§3. Образ оператора. Ядро оператора. Ранг матрицы

Пусть $A: X \to Y$ – лин. оператор. Мн-во всех векторов y из пр-ва Y таких, что $y = Ax$ для нек. $x \in X$, наз-ся областью значений или образом оператора и обозн-ся через $Im(A)$.

Мн-во $Im(A)$ – линейное подпр-во пр-ва Y.

Размерность подпр-ва $Im(A)$ наз-ся рангом оператора A и обозн-ся через $rank(A)$

Мн-во всех векторов $x \in X$ таких, что $Ax = 0$, наз-ся ядром оператора A и обозн. через $Ker(A)$

Это мн-во – линейное подпр-во пр-ва X. Размерность подпр-ва $Ker(A)$ наз-ся дефектом оператора A и обозн-ся через $def(A)$

Для любого лин-го оператора $A: X_n \to Y_m$.

$rank(A) + def(A) = n$.

Пусть в пр-ве X дана нек. система векторов $\{a^i\}_{i=1}^{m}$.

Будем считать, что не все вектори этой системы нулевые. Тогда указан. система обязательно содержит лин. независимую систему векторов. В частности, она сама может быть линейно независимой.

Подсистема векторов $\{a^{i_k}\}_{k=1}^{n} \subset \{a^i\}_{i=1}^{m}$, сост. из линейно независимых векторов, наз-ся **максимальной**, если добавление к ней

любого нового вектора из $\{a^i\}_{i=1}^{m}$ приводит к линейно зависимой системе.

Любые две максимальные линейно независимые подсистемы данной системы содержат одно и то же кол-во векторов.

Рангом системы векторов наз-ся кол-во векторов в максимальной линейно независимой подсистеме.

Пусть $A(m,n)$ - произвольная прямоуг. матрица. Будем трактовать ее столбцы как систему векторов пр-ва $\mathbb{C}^m$. Ранг этой системы векторов назовем

рангом матрицы $A(m,n)$. Ранг матрицы A $\to$ $\mathrm{rank}(A)$

Матрицу $A(m,n)$ можно трактовать и как систему строк из пр-ва $\mathbb{C}^n$.

Для любой матрицы $A(m,n)$ ранг этой системы строк равен рангу системы ее столбцов

Пусть $A: X_n \to Y_m$, A_{eq} - матрица оп A отн.-но произвольным образом фиксирован. базисов $\{e_k\}_{k=1}^{n} \subset X_n$ и $\{q_k\}_{k=1}^{m} \subset Y_m$

Тогда $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_{eq})$

Ранг матрицы оператора инвариантен по отн. к выбору базисов, выбираемых при ее построении, и можно было бы дать эквивалентное опред-е ранга оператора как ранга его матрицы

Упражнение

① Док-ть, что Ker(A) лин. подпр-во пр-ва X $\forall$ лин. оператора $A: X \to Y$:

По опред: $Ker(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$. Пусть x, y произв. векторы из $Ker(A)$, α, β любые числа. Тогда $\Rightarrow$ $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = 0$ $\Rightarrow$ лин. комбинация $\alpha x + \beta y \in Ker(A)$.

③ Найти макс. лин. независимую подсистему след. системы векторов пр-ва $\mathbb{R}^3$.

$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A_{123} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$; $A_{124} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$.

лин. зависимы. лин. зависимы.

$\Rightarrow$ a^1, a^2; a^1, a^3, a^1, a^4 и т.д. лин. независимы. Любая пара лин. независимых векторов ~~это~~ образует базис подпр-ва, натянутого на векторы a^1, a^2, a^3, a^4 $\Rightarrow$ $\underline{Ranг}$ этой системы век. $= \boxed{2}$

④ Пусть $A: X_n \to Y_m$ лин. оператор, $e^1, \dots, e^n$ базис пр-ва X_n. Док-ть, что $Im(A) = L(Ae^1, \dots, Ae^n)$ подпр-ва Y_m натянутого на векторы $Ae^1, \dots, Ae^n$.

Пусть $y \in Im(A)$ $\Rightarrow$ $y = Ax$ для нек. вектора $x \in X_n$ т.е.

$$y = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) \in \ell(Ae^1, \dots, Ae^n)$$

С другой стороны, если $y \in \ell(Ae^1, \dots, Ae^n)$, то

$$y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = Ax$$

где $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i$, т.е $y \in \operatorname{Im}(A)$. Значит,

$\operatorname{Im}(A) = \ell(Ae^1, \dots, Ae^n)$

⑥ Описать образ и ядро оператора диф-ия D в пр-ве P_n полиномов степени не выше n, с вещ-ми коэф-ми.

Каждому элементу пр-ва P_n оператор D ставит в соответст. е полином из P_{n-1}.

$\operatorname{Im}(D) = P_{n-1}$. $\Rightarrow D: P_n \to P_{n-1}$

Любой полином нулевой степени оператор D обращает в ноль. Полиномы более высоких степеней в результате диф-я не могут в ноль.

$\Rightarrow \operatorname{Ker}(D) = P_0$

⑦ Описать образ и ядро оператора проектирования P пр-ва X на пд-во ℓ_1 параллельно под-ву ℓ_2.

$P: X \to X$. $\Rightarrow Px = x^1$, где $x^1 \in \ell_1$, $x = x^1 + x^2$
$x^2 \in \ell_2$.

$\operatorname{Im}(P) = \ell_1$.

$\operatorname{Ker}(P) = \ell_2$.

(8) Описать образ и ядро оператора отражения R пр-ва X относительно подпр-ва l_1 паралл. по подпр-ву l_2.

$R: X \to X$. $Rx = x^1 - x^2$, $x = x^1 + x^2$,
$x^1 \in l_1$, $x^2 \in l_2$.

$Im(R) = X$

$Ker(R) = \{0\}$.

9 Найти образ и ядро лин. оператора A, действ. в геом. пр-ве V_3 по правилу: $Ax = [x, a]$, где $\underline{a}$ фиксированный ненулевой элемент.

(10) Матрица оператора $A: X_n \to Y_m$ ранга r, если в базисе $e^1, \dots e^n$ пр-ва X_n векторы $e^{r+1}, \dots e^n$ $\in$ ядру этого оператора

Столбцы матрицы A_e до $r+1$ — лин независимы.

Последние $n-r$ нулевые $\Rightarrow \in$ ядру A.

(11) Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \neq 0 \Rightarrow$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+2+9-6-1-6 = 0.$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2-2+6-6 = 0.$$

$$\Rightarrow Rank(A) = 2.$$

(12).

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 76 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -10 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(14.) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \lambda & 4 \end{pmatrix} = 12 - \lambda \Rightarrow$ при $\lambda = 0$, $\mathrm{rank}(A) = 2$.

$M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ \lambda & 4 & 10 \\ 1 & 7 & 17 \end{pmatrix} = 204 + 7\lambda + 10 - 4 - 210 - 17\lambda = 0 - 10\lambda \Rightarrow$

при $\lambda \neq 0$, $\mathrm{rank}(A) = 3$

(15) a) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} =$

$= M_2 = \begin{pmatrix} 25 & 31 \\ 75 & 94 \end{pmatrix} \neq 0$.

$M_3 = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 \\ 75 & 94 & 53 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$.

$\mathrm{rank}(A) = 3$.

(5). Построить базис образа, найти ранг и дефект.

а) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)$

$Ai^1 = (1, 1, 1)$
$Ai^2 = (1, 1, 1)$
$Ai^3 = (1, 1, 1)$ $\Rightarrow Ai = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(A) = 1$, базис образа $(1,1,1)$.

$rank(A) + def(A) = n \Rightarrow 3 - rank(A) = def(A)$

$3 - 1 = \underline{2}$

б) $A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3,\ x_1 - 2x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - 2x_3)$

$A_i^1 = (2, 1, 1)$

$A_i^2 = (-1, -2, 1)$

$A_i^3 = (-1, 1, -2)$

$$A_i = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3 \quad ; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 8 - 1 - 1 - 2 \\ -2 - 2 \end{matrix} = 0.$$

$\Rightarrow rank(2)$

$n - rank(A) = def(A) \Rightarrow 3 - 2 = \underline{1}$

г) $A(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - x_3)$

$A_i^1 = (-1, 1, 1)$

$A_i^2 = (1, -1, 1)$

$A_i^3 = (1, 1, -1)$

$$\Rightarrow A_i = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 4;\ M_3 = 3.$$

$def(A) = 3 - 3 = \underline{0}.$

15 в)

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3131 \\ 0 & -101 & 101 & 101 & 202 \\ 0 & 42 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3131 \\ 101 & 202 \end{pmatrix} \neq 0.$$

$\boxed{rank(A) = 3}$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3131 \\ 101 & 101 & 202 \\ 29 & -55 & -68 \end{pmatrix} \neq 0.$$

(16) а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -1-6 = -7$

$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1+10-45+25+3+6 = 0$

$rank(A) = 3$. $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \neq 0$.

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$M_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow M_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 45-45-2+9 \\ +18+25 = 0 \end{matrix}$

$M_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = +30-3+2+27 = -4$

$rank(A) = 3$

17. $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -1-2\lambda$

$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} = 6-20+\lambda^2-1-10\lambda+12\lambda = -15+2\lambda+\lambda^2$

При $\lambda \neq 3$ ранг матрицы равен 3

$$M_2 = \begin{vmatrix} 24 & 19 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow M_3 = \begin{vmatrix} 24 & 19 & 36 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathrm{rank}(A) = 3.$$

13. а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 10-12 \neq 0$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} = 80 + 8 + 6 + 20 - 2 - 96 = 0.$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathrm{rank}(A) = 2.$$

б) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow M_2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} = -28+40 = 12$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 8 & -7 & 4 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix} = -56 - 128 - 80 + 56 + 128 + 80 = 0.$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 8 & -7 & 2 \\ 4 & -8 & 7 \end{pmatrix} = 0. \Rightarrow \mathrm{rank}(A) = 2.$$

-38
-4
-4
4

(18) $A = \begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 22 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 26 \\ 47 \end{matrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 6348 & 171 & -19044 & 12 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 22 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot -8 \\ \cdot 13 \end{matrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 6348 & 171 & -19044 & 12 \\ 0 & -6348 & -171 & +19044 & -402 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 22 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -390 \\ 0 & -6348 & -171 & 19044 & -4 \\ 16 & -428 & 1 & 1234 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6348 & -171 \end{pmatrix} = 0.$

$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -171 & 19044 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -390 \\ 19044 & -402 \end{pmatrix} \neq 0.$

$\Rightarrow M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -390 \\ -171 & 19044 & -402 \\ 1 & 1284 & 22 \end{pmatrix} \neq 0.$

$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -390 \\ -6348 & -171 & 19044 & -402 \\ -428 & 1 & 1284 & 22 \end{pmatrix} = 0.$

$\Rightarrow \underline{\operatorname{rank}(A) = 3}$

(2) Показать, что для любых доп. умн-е прямоуг. матриц A, B справедливо неравенство

$$\operatorname{rank}(AB) \le \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$$

Пусть $C = AB$.

Столбцы мат. C линейно выражаются через столбцы мат. A, которые в свою очередь лин. выражаются через максимальную подсистему лин. независ. столбцов мат. A.

Число столбцов в этой подсистеме равно rank(A). Назовем столбцы этой системы базисными. Можно сказать, что столбцы матрицы C ∈ подпр.-ву, натянутому на базисные столбцы мат. A. ⇒ число лин. независ. столбцов мат. C не может превышать rank(A).

С др. ст., строки мат. C лин. выражаются через строки мат. B. ⇒ $\operatorname{rank}(C) \le \operatorname{rank}(B)$