8. Степенные ряды

Вопросы сходимости рядов в комплексной плоскости достаточно просто сводятся к соответствующим понятиям вещественного анализа. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$. В этом случае $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$.

Что касается абсолютной сходимости, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Re} z_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Im} z_n|$. Это следует из неравенств $|\operatorname{Re} z_n| \le |z_n|, \quad |\operatorname{Im} z_n| \le |z_n|, \quad |z_n| \le |\operatorname{Re} z_n| + |\operatorname{Im} z_n|$.

Рассмотрим степенной ряд в комплексной плоскости

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (a_n \in \mathbb{C}). \tag{1}$$

Как и в действительном анализе, для него находится *радиус сходимости* R, исходя из формулы $\dfrac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ $\Big($или $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ или $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ в случае существования этих пределов$\Big)$. Внутри *круга сходимости* $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ ряд (1) сходится, причём абсолютно. Если $|z - z_0| > R$, то ряд (1) расходится. В точках окружности $|z - z_0| = R$ ряд (1) может сходиться, а может и расходиться.

Ряды Лорана. *Рядом Лорана* называется степенной ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{2}$$

Первое слагаемое в последнем выражении называется *правильной частью* ряда Лорана, второе слагаемое — *главной частью*.

Пусть R — радиус сходимости правильной части.

Изучим область сходимости главной части. Обозначим: $b_n = a_{-n}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, $\zeta = (z - z_0)^{-1}$. Тогда главная часть перепишется в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^n.$$

Пусть ρ — радиус сходимости этого ряда, то есть ряд сходится, если $|\zeta| < \rho$, и расходится, если $|\zeta| > \rho$. Переходя к старым переменным и учитывая, что $|z - z_0| = \dfrac{1}{|\zeta|}$, видим, что главная часть ряда (2) сходится абсолютно, если $|z-z_0| > \frac{1}{\rho}$, и расходится, если $|z-z_0| < \frac{1}{\rho}$.

Обозначив $\frac{1}{\rho}$ через r, получаем, что ряд (2) сходится абсолютно внутри кольца $r < |z-z_0| < R$, которое называется *кольцом сходимости* ряда Лорана (2), и расходится вне кольца $r \leq |z-z_0| \leq R$. Отметим, что для произвольного ряда Лорана кольцо сходимости может быть и пустым (например, ничего не припятствует тому, что r может получиться больше, чем R).