1. Элементы теории поля (интегральные характеристики)

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ будем рассматривать векторное поле $\mathbf{a} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, т.е.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = (x,y,z) \in \Omega.$$

Если Γ — ориентированная кривая в Ω, то криволинейный интеграл 2-ого рода,

$$\int\limits_{\Gamma} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

называется *работой* поля $\mathbf{a}$ вдоль кривой Γ. Интеграл по замкнутому контуру $\oint\limits_{\Gamma} \mathbf{a}\,d\mathbf{r}$ называется *циркуляцией*.

Поле $\mathbf{a}$ называется *потенциальным*, если найдется такое скалярное поле u (называемое *потенциалом*), что $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$. В этом случае

$$\int\limits_{\Gamma} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = u(B) - u(A),$$

где точка A — начало, а B — конец кривой Γ. В частности, $\oint\limits_{\Gamma} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = 0$. Напомним, что необходимым условием потенциальности поля $\mathbf{a}$ является: $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$. В случае односвязной области это условие является и достаточным.

Пусть, теперь, D — двусторонняя кусочно-гладкая поверхность в Ω, выбор стороны которой указывается направлением единичной нормали $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r} \in D$). Поверхностный интеграл 2-ого рода

$$\iint\limits_{D} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint\limits_{D} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\,dS$$

называется *потоком* векторного поля $\mathbf{a}$ (или вектора $\mathbf{a}$) через поверхность D.

Формула Гаусса–Остроградского записывается в виде

$$\iint\limits_{D} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\,dS = \iiint\limits_{T} \operatorname{div}\mathbf{a}\,dxdydz,$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к границе D ограниченного тела T.

Формула Стокса записывается в виде

$$\oint\limits_{\Gamma} \mathbf{a}\, d\mathbf{r} = \iint\limits_{D} (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n})\, dS,$$

где обход замкнутого контура Γ — границы поверхности D — согласован по правилу буравчика с ориентацией D.

Напомним ещё, что если поверхность задана в виде $F(x, y, z) = 0$, то нормальный вектор может быть найден по формуле:

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}) = \Big(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z),\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z),\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)\Big),$$

а единичный нормальный вектор — $\mathbf{n} = \pm\dfrac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$.

Задание по теме. Прорешать указанные номера, используя указания к некоторым из них. В скобках приведены номера в изданиях, которые обычно используется в электронном формате.

4452.3 (4452.2). Вычислить криволинейный интеграл 2-ого рода, запараметризовав отрезок: $x = t$, $y = 3t$, $z = 5t$, $0 \le t \le 1$.

4454.1 (4454). Применить формулу Стокса (фактически, — Грина).

4457.2 (4457.1).

4442.1 (4441). Рассмотреть $(\mathbf{r}, \mathbf{n})$.

4444. $(= 3 \iint\limits_{D} z^2\, dxdy.)$

4443. Добавить основание и применить формулу Остроградского–Гаусса.

4452.1 (4452), 52.2 (52.1), 57.1 (57), 42.2 (42), 45.1 (45), 58.