Дорогие студенты, вы зашли в так называемую “Виртуальную аудиторию,” в которой к каждому вторнику и каждой пятнице я буду заносить материал новых занятий (необходимые определения и формулы, примеры решения задач и номера примеров для выполнения домашних заданий). Эти задания вы, как обычно, выполняете в ваших тетрадях, потом фотографируете их и высылает фотографии по адресу

volodinstudent@gmail.com

Естественно, вам придется, оформлять результаты решений в более пристойней форме (указывать номер задания, обводить или подчеркивать номера задач, писать формулы и текст разборчиво). Особенно следует оставлять большие пространства сверху и снизу фотографируемого листа. В этих же посланиях вы можете задавать мне вопросы, на которые я буду отвечать вам reply’ем.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Занятие 54

Частные производные и дифференциалы сложных функций.

Для того чтобы освоить технику дифференцирования сложных функций нескольких переменных, вспомним и проведем аналогию с дифференцированием функции одной переменной. Рассматривалась функция вида $f(\varphi(x)$, представляющая суперпозицию двух функций φ и f. Для того, чтобы вычислить производную по x от этой суперпозиции, вводилась новая переменная $t = \varphi(x)$ и вычислялась производная $f'(t) = d\,f(t)/d\,t$. После этого в $f'(t)$ вместо переменной t подставлялась функция $\varphi(x)$, от функции $\varphi(x)$ бралась производная $\varphi'(x) = d\,\varphi(x)/d\,x$ и эта производная умножалась на $f'(\varphi(x))$. Все эти действия по вычислению производной от сложной функции $f(\varphi(x))$ можно представить в виде следующей формулы:

$$\frac{d\,f(\varphi(x))}{d\,x} = \left.\frac{d\,f(t)}{d\,t}\right|_{t=\varphi(x)} \cdot \ \frac{d\,\varphi(x)}{d\,x.} \tag{1}$$

Для того, чтобы вычислить вторую производную по x от $f(\varphi(x))$, заметим, что первая производная (1) является произведение двух функций $f'_\varphi(\varphi(x))$ и $\varphi'(x)$. Следовательно, дифференцируем (1) как произведение двух функций от x, в котором функция

$$f'_\varphi(\varphi(x)) = \left.\frac{d\,f(t)}{d\,t}\right|_{t=\varphi(x)} \tag{2}$$

также является сложной. Итак,

$$\frac{d^2 f(\varphi(x))}{d x^2} = \frac{d^2 f(t)}{d t^2}\bigg|_{t=\varphi(x)} \cdot \ \frac{d\varphi(x)}{dx} \ + \ \frac{d f(t)}{d t}\bigg|_{t=\varphi(x)} \cdot \ \frac{d^2 \varphi(x)}{d x^2.}$$

Используя обозначения типа (2) представим эти выкладки по вычислению второй производной в более сжатой форме:

$$f''_x(\varphi(x)) = f''_\varphi(\varphi(x))\,\varphi'(x) \ + \ f'_x(\varphi(x))\,\varphi''(x). \tag{3}$$

Если потребуется вычислить третью производную от $f(\varphi(x)$, то каждое слагаемое в правой части (3) опять придется дифференцировать как произведение двух функций.

Итак, вспомнив, как все делалось для сложной функции одной переменной, обратимся к задаче дифференцирования сложной функции нескольких переменных. Для простоты и большей ясности изложения техники дифференцирования рассмотрим случай сложной функции трех переменных простейшего вида

$$w \ = \ f\,(\,\varphi_1(x,y,z),\, \varphi_2(x,y,z)\,)$$

Введем обозначения $u = \varphi_1(x,y,z)$, $v = \varphi_2(x,y,z)$, и для функции $f(u,v)$ будем записывать ее производные в виде

$$f'_1 = \frac{\partial f}{\partial u},\ f'_2 = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad f''_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}, \quad \text{и т.д.}$$

Следующие формулы определяют первые производные функции $w = w(x,y,z)$ по переменным x, y, z.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f'_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + f'_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = f'_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + f'_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = f'_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + f'_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}. \tag{4}$$

Замечание. В дальнейшем, надо всегда не забывать, что все производные f'_1, f''_{11}, f''_{12}... рассматриваются с подстановкой $u = \varphi_1(x,y,z)$, $v = \varphi_2(x,y,z)$, то есть эти производные являются такими же сложными функциями от x, y, z, как и сама функция f.

Итак, помня об этом замечании, будем вычислять вторые производные функции $w = w(x,y,z)$ по переменным x, y, z, дифференцируя равенства

(4). В качестве примера я приведу только две вторых производных, поскольку оставшиеся четыре вычисляются совершенно таким же способом – по аналогии.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left[f''_{11}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + f''_{12}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right]\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + f'_1\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} +$$

$$+ \left[f''_{21}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + f''_{22}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right]\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + f'_2\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \left[f''_{11}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + f''_{12}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right]\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + f'_1\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} +$$

$$+ \left[f''_{21}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + f''_{22}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right]\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + f'_2\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z}.$$

Дифференциал сложной функции:

$$d\,w = \frac{\partial w}{\partial x}\,d\,x + \frac{\partial w}{\partial y}\,d\,y + \frac{\partial w}{\partial z}\,d\,z,$$

$$d^n\,w = \left(d\,x\frac{\partial}{\partial x} + d\,y\frac{\partial}{\partial y} + d\,z\frac{\partial}{\partial z}\right)^n w.$$

Приведем решение нескольких задач на вычисление производных от сложных функций.

Пример 1. *Найти* $\partial^2 w \,/\, \partial x \partial y$ *для функции* $w = f(x^2, xy)$.

Решение. В этом примере всего две переменных x и y; функции $\varphi_1 = x^2$ (не зависит от y!), $\varphi_2 = xy$. Вычисляем первую производную по x, используя формулу (4):

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f'_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + f'_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = f'_1 \cdot 2x + f'_2 \cdot y.$$

Теперь, дифференцируя это равенство по y, находим смешанную производную по x и y :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = [f''_{11} \cdot 0 + f''_{12}\,x]\,2x + 2f'_1 \cdot 0 + [f''_{21} \cdot 0 + f''_{22}\,x]\,y + f'_2 = 2x^2\,f''_{12} + f''_{22}\,xy + f'_2.$$

Пример 2. *Найти полные дифференциалы $d\,u$ и d^2u для функции $w = f(x+y, z)$.*

Решение. В этом примере три переменных x, y и z; функции $\varphi_1 = x + y$, $\varphi_2 = z$. Эти функции имеют простые, независящие от аргументов производные первого и второго порядков:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\,x} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\,y} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\,z} = 1, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial\,z} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\,x} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\,y} = 0;$$

Отсюда следует, что все вторые производные от функций φ равны нулю. Таким образом,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_1', \quad \frac{\partial w}{\partial y} = f_1', \quad \frac{\partial w}{\partial z} = f_2'.$$

Дифференцируя эти равенства находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\,x^2} = f_{11}'', \quad \frac{\partial^2 w}{\partial\,y^2} = f_{11}'', \quad \frac{\partial^2 w}{\partial\,z^2} = f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = f_{11}'', \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = f_{12}'', \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = f_{12}''.$$

Подставляя найденные производные в формулу второго дифференциала

$$d^2\,w(x,y,z) = \frac{\partial^2 w}{\partial\,x^2}d\,x^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial\,y^2}d\,y^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial\,z^2}d\,z^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}d\,x\,d\,y + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}d\,x\,d\,z + 2\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}d\,y\,d\,z\,,$$

получаем ответ к поставленной задаче:

$$d^2\,w = f_{11}''\,(d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2) + 2f_{11}''\,d\,x\,d\,y + 2f_{12}''\,(d\,y^2 + d\,z^2) =$$

$$= f_{11}''\,(d\,x + d\,y)^2 + f_{11}''\,d\,z^2 + 2f_{12}''(d\,y^2 + d\,z^2).$$

Пример 3. *Найти все производные до второго порядка включительно от функции $u = f(x,y,z)$, когда $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$.*

Решение. В этом примере функция u есть функция одной переменной: $u = u(t)$, которая задается посредством трех функций от одной переменной $t:\ \ \varphi_1(t) = t,\ \ \varphi_2(t) = t^2,\ \ \varphi_3(t) = t^3$. С помощью формулы типа трехмерного аналога формулы (4), находим первые производныеu по t (Обратите внимание на запись производной функции от одного аргумента в терминах d, а не ∂):

$$\frac{d\,u}{d\,t} = f'_x + f'_y \cdot 2t + f'_z \cdot 3t^2.$$

Теперь, чтобы найти вторую производную, дифференцируем это равенство, помня. что все f' являются функциями от t :

$$\frac{d^2\,u}{d\,t^2} = f''_{xx} \,+\, f''_{xy} \cdot 2t \,+\, f''_{xz} \cdot 3t^2 +$$

$$+\,2t(f''_{yx} + f''_{yy} \cdot 2t \,+\, f''_{yz} \cdot 3t^2) \,+\, 2f'_y \,+\, 3t^2(f''_{zx} \,+\, f''_{zy} \cdot 2t \,+\, f''_{zz} \cdot 3t^2) \,+\, 6tf'_z.$$

Пример 4. *Доказать, что общее решение уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\,t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial\,x^2}$$

представимо в виде суммы двух функций вида $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$.

Решение. Для доказательства необходимо найти первую и вторую производные от функции $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$. Имеем:

$$\frac{\partial\,u}{\partial\,t} = -a\varphi' + a\psi', \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\,t^2} = a^2\varphi'' + a^2\psi'';$$

$$\frac{\partial\,u}{\partial\,x} = \varphi' + \psi', \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\,x^2} = \varphi'' + \psi''.$$

Подставляя найденные производные в уравнение, получаем требуемое доказательство:

$$a^2\varphi'' + a^2\psi'' = a^2(\varphi'' + \psi'').$$

Пример 5. *Путем последовательного дифференцирования исключить произвольные функции* φ *и* ψ *в выражении*

$$z = \varphi(x) + \psi(y).$$

Решение. Обращаем внимание на то, что $z = z(x, y)$ представима в виде суммы двух функций от разных аргументов. Следовательно, вторая смешанная производная исключит обе функции. Действительно, $\partial\,u/\partial\,x = \varphi'(x)$ и $\partial^2\,u/\partial\,x^2 = 0$.

Задание 54

Решение следующих задач, взятых из задачника Демидовича, высылаются по электронной почте volodinstudent@gmail.com в виде фотографий с большими полями вверху и внизу. Некоторые из этих задач могут показаться достаточно сложными, особенно та, что отмечена звездочкой, но, зато, их решение оцениваются более высоким баллом.

3285. *Найти частные производные до второго порядка включительно от функции*

$$u = f(x,\, xy,\, xyz).$$

3298. *Найти $d\,u$ и d^2u от функции*

$$u = f\left(\frac{x}{y},\, \frac{y}{z}\right).$$

3318. *Показать, что функция $z = y\,f(x^2 - y^2)$ удовлетворяет уравнению*

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

3330. *Доказать равенство*

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $u = \varphi\,(\,x + \psi(y)\,)$.

3258. *Путем последовательного дифференцирования исключить произвольные функции φ и ψ в выражении*

$$z = \varphi(x)\cdot\psi(y).$$