ГЛАВА 12. ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§1. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Линейное отображение пространства $\mathbf{X}$ в пространство $\mathbb{C}$

$$l : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$$

называется *линейным функционалом* (*линейной формой*). Подчеркнем, что линейный функционал ставит в соответствие каждому вектору $x \in \mathbf{X}$ число.

<u>Теорема Рисса.</u> Пусть l — линейный функционал, заданный на конечномерном евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$. Тогда существует и при том только один вектор $u \in \mathbf{X}_n$ такой, что

$$l(x) = (x, u) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n.$$

Рисс Фридьеш (Riesz Frigyes; 1880 — 1956) — венгерский математик.

.

Доказательство. Убедимся сначала, что вектор u определяется по функционалу l однозначно.

Действительно, если предположить, что существует еще один вектор $u^1 \in \mathbf{X}_n$ такой, что

$$l(x) = (x, u^1) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

то почленно вычитая из этого равенства равенство

$$l(x) = (x, u) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

получим, что

$$(x, u^1 - u) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n.$$

В равенстве

$$(x, u^1 - u) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n.$$

можно положить, в частности,

$$x = u^1 - u$$

и тогда

$$(u^1 - u, u^1 - u) = 0$$

т. е.

$$u^1 = u.$$

Докажем существование вектора u, определяемого тождеством

$$l(x) = (x, u) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n.$$

Фиксируем в пространстве $\mathbf{X}_n$ некоторый ортонормированный базис $\{e^k\}_{k=1}^n$ и пусть

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k.$$

Тогда вследствие линейности функционала l получаем

$$l(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k l(e^k).$$

Положим

$$u = \sum_{k=1}^{n} \overline{l(e^k)} e^k.$$

Применяя формулу

$$(x, u) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_k, \quad \text{где} \quad \eta_k = \overline{l(e^k)},$$

будем иметь, что

$$(x, u) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k l(e^k).$$

.

Итак,

$$l(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k l(e^k)$$

и

$$(x, u) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k l(e^k).$$

Следовательно,

$$l(x) = (x, u)$$

для любого $x \in \mathbf{X}_n$. $\square$

§2. СОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР

Пусть $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{Y}_m$ — евклидовы пространства. Оператор

$$\mathcal{A}^* : \mathbf{Y}_m \to \mathbf{X}_n$$

называется *сопряженным* к оператору

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m,$$

если

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n \quad \textbf{и} \quad \forall\, y \in \mathbf{Y}_m.$$

Конечно, в левой части здесь имеется в виду скалярное произведение в пространстве $\mathbf{Y}_m$, а в правой части — в пространстве $\mathbf{X}_n$.

Для любого оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ сопряженный оператор существует.

В самом деле, фиксируем вектор

$$y \in \mathbf{Y}_m$$

и будем рассматривать скалярное произведение

$$(\mathcal{A}x, y)$$

как функционал на пространстве $\mathbf{X}_n$.

Из линейности оператора $\mathcal{A}$ и линейности скалярного произведения по первому аргументу вытекает, что функционал

$$(\mathcal{A}x, y)$$

линеен. Значит, по теореме Рисса существует и при том только один вектор

$$g \in \mathbf{X}_n$$

такой, что

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, g) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n.$$

Таким образом, определено отображение, ставящее в соответствие каждому вектору

$$y \in \mathbf{Y}_m$$

вектор

$$g \in \mathbf{X}_n.$$

Обозначим это отображение через

$$\mathcal{A}^* : \mathbf{Y}_m \to \mathbf{X}_n.$$

Итак,

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, g) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

а

$$g = \mathcal{A}^* y \quad \forall\, y \in \mathbf{Y}_m.$$

Теперь можно написать, что

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n \quad \textbf{и} \quad \forall\, y \in \mathbf{Y}_m.$$

.

Осталось доказать, что отображение $\mathcal{A}^*$ линейно.

Пусть

$$y^1,\ y^2 \in \mathbf{Y}_m, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$(\mathcal{A}x, \alpha y^1 + \beta y^2) =$$

$$= \overline{\alpha}(\mathcal{A}x, y^1) + \overline{\beta}(\mathcal{A}x, y^2) =$$

$$= \overline{\alpha}(x, \mathcal{A}^* y^1) + \overline{\beta}(x, \mathcal{A}^* y^2) =$$

$$= (x, \alpha\mathcal{A}^* y^1 + \beta\mathcal{A}^* y^2).$$

С другой стороны, по определению отображения $\mathcal{A}^*$ имеем

$$(\mathcal{A}x, \alpha y^1 + \beta y^2) = (x, \mathcal{A}^*(\alpha y^1 + \beta y^2)).$$

Сравнивая это равенство с

$$(\mathcal{A}x, \alpha y^1 + \beta y^2) = (x, \alpha \mathcal{A}^* y^1 + \beta \mathcal{A}^* y^2),$$

и используя произвольность вектора $x \in \mathbf{X}_n$, получаем

$$\mathcal{A}^*(\alpha y^1 + \beta y^2) = \alpha \mathcal{A}^* y^1 + \beta \mathcal{A}^* y^2,$$

т. е. отображение $\mathcal{A}^*$ линейно.

Из определения сопряженного оператора, очевидно, вытекает, что

$$(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}.$$

.

Упражнения 1) Докажите, что каждому оператору $\mathcal{A}$ соответствует только один сопряженный оператор $\mathcal{A}^*$.

.

2) Докажите, что если

$$\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$$

есть линейные операторы, то

$$(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^* + \overline{\beta}\mathcal{B}^*$$

для любых α, $\beta \in \mathbb{C}$.

.

3) Покажите, что

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$$

для любых операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

.

4) Докажите, что если линейный оператор

$$\mathcal{A}^* : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$$

обратим, то оператор $\mathcal{A}^{-1}$ также обратим, причем

$$(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*.$$

§3. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ОПЕРАТОРА В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$$

есть линейный оператор. Фиксируем в пространстве $\mathbf{X}_n$ базис

$$\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n,$$

а в пространстве $\mathbf{Y}_m$ — базис

$$\mathcal{Q}_m = \{q^k\}_{k=1}^m.$$

Напомним определение матрицы оператора.

.

Представим каждый вектор

$$\mathcal{A}e^i, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$$

в виде разложения по базису $\mathcal{Q}_m$:

$$\mathcal{A}e^i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}^{(eq)} q^j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Матрицей оператора $\mathcal{A}$ называют следующую матрицу:

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(eq)} & a_{12}^{(eq)} & \ldots & a_{1n}^{(eq)} \\ a_{21}^{(eq)} & a_{22}^{(eq)} & \ldots & a_{2n}^{(eq)} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}^{(eq)} & a_{m2}^{(eq)} & \ldots & a_{mn}^{(eq)} \end{pmatrix}.$$

Если пространство $\mathbf{Y}_m$ евклидово, можно указать полезную формулу для вычисления матрицы оператора

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m.$$

.

Обозначим G_q матрицу Грама, соответствующую базису $\mathcal{Q}_m$:

$$G_q = \begin{pmatrix} (q^1, q^1) & (q^2, q^1) & \dots & (q^n, q^1) \\ (q^1, q^2) & (q^2, q^2) & \dots & (q^n, q^2) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ (q^1, q^m) & (q^2, q^m) & \dots & (q^n, q^m) \end{pmatrix}.$$

Пусть матрица $G_{\mathcal{A}}$ определяется равенством

$$G_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} (\mathcal{A}e^1, q^1) & (\mathcal{A}e^2, q^1) & \ldots & (\mathcal{A}e^n, q^1) \\ (\mathcal{A}e^1, q^2) & (\mathcal{A}e^2, q^2) & \ldots & (\mathcal{A}e^n, q^2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\mathcal{A}e^1, q^m) & (\mathcal{A}e^2, q^m) & \ldots & (\mathcal{A}e^n, q^m) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$G_{\mathcal{A}} = G_q A_{eq}.$$

Действительно, умножая скалярно обе части уравнения

$$\mathcal{A}e^i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}^{(eq)} q^j, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

на q^l**, получим**

$$(\mathcal{A}e^i, q^l) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}^{(eq)} (q^j, q^l), \quad l = 1, \ldots, m,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

.

Формула

$$G_{\mathcal{A}} = G_q A_{eq}$$

есть матричная запись равенств

$$(G_{\mathcal{A}})_{li} = (\mathcal{A}e^i, q^l) = \sum_{j=1}^{m} (q^j, q^l) a_{ji}^{(eq)} = (G_q A_{eq})_{li},$$
$$l = 1, \ldots, m, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

.

Матрица Грама G_q невырождена, так как $\mathcal{Q}_m$ — базис, следовательно, из

$$G_{\mathcal{A}} = G_q A_{eq}$$

имеем

$$A_{eq} = G_q^{-1} G_{\mathcal{A}}.$$

.

В случае, когда базис $\mathcal{Q}_m$ ортонормирован, т. е. матрица G_q единичная, из

$$A_{eq} = G_q^{-1} G_{\mathcal{A}}$$

имеем

$$A_{eq} = G_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} (\mathcal{A}e^1, q^1) & (\mathcal{A}e^2, q^1) & \dots & (\mathcal{A}e^n, q^1) \\ (\mathcal{A}e^1, q^2) & (\mathcal{A}e^2, q^2) & \dots & (\mathcal{A}e^n, q^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathcal{A}e^1, q^m) & (\mathcal{A}e^2, q^m) & \dots & (\mathcal{A}e^n, q^m) \end{pmatrix}.$$

Если и пространство $\mathbf{X}_n$ евклидово, $\mathcal{A}^* : \mathbf{Y}_m \to \mathbf{X}_n$ — сопряженный к оператору $\mathcal{A}$, то точно так же получаем, что

$$G_{\mathcal{A}^*} = G_e A^*_{qe},$$

где A^*_{qe} — матрица оператора $\mathcal{A}^*$ относительно базисов $\mathcal{Q}_m \subset \mathbf{Y}_m$ и $\mathcal{E}_n \subset \mathbf{X}_n$, G_e — матрица Грама базиса $\mathcal{E}_n$, матрица $G_{\mathcal{A}^*}$ определяется равенством

$$G_{\mathcal{A}^*} = \begin{pmatrix} (\mathcal{A}^* q^1, e^1) & (\mathcal{A}^* q^2, e^1) & \dots & (\mathcal{A}^* q^m, e^1) \\ (\mathcal{A}^* q^1, e^2) & (\mathcal{A}^* q^2, e^2) & \dots & (\mathcal{A}^* q^m, e^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathcal{A}^* q^1, e^n) & (\mathcal{A}^* q^2, e^n) & \dots & (\mathcal{A}^* q^m, e^n) \end{pmatrix}.$$

.

Поскольку

$$(\mathcal{A}^* q^i, e^j) = (q^i, \mathcal{A} e^j) = \overline{(\mathcal{A} e^j, q^i)},$$

то матрицы $G_{\mathcal{A}}$ и $G_{\mathcal{A}^*}$ взаимно сопряжены.

Из

$$G_{\mathcal{A}}^* = G_{\mathcal{A}^*}, \quad G_q^* = G_q$$

и

$$G_{\mathcal{A}} = G_q A_{eq}$$

получаем

$$G_{\mathcal{A}^*} = (G_q A_{eq})^* = (A_{eq})^* G_q^* = (A_{eq})^* G_q,$$

откуда вследствие

$$G_{\mathcal{A}^*} = G_e A_{qe}^*,$$

вытекает, что

$$G_e A_{qe}^* = (A_{eq})^* G_q,$$

и

$$A_{qe}^* = G_e^{-1} (A_{eq})^* G_q.$$

.

Формула

$$A^*_{qe} = G_e^{-1}(A_{eq})^* G_q$$

устанавливает связь между матрицами операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. В частности, если базисы $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{Q}_m$ ортонормированы, то матрицы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ взаимно сопряжены:

$$A^*_{qe} = (A_{eq})^*.$$

§4. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Теорема. **Пусть $\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_m$ — евклидовы пространства. Для любого линейного оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ пространство $\mathbf{Y}_m$ допускает следующее ортогональное разложение:**

$$\mathbf{Y}_m = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{A}).$$

<u>Доказательство.</u> **Пусть**

$$y \in \mathrm{Im}(\mathcal{A}), \quad y^1 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*).$$

Тогда существует

$$x \in \mathbf{X}_n$$

такой, что

$$y = \mathcal{A}x,$$

следовательно,

$$(y, y^1) = (\mathcal{A}x, y^1) = (x, \mathcal{A}^* y^1) = 0,$$

т. е. y **ортогонален** $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*)$.

Если же вектор $y \in \mathbf{Y}_m$ **ортогонален** $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$**, то**

$$(y, \mathcal{A}x) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{X}_n$$

и тогда

$$(\mathcal{A}^* y, x) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{X}_n,$$

поэтому

$$\mathcal{A}^* y = 0,$$

т. е.

$$y \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*).$$

Итак, с одной стороны,

$$y \in \mathrm{Im}(\mathcal{A}) \quad \Rightarrow \quad y \perp \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*).$$

С другой стороны,

$$\mathbf{Y}_m \ni y \perp \mathrm{Im}(\mathcal{A}) \quad \Rightarrow \quad y \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*).$$

Т. е. $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ **— ортогональное дополнение** $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*)$ **до** $\mathbf{Y}_m$**, следовательно, по теореме об ортогональном дополнении равенство**

$$\mathbf{Y}_m = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{A})$$

выполнено. $\square$

Очевидно, что имеет место и следующее представление:

$$\mathbf{X}_n = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{A}^*).$$

Теорема. **Пусть оператор $\mathcal{A}$ действует из конечномерного евклидова пространства $\mathbf{X}_n$ в конечномерное евклидово пространство $\mathbf{Y}_m$. Тогда**

$$\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = \operatorname{rank}(\mathcal{A}^*).$$

.

Доказательство. Оператор $\mathcal{A}$ осуществляет изоморфизм пространств $\mathrm{Im}(\mathcal{A}^*)$ и $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$.

.

Действительно, вследствие

$$\mathbf{X}_n = \mathrm{Im}(\mathcal{A}^*) \oplus \mathrm{Ker}(\mathcal{A}).$$

для любого $x \in \mathbf{X}_n$ **имеем**

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) \ni \mathcal{A}x = \mathcal{A}x^1 + \mathcal{A}x^2 = \mathcal{A}x^1,$$

где

$$x^1 \in \mathrm{Im}(\mathcal{A}^*), \quad x^2 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}),$$

т. е. любой элемент $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ **— образ некоторого элемента из** $\mathrm{Im}(\mathcal{A}^*)$.

Предполагая, что

$$\mathcal{A}x' = \mathcal{A}x''$$

для

$$x',\ x'' \in \mathrm{Im}(\mathcal{A}^*),$$

получим, что

$$\mathcal{A}(x' - x'') = 0,$$

следовательно,

$$x' - x'' \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}).$$

Поскольку $\mathrm{Im}(\mathcal{A}^*)$ **— линейное подпространство, то**

$$x' - x'' \in \mathrm{Im}(\mathcal{A}^*).$$

Итак, с одной стороны,

$$x' - x'' \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}).$$

С другой стороны,

$$x' - x'' \in \mathrm{Im}(\mathcal{A}^*).$$

Вновь используя

$$\mathbf{X}_n = \mathrm{Im}(\mathcal{A}^*) \oplus \mathrm{Ker}(\mathcal{A}),$$

получаем, что

$$x' - x'' = 0.$$

.

Итак,

$$\mathcal{A} : \mathrm{Im}(\mathcal{A}^*) \to \mathrm{Im}(\mathcal{A}),$$

и для

$$\mathcal{A}x' = \mathcal{A}x'', \quad x',\ x'' \in \mathrm{Im}(\mathcal{A}^*),$$

получили, что

$$x' = x''.$$

Другими словами, из

$$x' \neq x'', \quad x',\ x'' \in \mathrm{Im}(\mathcal{A}^*),$$

следует, что

$$\mathcal{A}x' \neq \mathcal{A}x''.$$

Окончательно получили следующее:

1) $\mathcal{A} : \mathrm{Im}(\mathcal{A}^*) \to \mathrm{Im}(\mathcal{A})$,

2) любой элемент $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ **— образ некоторого элемента из** $\mathrm{Im}(\mathcal{A}^*)$,

3) $x' \neq x'', \quad x',\ x'' \in \mathrm{Im}(\mathcal{A}^*) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}x' \neq \mathcal{A}x''$.

Это означает, что оператор $\mathcal{A}$ **осуществляет взаимно однозначное отображение пространства** $\mathrm{Im}(\mathcal{A}^*)$ **на пространство** $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$.

.

Таким образом, конечномерные пространства

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) \quad \textbf{и} \quad \mathrm{Im}(\mathcal{A}^*)$$

изоморфны, поэтому их размерности совпадают. $\square$

.

Из равенства

$$\mathbf{Y}_m = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{A}).$$

непосредственно вытекает

Теорема Фредгольма. Для того, чтобы уравнение

$$\mathcal{A}x = y$$

имело решение необходимо и достаточно, чтобы его правая часть была ортогональна любому решению однородного уравнения

$$\mathcal{A}^* z = 0.$$

§6. САМОСОПРЯЖЕННЫЙ И КОСОЭРМИТОВ ОПЕРАТОРЫ

Оператор

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$$

называется ***самосопряженным*** (***эрмитовым***), если

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A},$$

иными словами, если

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) \quad \forall\ x, y \in \mathbf{X}_n.$$

Оператор

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$$

называется ***косоэрмитовым***, если

$$\mathcal{A}^* = -\mathcal{A},$$

то есть

$$(\mathcal{A}x, y) = -(x, \mathcal{A}y) \quad \forall\ x, y \in \mathbf{X}_n.$$

Упражнение. Показать, что если оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен, то скалярное произведение $(\mathcal{A}x, x)$ вещественно для любого $x \in \mathbf{X}_n$:

$$(\mathcal{A}x, x) \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n.$$

Если $\mathcal{A}$ косоэрмитов, то $(\mathcal{A}x, x)$ — мнимое число для любого $x \in \mathbf{X}_n$:

$$(\mathcal{A}x, x) = \mathrm{Im}(\mathcal{A}x, x) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n.$$

.

Поскольку в любом ортонормированном базисе матрицы взаимно сопряженных операторов взаимно сопряжены, то матрица самосопряженного оператора в любом ортонормированном базисе эрмитова, матрица косоэрмитова оператора косоэрмитова.

.

<u>Упражнение.</u> Показать, что если матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе эрмитова, то оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен, если матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе косоэрмитова, то оператор $\mathcal{A}$ косоэрмитов.

Примером самосопряженного оператора является оператор ортогонального проектирования.

Пусть $\mathcal{P} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ — оператор ортогонального проектирования евклидова пространства $\mathbf{X}$ на подпространство $L \subset \mathbf{X}$. Тогда для любых x, $y \in \mathbf{X}$ имеем

$$x = \mathcal{P}x + x^2, \quad y = \mathcal{P}y + y^2,$$

где

$$x^2,\ y^2 \perp L.$$

Поэтому

$$(\mathcal{P}x, y) = (\mathcal{P}x, \mathcal{P}y + y^2) = (\mathcal{P}x, \mathcal{P}y) + (\mathcal{P}x, y^2) = (\mathcal{P}x, \mathcal{P}y),$$

$$(x, \mathcal{P}y) = (\mathcal{P}x + x^2, \mathcal{P}y) = (\mathcal{P}x, \mathcal{P}y) + (x^2, \mathcal{P}y) = (\mathcal{P}x, \mathcal{P}y),$$

следовательно,

$$(\mathcal{P}x, y) = (y, \mathcal{P}x).$$

Любой оператор $\mathcal{A}$, действующий в евклидовом пространстве, однозначно представим в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2,$$

где i — мнимая единица,

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*), \quad \mathcal{H}_2 = \frac{1}{2i}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$$

есть самосопряженные операторы:

$$(A + \mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A} + \mathcal{A}^*, \quad \left(\frac{1}{i}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)\right)^* = \frac{1}{i}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*).$$

.

Если предположить, что наряду с

$$\mathcal{A} = \mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2$$

возможно представление

$$\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{H}}_1 + i\widetilde{\mathcal{H}}_2$$

с эрмитовыми операторами $\widetilde{\mathcal{H}}_1$, $\widetilde{\mathcal{H}}_2$, то

$$(\mathcal{H}_1 - \widetilde{\mathcal{H}}_1) + i(\mathcal{H}_2 - \widetilde{\mathcal{H}}_2) = 0.$$

Переходя в

$$(\mathcal{H}_1 - \widetilde{\mathcal{H}}_1) + i(\mathcal{H}_2 - \widetilde{\mathcal{H}}_2) = 0$$

к сопряженным операторам, получим

$$(\mathcal{H}_1 - \widetilde{\mathcal{H}}_1) - i(\mathcal{H}_2 - \widetilde{\mathcal{H}}_2) = 0.$$

Складывая почленно два этих равенства, будем иметь, что

$$\mathcal{H}_1 = \widetilde{\mathcal{H}}_1,$$

но тогда и

$$\mathcal{H}_2 = \widetilde{\mathcal{H}}_2,$$

т. е. представление

$$\mathcal{A} = \mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2$$

однозначно.

.

<u>Теорема.</u> **Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$. Если**

$$(\mathcal{A}x, x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

то

$$\mathcal{A} = 0.$$

.

<u>Доказательство.</u> Предположим сначала, что $\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор. Тогда для любых $x, y \in \mathbf{X}_n$ справедливо равенство

$$(\mathcal{A}(x+y), x+y) = (\mathcal{A}x, x) + (\mathcal{A}y, y) + (\mathcal{A}x, y) + (y, \mathcal{A}x) =$$

$$= (\mathcal{A}x, x) + (\mathcal{A}y, y) + (\mathcal{A}x, y) + \overline{(\mathcal{A}x, y)} =$$

$$= (\mathcal{A}x, x) + (\mathcal{A}y, y) + 2\,\mathrm{Re}(\mathcal{A}x, y).$$

Отсюда, используя условие

$$(\mathcal{A}x, x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

получаем, что

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}x, y) = 0.$$

.

Имеем

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}x, y) = 0 \quad \forall\, x,\; y \in \mathbf{X}_n.$$

Поэтому можно заменить y, **на** iy, **но**

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}x, iy) = \mathrm{Re}(-i(\mathcal{A}x, y)) = \mathrm{Im}(\mathcal{A}x, y).$$

Действительно,

$$\mathrm{Re}(-i(a + ib)) = \mathrm{Re}(b - ia) = b = \mathrm{Im}(a + ib).$$

.

Итак

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}x, y) = \mathrm{Im}(\mathcal{A}x, y) = 0 \quad \forall\, x,\ y \in \mathbf{X}_n,$$

т. е.

$$(\mathcal{A}x, y) = 0 \quad \forall\, x,\ y \in \mathbf{X}_n.$$

Полагая

$$y = \mathcal{A}x,$$

будем иметь, что

$$|\mathcal{A}x| = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

т. е.

$$\mathcal{A} = 0.$$

.

Итак, в случае самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ утверждение теоремы доказано.

.

Пусть теперь $\mathcal{A}$ — произвольный оператор. Если

$$(\mathcal{A}x, x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

то вследствие

$$\mathcal{A} = \mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2,$$

получаем, что

$$((\mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2)x, x) = (\mathcal{H}_1 x, x) + i(\mathcal{H}_2 x, x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

значит,

$$(\mathcal{H}_1 x, x) = 0, \quad (\mathcal{H}_2 x, x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n.$$

Операторы $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ самосопряжены, поэтому

$$\mathcal{H}_1,\, \mathcal{H}_2 = 0. \ \square$$

.

Лемма. Если для оператора $\mathcal{A}$, действующего в евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$, скалярное произведение $(\mathcal{A}x, x)$ вещественно при любом $x \in \mathbf{X}_n$, то оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен.

.

<u>Доказательство.</u> Если

$$(\mathcal{A}x, x) \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

то

$$(\mathcal{A}^* x, x) = (x, \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}x, x).$$

Следовательно,

$$((\mathcal{A}^* - \mathcal{A})x, x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

и по предыдущей теореме

$$\mathcal{A}^* - \mathcal{A} = 0,$$

т. е.

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}. \ \square$$

<u>Лемма.</u> Если для оператора $\mathcal{A}$, действующего в евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$, скалярное произведение $(\mathcal{A}x, x)$ при любом $x \in \mathbf{X}_n$ — мнимое число, то оператор $\mathcal{A}$ косоэрмитов.

.

<u>Доказательство.</u> Если

$$(\mathcal{A}x, x) = \mathrm{Im}(\mathcal{A}x, x)$$

то

$$(\mathcal{A}^* x, x) = (x, \mathcal{A}x) = \overline{(\mathcal{A}x, x)} = -\mathrm{Im}(\mathcal{A}x, x) = -(\mathcal{A}x, x),$$

следовательно,

$$((\mathcal{A}^* + \mathcal{A})x, x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

откуда получаем, что

$$\mathcal{A}^* + \mathcal{A} = 0,$$

т. е.

$$\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}. \ \square$$

.

Таким образом, справедлива

<u>ТЕОРЕМА.</u> Для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$, действующий в евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$, был самосопряжен необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение $(\mathcal{A}x, x)$ было вещественным при любом $x \in \mathbf{X}_n$.

Для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$, действующий в евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$, был косоэрмитов необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение $(\mathcal{A}x, x)$ было мнимым при любом $x \in \mathbf{X}_n$.

§7. НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ И ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ОПЕРАТОРЫ

Самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ называется *неотрицательным*, если

$$(\mathcal{A}x, x) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n.$$

Самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ называется ***положительно определенным***, если

$$(\mathcal{A}x, x) > 0 \quad \forall\ 0 \neq x \in \mathbf{X}_n.$$

.

Эрмитова матрица A порядка n называется ***неотрицательной***, если

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{x}_j \geqslant 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n.$$

Эрмитова матрица A порядка n называется ***положительно определенной***, если

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{x}_j > 0 \quad \forall\ 0 \neq x \in \mathbb{C}^n.$$

<u>Упражнения.</u> 1) Покажите что, если $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ — положительно определенный оператор, то равенство $(x, y)_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}x, y)$ определяет скалярное произведение на пространстве $\mathbf{X}_n$.

.

2) Покажите, что для любого оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$ оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ самосопряжен и неотрицателен. Если оператор $\mathcal{A}$ обратим, то оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ положительно определен.

3) Пусть оператор $\mathcal{A}$ действует в евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$. Докажите, что если оператор $\mathcal{A} + \mathcal{A}^*$ положительно определен, то оператор $\mathcal{A}$ невырожден.

4) Покажите, что матрица положительно определенного оператора в любом ортонормированном базисе положительно определена.

.

5) Покажите, что все элементы главной диагонали положительно определенной матрицы положительны.

.

6) Покажите, что матрица Грама любой системы векторов в евклидовом пространстве неотрицательна.

.

7) Покажите, что линейная независимость системы векторов эквивалентна положительной определенности матрицы Грама этой системы векторов.

§8. УНИТАРНЫЙ ОПЕРАТОР

Оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ называется ***унитарным***, если

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} = I.$$

Упражнения.

1) Покажите, что для того чтобы оператор был унитарным необходимо и достаточно, чтобы его матрица в любом ортонормированном базисе пространства $\mathbf{X}_n$ была унитарна.

.

2) Покажите, что определитель унитарного оператора по модулю равен единице.

.

3) Покажите, что произведение унитарных операторов — унитарный оператор.

Если оператор $\mathcal{A}$ унитарен, то для любых $x, y \in \mathbf{X}_n$ имеем

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}y) = (x, y),$$

т. е. унитарный оператор не меняет скалярного произведения векторов, и, следовательно, не меняет длин векторов:

$$|\mathcal{A}x| = \sqrt{(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x)} = \sqrt{(x, x)} = |x|.$$

Обратно, если линейный оператор не меняет скалярного произведения любых двух векторов из $\mathbf{X}_n$, то он унитарен.

В самом деле, из равенства

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$$

вытекает, что

$$(x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}y) = (x, y) \quad \forall\, x,\, y \in \mathbf{X}_n.$$

Поскольку последнее равенство выполнено для любых $x \in \mathbf{X}_n$, то

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A}y = y \quad \forall\, y \in \mathbf{X}_n,$$

т. е.

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A} = I.$$

Докажем, что равенство

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = I$$

также выполняется. Из равенства

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A} = I$$

вытекает, что

$$\det(\mathcal{A}) \neq 0,$$

следовательно, оператор $\mathcal{A}$ имеет обратный. Умножая это равенство слева на $\mathcal{A}$, а затем справа на $\mathcal{A}^{-1}$, получим, что

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}I\mathcal{A}^{-1}$$

т. е.

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = I.$$

.

<u>Упражнение.</u> Покажите, что если

$$|\mathcal{A}x| = |x| \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

то $\mathcal{A}$ — унитарный оператор.

Таким образом, оператор $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ является унитарным тогда и только тогда, когда он не меняет длины никакого вектора пространства $\mathbf{X}_n$.

§9. НОРМАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР

Оператор $\mathcal{A}$, действующий в евклидовом пространстве $\mathbf{X}_n$, называется ***нормальным***, если

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}.$$

Самосопряженный, косоэрмитов и унитарный операторы, очевидно, — нормальные операторы:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A},$$

$$\mathcal{A} = -\mathcal{A}^* \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A},$$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = I, \quad \mathcal{A}^*\mathcal{A} = I \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}.$$

<u>Упражнение.</u> Доказать, что для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$ был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в любом ортонормированном базисе пространства $\mathbf{X}_n$ была нормальной.

.

<u>Теорема.</u> **Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ — нормальный оператор. Тогда**

$$\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(A^*).$$

Доказательство. Пусть

$$\mathcal{A}x = 0.$$

Тогда

$$0 = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{A}\mathcal{A}^*x, x) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x),$$

следовательно,

$$\mathcal{A}^*x = 0.$$

Эти же выкладки показывают, что

$$\mathcal{A}^*x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}x = 0.$$

Таким образом,

$$\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(A^*). \ \square$$

.

Из

$$\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(A^*)$$

и

$$\mathbf{X}_n = \operatorname{Ker}(\mathcal{A}^*) \oplus \operatorname{Im}(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker}(\mathcal{A}) \oplus \operatorname{Im}(\mathcal{A}^*)$$

немедленно вытекает

Следствие. **Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ — нормальный оператор. Тогда**

$$\mathbf{X}_n = \operatorname{Ker}(\mathcal{A}) \oplus \operatorname{Im}(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker}(\mathcal{A}^*) \oplus \operatorname{Im}(\mathcal{A}^*),$$

$$\operatorname{Im}(\mathcal{A}) = \operatorname{Im}(\mathcal{A}^*).$$

<u>Теорема.</u> **Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ — нормальный оператор, x, λ — собственная пара оператора $\mathcal{A}$, т. е.**

$$\mathcal{A}x = \lambda x.$$

Тогда x, $\overline{\lambda}$ — собственная пара оператора $\mathcal{A}^*$:

$$\mathcal{A}^* x = \overline{\lambda} x.$$

.

<u>Доказательство.</u> Имеем

$$(\mathcal{A}-\lambda I)^* = \mathcal{A}^* - \overline{\lambda} I.$$

Отсюда

$$(\mathcal{A}-\lambda I)(\mathcal{A}-\lambda I)^* = (\mathcal{A}-\lambda I)(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda} I) = \mathcal{A}\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + \lambda\overline{\lambda} I,$$

$$(\mathcal{A}-\lambda I)^*(\mathcal{A}-\lambda I) = (\mathcal{A}^* - \overline{\lambda} I)(\mathcal{A}-\lambda I) = \mathcal{A}^*\mathcal{A} - \overline{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + \overline{\lambda}\lambda I.$$

Значит, если

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A},$$

то при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\mathcal{A}-\lambda I$ — также нормальный оператор:

$$(\mathcal{A}-\lambda I)(\mathcal{A}-\lambda I)^* = (\mathcal{A}-\lambda I)^*(\mathcal{A}-\lambda I).$$

Итак, оператор $\mathcal{A} - \lambda I$ нормальный, причем

$$(\mathcal{A} - \lambda I)^* = \mathcal{A}^* - \overline{\lambda} I,$$

следовательно,

$$\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda I) = \operatorname{Ker}(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda} I).$$

Это и означает, что если x, λ — собственная пара оператора $\mathcal{A}$, т. е.

$$\mathcal{A}x = \lambda x,$$

то x, $\overline{\lambda}$ — собственная пара оператора $\mathcal{A}^*$:

$$\mathcal{A}^* x = \overline{\lambda} x. \ \square$$

Все собственные числа самосопряженного оператора вещественны.

Действительно, всякий самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ является нормальным, поэтому, если x, λ — собственная пара оператора $\mathcal{A}$, то

$$\mathcal{A}x = \lambda x, \quad \mathcal{A}x = \mathcal{A}^* x = \overline{\lambda} x,$$

следовательно,

$$(\lambda - \overline{\lambda})x = 0,$$

но вектор

$$x \neq 0$$

как собственный вектор, значит,

$$\lambda = \overline{\lambda},$$

т. е.

$$\mathrm{Im}(\lambda) = 0.$$

.

Все собственные числа косоэрмитва оператора чисто мнимые.

Действительно, если x, λ — собственная пара косоэрмитва оператора $\mathcal{A}$, то выполняются равенства

$$\mathcal{A}x = \lambda x,$$

$$\mathcal{A}x = -\mathcal{A}^* x = -\overline{\lambda} x,$$

следовательно,

$$\lambda = -\overline{\lambda},$$

т. е.

$$\mathrm{Re}(\lambda) = 0.$$

.

Все собственные числа унитарного оператора по модулю равны единице.

.

В самом деле, если

$$\mathcal{A}x = \lambda x, \quad x \neq 0,$$

то поскольку для унитарного оператора

$$|\mathcal{A}x| = |x|,$$

то

$$|\lambda||x| = |\mathcal{A}x| = |x|,$$

т. е.

$$|\lambda| = 1.$$

.

Укажем на очевидное, но полезное

Следствие.

У всякой эрмитовой матрицы все характеристические числа вещественны;

у всякой косоэрмитовой матрицы все характеристические числа чисто мнимые;

у всякой унитарной матрицы все характеристические числа по модулю равны единице.

.

Упражнение. Покажите, что определитель самосопряженного оператора — вещественное число.

.

<u>Теорема.</u> Собственные векторы нормального оператора, отвечающие различным собственным числам, ортогональны.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — нормальный оператор,

$$\mathcal{A}x = \lambda x, \quad \mathcal{A}y = \mu y, \quad \lambda \neq \mu.$$

Тогда

$$\lambda(x, y) = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y).$$

Имеем

$$\mathcal{A}^* y = \overline{\mu} y,$$

следовательно,

$$(x, \mathcal{A}^* y) = (x, \overline{\mu} y) = \mu(x, y),$$

значит,

$$\lambda(x, y) = \mu(x, y), \quad \text{т. е.} \quad (\lambda - \mu)(x, y) = 0.$$

Поскольку $\lambda \neq \mu$, то

$$(x, y) = 0. \ \square$$

<u>Теорема.</u> **Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор, действующий в пространстве $\mathbf{X}_n$. Для того, чтобы существовал ортонормированный базис $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbf{X}_n$ такой, что**

$$\mathcal{A}e^k = \lambda_k e^k, \quad k = 1,\, 2,\, \dots,\, n,$$

необходимо и достаточно, чтобы оператор $\mathcal{A}$ был нормальным.

<u>Доказательство.</u> Н е о б х о д и м о с т ь. Матрицы взаимно сопряженных операторов в ортонормированном базисе взаимно сопряжены. Поэтому, если

$$A_e = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

есть матрица оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе $\{e^k\}_{k=1}^n$, то матрицей оператора $\mathcal{A}^*$ в этом же базисе будет матрица

$$A_e^* = \operatorname{diag}(\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_n).$$

Матрица произведения операторов есть произведение их матриц, диагональные матрицы, очевидно, перестановочны, следовательно,

$$(A^*A)_e = A_e^* A_e = A_e A_e^* = (AA^*)_e,$$

откуда вытекает, что $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$, т. е. $\mathcal{A}$ — нормальный оператор.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\mathcal{A}$ — нормальный оператор,

$$\mathcal{A}e^1 = \lambda_1 e^1.$$

Будем считать, что

$$|e^1| = 1.$$

Тогда

$$\mathcal{A}^* e^1 = \overline{\lambda}_1 e^1.$$

Обозначим через L_{n-1} подпространство всех векторов из $\mathbf{X}_n$ ортогональных e^1:

$$L_{n-1} = \{x \in \mathbf{X}_n : (x, e^1) = 0\}.$$

.

Подпространство L_{n-1} инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$. Действительно, если $x \in L_{n-1}$, т. е.

$$(x, e^1) = 0,$$

то и

$$(\mathcal{A}x, e^1) = (x, \mathcal{A}^* e^1) = (x, \overline{\lambda}_1 e^1) = \lambda_1 (x, e^1) = 0.$$

Точно так же доказывается, что подпространство L_{n-1} инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}^*$: если $x \in L_{n-1}$, т. е.

$$(x, e^1) = 0,$$

то и

$$(\mathcal{A}^* x, e^1) = (x, \mathcal{A} e^1) = (x, \lambda_1 e^1) = \overline{\lambda}_1 (x, e^1) = 0.$$

.

Итак, подпространство L_{n-1} инвариантно относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. Поэтому существует вектор

$$e^2 \in L_{n-1}, \quad |e^2| = 1,$$

и число λ_2 такие, что

$$\mathcal{A}e^2 = \lambda_2 e^2, \quad \mathcal{A}^* e^2 = \overline{\lambda}_2 e^2.$$

Пусть теперь L_{n-2} — подпространство пространства $\mathbf{X}_n$, состоящее из векторов ортогональных одновременно e^1 и e^2:

$$L_{n-2} = \{x \in \mathbf{X}_n : (x, e^1) = 0,\ (x, e^2) = 0\}.$$

Подпространство L_{n-2} инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$. Действительно, если $x \in L_{n-2}$, т. е.

$$(x, e^1) = 0, \quad (x, e^2) = 0,$$

то и

$$(\mathcal{A}x, e^1) = (x, \mathcal{A}^* e^1) = (x, \overline{\lambda}_1 e^1) = \lambda_1 (x, e^1) = 0,$$

$$(\mathcal{A}x, e^2) = (x, \mathcal{A}^* e^2) = (x, \overline{\lambda}_2 e^2) = \lambda_2 (x, e^2) = 0.$$

Точно так же доказывается, что подпространство L_{n-2} инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}^*$: если $x \in L_{n-2}$, т. е.

$$(x, e^1) = 0, \quad (x, e^2) = 0,$$

то и

$$(\mathcal{A}^* x, e^1) = (x, \mathcal{A} e^1) = (x, \lambda_1 e^1) = \overline{\lambda}_1 (x, e^1) = 0,$$

$$(\mathcal{A}^* x, e^2) = (x, \mathcal{A} e^2) = (x, \lambda_2 e^2) = \overline{\lambda}_2 (x, e^2) = 0.$$

.

Итак, подпространство L_{n-2} инвариантно относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. Поэтому существует вектор

$$e^3 \in L_{n-2}, \quad |e^3| = 1,$$

и число λ_3 такие, что

$$\mathcal{A}e^3 = \lambda_3 e^3, \quad \mathcal{A}^* e^3 = \overline{\lambda}_3 e^3.$$

.

Продолжая этот процесс, мы построим ортонормированную систему векторов $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbf{X}_n$ такую, что

$$\mathcal{A}e^k = \lambda_k e^k, \quad \mathcal{A}^* e^k = \overline{\lambda}_k e^k, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n. \ \square$$

.

Замечания.

1) В теореме утверждается, что для каждого нормального оператора существует ортонормированный базис, в котором его матрица

$$A_e = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

где λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ — собственные числа оператора, т. е. всякий нормальный оператор есть оператор простой структуры.

.

2) Часто оказывается полезной следующая эквивалентная формулировка указанного результата: пусть

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\lambda_k, \quad k \leqslant n,$$

есть все попарно различные собственные числа нормального оператора $\mathcal{A}\colon \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$, L_{λ_i}, $i = 1, 2, \ldots, k$, — соответствующие собственные подпространства оператора $\mathcal{A}$. Тогда

$$\mathbf{X}_n = L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_k},$$

$$\mathcal{A} = \lambda_1 \mathcal{P}_1 + \lambda_2 \mathcal{P}_2 + \cdots + \lambda_k \mathcal{P}_k,$$

где $\mathcal{P}_i$ — оператор ортогонального проектирования пространства $\mathbf{X}_n$ на подпространство L_{λ_i}, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Упражнения.

1) Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — вещественная матрица такая, что

$$A^T A = A A^T.$$

Показать, что существует система векторов $\{\xi^k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}^n$, ортонормированная в смысле стандартного скалярного произведения пространства $\mathbb{C}^n$, и такие числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$, что

$$A\xi_k = \lambda_k \xi_k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Причем, если $\lambda_k \in \mathbb{R}$, то и вектор ξ_k можно выбрать вещественным.

.

2) Докажите, что

$a)$ если у нормального оператора все собственные числа вещественны, то он — самосопряженный оператор;

$b)$ если у нормального оператора все собственные числа чисто мнимые, то он — косоэрмитов оператор;

$c)$ если у нормального оператора все собственные числа по модулю равны единице, то он — унитарный оператор.

.

3) Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — нормальные операторы, характеристические полиномы которых совпадают. Докажите, что тогда существует унитарный оператор $\mathcal{Q}$ такой, что

$$\mathcal{B} = \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^*.$$

.

4) Пусть $\mathcal{A}$ — нормальный оператор, $\mathcal{Q}$ — унитарный оператор. Докажите, что оператор

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{Q}^*$$

нормальный и справедливо представление

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \lambda_1\widetilde{\mathcal{P}}_1 + \lambda_2\widetilde{\mathcal{P}}_2 + \cdots + \lambda_k\widetilde{\mathcal{P}}_k,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — все попарно различные собственные числа оператора $\mathcal{A}$,

$$\widetilde{\mathcal{P}}_i = \mathcal{Q}\mathcal{P}_i\mathcal{Q}^*$$

есть оператор ортогонального проектирования пространства $\mathbf{X}_n$ на подпространство $\mathcal{Q}L_{\lambda_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

.

<u>Теорема.</u> Для того, чтобы нормальные операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ были перестановочными, необходимо и достаточно, чтобы у них был общий ортонормированный базис собственных векторов.

Доказательство.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\{e^j\}_{k=1}^n$ — общий базис собственных векторов операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, т. е.

$$\mathcal{A}e^k = \lambda_k e^k, \quad \mathcal{B}e^k = \mu_k e^k, \quad k = 1, \ \ldots, n.$$

Тогда

$$\mathcal{B}\mathcal{A}e^k{=}\lambda_k\mu_k e^k, \quad \mathcal{A}\mathcal{B}e^k{=}\lambda_k\mu_k e^k, \quad k = 1, \ \ldots, n,$$

т. е. на векторах базиса операторы $\mathcal{A}\mathcal{B}$, $\mathcal{B}\mathcal{A}$ совпадают,

$$\mathcal{B}\mathcal{A}e^k = \mathcal{A}\mathcal{B}e^k \quad k = 1, \ \ldots, n,$$

но тогда они совпадают и на любом векторе пространства $\mathbf{X}_n$.

Н е о б х о д и м о с т ь. Воспользуемся представлением пространства $\mathbf{X}_n$ в виде ортогональной суммы собственных подпространств оператора $\mathcal{A}$, отвечающих попарно различным собственным числам этого оператора:

$$\mathbf{X}_n = L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_k}.$$

Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ перестановочны, поэтому каждое из подпространств L_{λ_i} инвариантно относительно оператора $\mathcal{B}$.

Поскольку $\mathcal{B}$ — нормальный оператор, то в подпространстве L_{λ_i} существует ортонормированный базис собственных векторов оператора $\mathcal{B}$. Объединение всех указанных базисов, очевидно, образует базис пространства $\mathbf{X}_n$, причем по построению все векторы этого базиса — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. $\square$

§10. ВАРИАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

Напомним, что оператор

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$$

называется *самосопряженным*, если

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) \quad \forall\, x, y \in \mathbf{X}_n.$$

Напомним также, что у самосопряженного оператора:

$a)$ все собственные числа вещественны,

$b)$ существует ортонормированный базис пространства $\mathbf{X}_n$, составленный из собственных векторов,

$c)$ собственные векторы, отвечающие различным собственным числам, ортогональны.

Пусть $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{X}_n$ — самосопряженный оператор, $\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n$ — его собственные числа,

$$\{e^k\}_{k=1}^n$$

есть ортонормированный базис собственных векторов. Будем считать, что собственные числа упорядочены по возрастанию, т. е.

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \cdots \leqslant \lambda_n.$$

Подчеркнем, что мы рассматриваем как собственные числа оператора все характеристические числа его матрицы, т. е. кратные характеристические числа повторяются столько раз, какова их кратность, поэтому, вообще говоря, неравенства являются нестрогими.

Пусть p, q — целые числа такие, что

$$1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n.$$

Обозначим через

$$L_{pq} \subseteq \mathbf{X}_n$$

подпространство, натянутое на векторы

$$\{e^k\}_{k=p}^{q}.$$

Очевидно,

$$L_{1n} = \mathbf{X}_n.$$

<u>Лемма.</u> **Для любого $x \in L_{pq}$ справедливы неравенства**

$$\lambda_p(x,x) \leqslant (\mathcal{A}x,x) \leqslant \lambda_q(x,x),$$

более того

$$\lambda_p = \min_{x \in L_{pq},\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x,x)}{(x,x)},$$

$$\lambda_q = \max_{x \in L_{pq},\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x,x)}{(x,x)}.$$

.

Доказательство. Для любого $x \in L_{pq}$ имеем

$$(\mathcal{A}x, x) = \left(\mathcal{A}\sum_{k=p}^{q} \xi_k e^k, \sum_{k=p}^{q} \xi_k e^k\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=p}^{q} \lambda_k \xi_k e^k, \sum_{k=p}^{q} \xi_k e^k\right) = \sum_{k=p}^{q} \lambda_k |\xi_k|^2.$$

.

Очевидно, что

$$\lambda_p \sum_{k=p}^{q} |\xi_k|^2 \leqslant \sum_{k=p}^{q} \lambda_k |\xi_k|^2 \leqslant \lambda_q \sum_{k=p}^{q} |\xi_k|^2,$$

.

Кроме того,

$$(x, x) = \sum_{k=p}^{q} |\xi_k|^2, \quad x \in L_{pq}.$$

Итак, для любого $x \in L_{pq}$ имеем

$$\lambda_p \sum_{k=p}^{q} |\xi_k|^2 \leqslant \sum_{k=p}^{q} \lambda_k |\xi_k|^2 \leqslant \lambda_q \sum_{k=p}^{q} |\xi_k|^2,$$

$$\sum_{k=p}^{q} |\xi_k|^2 = (x, x),$$

$$\sum_{k=p}^{q} \lambda_k |\xi_k|^2 = (\mathcal{A}x, x).$$

Следовательно,

$$\lambda_p(x, x) \leqslant (\mathcal{A}x, x) \leqslant \lambda_q(x, x).$$

.

Из

$$\lambda_p(x,x) \leqslant (\mathcal{A}x,x) \leqslant \lambda_q(x,x).$$

для любого $x \neq 0$ из L_{pq} получаем неравенства

$$\lambda_p \leqslant \frac{(\mathcal{A}x,x)}{(x,x)} \leqslant \lambda_q.$$

Заметим теперь, что

$$\frac{(\mathcal{A}e^p,e^p)}{(e^p,e^p)} = \lambda_p, \qquad \frac{(\mathcal{A}e^q,e^q)}{(e^q,e^q)} = \lambda_q,$$

поэтому равенства

$$\lambda_p = \min_{x\in L_{pq},\ x\neq 0} \frac{(\mathcal{A}x,x)}{(x,x)}, \qquad \lambda_q = \max_{x\in L_{pq},\ x\neq 0} \frac{(\mathcal{A}x,x)}{(x,x)}.$$

также доказаны. $\square$

.

Очевидным следствием этой леммы является

<u>Теорема.</u> **Для любого** $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$

$$\lambda_k = \min_{x \in L_{k,n},\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}, \qquad \lambda_k = \max_{x \in L_{1,k},\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}.$$

Использование формул

$$\lambda_k = \min_{x \in L_{k,n},\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}, \qquad \lambda_k = \max_{x \in L_{1,k},\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}.$$

затруднено тем, что при отыскании собственного числа с номером k нужно знать все собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, отвечающие всем собственным числам с меньшими (или большими) номерами.

Следующие две теоремы дают независимое описание каждого собственного числа самосопряженного оператора $\mathcal{A}$.

.

Теорема. Для любого $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$

$$\lambda_k = \max_{R_{n-k+1}} \min_{x \in R_{n-k+1},\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}.$$

Здесь

$$R_{n-k+1} \subset \mathbf{X}_n$$

есть подпространство размерности $n-k+1$. Максимум берется по всем подпространствам пространства $\mathbf{X}_n$ размерности $n-k+1$.

.

<u>Доказательство.</u> Ясно, что

$$\dim(R_{n-k+1}) + \dim(L_{1k}) = n + 1,$$

поэтому существует вектор

$$0 \neq x^0 \in R_{n-k+1} \cap L_{1k}.$$

.

Таким образом, из

$$\lambda_k = \max_{x \in L_{1,k},\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}$$

следует, что для этого вектора

$$0 \neq x^0 \in R_{n-k+1} \cap L_{1k}$$

верно

$$\lambda_k \geqslant \frac{(\mathcal{A}x^0, x^0)}{(x^0, x^0)}.$$

.

Итак, в любом подпространстве R_{n-k+1} существует такой вектор

$$0 \neq x^0 \in R_{n-k+1},$$

что

$$\frac{(\mathcal{A}x^0, x^0)}{(x^0, x^0)} \leqslant \lambda_k.$$

Следовательно, для любого подпространства R_{n-k+1}

$$\min_{x \in R_{n-k+1},\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} \leqslant \lambda_k.$$

.

Для любого подпространства R_{n-k+1} имеем

$$\min_{x\in R_{n-k+1},\ x\neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} \leqslant \lambda_k.$$

Если мы укажем подпространство R_{n-k+1}, для которого

$$\min_{x\in R_{n-k+1},\ x\neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} = \lambda_k,$$

то это будет означать выполнение равенства

$$\max_{R_{n-k+1}} \min_{x\in R_{n-k+1},\ x\neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} = \lambda_k.$$

.

По предыдущей теореме

$$\lambda_k = \min_{x \in L_{k,n},\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}.$$

Следовательно, искомым подпространством R_{n-k+1} для которого

$$\lambda_k = \max_{R_{n-k+1}} \min_{x \in R_{n-k+1},\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}$$

является

$$R_{n-k+1} = L_{kn}.\ \square$$

<u>Теорема.</u> Для любого $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$

$$\lambda_k = \min_{R_k} \max_{x \in R_k,\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}.$$

Здесь

$$R_k \subset \mathbf{X}_n$$

есть подпространство размерности k. Минимум берется по всем подпространствам пространства $\mathbf{X}_n$ размерности k.

.

Доказательство. Очевидно, что

$$\dim(R_k) + \dim(L_{kn}) = n + 1$$

для любого подпространства R_k, значит

$$R_k \cap L_{kn} \neq \{0\}.$$

.

Имеем

$$\min_{x \in L_{kn},\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} = \lambda_k,$$

поэтому для любого подпространства R_k

$$\max_{x \in R_k,\ x \neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} \geqslant \lambda_k.$$

.

Для завершения доказательства теоремы осталось указать такое подпространство R_k размерности k, для которого

$$\max_{x\in R_k,\ x\neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} = \lambda_k.$$

таким подпространством является L_{1k}, т. к.

$$\max_{x\in L_{1,k},\ x\neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} = \lambda_k.$$

.

Итак, для любого подпространства R_k верно неравенство

$$\max_{x\in R_k,\ x\neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} \geqslant \lambda_k,$$

а для $R_k = L_{1k}$

$$\max_{x\in L_{1k},\ x\neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} = \lambda_k.$$

Следовательно,

$$\min_{R_k} \max_{x\in R_k,\ x\neq 0} \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)} = \lambda_k,$$

причем минимум достигается на подпространстве $R_k = L_{1k}$ $\square$.

.

Из неравенства

$$(\mathcal{A}x, x) \geqslant \lambda_1(x, x) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n$$

следует, что самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ неотрицателен

$$(\mathcal{A}x, x) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_n,$$

т. и т. т., когда все его собственные числа λ_k неотрицательны:

$$\lambda_1 \geqslant 0.$$

Для того, чтобы $\mathcal{A}$ был положительно определен,

$$(\mathcal{A}x, x) > 0, \quad 0 \neq x \in \mathbf{X}_n,$$

необходимо и достаточно, чтобы все λ_k были положительны:

$$\lambda_1 > 0.$$

.

<u>Упражнения.</u> 1) Доказать, что если оператор положительно определен, то его определитель положителен.

.

2) Доказать неравенство Коши — Буняковского, используя матрицу Грама системы, состоящей из двух векторов x, y евклидова пространства.

§11. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ВАРИАЦИОННОГО ОПИСАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

<u>Теорема.</u> Обозначим $A_{n+1} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n+1}$ произвольную эрмитову матрицу порядка $n+1$, $A_n = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ матрицу, соответствующую ее главному минору порядка n. Пусть

$$\widehat{\lambda}_1 \leqslant \widehat{\lambda}_2 \leqslant \cdots \leqslant \widehat{\lambda}_{n+1}$$

есть собственные числа матрицы A_{n+1},

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$$

есть собственные числа матрицы A_n. Тогда

$$\widehat{\lambda}_1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \widehat{\lambda}_2 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \widehat{\lambda}_{n+1},$$

т. е. собственные числа матриц A_n и A_{n+1} перемежаются.

<u>Доказательство.</u> В ходе последующих рассуждений под скалярным произведением понимается стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^n$.

.

Пусть $1 \leqslant k \leqslant n$. **Как мы знаем,**

$$\widehat{\lambda}_{k+1} = \min_{R_{k+1}} \max_{x \in R_{k+1},\ x \neq 0} \frac{(A_{n+1}x, x)}{(x, x)}.$$

Здесь минимум берется по всевозможным подпространствам R_{k+1} **пространства** $\mathbb{C}^{n+1}$, **размерности** $k+1$.

.

Обозначим через

$$R_k \subset \mathbb{C}^n$$

множество векторов из R_{k+1}, $(n+1)$-я компонента которых в естественном базисе равна нулю:

$$R_k = \{x \in R_{k+1} : x_{n+1} = 0\}.$$

.

Тогда

$$\max_{x\in R_{k+1},\ x\neq 0} \frac{(A_{n+1}x,x)}{(x,x)} \geqslant \max_{x\in R_{k},\ x\neq 0} \frac{(A_{n}x,x)}{(x,x)}.$$

Для обоснования этого неравенства достаточно заметить, что слева максимум берется по более широкому множеству векторов.

.

Таким образом, из

$$\widehat{\lambda}_{k+1} = \min_{R_{k+1}} \max_{x\in R_{k+1},\ x\neq 0} \frac{(A_{n+1}x, x)}{(x, x)}.$$

и

$$\max_{x\in R_{k+1},\ x\neq 0} \frac{(A_{n+1}x, x)}{(x, x)} \geqslant \max_{x\in R_k,\ x\neq 0} \frac{(A_n x, x)}{(x, x)}.$$

получаем

$$\widehat{\lambda}_{k+1} = \min_{R_{k+1}} \max_{x\in R_{k+1},\ x\neq 0} \frac{(A_{n+1}x, x)}{(x, x)} \geqslant \min_{R_k} \max_{x\in R_k,\ x\neq 0} \frac{(A_n x, x)}{(x, x)}.$$

Но собственные числа матрицы A_n вычисляются по формуле

$$\lambda_k = \min_{R_k} \max_{x \in R_k,\ x \neq 0} \frac{(A_n x, x)}{(x, x)}.$$

Следовательно, из

$$\widehat{\lambda}_{k+1} \geqslant \min_{R_k} \max_{x \in R_k,\ x \neq 0} \frac{(A_n x, x)}{(x, x)}$$

имеем

$$\widehat{\lambda}_{k+1} \geqslant \lambda_k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Обратимся теперь к формуле

$$\widehat{\lambda}_k = \max_{R_{n+2-k}} \min_{x \in R_{n+2-k},\ x \neq 0} \frac{(A_{n+1}x, x)}{(x, x)}.$$

Здесь максимум берется по всевозможным подпространствам R_{n+2-k} пространства $\mathbb{C}^{n+1}$, размерности $n+2-k$, где $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1$.

При сужении множества векторов, по которому вычисляется минимум, последний не может уменьшиться, поэтому по аналогии с предыдущим случаем можем написать, что

$$\widehat{\lambda}_k = \max_{R_{n+2-k}} \min_{x\in R_{n+2-k},\ x\neq 0} \frac{(A_{n+1}x, x)}{(x, x)} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{R_{n+1-k}} \min_{x\in R_{n+1-k},\ x\neq 0} \frac{(A_n x, x)}{(x, x)} = \lambda_k,$$

где $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$

$$R_{n+1-k} = \{x \in R_{n+2-k} : x_{n+1} = 0\}.$$

.

Итак,

$$\lambda_k \leqslant \widehat{\lambda}_{k+1}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

и

$$\widehat{\lambda}_k \leqslant \lambda_k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

следовательно,

$$\widehat{\lambda}_1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \widehat{\lambda}_2 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \widehat{\lambda}_{n+1}. \ \square$$