

10. Признаки сходимости знакопеременных рядов

Напомним, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Абсолютно сходящиеся ряды обладают рядом хороших свойств. Так, при любой перестановке членов абсолютно сходящийся ряд не меняет своей суммы, в отличие от сходящегося условно.

Признак Дирихле. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ сходится, если выполнены следующие два условия.

а) Суммы $\sum_{n=1}^k u_n$ ($k \in \mathbb{N}$) ограничены в совокупности, то есть найдётся такая константа $M \geq 0$, что $|\sum_{n=1}^k u_n| \leq M$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

б) $v_n \rightarrow 0$ монотонно (начиная с некоторого номера).

Замечание 1. В издании учебника Демидовича “Астрель”, 2007, в формулировке признака Дирихле допущена опечатка.

Признак Лейбница. Пусть $v_n \rightarrow 0$ монотонно. Тогда знакочередующийся “ряд Лейбница” $v_1 - v_2 + v_3 - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} v_n$ сходится.

Замечание 2. Признак Лейбница это частный случай признака Дирихле. Действительно, если положим $u_n = (-1)^{n+1}$, то $|\sum_{n=1}^k u_n| \leq 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Изложим некоторую схему исследования сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (*)$$

I. Проверяем выполнение необходимого условия сходимости ряда: $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, или, что эквивалентно, $|a_n| \rightarrow 0$. Если $a_n \not\rightarrow 0$, то заключаем, что ряд $(*)$ расходится. Если же $a_n \rightarrow 0$, то переходим к пункту II.

II. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ с неотрицательными членами, применяя при этом при необходимости известные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами: Коши, Даламбера, интегральный, сравнения, ... Если получаем, что

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то заключаем, что ряд $(*)$ сходится абсолютно. Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то переходим с пункту III.

III. Пытаемся применить признаки Лейбница, Дирихле, \dots , и, если получится, делаем вывод, что ряд $(*)$ сходится условно.

Пример. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

I. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$

II. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ расходится, так как $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ при $n \geq 3$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

III. Возьмём: $u_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $v_n = \frac{\ln n}{n}$ и проверим выполнение условий признака Дирихле.

а) Имеем: $\sum_{n=1}^1 u_n = u_1 = -1$, $\sum_{n=1}^2 u_n = u_1 + u_2 = -1 - 1 = -2$, $\sum_{n=1}^3 u_n = -2 + u_3 = -2 + 1 = -1$, $\sum_{n=1}^4 u_n = 0$. Нетрудно понять, что значения u_n повторяются через четыре

номера, с такой же периодичностью повторяются значения $\sum_{n=1}^k u_n$ и $|\sum_{n=1}^k u_n| \leq 2$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

б) Как уже проверено, $v_n \rightarrow 0$. Для проверки монотонности вычислим $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, откуда видно, что, начиная с четвёртого номера, последовательность (v_n) монотонно убывает.

Заключаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ сходится условно.