entire lattice. The existence of positive eigenvalues in the spectrum of an evolutionary operator results in an exponential growth of the number of particles in branching random walks, called supercritical in the such case. For supercritical branching random walks, it is shown that the amount of positive eigenvalues of the

[1] This work was supported by the Russian Science Foundation (project 14-21-00162).

evolutionary operator, counting their multiplicity, does not exceed the amount of branching sources on the lattice, while the maximal of these eigenvalues is always simple. We demonstrate that the appearance of multiple lower eigenvalues in the spectrum of the evolutionary operator can be caused by a kind of 'symmetry' in the spatial configuration of branching sources. We obtain limit theorems for 'receding' sources, i.e. in the case when the pairwise distances between sources tend to infinity. The presented results are based on Green's function representation of transition probabilities of an underlying random walk and cover not only the case of the finite variance of jumps but also a less studied case of infinite variance of jumps.

Session VI

Bioinformatics and Mathematical Modelling

Abdulrahman H., Skorokhodov V. A. (Rostov-on-Don, Russia)
abdulrahm.haidar@gmail.com, pdvaskor@yandex.ru

ON ERGODIC BIRESOURCES NETWORKS WITH MAGNETIC REACHABILITY

Resource network is a graphical model of diffusion proposed earlier in the literature. Every node of the network stores some amount of «resource». This resource disseminates through networks according to the specified rules.

We consider ergodic biresource network G with magnetic reachability, and let G' – be an auxiliary network of G.

Set of values $\{q_i^{j,l}(t)\}$ $i \in [1;n]_Z$, $j \in [1;k]_Z$, $l \in \{1,2\}$ are called network G status in the moment t. Each value $q_i^{j,l}(t)$ is called the quantity of resource l in vertex i, which has level j of magnetism in the moment t.

We define rules of functioning of the biresourse network: for each $i \in [1;n]_Z$, $j \in [1;k]_Z$, $l \in \{1,2\}$

$$q_i^{j,l}(t+1) = q_i^{j,l}(t) - \sum_{v \in [x_i^j]^+} F^l(v,t) + \sum_{v \in [x_i^j]^-} F^l(v,t),$$

where $F^l(v,t)$ is a the resource l flow value, which passes through the arc v in the moment t.

Resource allocation methods on the biresources networks with magnetic reachability are developed in two cases:

– the first resource is the main resource at all.

– the first resource is the main, but with magnetic properties.

Methods of finding threshold value of the first (the main) resource on the biresources networks with magnetic reachability are developed in case, where both of resources are independent distributed for each other.

REFERENCES

1. *Skorokhodov V. A., Chebotareva A. S.* The Maximum Flow Problem in a Network with Special Conditions of Flow Distribution. Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2015. Vol. 9, No. 3. pp. 435–446.

2. *Erusalimskyi Ya. M., Skorokhodov V. A., Kuzminova M. V., Petrosyan A. G.* Graphs with a non-standard reachability. Problems and applications (Rus.)/ Rostov-on-Don: Southern Federal University, 2009.

Г. И. Белявский (Ростов-на-Дону, Россия)
beliavsky@hotmail.com

ПРОГНОЗ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ. ПРИМЕНЕНИЕ ONLINE LEARNING ТЕХНОЛОГИИ[1]

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта N 17-01-00888а

Наше исследование связано с прогнозом потока случайных событий в дискретном времени. В основе любого прогноза лежит математическая модель потока. Математическая модель содержит параметры, некоторые из которых мы относим к неопределенным параметрам по причине того, что статистические методы не позволяют найти хорошую оценку, например, из-за отсутствия стационарности или из-за недостаточного объема выборки. Обозначим через M множество моделей, которые могут участвовать в описании потока. Предсказание потока случайных события эквивалентно предсказанию случайной последовательности Y, состоящей из нулей и единиц. Единица соответствует наступлению случайного события. Предсказание случайного события заключается в вычислении прогнозной вероятности наступления случайного события $p_t = P(Y_t = 1/F_{t-1})$. Мы будем использовать стохастический базис $\langle \Omega, (F_t)_{t\geq 0}, F, (P_i)_{i\in M}\rangle$, $\Omega-$множество бинарных последовательностей, фильтрация F_t обладает стандартным набором свойств и каждая из моделей порождает вероятностною меру на сигма алгебре F. Условный закон распределения $L_i(y_t/F_{t-1})$, порождаемый моделью i, определяется вероятностной функцией $p_i(y_t/F_{t-1}) = (q_{i,t})^{y_t}(1-q_{i,t})^{1-y_t}, y_t \in \{0,1\}$. Участвующая в определении случайная величина предсказуема: $q_{i,t} \in F_{t-1}$.

Мы рассматриваем задачу вычисления прогнозной вероятности как задачу согласования мнений экспертов. Для согласования мнений разработаны специальные методы, объединенные общим названием online learning [1,2]. Основная цель заключается в адаптации методов на случай бесконечного множества экспертов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lugosi G.* Lecture on prediction of individual sequences/ Presented at 2001 a Statistics Odissey center Emil Borel, Institute Henry Pascal, 92 p.

2. *Cesa-Bianchi N., Lugosi G.* Prediction, learning and games. Cambrige university press, 2006, 407 p.

Н. В. Боев (Ростов-на-Дону, Россия)
boyev@math.rsu.ru

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАЛИЧИЯ ЧАСТИЧНЫХ ОТСЛОЕНИЙ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ШАРОВЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ОТ УПРУГОЙ МАТРИЦЫ МЕТАМАТЕРИАЛА[2]

Образец имеет форму куба и изготовлен из метаматериала, состоящего из упругой матрицы, с твердыми шаровыми включениями одинакового радиуса, центры которых расположены в узлах троякопериодической сетки с одинаковым шагом по всем трем направлениям естественно связанными с ребрами и гранями куба. По проекту включения должны быть жестко сцепленны с упругой матрицей. Однако при изготовлении метаматериала возможно образовались отслоения шаровых включений от упругой матрицы. Для каждой из трех пар противоположных

[2]Исследования проведены при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, грант № 15-19-10008.

граней куба проводятся следующие эксперименты: с одной из этих граней в куб вводятся одинаковые импульсы с тональным заполнением несколькими периодами плоской высокочастотной, монохроматической продольной упругой волны, а на противоположной грани принимается прошедшая продольная волна. Пусть известны результаты практических измерений перемещений в принятых, на противоположных гранях куба, импульсах. По принятым шести импульсам надо определить, во-первых, наличие отслоений и, во-вторых, их местоположение в образце. Решение обратной задачи основано на решении прямой задачи о прохождении плоской упругой продольной волны через троякопериодическую систему твердых шаровых включений, находящихся в кубе без отслоений. Теоретические расчеты проводятся методами коротковолновой дифракции упругих волн в локальной постановке с учетом многократных переотражений волн на системе твердых шаровых включений. Если отслоений в образце нет, то отклонения результатов теоретических расчетов и практических измерений минимальные. В случае расхождения этих результатов для определения пространственного местоположения отслоений совместно анализируются и сопоставляются области расхождения результатов на каждой из шести граней приема импульса.

А. О. Ватульян, Д. В. Гусаков (Ростов-на-Дону, Россия)
vatulyan@math.rsu.ru, gusakov.dv@yandex.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ ПОРИСТОУПРУГИХ ВОЛНОВОДАХ

В рамках модели пористоупругости Био [1] рассмотрена задача о вынужденных колебаниях неоднородного по толщине пористоупругого слоя. Предложен метод построения волновых полей в слое под действием нагрузки для произвольного вида поперечной неоднородности материальных характеристик.

Решение строится с помощью интегрального преобразование Фурье. Для полученной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в трансформантах проанализированы операторные пучки, зависящие от двух параметров, исследована структура особого множества, сформулированы вспомогательные задачи Коши, а общее решение построено в виде линейных комбинаций решений вспомогательных задач Коши, найдены мероморфные передаточные функции.

Перемещения вычисляются путем обращения преобразования Фурье. Полученные в результате такого обращения интегралы могут быть вычислены как прямым численным интегрированием, так и при помощи теории вычетов. Для применения теории вычетов необходимо знать положение особых точек передаточных функций, или компонент дисперсионного множества. Нахождение таких точек основано на формулировке новой спектральной задачи и ее анализе.

Сравнение результатов расчетов волновых полей, полученных прямым численным интегрирование и при помощи теории вычетов, показало хорошее совпадение. При этом использование теории вычетов оказалось на порядок эффективнее с точки зрения временных затрат.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Biot, M. A.* Generalized Theory of Acoustic Propagation in Porous Dissipative Media. The Journal of the Acoustical Society of America. 1962. Vol.34. P.1254–1264.

Л. Р. Гервич (Ростов-на-Дону, Россия)
lgervith@gmail.com

АВТОМАТИЧЕСКОЕ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Численные методы решения задач математической физики могут иметь такую вычислительную сложность и такой объем данных, что произвести их расчет представляется возможным только на суперкомпьютере с современной архитектурой. Поэтому в настоящее время распараллеливание является одним из наиболее эффективных способов расчета численных методов.

Но программу недостаточно просто запустить на суперкомпьютере. Для достижения максимального ускорения ее необходимо распараллелить. Распараллеливание программы для запуска на суперкомпьютере – непростая задача, а эффективное распараллеливание – еще более непростая. Например, размещение данных с перекрытиями позволяет ускорить параллельный алгоритм еще на 30%, но количество написанного кода при этом увеличивается в 1.5 раз.

Для решения данной проблемы предлагается использование автоматического распараллеливания. Программист размечает последовательный код специальными прагмами, а компилятор преобразует код с прагмами в параллельный.

Автоматическое распараллеливание реализовано в Оптимизирующей Распараллеливающей Системе и поддерживает дополнительные оптимизации и нестандартные размещения данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гервич Л. Р., Кравченко Е. Н., Штейнберг Б. Я., Юрушкин М. В.* Автоматизация распараллеливания программ с блочным размещением данных // Сиб. журн. вычисл. матем. 2015. Т. 18, № 1. С. 41–53.

2. *Четверушкин Б. Н., Якобовский М. В.* Вычислительные алгоритмы и отказоустойчивость гиперэкзафлопсных вычислительных систем // Доклады Академии наук. 2017. Т. 472, № 1. С. 1-–5.

3. *Оптимизирующая распараллеливающая система* URL: http://www.ops.rsu.ru (дата обращения: 31.03.2017).

КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ СПИРАЛЬНЫЕ МОДЫ В КРОВЕНОСНОМ СОСУДЕ В. А. Гетман (Ростов-на-Дону, Россия)
vagetman@sfedu.ru

Исследования волновых процессов в кровеносных сосудах активно продолжаются, начиная со второй половины девятнадцатого столетия. Впервые были рассчитаны длинные продольные волны по линейной теории в цилиндре, ограниченном упругой оболочкой. Затем возник вопрос расчета спиральных движений в сосудах. Отметим работы Устинова Ю.А. по исследованию свойств длинных спиральных волн в кровеносных сосудах. Известно, что длинные волны распространяются на фоне стационарного потока, который может моделироваться либо известным течением Пуазейля, либо равномерным потоком. Экспериментальные исследования показали, что стационарный поток имеет постоянную скорость в окрестности оси сосуда и формирует пограничные вблизи стенки этого сосуда. Кроме длинных волн в сосудах распространяются длинные и короткие спиральные волны. Отметим, что длинные спиральные волны бегут в тонком пограничном слое вблизи стенки сосуда. Короткие спиральные волны заполняют все поперечное сечение сосуда. Кроме спиральных волн в сосуде имеются квазистационарные спиральные моды, которые в первом приближении не зависят времени. Отметим, что первая квазистационарная мода не изменяет направления вращения жидкости.

В докладе построены асимптотические разложения квазистационарных мод на основе нелинейных уравнений Навье-Стокса. Главное приближение удовлетворяет краевой задаче для линеаризованного дифференциального уравнения в частных производных, коэффициенты которого, зависят от продольной и радиальной компонент скорости длинных волн. Отметим также, что это уравнение содержит два малых параметра, имеющих разный физический смысл. В работе эти параметры связаны линейной зависимостью. В нулевом приближении получено стационарное решение, коэффициенты которого определяются из условия периодичности по времени решений краевой задачи в первом приближении. Решение в главном приближении найдено численно. Получена оценка вклада в решение от функций, описывающих пограничные слои. Показано, что в главном приближении нулевая квазистационарная мода не зависит от времени и не изменяет направление вращения жидкости в сосуде.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕПИ ПОСТАВОК ТОВАРОВ

Л. В. Карташева (Ростов-на-Дону, Россия)
kartasheva@mail.ru

Управление цепями поставок - это интегральный подход к бизнесу, раскрывающий фундаментальные принципы управления в логистической цепи. Цель управления цепями поставок состоит в минимизации общих логистических издержек при удовлетворении данного фиксированного спроса. При построении модели для решения конкретных проблем планирования можно исследовать лишь часть общей цепи поставок компании и связанных с ней издержек. Управленческие решения о цепи поставок и спросе также очень тесно связаны с корпоративными финансовыми решениями, особенно при планировании стратегии фирмы. Поэтому компании рассматривают оптимизационные модели для анализа финансовых решений. Данные модели могут быть полностью интегрированы в логистические модели. В работе найдена целевая функция зависимости прибыли от поставок. Показано, что поставка третьего вида товаров не дает прибыли. Предприятие использует складскую форму завоза товара. С помощью методов оптимизации решается задача о размещения трех видов угля по трем складам с минимальными издержками. Затем уголь необходимо поставить с трех складов на заводы в пять разных городов в разных требуемых количествах. Рассчитываются минимальные стоимости затрат на перевозки без разбивки товаров на группы и с разбивкой товаров на группы. Оказалось, что стоимость перевозок в первом случае - 34638,6 рублей; а во втором - 34647,6 Компании, конечно, выгоднее перевозить товар без разбивки на группы товаров, но при этом требования заказчиков не выполняются. Незначительная разница (34647,6 -34638,6=9) убедит компанию, что сделка все – таки выгодна.

Е. А. Лукьянова (г. Симферополь, Россия)
lukyanovaea@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПОНЕНТНЫХ СЕТЕЙ ПЕТРИ В ОКРЕСТНОСТНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

В настоящее время классы окрестностных моделей [1], полученные на основе сетей Петри, эффективно используются для построения математических моделей динамических производственных систем и решения задач достижимости. Использование при моделировании сложных систем компонентных сетей Петри [2] позволяет сохранять исходную модульность исследуемой системы и получать редуцированную модель системы структурно подобную самой системе.

Рассматривается возможность совместного использования следующих инструментов для моделирования сложных параллельных и распределенных систем: окрестностных систем [3] и компонентных сетей Петри, выявляются пути использования моделирующих особенностей компонентной сети Петри при кластеризации окрестностной системы [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блюмин С. Л., Шмырин А. М., Седых И. А., Филоненко В. Ю.* Окрестностное моделирование сетей Петри. Липецк: ЛЭГИ. 2010.

2. *Лукьянова Е. А.* О структурных элементах компонентной сети Петри. Проблеми програмування. 2012. № 2-3, стр. 25-32.

3. *Блюмин С. Л., Шмырин А. М.* Окрестностные системы. Липецк: Липецкий эколого-гуманитарный институт. 2005.
4. *Шмырин А. М., Мишачёв Н. М., Косарева А. С.* Кластеризация окрестностной структуры. Вестник Тамбовского университета. 2016. Том. 21, вып. 2, стр. 457-462.

K. A. Nadolin, I. V. Zhilyaev (Rostov-on-Don, Russia)
kanadolin@sfedu.ru

ON THE MODELLING OF A WATERCOURSE BASED ON REDUCED 3D MODEL

Some further results of research [1] are presented. Main goal of the study is to provide simplified 3D mathematical model for hydrodynamics of shallow open shear flows and to testing them. This model can be applied to natural streams like rivers and channels. The distinctive feature of such watercourses is a considerable difference in sizes of their length, width and depth. For example, the ratio between the characteristic depth and width for a typical lowland river varies from 1:10 to 1:200.

We consider an open turbulent flow of incompressible viscous fluid in the section of river or channel. The river-bed is assumed known and weakly curved. Also the stream is assumed lengthy and shallow. So, the geometry of the considered part of the stream can be described by known functions smooth enough. Also the length of this section of a channel is large with respect to its width, and the width of this section is large with respect to its depth.

As a result a mathematical model is derived by means of small parameters technique. Starting from the original 3D Reynolds equations for the incompressible fluid, coupled with the Boussinesq turbulence hypothesis we come to a recurrent sequence of the boundary-value problems for quasilinear PDEs. The starting system in this recurrent sequence is called *the reduced 3D mathematical model of watercourse*.

The numerical results show that this reduced 3D model adequately describes the hydrodynamics of natural streams. It provides acceptable accuracy and allows the improvements by means of applying the recurrent correction procedure.

The reduced 3D model take into account the cross-structure of a stream. This is a strong particular feature of the proposed model. That allows us to study the flow in a channel with varying width and depth more accurate than by utilizing the on-depth-averaged models. For example, we can catch the phenomenon of occurrence the opposite flow in a near-surface region, which may be caused e.g. by means of the wind action.

REFERENCES

1. *Nadolin K. A., Zhilyaev I. V.* Numerical modeling of the shallow and longitudinal turbulent stream based on the 3D reduced model // Numerical Algebra with Applications / Proc. of IV China-Russia Conf., 26-29 June, 2015, Rostov-on-Don, Russia. – Rostov-on-Don: SFedU Publ., 2015. P. 119-123.

Е. В. Пучков (Ростов-на-Дону, Россия)
puchkoff@i-intellect.ru

ПРОДВИНУТЫЕ НЕЙРОСЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ[1]

В последние года значительный прогресс в области компьютерного зрения был достигнут с применением нейронных сетей. Современные нейросетевые модели достаточно успешно были внедрены в различные приложения поиска по изображениям, обработки рентгеновских снимков и др. Можно выделить три основных типа задач, которые решаются при распознавании образов: задача классификации изображений (выход сети - номер класса), детектирование объектов (выход сети - координаты объекта и номер класса, к которому он относится), сегментация (выход сети - матрица меток сегментов объекта). В таблице ниже представлены наиболее известные нейронные сети для решения подобных задач.

Классификация	**Детектирование**	**Сегментация**
VGG 16	Faster R-CNN	SegNet
Inseption V2, V3	R-FCN	U-Net
ResNet-101	SSD	PixelNet
Inseption ResNet V4	YOLO	FC-DenseNets

В основе всех представленных архитектур лежат сверточные нейронные сети. Первая группа сетей позволяет эффективно производить извлечение признаков и классифицировать изображения. Сети второй группы являются сочетанием детектора и сверточной сети, поэтому возможно комбинирование любой сети из первой группы с мета-алгоритмом детектора [1]. Особенностью последней группы является применение полносвязных сверточных сетей [2].

Стоит также отметить, что возможность сверточной нейронной сети извлекать инвариантные признаки в изображениях позволяет успешно применять их не только в задачах компьютерного зрения, но и в задачах обработки естественного языка, прогнозировании временных рядов и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jonathan Huang et al.* Speed/accuracy trade-offs for modern convolutional object detectors. arXiv preprint: arXiv:1611.10012, 2016.

2. *Jonathan Long, Evan Shelhamer, and Trevor Darrell* Fully Convolutional Networks for Semantic Segmentation. CVPR, 2015.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта N 17-01-00888а

Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — VII» в г. Ростове-на-Дону. Материалы конференции. Издательский центр ДГТУ, Ростов н/Д, 2017. — 168 с. ISBN: 978-5-7890-1271-0