

0-778170

Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский

**Метод интегральных уравнений  
и точные нелокальные  
граничные условия  
в теории диэлектрических  
волноводов**

УДК 517.958:621.372.8  
ББК 22.172  
Д 21

*Печатается по рекомендации  
кафедры прикладной математики  
Казанского государственного университета*

**Научный редактор –**  
доктор физико-математических наук, профессор А.С. Ильинский

**Рецензенты:**  
доктор физико-математических наук, профессор И.Н. Сидоров,  
доктор физико-математических наук, профессор Ю.Г. Смирнов

**Даутов Р.З., Карчевский Е.М.**  
Д 21 Метод интегральных уравнений и точные нелокальные граничные условия в теории диэлектрических волноводов. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – 271 с.

ISBN 978-5-98180-668-1

На основе метода интегральных уравнений и точных нелокальных граничных условий исследован широкий круг спектральных задач теории диэлектрических волноводов.

Для научных работников в области математического моделирования и численных методов решения задач математической физики.

УДК 517.958:621.372.8  
ББК 22.172

ISBN 978-5-98180-668-1

© Даутов Р.З., Карчевский Е.М.  
© Казанский государственный университет, 2009

## Оглавление

Предисловие . . . . .	6
Основные обозначения . . . . .	9
РАЗДЕЛ 1. Метод интегральных уравнений	
Введение . . . . .	12
ГЛАВА 1. Основные уравнения теории диэлектрических волноводов . . . . .	17
§ 1. Уравнения для амплитуд собственных волн . . . . .	17
§ 2. Скалярное приближение слабоуправляющего волновода . . . . .	29
§ 3. Волновод кругового поперечного сечения . . . . .	31
ГЛАВА 2. Задачи о собственных волнах волноводов с постоянной диэлектрической проницаемостью . . . . .	38
§ 1. Скалярная задача в приближении слабоуправляющего волновода . . . . .	38
§ 2. Векторная задача в полной электродинамической постановке . . . . .	61
ГЛАВА 3. Задачи о собственных волнах волноводов с размытой границей . . . . .	74
§ 1. Скалярная задача в приближении слабоуправляющего волновода . . . . .	74
§ 2. Векторная задача в полной электродинамической постановке . . . . .	81
ГЛАВА 4. Задача о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в плоскостной среде . . . . .	89
§ 1. Спектральная задача для сингулярного интегрального уравнения . . . . .	89
§ 2. Фредгольмовость сингулярного интегрального оператора . . . . .	95

Р.З. ДАУТОВ, Е.М. КАРЧЕВСКИЙ

**МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ТОЧНЫЕ  
НЕЛОКАЛЬНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ТЕОРИИ  
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ**

УДК 517.958:621.372.8

ББК 22.172

Д 21

Печатается по решению  
кафедры прикладной математики  
Казанского государственного университета

**Научный редактор**

доктор физико-математических наук, профессор А.С. Ильинский

**Рецензенты:**

доктор физико-математических наук, профессор И.Н. Сидоров

доктор физико-математических наук, профессор Ю.Г. Смирнов

**Даутов Р.З., Карчевский Е.М.**

**Д21** Метод интегральных уравнений и точные нелокальные граничные условия в теории диэлектрических волноводов. — Казань: Изд-во КГУ, 2009. — 271 с.

**ISBN**

На основе метода интегральных уравнений и точных нелокальных граничных условий исследован широкий круг спектральных задач теории диэлектрических волноводов.

Для научных работников в области математического моделирования и численных методов решения задач математической физики.

Казанский государственный университет  
2009

## Оглавление

Предисловие . . . . .	6
Основные обозначения . . . . .	9
<b>РАЗДЕЛ 1. Метод интегральных уравнений</b>	
Введение . . . . .	12
ГЛАВА 1. Основные уравнения теории диэлектрических волноводов . . . . .	17
§ 1. Уравнения для амплитуд собственных волн . . . . .	17
§ 2. Скалярное приближение слабонаправляющего волновода . . . . .	29
§ 3. Волновод кругового поперечного сечения . . . . .	31
ГЛАВА 2. Задачи о собственных волнах волноводов с постоянной диэлектрической проницаемостью . . . . .	38
§ 1. Скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода . . . . .	38
§ 2. Векторная задача в полной электродинамической постановке . . . . .	61
ГЛАВА 3. Задачи о собственных волнах волноводов с размытой границей . . . . .	74
§ 1. Скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода . . . . .	74
§ 2. Векторная задача в полной электродинамической постановке . . . . .	81
ГЛАВА 4. Задача о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в плоскостной среде . . . . .	89
§ 1. Спектральная задача для сингулярного интегрального уравнения . . . . .	89
§ 2. Фредгольмовость сингулярного интегрального оператора . . . . .	95

ГЛАВА 5. Проекционные методы решения задач о собственных волнах волноводов с постоянной диэлектрической проницаемостью . . . . .	104
§ 1. Проекционные методы решения нелинейных спектральных задач . . . . .	104
§ 2. Метод Галеркина решения задач о собственных волнах . . . . .	106
§ 3. Численные эксперименты . . . . .	114
<b>РАЗДЕЛ 2. Точные нелокальные граничные условия</b>	
Введение . . . . .	122
ГЛАВА 6. Задачи на собственные значения и метод Галеркина с возмущениями . . . . .	129
§ 1. Обобщенная задача на собственные значения . . . . .	129
§ 2. Метод Галеркина с возмущениями . . . . .	132
§ 3. Параметрическая задача на собственные значения . . . . .	141
§ 4. Метод Галеркина с возмущениями для параметрической задачи . . . . .	148
ГЛАВА 7. Скалярная задача о поверхностных собственных волнах . . . . .	152
§ 1. Постановка задачи в ограниченной области . . . . .	153
§ 2. Существование и свойства решений . . . . .	168
§ 3. Дискретная задача . . . . .	181
§ 4. Оценки точности . . . . .	190
ГЛАВА 8. Векторная задача о поверхностных собственных волнах . . . . .	198
§ 1. Эквивалентные постановки задачи . . . . .	199
§ 2. Существование и свойства решений . . . . .	207
§ 3. Множество решений задачи $(\mathcal{P}_\infty)$ . . . . .	217
§ 4. Дискретная задача . . . . .	220
§ 5. Оценки точности . . . . .	227
ГЛАВА 9. Результаты численных экспериментов . . . . .	240
§ 1. Некоторые аспекты программной реализации . . . . .	240
§ 2. Волновод кругового поперечного сечения . . . . .	243
§ 3. Волновод квадратного поперечного сечения . . . . .	245

§ 4. Волновод прямоугольного поперечного сечения . . . .	246
§ 5. Волновод с поперечным сечением из трех кругов . . . .	250
<b>Литература</b> . . . . .	255

---

---

## Предисловие

Спектральные задачи, изучению которых посвящена эта книга, являются классическими в теории диэлектрических волноводов. Они привлекают пристальное внимание ученых с середины прошлого века. Об этом свидетельствуют как ряд фундаментальных и хорошо известных монографий по физике открытых диэлектрических направляющих структур, так и большое число современных работ. Однако теория диэлектрических волноводов достаточно полно построена лишь для направляющих структур специальной геометрии, допускающей применение метода разделения переменных.

В отличие от традиционных способов изложения, в этой книге задачи о собственных волнах волноводов формулируются по-новому, а именно на основе методов теории сингулярных интегральных уравнений и метода точных нелокальных граничных условий. Такой подход позволил изучить качественные свойства спектра всех известных типов собственных волн, амплитуды которых удовлетворяют парциальным условиям излучения (поверхностных, комплексных и вытекающих), с помощью общих результатов спектральной теории операторов, а также построить новые теоретически обоснованные численные методы решения спектральных задач теории диэлектрических волноводов.

Книга состоит из двух разделов. В первом разделе с помощью метода интегральных уравнений исследуются задачи о собственных волнах волноводов двух типов, находящихся в однородной окружающей среде: волноводов с постоянной диэлектрической проницаемостью и произвольным гладким контуром поперечного сечения, а также с переменной и гладкой во всей плоскости поперечного сечения диэлектрической проницаемостью — волноводов с размытой границей. Задачи ставятся в наиболее общем виде, и в рамках единых математических формулировок изучаются свойства спектра поверхностных, комплексных и вытекающих собственных волн. Рассматривается также задача о собственных волнах волновода в плоско-слоистой окружающей среде.

Отдельная глава посвящена разработке и обоснованию проекционных методов решения нелинейных спектральных задач, возникающих при построении математических моделей диэлектрических волноводов с постоянной диэлектрической проницаемостью.

Авторы сочли необходимым начать изложение первого раздела с главы, где формулируются основные дифференциальные уравнения спектральной теории диэлектрических волноводов, основанные на уравнениях Максвелла. Подготовленный читатель может пропустить эту главу, обращаясь к ней за справками по мере необходимости.

Во втором разделе книги предлагается специальный подход, ориентированный на расчет поверхностных собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов, находящихся в однородной окружающей среде. Он основан на сочетании метода точных нелокальных граничных условий и метода конечных элементов. Благодаря методу точных нелокальных граничных условий исходные задачи, сформулированные на всей плоскости поперечного сечения волновода, удается эквивалентным образом свести к линейным параметрическим спектральным задачам для ограниченных самосопряженных операторов в круге, целиком содержащем область изменения диэлектрической проницаемости. Такие постановки естественны и удобны для численного решения задач методом конечных элементов.

Во втором разделе на основе метода точных нелокальных граничных условий формулируются и исследуются две задачи о поверхностных собственных волнах: векторная задача в полной электродинамической постановке и скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода. Изучаются вопросы существования и свойства решений этих задач. Строятся их конечноэлементные аппроксимации. Получаются оценки точности. Изложение начинается со специальной главы, содержащей общие результаты, используемые для оценок точности схем МКЭ.

Последняя глава посвящена описанию результатов вычислительных экспериментов. Рассматриваются модели однородных оптических волноводов различных поперечных сечений, для которых известны точные решения, либо имеются экспериментальные данные. Проводится численное исследование точности метода.

Первый раздел книги написан Е.М. Карчевским, второй — Р.З. Даутовым. Многие вопросы, затронутые в книге, активно обсуж-

дались с сотрудниками кафедр прикладной и вычислительной математики Казанского государственного университета. Авторы приносят им свою искреннюю признательность. Рукопись книги была внимательно прочитана А.С. Ильинским, который взял на себя труд по ее редактированию. Авторы с благодарностью учли его замечания. Авторы благодарны Г.П. Корнилову, Э.Р. Миниахметову, А.И. Носичу, С.И. Соловьеву, Е.В. Трифонову, А.Г. Фролову, Д. Хансону за предоставленные теоретические и расчетные материалы.

Работа частично выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Е.М. Карчевский, грант 09-01-97009).

## Основные обозначения

### Общие обозначения

“:=” — символ, использующийся для определения математических объектов (определяемый объект стоит слева от этого символа, а выражение, определяющее объект, — справа).

“=” — символ, использующийся для определения математических объектов (определяемый объект стоит справа от этого символа, а выражение, определяющее объект, — слева).

$\mathbb{R}$  — множество всех вещественных чисел.

$\mathbb{R}_+$  — множество строго положительных вещественных чисел.

$\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ .

$\mathbb{R}^2$  — плоскость поперечного сечения волновода.

$x, y$  — точки на плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

$(x_1, x_2)$  — декартовы координаты точки  $x$ .

$(r, \varphi)$  — полярные координаты точки  $x$ .

$|x - y| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$  — расстояние между точками  $x$  и  $y$ .

“.” — скалярное произведение векторов.

“ $\times$ ” — векторное произведение векторов.

$\Omega_i$  — область поперечного сечения волновода.

$\gamma$  — граница области  $\Omega_i$ .

$\overline{\Omega}_i := \Omega_i \cup \gamma$ .

$\Omega_e := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_i$ .

$u^+$  — предельное значение функции  $u$  извне контура  $\gamma$ .

$u^-$  — предельное значение функции  $u$  изнутри контура  $\gamma$ .

$\partial u / \partial \nu$  — производная по нормали к контуру  $\gamma$ , внешней относительно области  $\Omega_i$ .

$\partial u / \partial \tau$  — производная по касательной к контуру  $\gamma$ , направленной так, что область  $\Omega_i$  остается слева при обходе ее по контуру  $\gamma$ .

$\bar{u}$  — функция, комплексно-сопряженная с  $u$ .

$\Omega$  — открытый круг радиуса  $R$ , содержащий область  $\Omega_i$ .

$\Gamma$  — граница круга  $\Omega$ .

$\overline{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$ .

$\Omega_\infty := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ .

$\omega$  — частота электромагнитных колебаний.

$\beta$  — продольная постоянная распространения.

$\varepsilon_0$  — электрическая постоянная.

$\mu_0$  — магнитная постоянная.

$k := \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  — продольное волновое число.

$\varepsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость.

$n := \sqrt{\varepsilon}$  — показатель преломления.

$\varepsilon_\infty$  — относительная диэлектрическая проницаемость окружающей среды.

$n_\infty := \sqrt{\varepsilon_\infty}$  — показатель преломления окружающей среды.

$\varepsilon_+ := \max_{x \in \overline{\Omega}_i} \varepsilon(x)$ .

$n_+ := \max_{x \in \overline{\Omega}_i} n(x)$ .

$\chi_+ := \sqrt{k^2 \varepsilon_+ - \beta^2}$ .

$\chi_\infty := \sqrt{k^2 \varepsilon_\infty - \beta^2}$ .

$p := \sqrt{\beta^2 - k^2 \varepsilon_\infty}$  — поперечное волновое число в окружающей среде.

$J_n$  — функция Бесселя порядка  $n$ .

$N_n$  — функция Неймана порядка  $n$ .

$H_n^{(1)} := J_n + iN_n$  — функция Ханкеля первого рода порядка  $n$ .

$H_n^{(2)} := J_n - iN_n$  — функция Ханкеля второго рода порядка  $n$ .

$I_n, K_n$  — модифицированные функции Бесселя порядка  $n$ .

### Линейные нормированные пространства

$H$  — вещественное пространство Гильберта.

$(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в гильбертовом пространстве.

$\|\cdot\| := (\cdot, \cdot)^{1/2}$  — норма в гильбертовом пространстве.

$a(\cdot, \cdot): H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  — ограниченная билинейная форма.

$L_p(\Omega)$ ,  $p \geq 1$ , — пространство Лебега функций, измеримых на  $\Omega$  и суммируемых со степенью  $p$ .

$\|u\|_{p,\Omega} := \left( \int_\Omega |u|^p dx \right)^{1/p}$  — норма на пространстве  $L_p(\Omega)$ .

$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$  — существенная верхняя грань функции  $u$  на  $\Omega$ .

$L_\infty(\Omega)$  — линейное пространство функций с нормой

$\|u\|_{\infty,\Omega} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$ .



$C(\overline{\Omega})$  — линейное пространство непрерывных на  $\overline{\Omega}$  функций.

$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} := \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|$  — норма на пространстве  $C(\overline{\Omega})$ .

$C^k(\Omega)$  — линейное пространство  $k$  раз дифференцируемых на области  $\Omega$  функций.

$C^{0,\alpha}(\gamma)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , — линейное пространство непрерывных по Гельдеру на контуре  $\gamma$  функций с нормой

$$\|u\|_{\alpha} := \max_{x \in \gamma} |u(x)| + \sup_{x, y \in \gamma, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\alpha}}.$$

$C^{1,\alpha}(\gamma)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , — линейное пространство непрерывно дифференцируемых по Гельдеру на контуре  $\gamma$  функций с нормой

$$\|u\|_{1,\alpha} := \max_{x \in \gamma} |u(x)| + \max_{x \in \gamma} |u'(x)| + \sup_{x, y \in \gamma, x \neq y} \frac{|u'(x) - u'(y)|}{|x - y|^{\alpha}}.$$

$C_0^{\infty}(\Omega)$  — множество бесконечно дифференцируемых финитных на  $\Omega$  функций.

$C^{\infty}(\overline{\Omega})$  — линейное пространство, получаемое сужением на  $\overline{\Omega}$  множества бесконечно дифференцируемых на  $\mathbb{R}^2$  функций.

$W_p^s(\Omega)$  — пространство Соболева.

$\|u\|_{s,p,\Omega} := \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq s} |D^{\alpha} u|^p dx \right)^{1/p}$  — норма на пространстве Соболева

при  $1 \leq p < \infty$ . Здесь  $D^{\alpha}$  обозначает обобщенную производную порядка  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,

$$D^{\alpha} := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}, \quad |\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \quad D^{(0,0)} u = u.$$

$\|u\|_{s,\infty,\Omega} := \max_{|\alpha| \leq s} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |D^{\alpha} u(x)|$  — норма на пространстве Соболева при  $p = \infty$ .

$|u|_{s,p,\Omega} := \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=s} |D^{\alpha} u|^p dx \right)^{1/p}$  — полунормы на пространстве Соболева при  $1 \leq p < \infty$ .

$|u|_{s,\infty,\Omega} := \max_{|\alpha|=s} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |D^{\alpha} u(x)|$  — полунормы на пространстве Соболева при  $p = \infty$ .

$\|\cdot\|_{s,\Omega}$  — норма на пространстве  $W_2^s(\Omega)$ .

$H^s(\Omega) := W_2^s(\Omega)$ .

## РАЗДЕЛ 1. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### Введение

Интерес к задачам о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов, находящихся как в однородной, так и в плоскостной окружающей среде возник в середине прошлого века при решении задач геологоразведки и стремительно возрастает в связи с бурным развитием оптических телекоммуникационных технологий передачи данных на большие расстояния [127] и использованием в радиоэлектронной промышленности миниатюрных интегрированных оптических схем вместо классических электрических [122]. Эти задачи являются спектральными задачами теории дифракции, т. е. задачами поиска частных решений уравнений Максвелла в виде бегущих (собственных) волн в неограниченных областях, удовлетворяющих условиям сопряжения на границах раздела сред и соответствующим условиям на бесконечности.

Исчерпывающая информация получена к настоящему времени о решениях относительно простой задачи о собственных волнах волновода кругового поперечного сечения с постоянной диэлектрической проницаемостью, находящегося в однородной окружающей среде. Хорошо изучены свойства поверхностных собственных волн такого волновода [75]. Собственные функции задачи (амплитуды собственных волн) в этом случае отвечают конечному числу собственных значений (постоянных распространения), принадлежащих ограниченному интервалу вещественной оси. Отличительными особенностями поверхностных собственных волн являются экспоненциальное убывание на бесконечности их амплитуд и симметричность соответствующего дифференциального оператора.

В работах Б.З. Каценеленбаума [50], Г.И. Веселова, С.Б. Раевского [6] на основе анализа характеристического уравнения, полученного методом разделения переменных, было доказано существование принципиально других классов собственных волн цилиндрического



диэлектрического волновода кругового поперечного сечения с постоянной вещественной диэлектрической проницаемостью. Они получили названия вытекающих и комплексных, соответственно. Амплитуды комплексных собственных волн также экспоненциально убывают. Вытекающие собственные волны имеют экспоненциально возрастающие на бесконечности амплитуды. Задачи о комплексных и вытекающих собственных волнах имеют несимметричные дифференциальные операторы, а соответствующие постоянные распространения являются комплексными.

Важно отметить, что постоянные распространения собственных волн всех типов непрерывно зависят от радиуса волновода, диэлектрической проницаемости волновода и окружающей среды, частоты электромагнитных колебаний [50], [6]. С изменением этих параметров собственные волны могут трансформироваться из одного типа в другой.

Однако до настоящего времени не было предложено математических формулировок общих задач о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов произвольного поперечного сечения и распределения диэлектрической проницаемости, позволяющих исследовать качественные свойства всех указанных выше типов собственных волн: поверхностных, комплексных и вытекающих, строить на основе таких формулировок теоретически обоснованные численные методы.

Наиболее полно были изучены свойства решений близких спектральных задач теории дифракции — задач о собственных волнах щелевых и полосковых линий. В работах А.С. Ильинского, Ю.Г. Смирнова, Ю.В. Шестопалова, Е.В. Чернокожина (см. [33], [153] и цитированную там литературу) указанные задачи формулируются как задачи поиска характеристических чисел фредгольмовых голоморфных оператор-функций, полученные на основе метода интегральных уравнений. В работах этих авторов анализируются качественные свойства характеристического множества: локализация, дискретность, существование характеристических чисел. Исследования опираются на общую теорию нелинейных спектральных задач, развитую в работах И.Ц. Гохберга, М.Г. Крейна [12], Като [48]. Предлагаются и исследуются проекционные методы расчета волноведущих структур. При обосновании численных методов используются результаты Г.М. Вайникко, О.О. Карма [4], [5] о проекционных методах решения нелиней-

ных спектральных задач для фредгольмовых операторов.

Спектральные параметры в указанных работах разыскивались на некоторой поверхности Римана, а собственные функции — в классах функций, удовлетворяющих на бесконечности парциальным условиям излучения. Парциальные условия излучения были введены А.Г. Свешниковым в работе [72], сформулированы им для внешней задачи дифракции на регулярном волноводе в статье [73]. Аналогичные условия применялись для корректной постановки задачи дифракции в работе Н. Reichardt [152].

Парциальным условиям излучения удовлетворяют амплитуды поверхностных, комплексных и вытекающих собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов, находящихся в однородной окружающей среде. На это было указано в работе А.И. Носича [148], посвященной изучению функций Грина задач о собственных волнах волноводов с компактным поперечным сечением.

Несмотря на то, что задачи о собственных волнах диэлектрических волноводов, сформулированные в первом разделе книги, близки к задачам о собственных волнах щелевых и полосковых линий передач в том смысле, что их операторы имеют комплексные характеристические числа, а собственные функции удовлетворяют парциальным условиям излучения, они имеют существенные отличия. Это связано с тем, что разыскиваемые частные решения уравнений Максвелла (уравнения Гельмгольца при упрощающих предположениях о свойствах среды) должны удовлетворять другим граничным условиям. Следовательно, при построении моделей распространения собственных волн диэлектрических волноводов возникает необходимость в применении специальных подходов. Они разработаны в настоящей книге на основе известных методов решения задач дифракции на проницаемых телах.

Достаточно эффективные и универсальные алгоритмы решения задач дифракции в неограниченных областях основаны на переходе к интегральным уравнениям (см., напр., монографии А.С. Ильинского, Ю.Г. Смирнова [32], Д. Колтона, Р. Кресса [54], В.Д. Купрадзе [57], К. Мюллера [146], Н.Б. Плещинского [68], А.Б. Самохина [71]). С точки зрения экономии вычислительных ресурсов эффективными являются интегральные уравнения, основанные на применении потенциалов простого слоя. Например, по сравнению с методом формулы Грина метод потенциалов простого слоя позволяет сократить в два раза

число искомых функций, порядок системы интегральных уравнений и, как следствие, размерность соответствующей алгебраической задачи. Этот подход использовался, например, в работах В.В. Дробницы, В.А. Цецохо [26], С.И. Смагина [74], А.Г. Ярового [89] при решении задач дифракции электромагнитных волн на проникаемых включениях в плоскостой среде; в работах В.П. Шестопалова [87], А.Е. Поединчука, Ю.А. Тучкина, В.П. Шестопалова [69] — при решении спектральных задач волнового рассеяния на незамкнутых экранах; в работах Е.В. Захарова, Ю.В. Пименова [30], А.С. Ильинского, Ю.Г. Смирнова [32] — при решении задач дифракции электромагнитных волн на проводящих тонких экранах.

Значительное внимание привлекают задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрических структурах с размытой границей, т. е. не имеющих четкой границы раздела сред (см. [110], [71] и цитированную там литературу). В частности, при постановке спектральных задач теории диэлектрических волноводов часто делается предположение о том, что характеристики волновода плавно переходят в характеристики окружающей среды (см., напр., [148], [123]). Эта модель наиболее адекватна для определения собственных волн естественных природных волноводов и искусственных волноводов, изготовленных методом диффузии.

Метод сведения трехмерной задачи дифракции электромагнитных волн на неоднородном теле с размытой границей к интегральному уравнению Фредгольма второго рода по области неоднородности был предложен в работе К. Мюллера [146], использован в работе Д. Колтона, Р. Кресса [110] при анализе существования и единственности решения задачи дифракции.

Во второй главе книги формулируются нелинейные спектральные задачи для фредгольмовых голоморфных оператор-функций, содержащих контурные сингулярные интегральные операторы, эквивалентные задачам о собственных волнах волноводов с постоянной диэлектрической проницаемостью. В третьей главе формулируются нелинейные спектральные задачи для фредгольмовых голоморфных оператор-функций, содержащих слабо сингулярные интегральные операторы по области изменения показателя преломления, эквивалентные задачам о собственных волнах волноводов с размытой границей. Во второй главе задачи строятся на основе метода потенциалов простого слоя, в третьей — на основе упомянутого выше мето-

да, предложенного К. Мюллером. Решения сформулированных задач определяют поверхностные, комплексные и вытекающие собственные волны диэлектрических волноводов. Доказывается, что для всех допустимых значений неспектральных параметров регулярные множества оператор-функций не пусты, а характеристические множества могут состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями. Характеристические значения непрерывно зависят от неспектральных параметров, с изменением которых могут появляться и исчезать лишь на границе области голоморфности оператор-функций.

При моделировании природных волноводов и интегрированных оптических схем, т. е. сочетающих цилиндрические и плоскостой направляющие структуры (см., напр., [122]), возникает задача о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в плоскостой окружающей среде. Такой характер окружающей среды существенно усложняет исследование задачи. В работе A.S. Bonnet-Ben Dhia и P. Joly [102] методами спектральной теории неограниченных самосопряженных операторов доказано существование решений задачи в частном случае волновода прямоугольной формы на бесконечной подложке.

Для численного решения этой задачи широко применяется двумерное сингулярное интегральное уравнение по области поперечного сечения волновода [92], [96], [141], [154]. В работе Н.Р. Urbach [156] установлена нетеровость соответствующего интегрального оператора в случае однородной окружающей среды, а также доказана непустота его спектра. В четвертой главе доказывается фредгольмовость этого оператора в случае плоскостой окружающей среды, что используется для обоснования численных методов решения задачи.

В последней, пятой главе первого раздела книги разрабатывается метод Галеркина решения задач о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов с постоянной диэлектрической проницаемостью. Доказывается его сходимость. Метод ориентирован на расчет постоянных распространения и амплитуд собственных волн всех известных типов. Приводятся результаты расчетов поверхностных и комплексных собственных волн волноводов различных поперечных сечений. Результаты сравниваются с известными точными решениями и экспериментальными данными. Изучается реальная скорость сходимости метода.

# ГЛАВА 1

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

### § 1. Уравнения для амплитуд собственных волн

**1. Система уравнений Максвелла.** Спектральные задачи теории диэлектрических волноводов формулируются на основе однородных уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathcal{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \quad (1.1)$$

Здесь введены следующие обозначения (используется декартова система координат):

$$\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)^T, \quad \mathcal{H} = (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)^T$$

есть векторы напряженности электрического и магнитного полей с координатами

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad \mathcal{H}_i = \mathcal{H}_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Через  $x_1, x_2, x_3$  обозначены декартовы координаты точки;  $t$  — время; символами  $\mu_0$  и  $\varepsilon_0$  обозначены магнитная и электрическая постоянные;  $\varepsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость,  $n = \sqrt{\varepsilon}$  — показатель преломления. Как обычно,

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = \begin{bmatrix} \partial \mathcal{E}_3 / \partial x_2 - \partial \mathcal{E}_2 / \partial x_3 \\ \partial \mathcal{E}_1 / \partial x_3 - \partial \mathcal{E}_3 / \partial x_1 \\ \partial \mathcal{E}_2 / \partial x_1 - \partial \mathcal{E}_1 / \partial x_2 \end{bmatrix}.$$

Пусть волновод представляет собой бесконечно длинный цилиндр из диэлектрика, находящийся в неограниченном пространстве с постоянной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_\infty$ . Будем считать, что образующая волновода параллельна оси  $Ox_3$ , диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  внутри цилиндра не зависит от  $x_3$  и является вещественной функцией пространственных переменных  $x_1$  и  $x_2$ . В дальнейшем

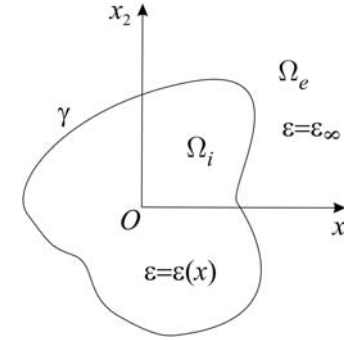


Рис. 1. Поперечное сечение цилиндрического диэлектрического волновода в однородной окружающей среде.

символом  $x$  будем обозначать вектор с координатами  $x_1$  и  $x_2$ . Схематическое изображение поперечного сечения волновода приведено на рис. 1.

Обозначим символом  $\mathbb{R}^2$  плоскость  $x_3 = \text{const}$ . Пусть  $\Omega_i$  — ограниченная область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , ее граница  $\gamma$  — достаточно гладкая кривая,  $\overline{\Omega}_i := \Omega_i \cup \gamma$ , а  $\Omega_e := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_i$ . Область  $\Omega_i$  будем называть областью поперечного сечения волновода. Относительно диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  предположим следующее:  $\varepsilon$  — гладкая вещественная функция в  $\overline{\Omega}_i$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_\infty = \text{const}$  при  $x \in \Omega_e$ ;

$$\varepsilon_+ := \max_{x \in \overline{\Omega}_i} \varepsilon(x) > \varepsilon_\infty > 0.$$

Функция  $\varepsilon$  может иметь разрыв на контуре  $\gamma$ .

В первом разделе книги исследуются задачи о собственных волнах волноводов двух типов, находящихся в однородной окружающей среде: волноводов с постоянной в области  $\Omega_i$  диэлектрической проницаемостью и дважды непрерывно-дифференцируемым контуром  $\gamma$ , а также волноводов с дважды непрерывно дифференцируемой во всей плоскости поперечного сечения диэлектрической проницаемостью — волноводов с размытой границей. При этом задачи формулируются в классическом смысле. Во втором разделе книги используются обобщенные постановки задач и требования гладкости диэлектрической проницаемости и границы раздела сред снижаются.

Будем изучать собственные волны, т. е. решения системы уравнений Максвелла (1.1), имеющие вид

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ \mathcal{H} \end{bmatrix} (x, x_3, t) = \operatorname{Re} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} (x) e^{i(\beta x_3 - \omega t)} \right). \quad (1.2)$$

Здесь

$$\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)^T, \quad \mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)^T$$

есть комплексные амплитуды векторов напряженности электрического и магнитного полей  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$ ;  $\omega > 0$  — частота электромагнитных колебаний;  $\beta$  — комплексный параметр, называемый продольной постоянной распространения.

В задачах о собственных волнах диэлектрических волноводов нужно найти такие значения  $\omega$  и  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения системы уравнений Максвелла (1.1), имеющие вид (1.2), удовлетворяющие условиям сопряжения на границах раздела сред и условиям на бесконечности в плоскости поперечного сечения волновода, которые будут сформулированы ниже.

Построим уравнения, которым удовлетворяют функции  $\mathbf{E}(x)$  и  $\mathbf{H}(x)$ . Подставляя векторы  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  вида (1.2) в (1.1), получим систему уравнений

$$\operatorname{rot}_\beta \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot}_\beta \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma, \quad (1.3)$$

где векторная операция  $\operatorname{rot}_\beta$  определена равенством

$$\operatorname{rot}_\beta \mathbf{E} := \begin{bmatrix} \partial E_3 / \partial x_2 - i\beta E_2 \\ i\beta E_1 - \partial E_3 / \partial x_1 \\ \partial E_2 / \partial x_1 - \partial E_1 / \partial x_2 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Пусть  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)^T(x)$  и  $u = u(x)$  — комплекснозначные вектор-функция и скалярная функция, соответственно. Введем дифференциальные операторы:

$$\operatorname{div}_\beta \mathbf{F} := \partial F_1 / \partial x_1 + \partial F_2 / \partial x_2 + i\beta F_3,$$

$$\Delta u := \partial^2 u / \partial x_1^2 + \partial^2 u / \partial x_2^2,$$

$$\operatorname{grad}_\beta u := (\partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2, i\beta u)^T,$$

$$\operatorname{grad} u := (\partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2, 0)^T.$$

Непосредственными вычислениями легко проверить справедливость следующих равенств:

$$\operatorname{div}_\beta (\operatorname{grad}_\beta u) = \Delta u - \beta^2 u, \quad (1.5)$$

$$\operatorname{div}_\beta (\operatorname{rot}_\beta \mathbf{F}) = 0, \quad (1.6)$$

$$\operatorname{div}_\beta (u \mathbf{F}) = u \operatorname{div}_\beta \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \operatorname{grad} u, \quad (1.7)$$

$$\operatorname{rot}_\beta (\operatorname{grad}_\beta u) = 0, \quad (1.8)$$

$$\operatorname{rot}_\beta (\operatorname{rot}_\beta \mathbf{F}) = -\Delta \mathbf{F} + \beta^2 \mathbf{F} + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta \mathbf{F}), \quad (1.9)$$

$$\Delta (\operatorname{div}_\beta \mathbf{F}) = \operatorname{div}_\beta (\Delta \mathbf{F}). \quad (1.10)$$

Здесь и далее символом “ $\cdot$ ” обозначено скалярное произведение векторов.

**Утверждение 1.1.** Пусть  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  — нетривиальное решение системы уравнений (1.3). Тогда для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$  справедливы следующие равенства:

$$\operatorname{rot}_\beta (\operatorname{rot}_\beta \mathbf{E}) = k^2 \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.11)$$

$$\operatorname{rot}_\beta (\varepsilon^{-1} \operatorname{rot}_\beta \mathbf{H}) = k^2 \mathbf{H}, \quad (1.12)$$

$$\operatorname{div}_\beta (\varepsilon \mathbf{E}) = 0, \quad (1.13)$$

$$\operatorname{div}_\beta \mathbf{H} = 0, \quad (1.14)$$

где  $k^2 := \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$  (вещественный параметр  $k$  называется продольным волновым числом).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Равенства (1.11) и (1.12) легко получить, применив операцию  $\operatorname{rot}_\beta$  к правым и левым частям уравнений (1.3). Для того, чтобы получить равенства (1.13) и (1.14), надо применить к правым и левым частям уравнений (1.3) операцию  $\operatorname{div}_\beta$  и воспользоваться формулой (1.6).  $\square$

**Утверждение 1.2.** Пусть  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  — нетривиальное решение системы уравнений (1.3); диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  принимает в области  $\Omega_i$  постоянное значение  $\varepsilon_+$ . Тогда в  $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$  функции  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца, а именно,

$$[\Delta + (k^2 \varepsilon_+ - \beta^2)] \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad (1.15)$$

$$[\Delta + (k^2 \varepsilon_\infty - \beta^2)] \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega_e. \quad (1.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнений (1.11), (1.12) с помощью формулы (1.9) получаем:

$$\begin{aligned} -\Delta E + \beta^2 E + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta E) &= k^2 \varepsilon_+ E, & x \in \Omega_i, \\ -\Delta H + \beta^2 H + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta H) &= k^2 \varepsilon_+ H, & x \in \Omega_i, \\ -\Delta E + \beta^2 E + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta E) &= k^2 \varepsilon_\infty E, & x \in \Omega_e, \\ -\Delta H + \beta^2 H + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta H) &= k^2 \varepsilon_\infty H, & x \in \Omega_e. \end{aligned}$$

Из этих уравнений, равенства (1.14) и равенства

$$\operatorname{div}_\beta E = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma,$$

справедливого в силу уравнения (1.13) при сделанных предположениях относительно  $\varepsilon$ , получаем требуемое утверждение.  $\square$

**2. Электромагнитные потенциалы.** Для определения комплексных амплитуд собственных волн на плоскости нужно найти нетривиальные решения системы уравнений (1.3), т. е. определить шесть скалярных функций, являющихся компонентами векторов  $E$  и  $H$ . Во многих случаях оказывается удобным ввести некоторые вспомогательные функции, называемые электромагнитными потенциалами, через которые определенным образом выражаются амплитуды собственных волн. Введем в рассмотрение электромагнитные потенциалы и сформулируем, следуя [31], необходимые нам в дальнейшем утверждения.

**Определение 1.1.** Вектор-функция  $\Pi(x)$  называется вектором Герца или поляризационным потенциалом векторного поля  $\{E, H\}$ , если справедливо представление

$$E = (k^2 \varepsilon_\infty + \operatorname{grad}_\beta \operatorname{div}_\beta) \Pi, \quad (1.17)$$

$$H = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \operatorname{rot}_\beta \Pi. \quad (1.18)$$

**Утверждение 1.3.** Для любого нетривиального решения  $E, H$  системы уравнений (1.3) существует поляризационный потенциал  $\Pi$ . Потенциал  $\Pi$  для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$  удовлетворяет уравнению

$$[\Delta + (k^2 \varepsilon_\infty - \beta^2)] \Pi = -\frac{1}{\varepsilon_\infty} (\varepsilon - \varepsilon_\infty) E. \quad (1.19)$$

**Определение 1.2.** Скалярные функции  $u(x)$  и  $v(x)$  называются потенциальными, если справедливы представления

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{i}{k^2 \varepsilon - \beta^2} \left( \mu_0 \omega \frac{\partial v}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \\ E_2 &= \frac{-i}{k^2 \varepsilon - \beta^2} \left( \mu_0 \omega \frac{\partial v}{\partial x_1} - \beta \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \\ E_3 &= u, \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{i}{k^2 \varepsilon - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial x_1} - \varepsilon_0 \varepsilon \omega \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \\ H_2 &= \frac{i}{k^2 \varepsilon - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial x_2} + \varepsilon_0 \varepsilon \omega \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \\ H_3 &= v. \end{aligned} \quad (1.21)$$

**Утверждение 1.4.** Пусть диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  принимает в области  $\Omega_i$  постоянное значение  $\varepsilon_+$ , и выполняются следующие условия:

$$\beta^2 \neq k^2 \varepsilon_+, \quad \beta^2 \neq k^2 \varepsilon_\infty. \quad (1.22)$$

Тогда для любого нетривиального решения  $E, H$  системы (1.3) существуют потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$ . Потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$[\Delta + (k^2 \varepsilon_+ - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad (1.23)$$

$$[\Delta + (k^2 \varepsilon_\infty - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega_e. \quad (1.24)$$

**3. Условия на границах раздела сред.** По предположению на контуре  $\gamma$  диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  может иметь разрыв. Условия сопряжения на гладком контуре  $\gamma$  заключаются в том, что при переходе через эту границу касательные составляющие векторов  $E$  и  $H$  должны быть непрерывны (см., напр., [31]):

$$\nu \times E^+ = \nu \times E^-, \quad x \in \gamma, \quad (1.25)$$

$$\nu \times H^+ = \nu \times H^-, \quad x \in \gamma. \quad (1.26)$$

Здесь символом “ $\times$ ” обозначено векторное произведение векторов, через  $E^+(E^-)$  обозначено предельное значение функции  $E$  извне (изнутри) контура  $\gamma$ , а через  $\nu$  обозначен вектор единичной нормали к контуру  $\gamma$ , внешней по отношению к области  $\Omega_i$ .

Сформулируем теперь условия сопряжения, которым должны удовлетворять потенциальные функции  $u(x)$ ,  $v(x)$ , определяющие амплитуды собственных волн диэлектрического волновода с постоянной диэлектрической проницаемостью (см., напр., [67]). Эти условия являются следствием условий (1.25), (1.26).

**Утверждение 1.5.** Пусть диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  принимает в области  $\Omega_i$  постоянное значение  $\varepsilon_+$ , и выполняются условия

$$\beta^2 \neq k^2 \varepsilon_+, \quad \beta^2 \neq k^2 \varepsilon_\infty. \quad (1.27)$$

Тогда потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$ , определяющие по формулам (1.20), (1.21) любые ненулевые комплексные амплитуды  $E$  и  $H$  собственной волны  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  вида (1.2), удовлетворяют условиям сопряжения

$$u^+ = u^-, \quad v^+ = v^-, \quad x \in \gamma,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 \varepsilon_+ - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial \tau} + \varepsilon_0 \varepsilon_+ \omega \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \right) = \\ = \frac{1}{k^2 \varepsilon_\infty - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial \tau} + \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \omega \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \right), \quad x \in \gamma, \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 \varepsilon_+ - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial u}{\partial \tau} - \mu_0 \omega \frac{\partial v^-}{\partial \nu} \right) = \\ = \frac{1}{k^2 \varepsilon_\infty - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial u}{\partial \tau} - \mu_0 \omega \frac{\partial v^+}{\partial \nu} \right), \quad x \in \gamma. \end{aligned}$$

Здесь  $\partial u / \partial \nu$  — производная по нормали к контуру  $\gamma$ ,  $\partial u / \partial \tau$  — производная по касательной к контуру  $\gamma$ . Всюду в книге предполагается, что область  $\Omega_i$  остается слева при обходе ее по контуру  $\gamma$ .

**4. Парциальные условия излучения.** Область  $\Omega_e$  является неограниченной, следовательно, для того, чтобы полностью сформулировать задачу о собственных волнах диэлектрического волновода, необходимо задать поведение комплексных амплитуд собственных волн  $E$  и  $H$  на бесконечности в плоскости поперечного сечения волновода  $\mathbb{R}^2$ .

**Определение 1.3.** Пусть  $\Lambda$  — поверхность Римана функции  $\ln \chi_\infty(\beta)$ , где  $\chi_\infty(\beta) = \sqrt{k^2 \varepsilon_\infty - \beta^2}$ ,  $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\}$  — открытый круг радиуса  $R$ ,  $\Gamma$  — граница этого круга, а  $R_0$  — минимальная положительная константа, такая, что  $\Omega_i$  целиком лежит в круге  $\Omega$  радиуса  $R_0$ . Будем говорить, что функции  $E$  и  $H$ , являющиеся решениями уравнения Гельмгольца (1.16), где  $\beta \in \Lambda$ , удовлетворяют парциальным условиям излучения, если эти функции для всех  $|x| \geq R_0$  разлагаются в ряды следующего вида:

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) e^{il\varphi}. \quad (1.29)$$

Здесь  $H_l^{(1)}$  — функции Ханкеля первого рода индекса  $l$  (см., напр., [88]),  $(r, \varphi)$  — полярные координаты точки  $x$ .

Общее решение уравнения Гельмгольца (1.16) для  $|x| \geq R_0$  имеет вид [7]:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) e^{il\varphi} + \\ + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} C_l \\ D_l \end{bmatrix} H_l^{(2)}(\chi_\infty r) e^{il\varphi}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

где  $H_l^{(2)}$  — функции Ханкеля второго рода индекса  $l$  (см., напр., [88]). Для функций  $E$ ,  $H$ , являющихся решениями уравнения Гельмгольца (1.16), ряды (1.29), (1.30) сходятся абсолютно и равномерно во всякой области вида  $a \leq r \leq b$ , где  $a$  и  $b$  — произвольные числа, удовлетворяющие условию  $R_0 < a < b < \infty$ ; кроме того, указанные ряды можно дифференцировать почленно сколько угодно раз [7].

Следовательно, парциальные условия излучения (1.29) определенным образом ограничивают множество всех возможных решений

уравнения Гельмгольца (1.16). Проанализируем строение поверхности Римана  $\Lambda$  и конкретизируем поведение на бесконечности амплитуд различных типов собственных волн, отвечающих постоянным распространения  $\beta$ , лежащим на разных листах этой поверхности.

**5. Поверхность Римана  $\Lambda$ .** Для всех целых  $l$  функции Ханкеля  $H_l^{(1)}(\chi_\infty(\beta)r)$  представимы в виде

$$H_l^{(1)}(\chi_\infty(\beta)r) = c_l^{(1)}(\chi_\infty(\beta)r) \ln(\chi_\infty(\beta)r) + R_l^{(1)}(\chi_\infty(\beta)r), \quad (1.31)$$

где  $c_l^{(1)}(\chi_\infty(\beta)r)$  и  $R_l^{(1)}(\chi_\infty(\beta)r)$  — однозначные аналитические функции комплексного аргумента  $\beta$  (см., напр., [88]). Будем рассматривать функции  $H_l^{(1)}(\chi_\infty(\beta)r)$  как однозначные аналитические функции на римановой поверхности  $\Lambda$  функции  $\ln \chi_\infty(\beta)$ .

Поверхность Римана  $\Lambda$  состоит из бесконечного числа листов и имеет две точки ветвления  $\beta = \pm kn_\infty$ , где  $n_\infty = \sqrt{\varepsilon_\infty}$ . В силу того, что функцию  $\chi_\infty(\beta)$  следует рассматривать как однозначную на двулистной поверхности Римана, поверхность  $\Lambda$  состоит из бесконечного числа листов римановой поверхности логарифма  $\Lambda_m$ ,  $m = 0, \pm 1, \dots$ , каждый из которых делится на два листа римановой поверхности квадратного корня  $\chi_\infty(\beta)$ :  $\Lambda_m^{(1)}$  и  $\Lambda_m^{(2)}$ . Всюду далее будем предполагать, что точки ветвления не принадлежат римановой поверхности  $\Lambda$ .

Обозначим символом  $\Lambda_0^{(1)}$  главный лист римановой поверхности  $\Lambda$ , который определяется следующими условиями:

$$-\pi/2 < \arg \chi_\infty(\beta) < 3\pi/2, \quad \operatorname{Im}(\chi_\infty(\beta)) \geq 0. \quad (1.32)$$

С листом  $\Lambda_0^{(1)}$  соединяется лист  $\Lambda_0^{(2)}$ , который определяется следующим образом:

$$-\pi/2 < \arg \chi_\infty(\beta) < 3\pi/2, \quad \operatorname{Im}(\chi_\infty(\beta)) < 0. \quad (1.33)$$

Все другие пары листов  $\Lambda_{m \neq 0}^{(1),(2)}$  отличаются от  $\Lambda_0^{(1),(2)}$  сдвигом значений  $\arg \chi_\infty(\beta)$  на  $2\pi m$  и удовлетворяют условиям

$$-\pi/2 + 2\pi m < \arg \chi_\infty(\beta) < 3\pi/2 + 2\pi m, \quad \operatorname{Im}(\chi_\infty(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_m^{(1)};$$

$$-\pi/2 + 2\pi m < \arg \chi_\infty(\beta) < 3\pi/2 + 2\pi m, \quad \operatorname{Im}(\chi_\infty(\beta)) < 0, \quad \beta \in \Lambda_m^{(2)}.$$

Лист  $\Lambda_0^{(2)}$  соединен с листом  $\Lambda_0^{(1)}$  вдоль разреза, выбранным в соответствии с условием  $\operatorname{Im}(\chi_\infty(\beta)) = 0$  на  $\Lambda_0^{(1)}$ , т. е. проходящим по

мнимой оси и интервалу  $(-kn_\infty, kn_\infty)$  вещественной оси. Листы  $\Lambda_{\pm 1}^{(2)}$  соединяются с листом  $\Lambda_0^{(2)}$  вдоль разреза, проходящего по вещественной оси так, что  $|\beta| > kn_\infty$ .

## 6. Поверхностные, комплексные и вытекающие волны.

**Определение 1.4.** Обозначим вещественную ось листа  $\Lambda_0^{(1)}$  символом  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ , а листа  $\Lambda_0^{(2)}$  — символом  $\mathbb{R}_0^{(2)}$ . Пусть  $G$  — объединение двух интервалов на оси  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ :

$$G := \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : kn_\infty < |\beta| < kn_+ \right\}. \quad (1.34)$$

Символом  $C_0^{(1)}$  обозначим множество

$$C_0^{(1)} := \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re} \beta \neq 0 \right\} \setminus \mathbb{R}_0^{(1)}. \quad (1.35)$$

Поверхностными, комплексными и вытекающими собственными волнами будем называть такие волны, амплитуды которых удовлетворяют парциальным условиям излучения (1.29), а постоянные распространения  $\beta$  принадлежат множествам  $G \subset \Lambda_0^{(1)}$ ,  $C_0^{(1)} \subset \Lambda_0^{(1)}$  и  $\Lambda_0^{(2)} \setminus \mathbb{R}_0^{(2)}$ , соответственно.

Конкретизируем поведение амплитуд поверхностных комплексных и вытекающих собственных волн на бесконечности. Функции Ханкеля первого рода имеют следующую асимптотику при  $r \rightarrow \infty$  и  $-\pi/2 < \arg \chi_\infty < 3\pi/2$  и (см., напр., [88]):

$$H_l^{(1)}(\chi_\infty r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \chi_\infty r}} e^{i(\chi_\infty r - l\pi/2 - \pi/4)} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\chi_\infty r}\right) \right). \quad (1.36)$$

Таким образом, если  $-\pi/2 < \arg \chi_\infty < 3\pi/2$ ,  $\operatorname{Im}(\chi_\infty) \neq 0$ , и функции  $E$  и  $H$  удовлетворяют парциальным условиям излучения, то эти функции удовлетворяют следующему условию на бесконечности:

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = e^{i\chi_\infty r} O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.37)$$

Нетрудно видеть, что для поверхностных и комплексных собственных волн  $\operatorname{Im}(\chi_\infty) > 0$ . Следовательно, их амплитуды  $E, H$  экспоненциально убывают на бесконечности как  $\exp(-\operatorname{Im}(\chi_\infty)r)r^{-1/2}$ . Амплитуды  $E$  и  $H$  вытекающих собственных волн экспоненциально возрастают на



бесконечности как  $\exp(-\operatorname{Im}(\chi_\infty)r)r^{-1/2}$ , потому что для них имеет место неравенство  $\operatorname{Im}(\chi_\infty) < 0$ .

Для поверхностных собственных волн ряд (1.29) может быть записан в эквивалентном виде

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} K_l(pr) e^{il\varphi}, \quad (1.38)$$

где  $p := \sqrt{\beta^2 - k^2 \varepsilon_\infty}$  — поперечное волновое число в окружающей среде, а  $K_l$  — модифицированные функции Бесселя порядка  $l$  [88]. Во втором разделе книги, посвященном исследованию поверхностных волн, используются разложения вида (1.38), т.к. при  $\beta \in G$  параметр  $p$  и функции  $K_l$  принимают вещественные значения.

**7. Волны излучения.** Обозначим символом  $D$  множество

$$D := \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re} \beta = 0 \right\} \cup \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : |\beta| < kn_\infty \right\}. \quad (1.39)$$

Постоянные распространения волн излучения [144] принадлежат области  $D$ , а их амплитуды удовлетворяют следующему условию на бесконечности:

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.40)$$

Парциальные условия излучения (1.29) для всех функций, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца (1.16) при всех  $\beta \in D$ , эквивалентны условию излучения Зоммерфельда

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} - i\chi_\infty \right) \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.41)$$

Это было доказано в [7]. Кроме того, в [7] было доказано, что условие (1.41) является более сильным, чем условие (1.40). Следовательно, амплитуды волн излучения не удовлетворяют парциальным условиям излучения (1.29).

В дальнейшем мы докажем, что область  $D$  не может содержать собственных значений спектральных задач о собственных волнах, амплитуды которых удовлетворяют парциальным условиям излучения (1.29).

**8. Другие типы волн.** Функции Ханкеля второго рода имеют следующую асимптотику при  $r \rightarrow \infty$  и  $-\pi/2 < \arg \chi_\infty < 3\pi/2$  и (см., напр., [88]):

$$H_l^{(2)}(\chi_\infty r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \chi_\infty r}} e^{-i(\chi_\infty r - l\pi/2 - \pi/4)} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\chi_\infty r}\right) \right). \quad (1.42)$$

Из хорошо известного разложения (см., напр., [88])

$$H_l^{(1)}(\chi_\infty e^{i2\pi m} r) = \alpha_l^{(m)} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) + \gamma_l^{(m)} H_l^{(2)}(\chi_\infty r), \quad \alpha_l^{(m)}, \gamma_l^{(m)} \neq 0,$$

справедливого для всех  $m \neq 0$ ,  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , и

$$\beta \in \bigcup_{m \neq 0} \left( \Lambda_m^{(1)} \cup \Lambda_m^{(2)} \right),$$

а также асимптотик (1.36), (1.42) следует, что постоянным распространения  $\beta$ , лежащим на листах  $\Lambda_m^{(1)}, \Lambda_m^{(2)}$ ,  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ , отвечают собственные волны, амплитуды которых представляют собой суммы уходящих на бесконечность и приходящих из бесконечности цилиндрических волн.

Распределение постоянных распространения  $\beta \in \Lambda$  обладает симметрией, которая является следствием эквивалентности между положительным и отрицательным направлениями распространения собственных волн вдоль продольной оси  $Ox_3$ , а также положительным и отрицательным направлениями времени  $t$  (см., напр., [147]). А именно, если  $\beta$  — положительная постоянная распространения, и  $E, H$  — амплитуды векторов электрической и магнитной напряженности соответствующей собственной волны, то  $-\beta$  также является постоянной распространения собственной волны с амплитудами  $-E, H$ . Далее, в силу того, что  $\operatorname{Im} \omega = 0$  и  $\operatorname{Im} \varepsilon = 0$ , комплексно-сопряженные числа  $\pm \bar{\beta}$  также являются постоянными распространения собственных волн с амплитудами  $\mp \bar{E}, -\bar{H}$ . Все эти утверждения могут быть легко проверены непосредственной подстановкой в дифференциальные уравнения (1.3), условия сопряжения (1.25), (1.26) и условия на бесконечности (1.29). Все упомянутые собственные волны называют прямыми, обратными, сопряженными и обратно-сопряженными волнами, соответственно (см. [148]).

## §2. Скалярное приближение слабонаправляющего волновода

Приведем теперь уравнения, которым удовлетворяют комплексные амплитуды собственных волн в приближении слабонаправляющего волновода. Это название носят волноводы со слабо меняющейся в плоскости поперечного сечения диэлектрической проницаемостью (см., напр., [75], [9]).

**1. Представления для комплексных амплитуд собственных волн.** В случае слабонаправляющего волновода удобно воспользоваться выражением компонент комплексных амплитуд  $E$  и  $H$  через составляющие  $H_1$  и  $H_2$ :

$$E_3 = \frac{1}{i\varepsilon_0\varepsilon\omega} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma, \quad (1.43)$$

$$E_1 = \frac{\mu_0\omega}{\beta} H_2 - \frac{1}{\varepsilon_0\omega\beta} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right], \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma, \quad (1.44)$$

$$E_2 = -\frac{\mu_0\omega}{\beta} H_1 - \frac{1}{\varepsilon_0\omega\beta} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right], \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma, \quad (1.45)$$

$$H_3 = \frac{-1}{i\beta} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \right), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma. \quad (1.46)$$

Эти представления легко получить из системы уравнений (1.3), следуя, например, [9].

**2. Дифференциальные уравнения для  $H_1$  и  $H_2$ .** Из системы уравнений (1.3) вытекает (см., напр., [9]), что составляющие  $H_1$  и  $H_2$  для всех  $x$  из  $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$  удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$[\Delta + (k^2\varepsilon - \beta^2)] H_1 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right), \quad (1.47)$$

$$[\Delta + (k^2\varepsilon - \beta^2)] H_2 = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right). \quad (1.48)$$

Вследствие того, что у слабонаправляющего волновода диэлектрическая проницаемость мало меняется в плоскости  $\mathbb{R}^2$ , правыми

частями в системе (1.47), (1.48) можно пренебречь (см., напр., [9]). Таким образом, в приближении слабонаправляющего волновода  $H_1$  и  $H_2$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца:

$$[\Delta + (k^2\varepsilon - \beta^2)] \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma. \quad (1.49)$$

**3. Условия сопряжения для  $H_1$  и  $H_2$ .** Построим теперь, следуя [9], условия, которым в приближении слабонаправляющего волновода должны удовлетворять функции  $H_1$ ,  $H_2$  на контуре  $\gamma$ . Из условий сопряжения (1.25), (1.26) на границе  $\gamma$  для касательных составляющих векторов комплексных амплитуд  $E$  и  $H$  вытекают следующие условия сопряжения для компонент  $H_1$  и  $H_2$ :

$$H_1^+ = H_1^-, \quad H_2^+ = H_2^-, \quad x \in \gamma, \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial H_1^+}{\partial \nu} - \frac{\partial H_1^-}{\partial \nu} = \nu_2 \frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{\varepsilon^+} \left( \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \right), \quad x \in \gamma, \quad (1.51)$$

$$\frac{\partial H_2^+}{\partial \nu} - \frac{\partial H_2^-}{\partial \nu} = -\nu_1 \frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{\varepsilon^+} \left( \frac{\partial H_1^+}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2^+}{\partial x_1} \right), \quad x \in \gamma. \quad (1.52)$$

В приближении слабонаправляющего волновода правые части в граничных условиях (1.51), (1.52) можно считать равными нулю [9]. Таким образом, функции  $H_1$  и  $H_2$  удовлетворяют одним и тем же условиям сопряжения на  $\gamma$ :

$$H_1^+ = H_1^-, \quad H_2^+ = H_2^-, \quad x \in \gamma, \quad (1.53)$$

$$\frac{\partial H_1^+}{\partial \nu} = \frac{\partial H_1^-}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial H_2^+}{\partial \nu} = \frac{\partial H_2^-}{\partial \nu}, \quad x \in \gamma. \quad (1.54)$$

**4. Условия излучения для  $H_1$  и  $H_2$ .** Из (1.29) следует, что функции  $H_1$  и  $H_2$  на бесконечности должны удовлетворять парциальным условиям излучения, а именно, для всех  $x$ , таких, что  $|x| \geq R_0$ , они должны разлагаться в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды:

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} B_{1,l} \\ B_{2,l} \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) e^{il\varphi}. \quad (1.55)$$

Таким образом, в приближении слабонаправляющего волновода функции  $H_1$  и  $H_2$  удовлетворяют одному и тому же уравнению Гельм-

гольца (1.49), одинаковым условиям сопряжения (1.53), (1.54) и одинаковым условиям излучения (1.55) на бесконечности. Следовательно, в рассматриваемом приближении  $H_1$  и  $H_2$  являются решениями одной и той же задачи.

Подводя итог, еще раз подчеркнем, что скалярное приближение слабонаправляющего волновода заключается в том, что вместо того, чтобы разыскивать векторы комплексных амплитуд  $E$  и  $H$ , ищется лишь одна скалярная функция  $u := H_1 = H_2$ , удовлетворяющая следующим условиям:

$$[\Delta + (k^2\varepsilon - \beta^2)] u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma, \quad (1.56)$$

$$u^+ = u^-, \quad x \in \gamma, \quad (1.57)$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \gamma, \quad (1.58)$$

$$u = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_\infty r) e^{il\varphi}, \quad |x| \geq R_0. \quad (1.59)$$

Остальные компоненты векторов  $E$  и  $H$  определяются затем по формулам (1.43)–(1.46).

### §3. Волновод кругового поперечного сечения

Рассмотрим частный случай диэлектрического волновода кругового поперечного сечения с функцией  $\varepsilon$ , принимающей постоянное значения внутри волновода. В этом случае спектральные задачи (в полной электродинамической постановке и в приближении слабонаправляющего волновода) методом разделения переменных сводятся к семействам трансцендентных уравнений относительно  $k$  и  $\beta$  (см., напр., [75]).

**1. Векторная задача в полной электродинамической постановке.** Пусть  $R$  — радиус волновода,  $\varepsilon_\infty > 0$  — диэлектрическая проницаемость окружающей среды и  $\varepsilon_+ > \varepsilon_\infty$  — диэлектрическая проницаемость волновода. Согласно утверждению 1.4, для любой собственной волны существуют потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$ ,

определяющие ее амплитуду. Потенциальные функции удовлетворяют уравнениям Гельмгольца:

$$[\Delta + (k^2\varepsilon_+ - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad |x| < R,$$

$$[\Delta + (k^2\varepsilon_\infty - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad |x| > R.$$

Применим для решения этих уравнений метод разделения переменных. Получим разложения

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} c_l \\ d_l \end{bmatrix} J_l(\chi_+ r) e^{il\varphi}, \quad |x| < R, \quad (1.60)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} a_l \\ b_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) e^{il\varphi}, \quad |x| > R. \quad (1.61)$$

Здесь  $\chi_+ = \sqrt{k^2\varepsilon_+ - \beta^2}$ ;  $J_n(\chi_+ r)$  — функции Бесселя порядка  $l$  [88]. В этих разложениях учтено, что искомые функции не должны иметь особенностей, и на бесконечности они удовлетворяют парциальным условиям излучения (1.29).

Используя (1.60), (1.61) и условия сопряжения (1.28), придем к однородной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $a_l, b_l, c_l, d_l, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Элементы матрицы этой системы нелинейно зависят от  $k$  и  $\beta$ . Матрица имеет такую блочно-диагональную структуру, что исходная система распадается на бесконечное количество независимых систем, каждая из которых содержит четыре уравнения. Если при некоторых  $k$  и  $\beta$  определитель какой-либо из этих систем обращается в нуль, то она имеет нетривиальное решение, определяющее собственную волну волновода. Из условия равенства нулю определителей этих систем вытекает семейство трансцендентных уравнений для определения параметров  $k$  и  $\beta$ :

$$\left( \varepsilon_+ \chi_\infty \frac{J'_l(\chi_+ R)}{J_l(\chi_+ R)} - \varepsilon_\infty \chi_+ \frac{H_l^{(1)'}(\chi_\infty R)}{H_l^{(1)}(\chi_\infty R)} \right) \times \\ \times \left( \chi_\infty \frac{J'_l(\chi_+ R)}{J_l(\chi_+ R)} - \chi_+ \frac{H_l^{(1)'}(\chi_\infty R)}{H_l^{(1)}(\chi_\infty R)} \right) = \left( \frac{l\beta k(\varepsilon_+ - \varepsilon_\infty)}{\chi_\infty \chi_+ R} \right)^2, \quad l = 0, 1, \dots \quad (1.62)$$

Эти уравнения в теории волноводов носят название характеристических (см., напр., [75]).

Важные результаты относительно качественных свойств собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения были получены в [50] и [6] на основе анализа характеристических уравнений (1.62) методами теории функций комплексного переменного. В этих статьях было доказано, что при  $k > 0$  у волновода кругового сечения наряду с поверхностными собственными волнами (см., напр., [75]), отвечающими  $\beta \in G$ , существуют комплексные собственные волны [6], постоянные распространения  $\beta$  которых принадлежат множеству  $C_0^{(1)}$ , и вытекающие собственные волны [50] с  $\beta \in \Lambda_0^{(2)} \setminus \mathbb{R}_0^{(2)}$ .

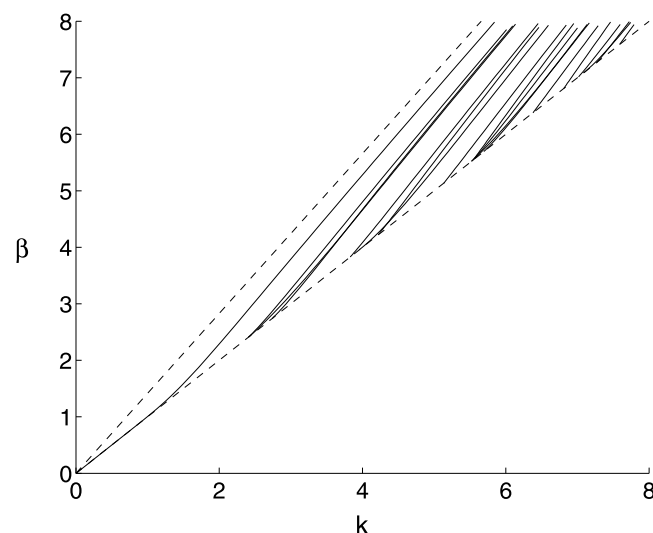


Рис. 2. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения.

На рисунке 2 показаны дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения — графики функций  $\beta = \beta(k)$ , где  $k > 0$ , а постоянные распространения  $\beta$  принадлежат интервалу  $G$ . Пунк-

тирными линиями показаны границы области  $\{(k, \beta) : k > 0, \beta \in G\}$ . Графики построены на основе поиска корней характеристических уравнений (1.62). Расчеты проведены для волновода единичного радиуса с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_+ = 2$ , находящегося в однородной окружающей среде с  $\varepsilon_\infty = 1$ .

Для любого сколь угодно малого значения  $k > 0$  существуют два линейно независимых решения задачи. Соответствующие собственные волны называются фундаментальными, или основными. Дисперсионная кривая для основных собственных волн кругового волновода одна, так как они для такого волновода являются вырожденными — одному значению постоянной распространения  $\beta$  соответствуют две волны с линейно независимыми амплитудами. При любом  $k > 0$  число решений задачи конечно и стремится к бесконечности при  $k \rightarrow \infty$ . Значения частот электромагнитных колебаний  $\omega$ , при которых  $\beta = kn_\infty$ , называются критическими частотами, а соответствующие значения волновых чисел  $k$  — точками отсечки (критическими точками). Это точки, в которых начинаются дисперсионные кривые для неосновных собственных волн. Дисперсионные кривые при  $k \rightarrow \infty$  имеют линейную асимптотику, а именно,  $\beta/k \rightarrow n_+$  при  $k \rightarrow \infty$ .

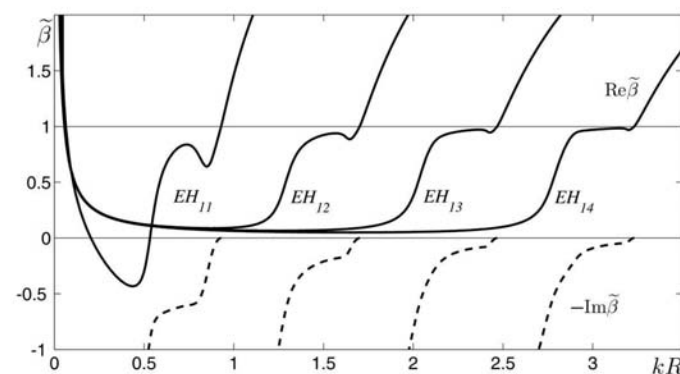


Рис. 3. Дисперсионные кривые для поверхностных, вытекающих и комплексных собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения. Здесь  $\tilde{\beta} := \beta/(kn_\infty)$ .

На рисунке 3, следуя [6], приведены дисперсионные кривые для поверхностных, вытекающих и комплексных собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода кругового сечения — графики вещественных (непрерывные линии) и мнимых (пунктирные линии) частей функций  $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(kR)$ , где  $\tilde{\beta} := \beta/(kn_\infty)$ . С уменьшением частоты колебаний  $\omega$ , при переходе через точки отсечки (в этих точках  $\tilde{\beta} = 1$ ), поверхностные волны трансформируются в вытекающие с комплексными постоянными распространения  $\beta \in \Lambda_0^{(2)} \setminus \mathbb{R}_0^{(2)}$ . В рассмотренном случае при относительной диэлектрической проницаемости  $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon_+/\varepsilon_\infty = 18$  в ходе дальнейшего уменьшения  $\omega$  собственная волна  $EH_{11}$  трансформируется в комплексную, постоянная распространения  $\beta$  которой принадлежит  $C_0^{(1)}$ . Чем больше значение  $\tilde{\varepsilon}$ , тем большее количество вытекающих собственных волн преобразуются в комплексные с уменьшением  $\omega$ . Так, например, при  $\tilde{\varepsilon} > 50$  таких волн уже две:  $EH_{11}$  и  $EH_{12}$ , и так далее [6].

**2. Скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода.** Рассмотрим теперь задачу для волновода кругового поперечного сечения радиуса  $R$  с постоянной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_+$ , мало отличающейся от диэлектрической проницаемости окружающей среды  $\varepsilon_\infty < \varepsilon_+$ . В этом случае может быть применено приближение слабонаправляющего волновода. Как было показано в § 2, в этом случае задача сводится к определению функции  $u$ , удовлетворяющей внутри круга и вне его уравнению Гельмгольца

$$[\Delta + (k^2\varepsilon_+ - \beta^2)]u = 0, \quad |x| < R,$$

$$[\Delta + (k^2\varepsilon_\infty - \beta^2)]u = 0, \quad |x| > R,$$

а на границе раздела сред условиям сопряжения

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial r} = \frac{\partial u^-}{\partial r}, \quad |x| = R.$$

Потребуем от функции  $u(x)$ , чтобы она удовлетворяла на бесконечности парциальным условиям излучения (1.59).

Поставленная задача может быть решена методом разделения переменных аналогично векторной задаче, рассмотренной в предыдущем пункте. В результате получим семейство характеристических

уравнений для определения параметров  $k$  и  $\beta$ :

$$\chi_+ \frac{J'_l(\chi_+ R)}{J_l(\chi_+ R)} = \chi_\infty \frac{H_l^{(1)' }(\chi_\infty R)}{H_l^{(1)}(\chi_\infty R)}, \quad l = 0, 1, \dots \quad (1.63)$$

Подробное изложение свойств различных типов собственных волн, отвечающих различным значениям  $\beta$ , можно найти, например, в книге [75]. Уравнение (1.63) имеет решения  $\beta$ , лежащие в области  $G$  листа  $\Lambda_0^{(1)}$  римановой поверхности  $\Lambda$ , которым отвечают поверхностные собственные волны и решения  $\beta$ , лежащие на листе  $\Lambda_0^{(2)}$ , которым отвечают вытекающие собственные волны. Однако, как показано в [75], уравнение (1.63), в отличие от уравнения (1.62) не имеет решений  $\beta$ , лежащих на листе  $\Lambda_0^{(1)}$  вне вещественной оси. Другими словами, у слабонаправляющих волноводов кругового поперечного сечения не существует комплексных собственных волн.

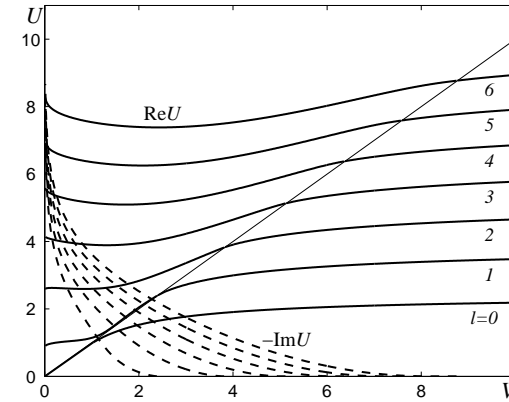


Рис. 4. Дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн слабонаправляющего цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения. Здесь  $V := kR\sqrt{\varepsilon_+ - \varepsilon_\infty}$ ,  $U := kR\sqrt{\varepsilon_+ - (\beta/k)^2}$ .

На рисунке 4, следуя [75], показаны дисперсионные кривые для поверхностных и вытекающих собственных волн слабонаправляющего цилиндрического диэлектрического волновода кругового попереч-

ного сечения — графики вещественных (непрерывные линии) и мнимых (пунктирные линии) частей функций  $U = U(V)$ , где

$$U := kR\sqrt{\varepsilon_+ - (\beta/k)^2}, \quad V := kR\sqrt{\varepsilon_+ - \varepsilon_\infty}.$$

Дисперсионные кривые поверхностных волн лежат на рисунке правее прямой  $U = V$ , графики вещественных частей функции  $U = U(V)$  для вытекающих волн — левее этой прямой.

Для любого сколь угодно малого значения  $k > 0$  существует одна поверхностная собственная волна. Она называется основной. При любом  $k > 0$  число поверхностных собственных волн конечно и стремится к бесконечности при  $k \rightarrow \infty$ . Дисперсионные кривые поверхностных волн при  $V \rightarrow \infty$  имеют линейную асимптотику, а именно,  $U \rightarrow \text{const}$  при  $V \rightarrow \infty$ . Значения частот электромагнитных колебаний  $\omega$ , при которых  $\beta = kn_\infty$ , называются критическими частотами, а соответствующие значения волновых чисел  $k$  — точками отсечки (критическими точками). В точках отсечки  $U = V$ . Это точки, в которых дисперсионные кривые поверхностных собственных волн с уменьшением  $\omega$  трансформируются в кривые вытекающих собственных волн. При любом  $k > 0$  число вытекающих собственных волн бесконечно.

## ГЛАВА 2

# ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ ВОЛНОВОДОВ С ПОСТОЯННОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

## § 1. Скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода

**1. Постановка задачи и локализация собственных значений.** Сформулируем задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода с произвольным контуром поперечного сечения и постоянной диэлектрической проницаемостью, близкой к диэлектрической проницаемости окружающей среды. Пусть область поперечного сечения волновода  $\Omega_i$  ограничена дважды непрерывно дифференцируемым контуром  $\gamma$ . Диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  является кусочно-постоянной функцией, а именно, равна константе  $\varepsilon_+$  в области  $\overline{\Omega}_i$ , а в области  $\Omega_e := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_i$  — константе  $\varepsilon_\infty$ , где  $0 < \varepsilon_\infty < \varepsilon_+$ . Будем считать, что постоянная распространения  $\beta$  — неизвестный комплексный параметр,  $k > 0$  — заданное волновое число. В скалярном приближении слабонаправляющего волновода (см. § 2 гл. 1) задача сводится к отысканию таких значений параметра  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u + \chi_+^2 u = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad (2.1)$$

$$\Delta u + \chi_\infty^2 u = 0, \quad x \in \Omega_e, \quad (2.2)$$

удовлетворяющие условиям сопряжения:

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \gamma. \quad (2.3)$$

Будем предполагать, что функция  $u$  удовлетворяет на бесконечности парциальным условиям излучения (1.59), с. 31, т. е. при  $|x| \geq R_0$  представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда:

$$u(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_\infty r) e^{il\varphi}. \quad (2.4)$$

Будем разыскивать ненулевые решения  $u(x)$  задачи (2.1)–(2.4) в классе функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\overline{\Omega}_i$  и  $\overline{\Omega}_e$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega_i$  и  $\Omega_e$ . Обозначим это множество функций через  $U$ .

Будем предполагать, что постоянные распространения  $\beta$  принадлежат множеству  $\Lambda$  — пересечению римановых поверхностей  $\Lambda_+$  и  $\Lambda_\infty$  функций  $\ln \chi_+(\beta)$  и  $\ln \chi_\infty(\beta)$ , соответственно:

$$\Lambda := \Lambda_+ \cap \Lambda_\infty. \quad (2.5)$$

Строение поверхности  $\Lambda_\infty$  подробно рассмотрено в § 1 гл. 1 (там она была обозначена  $\Lambda$ ). Строение поверхности  $\Lambda_+$  абсолютно аналогично. Пусть

$$\Lambda_0^{(1)} := \Lambda_{+0}^{(1)} \cap \Lambda_{\infty 0}^{(1)}$$

есть пересечение главных (“физических”) листов этих поверхностей, определяемых условиями:

$$-\pi/2 < \arg \chi_+(\beta) < 3\pi/2, \quad \operatorname{Im}(\chi_+(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_{+0}^{(1)}, \quad (2.6)$$

$$-\pi/2 < \arg \chi_\infty(\beta) < 3\pi/2, \quad \operatorname{Im}(\chi_\infty(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_{\infty 0}^{(1)}. \quad (2.7)$$

Всюду в этой главе будем обозначать вещественную ось листа  $\Lambda_0^{(1)}$  символом  $\mathbb{R}_0^{(1)}$ ,

$$G := \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : kn_\infty < |\beta| < kn_+ \right\},$$

$$D := \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re} \beta = 0 \right\} \cup \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : |\beta| < kn_\infty \right\},$$

$$C_0^{(1)} := \left\{ \beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re} \beta \neq 0 \right\} \setminus \mathbb{R}_0^{(1)},$$

$$B := \left\{ \beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : |\beta| > kn_+ \right\}.$$

Как обычно,  $n_+ = \sqrt{\varepsilon_+}$ ,  $n_\infty = \sqrt{\varepsilon_\infty}$ .

**Определение 2.5.** Ненулевую функцию  $u \in U$ , будем называть собственной функцией задачи (2.1)–(2.4), отвечающей собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнены условия (2.1)–(2.4).

**Теорема 2.1.** На  $\Lambda_0^{(1)}$  собственные значения задачи (2.1)–(2.4) могут лежать лишь в области  $G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Множество  $\Lambda_0^{(1)}$  является объединением четырех множеств:

$$\Lambda_0^{(1)} := C_0^{(1)} \cup D \cup G \cup B.$$

Докажем, что множества  $C_0^{(1)}$ ,  $D$  и  $B$  не содержат собственных значений задачи (2.1)–(2.4).

Предположим, что  $u$  — собственная функция задачи (2.1)–(2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in D$ . Введем следующие обозначения:

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\},$$

$$\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = R\},$$

где  $R \geq R_0$ . Записывая в областях  $\Omega_i$  и  $\Omega \setminus \overline{\Omega}_i$  к функциям  $u$  и  $\bar{u}$  (здесь и далее  $\bar{u}$  означает функцию, комплексно-сопряженную с  $u$ ) формулу Грина, получаем равенства

$$\int_{\Omega_i} (u \Delta \bar{u} - \bar{u} \Delta u) dx = \int_{\gamma} \left( u^- \frac{\partial \bar{u}^-}{\partial \nu} - \bar{u}^- \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \right) dl,$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_i} (u \Delta \bar{u} - \bar{u} \Delta u) dx = & - \int_{\gamma} \left( u^+ \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial \nu} - \bar{u}^+ \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \right) dl + \\ & + \int_{\Gamma} \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dl. \end{aligned}$$

При  $\beta \in D$  коэффициенты в уравнениях Гельмгольца (2.1), (2.2) — положительные вещественные числа, следовательно, левые части в двух последних равенствах обращаются в нуль. Складывая эти равенства почленно и учитывая условия сопряжения (2.3), получаем

$$\int_{\Gamma} \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dl = 0, \quad R \geq R_0.$$

Отсюда, используя условие (2.4) и ортогональность тригонометрических функций, для любого  $R \geq R_0$  получим

$$\begin{aligned} 2\pi \chi_\infty R \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ H_l^{(1)}(\chi_\infty R) H_l^{(2)'}(\chi_\infty R) - H_l^{(2)}(\chi_\infty R) H_l^{(1)'}(\chi_\infty R) \right] \times \\ \times |a_l|^2 = 0. \end{aligned}$$



Хорошо известно (см., напр., [88]), что выражение, стоящее в этой сумме в квадратных скобках, от  $l$  не зависит, а именно,

$$H_l^{(1)}(\chi_\infty R) H_l^{(2)'}(\chi_\infty R) - H_l^{(2)}(\chi_\infty R) H_l^{(1)'}(\chi_\infty R) = \frac{4}{i\pi\chi_\infty R},$$

где  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Следовательно, для любого  $|x| \geq R_0$  все коэффициенты  $a_l$  в разложении (2.4) обращаются в нуль. А это значит, что  $u = 0$  при  $|x| \geq R_0$ . Функция  $u$  удовлетворяет в области  $\Omega_e$  уравнению Гельмгольца (2.2) с постоянным коэффициентом, следовательно, является аналитической по  $x$  в  $\Omega_e$ . Таким образом,  $u = 0$  при  $x \in \Omega_e$ ; и  $u^+ = 0$ ,  $\partial u^+ / \partial \nu = 0$  на контуре  $\gamma$ .

Применим в области  $\Omega_i$  третью формулу Грина, выражающую решение уравнения (2.1) в  $\Omega_i$  через предельное значение решения и его нормальной производной на  $\gamma$ :

$$u(x) = - \int_{\gamma} \left[ u^-(y) \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^-(y)}{\partial \nu(y)} \Phi_+(\beta; x, y) \right] dl(y), \quad x \in \Omega_i, \quad (2.8)$$

где

$$\Phi_+(\beta; x, y) := \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_+(\beta) |x - y|)$$

есть фундаментальное решение уравнения Гельмгольца (2.1). Из этого представления функции  $u(x)$  и условий сопряжения (2.3) заключаем, что  $u = 0$  и в области  $\Omega_i$ . Итак, мы доказали, что при  $\beta \in D$  функция  $u$  обращается в нуль на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ , что противоречит предположению о том, что она является собственной функцией задачи (2.1)–(2.4). Следовательно, область  $D$  свободна от собственных значений задачи (2.1)–(2.4).

Предположим теперь, что  $u$  является собственной функцией задачи (2.1)–(2.4), отвечающей собственному значению  $\beta \in C_0^{(1)} \cup B$ . Применяя в областях  $\Omega_i$  и  $\Omega \setminus \overline{\Omega}_i$ ,  $R \geq R_0$ , к функциям  $u$  и  $\bar{u}$  формулу Грина, получаем равенства

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega_i} \bar{u} \Delta u dx &= \int_{\gamma} \bar{u}^- \frac{\partial u^-}{\partial \nu} dl, \\ \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_i} \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_i} \bar{u} \Delta u dx &= - \int_{\gamma} \bar{u}^+ \frac{\partial u^+}{\partial \nu} dl + \int_{\Gamma} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} dl, \end{aligned}$$

где

$$\nabla u := (\partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2)^T.$$

Сложим почленно эти равенства, учитывая условия сопряжения (2.3), и устремим  $R$  к бесконечности. При этом надо заметить, что согласно асимптотике (1.36), с. 26, все подынтегральные выражения во втором равенстве, зависящие от  $R$ , экспоненциально убывают на бесконечности при любом  $\beta \in C_0^{(1)} \cup B$ . В результате получим

$$\int_{\Omega_i \cup \Omega_e} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} (\beta^2 - k^2 \varepsilon) |u|^2 dx = 0. \quad (2.9)$$

При вещественных  $\beta$ , лежащих в бесконечном интервале  $B$ , равенству (2.9) удовлетворяет лишь нулевая функция  $u$  в силу того, что  $\beta^2 - k^2 \varepsilon > 0$  при  $\beta \in B$ .

Возьмем от левой и правой частей равенства (2.9) мнимую часть. Получим

$$\operatorname{Im}(\beta^2) \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} |u|^2 dx = 2 \operatorname{Re}(\beta) \operatorname{Im}(\beta) \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} |u|^2 dx = 0.$$

Заметим, что ни мнимая, ни вещественная части числа  $\beta \in C_0^{(1)}$  не обращаются в нуль, следовательно, при  $\beta \in C_0^{(1)}$  последнему равенству также удовлетворяет лишь нулевая функция  $u$ . Таким образом, мы доказали, что при любом  $\beta \in C_0^{(1)} \cup B$  функция  $u$  обращается в нуль на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Следовательно, области  $B$  и  $C_0^{(1)}$  также свободны от собственных значений задачи (2.1)–(2.4).  $\square$

Отметим, что с помощью равенства (2.9) нельзя доказать отсутствие собственных значений  $\beta$  задачи (2.1)–(2.4) в области  $G$  в силу того, что

$$\beta^2 - k^2 \varepsilon < 0$$

при  $\beta \in G$  и  $x \in \Omega_i$ . Вещественным  $\beta \in G$  соответствуют поверхностные волны ( $u$  экспоненциально убывает при  $r \rightarrow \infty$ ). Теорема 2.1 обобщает результаты [75] о локализации спектра собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода кругового сечения, полученные на основе анализа характеристического уравнения метода разделения переменных (см. п. 2 § 3 гл. 1).

**2. Нелинейная спектральная задача для системы слабо-сингулярных интегральных уравнений по контуру поперечного сечения волновода.** Сведем исходную задачу (2.1)–(2.4) методами теории потенциалов к спектральной задаче для интегральной оператор-функции. Большинство результатов теории потенциалов, которые мы будем использовать, являются классическими и хорошо известны. Их можно найти, например, в книгах [2], [54]. Менее традиционно изучение поведения потенциалов на бесконечности как функций, удовлетворяющих парциальным условиям излучения. Аналогичные построения содержатся в монографиях [33], [153].

Введем в рассмотрение функции

$$\Phi_+(\beta; x, y) := \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_+(\beta) |x - y|), \quad (2.10)$$

$$\Phi_\infty(\beta; x, y) := \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_\infty(\beta) |x - y|). \quad (2.11)$$

Здесь

$$|x - y| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

параметр  $\beta$  предполагается комплексным, принадлежащим множеству  $\Lambda$ , определенному формулой (2.5). Напомним [88], что

$$H_0^{(1)}(z) := J_0(z) + iN_0(z),$$

где  $J_0(z)$  — функция Бесселя нулевого порядка,  $N_0(z)$  — функция Неймана нулевого порядка,

$$J_0(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{(k!)^2},$$

$$N_0(z) := \frac{2}{\pi} J_0(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k} \Psi(k+1)}{(k!)^2},$$

$$\Psi(n+1) := -C + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \Psi(1) := -C,$$

$$C := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0.5772156649 \dots,$$

где  $\Psi$  — пси-функция,  $C$  — постоянная Эйлера.

Функции (2.10), (2.11) удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \Phi_+(\beta; x, y) + \chi_+^2(\beta) \Phi_+(\beta; x, y) = 0, \quad (2.12)$$

$$\Delta \Phi_\infty(\beta; x, y) + \chi_\infty^2(\beta) \Phi_\infty(\beta; x, y) = 0 \quad (2.13)$$

как функции переменной  $x$  при любой фиксированной точке  $y \neq x$ . При  $y = x$  они имеют логарифмическую особенность. Функции (2.10) и (2.11) называются фундаментальными решениями уравнений (2.12) и (2.13).

С помощью теоремы сложения Графа (см., напр., [66], с. 201) легко показать, что функция  $\Phi_\infty(\beta; x, y)$  при любых  $\beta \in \Lambda$  и  $y \in \mathbb{R}^2$  удовлетворяет условию (2.4):

$$\begin{aligned} \Phi_\infty(\beta; x, y) &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_\infty(\beta) |x - y|) = \\ &= \frac{i}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\chi_\infty r(y)) e^{-il\varphi(y)} H_l^{(1)}(\chi_\infty r(x)) e^{il\varphi(x)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Аналогичному условию удовлетворяет функция  $\Phi_+(\beta; x, y)$ , определенная формулой (2.10):

$$\begin{aligned} \Phi_+(\beta; x, y) &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_+(\beta) |x - y|) = \\ &= \frac{i}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\chi_+ r(y)) e^{-il\varphi(y)} H_l^{(1)}(\chi_+ r(x)) e^{il\varphi(x)}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Отметим, что в отличие от функций (2.10) и (2.11), другая пара фундаментальных решений уравнений Гельмгольца (2.12) и (2.13), а именно функции

$$\Phi_+^{(2)}(\beta; x, y) := \frac{i}{4} H_0^{(2)}(\chi_+(\beta) |x - y|), \quad (2.16)$$

$$\Phi_\infty^{(2)}(\beta; x, y) := \frac{i}{4} H_0^{(2)}(\chi_\infty(\beta) |x - y|), \quad (2.17)$$

где  $H_0^{(2)}$  — функция Ханкеля второго рода нулевого порядка, парциальным условиям излучения (2.14), (2.15) не удовлетворяют.

Будем обозначать через  $C^{0,\alpha}(\gamma)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , пространство непрерывных по Гельдеру функций, т. е. линейное пространство всех комплекснозначных функций  $f$ , определенных на контуре  $\gamma$  и удовлетворяющих условию

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in \gamma,$$

где  $K$  — положительная постоянная, зависящая от  $f$ , но не зависящая от  $x$  и  $y$ . Будем обозначать  $C^{1,\alpha}(\gamma)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , пространство непрерывно дифференцируемых по Гельдеру функций — линейное пространство всех комплекснозначных функций  $f$ , определенных на контуре  $\gamma$  таких, что их первые производные существуют и принадлежат  $C^{0,\alpha}(\gamma)$ . Как известно, пространство непрерывных по Гельдеру функций  $C^{0,\alpha}(\gamma)$  и пространство непрерывно дифференцируемых по Гельдеру функций  $C^{1,\alpha}(\gamma)$  являются банаховыми пространствами с нормами

$$\|f\|_\alpha := \max_{x \in \gamma} |f(x)| + \sup_{x, y \in \gamma, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

и

$$\|f\|_{1,\alpha} := \max_{x \in \gamma} |f(x)| + \max_{x \in \gamma} |f'(x)| + \sup_{x, y \in \gamma, x \neq y} \frac{|f'(x) - f'(y)|}{|x - y|^\alpha},$$

соответственно. Будем предполагать, что контур  $\gamma$  задан параметрически  $r = r(t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , и эта параметризация является регулярной. Функции из  $C^{0,\alpha}(\gamma)$  и  $C^{1,\alpha}(\gamma)$  будем рассматривать также как непрерывные по Гельдеру и непрерывно дифференцируемые по Гельдеру  $2\pi$ -периодические функции параметра  $t$ .

Собственные функции задачи (2.1)–(2.4) будем разыскивать в виде потенциалов простого слоя:

$$u(x) := \int_{\gamma} \Phi_+(\beta; x, y) f_+(y) dl(y), \quad x \in \Omega_i, \quad (2.18)$$

$$u(x) := \int_{\gamma} \Phi_{\infty}(\beta; x, y) f_{\infty}(y) dl(y), \quad x \in \Omega_e, \quad (2.19)$$

с плотностями  $f_+$  и  $f_{\infty}$ , принадлежащими пространству непрерывных по Гельдеру функций  $C^{0,\alpha}(\gamma)$ .

При всех  $\beta \in \Lambda$  и  $f_+, f_{\infty} \in C^{0,\alpha}(\gamma)$  функция  $u$ , задаваемая равенствами (2.18), (2.19), удовлетворяет требуемым свойствам гладкости и уравнениям (2.1), (2.2). С помощью разложения (2.14) нетрудно убедиться, что функция  $u$  удовлетворяет условию (2.4). А именно, при всех  $|x| \geq R_0$  функция  $u$  представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда

$$u(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_{\infty} r(x)) e^{il\varphi(x)},$$

где

$$a_l := \frac{i}{4} \int_{\gamma} J_l(\chi_{\infty} r(y)) e^{-il\varphi(y)} f_{\infty}(y) dl(y).$$

Используя граничные условия (2.3) и предельные свойства потенциалов простого слоя и их нормальных производных, получаем нелинейную спектральную задачу для системы интегральных уравнений:

$$\mathcal{A}_{11}(\beta) f_+ + \mathcal{A}_{12}(\beta) f_{\infty} = 0, \quad x \in \gamma, \quad (2.20)$$

$$\mathcal{A}_{21}(\beta) f_+ + \mathcal{A}_{22}(\beta) f_{\infty} = 0, \quad x \in \gamma. \quad (2.21)$$

Здесь

$$(\mathcal{A}_{11}(\beta) f_+)(x) := \int_{\gamma} \Phi_+(\beta; x, y) f_+(y) dl(y), \quad x \in \gamma,$$

$$(\mathcal{A}_{12}(\beta) f_{\infty})(x) := - \int_{\gamma} \Phi_{\infty}(\beta; x, y) f_{\infty}(y) dl(y), \quad x \in \gamma,$$

$$(\mathcal{A}_{21}(\beta) f_+)(x) := \frac{1}{2} f_+(x) + \int_{\gamma} \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} f_+(y) dl(y), \quad x \in \gamma,$$

$$(\mathcal{A}_{22}(\beta) f_{\infty})(x) := \frac{1}{2} f_{\infty}(x) - \int_{\gamma} \frac{\partial \Phi_{\infty}(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} f_{\infty}(y) dl(y), \quad x \in \gamma.$$

Переходя к переменной интегрирования  $t$  параметрического представления контура  $\gamma$ , выделяя явно логарифмическую особенность ядер  $\Phi_+(x, y)$ ,  $\Phi_{\infty}(x, y)$ , преобразуем систему (2.20), (2.21) к виду

$$Lp_1 + B_{11}(\beta)p_1 + B_{12}(\beta)p_2 = 0, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (2.22)$$

$$p_2 + B_{21}(\beta)p_1 + B_{22}(\beta)p_2 = 0, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (2.23)$$

Здесь

$$p_1(\tau) := (f_+(y) - f_\infty(y)) |r'(\tau)|, \quad p_2(\tau) := f_+(y) + f_\infty(y),$$

$$Lp_1 := -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right| p_1(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$B_{ij}(\beta)p^{(j)} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_{ij}(\beta; t, \tau) p^{(j)}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$h_{11}(\beta; t, \tau) := 2\pi (G_{11}(\beta; t, \tau) + G_{12}(\beta; t, \tau)),$$

$$h_{12}(\beta; t, \tau) := 2\pi (G_{11}(\beta; t, \tau) - G_{12}(\beta; t, \tau)) |r'(\tau)|,$$

$$h_{21}(\beta; t, \tau) := 4\pi (G_{21}(\beta; t, \tau) + G_{22}(\beta; t, \tau)),$$

$$h_{22}(\beta; t, \tau) := 4\pi (G_{21}(\beta; t, \tau) - G_{22}(\beta; t, \tau)) |r'(\tau)|,$$

$$G_{11}(\beta; t, \tau) := \Phi_+(\beta; x, y) + \frac{1}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right|,$$

$$G_{12}(\beta; t, \tau) := \Phi_\infty(\beta; x, y) + \frac{1}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right|,$$

$$G_{21}(\beta; t, \tau) := \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)},$$

$$G_{22}(\beta; t, \tau) := \frac{\partial \Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)},$$

$$x = x(t), \quad y = y(\tau).$$

Линейный оператор  $L : C^{0,\alpha}(\gamma) \rightarrow C^{1,\alpha}(\gamma)$  является непрерывным и непрерывно обратимым (см., напр., [10, с. 10]). При любом  $\beta \in \Lambda$  операторы

$$B_{21}(\beta), B_{22}(\beta) : C^{0,\alpha}(\gamma) \rightarrow C^{0,\alpha}(\gamma),$$

$$B_{11}(\beta), B_{12}(\beta) : C^{0,\alpha}(\gamma) \rightarrow C^{1,\alpha}(\gamma)$$

вполне непрерывны в силу того, что ядра  $G_{21}$ ,  $G_{22}$  не имеют особенностей при  $t = \tau$ , а ядра  $G_{11}$ ,  $G_{12}$  являются дважды непрерывно дифференцируемыми по  $t$  функциями  $(t, \tau) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ . В этом

нетрудно убедиться, используя свойства функций Ханкеля. Аналогичные свойства этих функций получены, например, в [61, с. 93], [140, с. 211].

Таким образом, система (2.22), (2.23) эквивалентна операторному уравнению

$$A(\beta)w := (I + B(\beta))w = 0, \quad (2.24)$$

где

$$w := (w_1, w_2)^T,$$

$$w_1 := Lp_1 \in C^{1,\alpha}(\gamma), \quad w_2 := p_2 \in C^{0,\alpha}(\gamma),$$

вполне непрерывный оператор  $B$ , действующий в банаховом пространстве

$$W := C^{1,\alpha}(\gamma) \times C^{0,\alpha}(\gamma),$$

определен при помощи равенства

$$Bw := \begin{bmatrix} B_{11}L^{-1} & B_{12} \\ B_{21}L^{-1} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

символом  $I$  обозначен единичный оператор.

**Определение 2.6.** Линейный оператор  $A$  называется фредгольмовым, если он нормально разрешим и его индекс равен нулю [145, с. 22].

Частным случаем фредгольмоваго оператора является оператор, представимый в виде суммы двух операторов, один из которых непрерывно обратим, а второй — вполне непрерывен.

**Определение 2.7.** Оператор-функция  $A(\beta)$  называется голоморфной в точке  $\beta_0 \in \Lambda$ , если существует такое  $p > 0$ , что при любом  $\beta$ ,  $|\beta - \beta_0| < p$ , оператор  $A(\beta) : W \rightarrow W$  допускает разложение в сходящийся по норме ряд

$$A(\beta) = A(\beta_0) + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta - \beta_0)^m A_m.$$

**Теорема 2.2.** Положим  $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ . При каждом фиксированном

$$(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$$

оператор  $A(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty) : W \rightarrow W$  фредгольмов. При каждом фиксированном  $(k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$  оператор-функция  $A(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty)$  голоморфна по  $\beta \in \Lambda$ . Оператор-функция  $A(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty)$  непрерывна по  $(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу полной непрерывности оператора  $B(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty)$  при любом  $(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$  оператор  $A(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty)$  фредгольмов. Используя известные свойства функций Ханкеля (см., напр., [66]), нетрудно убедиться в том, что для каждой точки  $(t, \tau) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  функции  $h_{ij}(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty; t, \tau)$  аналитические по  $\beta \in \Lambda$  и непрерывны по  $(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$ . Отсюда следует [33, с. 71], что при каждом фиксированном значении  $(k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$  оператор-функция  $A(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty)$  голоморфна по  $\beta \in \Lambda$  и что оператор-функция  $A(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty)$  непрерывна по  $(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$ .  $\square$

**Определение 2.8.** Ненулевой элемент  $w \in W$  будем называть собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнено уравнение (2.24). Характеристическим множеством оператор-функции  $A(\beta)$  будем называть множество чисел  $\beta \in \Lambda$ , для которых оператор  $A(\beta)$  не имеет ограниченного обратного в  $W$  (это множество называют также сингулярным). Будем обозначать его символом  $\sigma(A)$ . Обозначим множество регулярных точек оператора  $A(\beta)$  через  $\rho(A) := \Lambda \setminus \sigma(A)$ .

**3. Дискретность характеристического множества и зависимость характеристических значений от параметров задачи.** Изучим качественные свойства характеристического и регулярного множеств оператор-функции  $A(\beta)$ . С этой целью прежде всего исследуем эквивалентность задач (2.1)–(2.4) и (2.24).

**Теорема 2.3.** Если функция  $w$  является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , то функция  $u$ , определяемая равенствами (2.18), и (2.19), где  $\beta := \beta_0$ ,

$$f_+ := w_2/2 + L^{-1}w_1/(2|r'|), \quad (2.26)$$

$$f_\infty := w_2/2 - L^{-1}w_1/(2|r'|), \quad (2.27)$$

является собственной функцией задачи (2.1)–(2.4), отвечающей собственному значению  $\beta_0$ . Любая собственная функция зада-

чи (2.1)–(2.4), отвечающая собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , может быть представлена в виде потенциалов простого слоя (2.18) и (2.19) с непрерывными по Гельдеру плотностями  $f_+$ ,  $f_\infty$ , соответственно. При этом функция

$$w := (L((f_+ - f_\infty)|r'|), f_+ + f_\infty)$$

является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0$ .

Доказательство теоремы 2.3 предварим рядом лемм.

**Лемма 2.1.** Если при некотором  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  потенциал  $u$ , задаваемый соотношением (2.18), равен нулю в  $\Omega_i$ , то его плотность  $f_+$  на  $\gamma$  равна нулю.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что в  $\Omega_i$  потенциал  $u$  равен нулю. Тогда в силу непрерывности потенциала простого слоя функция  $u$  равна нулю на  $\gamma$ . Потенциал  $u$  непрерывен в  $\overline{\Omega}_e$ , дважды непрерывно дифференцируем в  $\Omega_e$  и является решением следующей задачи:

$$\Delta u + \chi_+^2 u = 0, \quad x \in \Omega_e,$$

$$u = 0, \quad x \in \gamma,$$

$$u(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_+ r) e^{il\varphi}, \quad |x| \geq R_0.$$

В [64] доказано, что при  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  (т. е. при  $-\pi/2 < \arg \chi_+ < 3\pi/2$  и  $\text{Im}(\chi_+) \geq 0$ ) эта задача имеет лишь тривиальное решение. Используя теорему о скачке нормальной производной потенциала простого слоя, вследствие которой

$$\frac{\partial u^+(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial u^-(x)}{\partial \nu} = -f_+(x), \quad x \in \gamma,$$

получаем, что  $f_+ = 0$  на  $\gamma$ .  $\square$

**Лемма 2.2.** Если при некотором  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$  потенциал  $u$ , задаваемый соотношением (2.19), равен нулю в  $\Omega_e$ , то его плотность  $f_\infty$  на  $\gamma$  равна нулю.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что потенциал  $u = 0$  в области  $\Omega_e$ . Тогда в силу непрерывности потенциала простого слоя  $u = 0$

на  $\gamma$ . Потенциал  $u$  непрерывен в  $\overline{\Omega}_i$ , дважды непрерывно дифференцируем в  $\Omega_i$  и в является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned}\Delta u + \chi_\infty^2 u &= 0, \quad x \in \Omega_i, \\ u &= 0, \quad x \in \gamma.\end{aligned}$$

При  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$  коэффициент  $\chi_\infty^2$  принимает либо комплексное, либо отрицательное значение, следовательно, эта задача имеет лишь тривиальное решение. Используя теорему о скачке нормальной производной потенциала простого слоя, получаем, что  $f_\infty = 0$  на  $\gamma$ .  $\square$

**Лемма 2.3.** *Если для некоторого  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  существует собственная функция  $u \in U$  задачи (2.1)–(2.4), то функция  $u$  и ее нормальная производная  $\partial u / \partial \nu$  не обращаются тождественно в нуль на контуре  $\gamma$ . При этом  $u \in C^{1,\alpha}(\gamma)$ , а  $\partial u / \partial \nu \in C^{0,\alpha}(\gamma)$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Прежде всего заметим, что поскольку функция  $u$  дважды непрерывно дифференцируема в  $\Omega_i$ , непрерывна, непрерывно дифференцируема в  $\overline{\Omega}_i$  и является решением уравнения (2.1), то для любого  $\beta \in \Lambda$  справедлива формула Грина (2.8). Поскольку функция  $u$  дважды непрерывно дифференцируема в  $\Omega_e$ , непрерывна, непрерывно дифференцируема в  $\overline{\Omega}_e$ , является решением уравнения (2.2) и удовлетворяет условию (2.4), то для любого  $\beta \in \Lambda$  имеет место формула Грина

$$u(x) = \int_{\gamma} \left[ u^+(y) \frac{\partial \Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^+(y)}{\partial \nu(y)} \Phi_\infty(\beta; x, y) \right] dl(y), \quad x \in \Omega_e. \quad (2.28)$$

В справедливости формулы Грина (2.28) легко убедиться с помощью известного равенства [33, с. 35]:

$$\int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial u(y)}{\partial r(y)} \Phi_\infty(\beta; x, y) - \frac{\partial \Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial r(y)} u(y) \right] dl(y) = 0, \quad R \geq R_0, \quad (2.29)$$

имеющего место для любого  $\beta \in \Lambda$  и функции  $u$ , удовлетворяющей условию (2.4).

Итак, докажем, что если существует собственная функция  $u$  задачи (2.1)–(2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ , то функция  $\partial u / \partial \nu$  не обращается тождественно в нуль на  $\gamma$ . Предположим

противное. Тогда решение задачи (2.1)–(2.4) должно удовлетворять условиям

$$\begin{aligned}\Delta u + \chi_\infty^2 u &= 0, \quad x \in \Omega_e, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, \quad x \in \gamma, \\ u(x) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_\infty r) e^{il\varphi}, \quad |x| \geq R_0.\end{aligned}$$

При  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ , т. е. при  $-\pi/2 < \arg \chi_\infty < 3\pi/2$ ,  $\text{Im}(\chi_\infty) \geq 0$ , эта задача имеет лишь тривиальное решение [64]. Из формулы Грина (2.8) и условий сопряжения (2.3) заключаем, что  $u = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Если существует собственная функция  $u$  задачи (2.1)–(2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ , то  $u$  не обращается тождественно в нуль на контуре  $\gamma$ . Действительно, если предположить противное, то решение задачи (2.1)–(2.4) должно удовлетворять условиям

$$\begin{aligned}\Delta u + \chi_\infty^2 u &= 0, \quad x \in \Omega_e, \\ u &= 0, \quad x \in \gamma, \\ u(x) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_\infty r) e^{il\varphi}, \quad |x| \geq R_0.\end{aligned}$$

В статье [64] доказано, что при  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  эта задача также имеет лишь тривиальное решение. Из формулы Грина (2.8) и условий сопряжения (2.3) заключаем, что  $u = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Покажем теперь, что если  $u$  является собственной функцией задачи (2.1)–(2.4), отвечающей собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ , то функция  $\partial u / \partial \nu \in C^{0,\alpha}(\gamma)$ . Возьмем от функций (2.8) и (2.28) производную по  $\nu$  и перейдем к пределу, устремляя точку  $x$  к контуру  $\gamma$ . Учитывая условия сопряжения (2.3) и используя предельные свойства потенциалов простого и двойного слоя, получаем интегральное соотношение, связывающие функции  $u(x)$  и  $\partial u(x) / \partial \nu$  на  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} &= \int_{\gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \left( \frac{\partial \Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} \right) dl(y) - \\ &- \int_{\gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} \frac{\partial}{\partial \nu(x)} (\Phi_\infty(\beta; x, y) - \Phi_+(\beta; x, y)) dl(y), \quad x \in \gamma. \quad (2.30)\end{aligned}$$

Используя свойства функций Ханкеля, нетрудно убедиться, что ядро

$$\frac{\partial \Phi_{\infty}(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} - \frac{\partial \Phi_{+}(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)}$$

является непрерывной функцией  $(x, y) \in \gamma \times \gamma$  при любом  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ ; ядро

$$\frac{\partial}{\partial \nu(x)} \left( \frac{\partial \Phi_{\infty}(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi_{+}(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} \right)$$

является непрерывной функцией  $(x, y) \in \{\gamma \times \gamma\} \setminus \{x = y\}$  и имеет на линии  $x = y$  особенность порядка  $\ln|x - y|$  при любом  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ . По предположению  $u$  непрерывна и непрерывно дифференцируема в  $\overline{\Omega}_i$  и  $\overline{\Omega}_e$ . Следовательно,  $u \in C^{0,\alpha}(\gamma)$  на контуре  $\gamma$  и  $\partial u / \partial \nu$  непрерывна на  $\gamma$ . Из представления (2.30) и известных свойств интегральных операторов со слабо сингулярным ядром (см., напр., теорему 2.7 из [54]) следует, что функция  $\partial u / \partial \nu \in C^{0,\alpha}(\gamma)$ .

Докажем, что если  $u$  — собственная функция задачи (2.1)–(2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ , то  $u \in C^{1,\alpha}(\gamma)$ . Переходя в выражении (2.8) к пределу, устремляя точку  $x$  к контуру  $\gamma$  и используя предельные свойства потенциалов простого слоя, получаем интегральное соотношение, связывающие функции  $u(x)$  и  $\partial u(x) / \partial \nu$  на  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(x) = & - \int_{\gamma} u(y) \frac{\partial \Phi_{+}(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} dl(y) + \\ & + \int_{\gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} \Phi_{+}(\beta; x, y) dl(y), \quad x \in \gamma. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Используя свойства функций Ханкеля, нетрудно убедиться, что функция

$$\frac{\partial \Phi_{+}(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)}$$

является непрерывной функцией  $(x, y) \in \gamma \times \gamma$  при любом  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ ; функция  $\Phi_{+}(\beta; x, y)$  является непрерывной функцией

$$(x, y) \in \{\gamma \times \gamma\} \setminus \{x = y\}$$

и имеет на линии  $x = y$  особенность порядка  $\ln|x - y|$  при любом  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ . По предположению  $u$  непрерывна и непрерывно дифференцируема в  $\overline{\Omega}_i$  и  $\overline{\Omega}_e$ , следовательно,  $u \in C^{0,\alpha}(\gamma)$  на контуре  $\gamma$ . В силу доказанного выше  $\partial u / \partial \nu \in C^{0,\alpha}(\gamma)$ . Из представления (2.30) и известных свойств интегральных операторов, определяемых как прямые значения потенциалов простого и двойного слоя на контуре  $\gamma$  (см., напр., теоремы 2.30 и 2.31 из [54]), следует, что  $u \in C^{1,\alpha}(\gamma)$  на контуре  $\gamma$ .  $\square$

**Лемма 2.4.** *Любая собственная функция  $u$  задачи (2.1)–(2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , представима в области  $\Omega_e$  в виде потенциала простого слоя (2.19) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_{\infty}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу леммы 2.3 нормальная производная любой собственной функции  $u$  задачи (2.1)–(2.4), отвечающей собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , не равна тождественно нулю и непрерывна по Гельдеру на контуре  $\gamma$ . Пусть  $g(x) := \partial u(x) / \partial \nu$ ,  $x \in \gamma$ . Функция  $u$  удовлетворяет, таким образом, следующим условиям:

$$\Delta u + \chi_{\infty}^2 u = 0, \quad x \in \Omega_e, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g, \quad x \in \gamma, \quad (2.33)$$

$$u(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_{\infty} r) e^{il\varphi}, \quad |x| \geq R_0, \quad (2.34)$$

где  $g \in C^{0,\alpha}(\gamma)$ .

Будем разыскивать решение этой задачи в виде потенциала простого слоя (2.19) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_{\infty}$ . Переходя в (2.19) к пределу, устремляя точку  $x$  к контуру  $\gamma$ , получаем интегральное уравнение

$$-\frac{1}{2}f_{\infty}(x) + \int_{\gamma} \frac{\partial \Phi_{\infty}(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} f_{\infty}(y) dl(y) = g(x), \quad x \in \gamma. \quad (2.35)$$

Покажем теперь, что однородное уравнение, соответствующее (2.35), для любого  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$  имеет лишь тривиальное решение. В статье [64] доказано, что при  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  (т. е. при  $-\pi/2 < \arg \chi_{\infty} < 3\pi/2$



и  $\text{Im}(\chi_\infty) \geq 0$  и  $g = 0$ ,  $x \in \gamma$ , задача Неймана (2.32)–(2.34) имеет лишь тривиальное решение. Разыскивая решение однородной задачи Неймана (2.32)–(2.34) при  $g = 0$ ,  $x \in \gamma$ , в виде потенциала простого слоя (2.19) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_\infty$ , получаем однородное уравнение, соответствующее (2.35). Это уравнение может иметь лишь тривиальное решение. Действительно, если предположить обратное, то представление (2.19) даст нетривиальное решение однородной задачи Неймана, потому что, если при некотором  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$  потенциал  $u$ , задаваемый соотношением (2.19), равен нулю в  $\Omega_e$ , то его плотность  $f_\infty = 0$  на контуре  $\gamma$  (см. лемму 2.2).

Используя свойства функций Ханкеля, нетрудно убедиться, что функция

$$\frac{\partial \Phi_\infty(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)}$$

является непрерывной функцией  $(x, y) \in \gamma \times \gamma$ , а ее производная по  $x$  является непрерывной функцией  $(x, y) \in \{\gamma \times \gamma\} \setminus \{x = y\}$  и имеет на линии  $x = y$  особенность порядка  $\ln|x - y|$  при любом  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ . Следовательно, интегральный оператор в (2.35) является вполне непрерывным оператором, действующим в пространстве  $C^{0,\alpha}(\gamma)$ . В силу альтернативы Фредгольма имеем, что для любой правой части  $g \in C^{0,\alpha}(\gamma)$  уравнение (2.35) имеет решение  $f_\infty \in C^{0,\alpha}(\gamma)$ . Итак, любая собственная функция задачи (2.1)–(2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , представима в области  $\Omega_e$  в виде потенциала простого слоя (2.19) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_\infty$ .  $\square$

**Лемма 2.5.** *Любая собственная функция задачи (2.1)–(2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , представима в области  $\Omega_i$  в виде потенциала простого слоя (2.18) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_+$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим две внутренние задачи: однородную задачу Дирихле

$$\Delta u + \chi_+^2 u = 0, \quad x \in \Omega_i,$$

$$u = 0, \quad x \in \gamma,$$

и однородную задачу Неймана

$$\Delta u + \chi_+^2 u = 0, \quad x \in \Omega_i,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \gamma.$$

Коэффициент  $\chi_+^2$  на  $\Lambda_0^{(1)} \setminus D$  принимает положительные значения при всех  $\beta \in G$ , и у этих задач могут существовать нетривиальные решения. Обозначим через  $\sigma(D^{(+)})$  и  $\sigma(N^{(+)})$  множества собственных чисел задач Дирихле и Неймана, соответственно. Как известно, эти множества не пересекаются.

Докажем, что если  $u$  — собственная функция задачи (2.1)–(2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus (D \cup \sigma(N^{(+)})$ , то функция  $u$  представима в области  $\Omega_i$  в виде потенциала простого слоя (2.18) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_+$ . В силу леммы 2.3 при любом  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  функция  $\partial u / \partial \nu$  не равна тождественно нулю и непрерывна по Гельдеру на контуре  $\gamma$ . Положим

$$g(x) = \partial u(x) / \partial \nu$$

при  $x \in \gamma$ . Функция  $u$  должна удовлетворять, таким образом, условиям

$$\Delta u + \chi_+^2 u = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g, \quad x \in \gamma, \quad (2.37)$$

где  $g \in C^{0,\alpha}(\gamma)$ .

Будем разыскивать решение этой задачи в виде потенциала простого слоя (2.18) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_+$ . Переходя в (2.18) к пределу, устремляя точку  $x$  к контуру  $\gamma$ , получаем интегральное уравнение

$$\frac{1}{2} f_+(x) + \int_{\gamma} \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} f_+(y) dl(y) = g(x), \quad x \in \gamma. \quad (2.38)$$

Покажем теперь, что однородное уравнение, соответствующее (2.38), для любого  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus (D \cup \sigma(N^{(+)})$  имеет лишь тривиальное решение. Однородная задача Неймана (2.36), (2.37) при

$$\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus (D \cup \sigma(N^{(+)})$$

и  $g = 0$ ,  $x \in \gamma$ , имеет лишь тривиальное решение. Разыскивая решение этой однородной задачи Неймана в виде потенциала простого

слоя (2.18) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_+$ , получаем однородное уравнение, соответствующее (2.38). Это уравнение может иметь лишь тривиальное решение. Действительно, если предположить обратное, то представление (2.18) даст нетривиальное решение однородной задачи Неймана, потому что, если при некотором  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  потенциал  $u$ , задаваемый соотношением (2.18), равен нулю в  $\Omega_i$ , то его плотность  $f_+ = 0$  на  $\gamma$  (см. лемму 2.1).

Используя свойства функций Ханкеля, нетрудно убедиться, что функция

$$\frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)}$$

является непрерывной функцией  $(x, y) \in \gamma \times \gamma$ , а ее производная по  $x$  является непрерывной функцией  $(x, y) \in \{\gamma \times \gamma\} \setminus \{x = y\}$  и имеет на линии  $x = y$  особенность порядка  $\ln |x - y|$  при любом  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ . Следовательно, интегральный оператор в (2.38) является вполне непрерывным оператором, действующим в пространстве  $C^{0,\alpha}(\gamma)$ . В силу альтернативы Фредгольма получаем, что уравнение (2.38) для любой правой части  $g \in C^{0,\alpha}(\gamma)$  имеет решение  $f_+ \in C^{0,\alpha}(\gamma)$ . Таким образом, любая собственная функция задачи (2.1)–(2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus (D \cup \sigma(N^{(+)})$ , представима в области  $\Omega_i$  в виде потенциала простого слоя (2.18) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_+$ .

Докажем теперь, что если  $u \in U$  является собственной функцией задачи (2.1)–(2.4), отвечающей собственному значению

$$\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus (D \cup \sigma(D^{(+)})$$

то функция  $u$  представима в области  $\Omega_i$  в виде потенциала простого слоя (2.18) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_+$ . В силу леммы 2.3 при любом  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  функция  $u$  не равна тождественно нулю и непрерывно дифференцируема по Гельдеру на контуре  $\gamma$ . Положим  $g(x) = u(x)$ ,  $x \in \gamma$ . Функция  $u$  должна удовлетворять, таким образом, условиям

$$\Delta u + \chi_+^2 u = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad (2.39)$$

$$u = g, \quad x \in \gamma, \quad (2.40)$$

где  $g \in C^{1,\alpha}(\gamma)$ .

Будем разыскивать решение этой задачи в виде потенциала простого слоя (2.18) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_+$ . Переходя в (2.18) к пределу, устремляя точку  $x$  к  $\gamma$ , получаем интегральное уравнение

$$\int_{\gamma} \Phi_+(\beta; x, y) f_+(y) dl(y) = g(x), \quad x \in \gamma. \quad (2.41)$$

Переходя к переменной интегрирования  $t$  параметрического представления контура  $\gamma$ , выделяя логарифмическую особенность ядра, запишем это уравнение в виде

$$Lp + B(\beta)p = f, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (2.42)$$

где

$$Lp := -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right| p(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$B(\beta)p := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\beta; t, \tau) p(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$h(\beta; t, \tau) := \Phi_+(\beta; x, y) + \frac{1}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right|,$$

$$p(t) := f_+(x) |r'(t)| \in C^{0,\alpha}(\gamma), \quad g(t) \in C^{1,\alpha}(\gamma),$$

$$x \equiv x(t), \quad y \equiv y(\tau).$$

Оператор  $L : C^{0,\alpha}(\gamma) \rightarrow C^{1,\alpha}(\gamma)$  непрерывно обратим (см., напр., [10, с. 10]) и, следовательно, если оператор  $B : C^{0,\alpha}(\gamma) \rightarrow C^{1,\alpha}(\gamma)$  вполне непрерывен и однородное уравнение, соответствующее (2.42), имеет только нулевое решение, то оператор  $A := L + B : C^{0,\alpha}(\gamma) \rightarrow C^{1,\alpha}(\gamma)$  непрерывно обратим.

Используя свойства функций Ханкеля, нетрудно убедиться, что функция  $h(\beta; t, \tau)$  является дважды непрерывно дифференцируемой по  $t$  функцией  $(t, \tau) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  при любом  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ . Следовательно, интегральный оператор  $B$  является вполне непрерывным оператором, действующим из пространства  $C^{0,\alpha}(\gamma)$  в  $C^{1,\alpha}(\gamma)$ .

Покажем теперь, что для любого  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus (D \cup \sigma(D^{(+)})$  уравнение (2.42) имеет лишь тривиальное решение при  $f = 0$ . Однородная задача Дирихле (2.39), (2.40) при  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus (D \cup \sigma(D^{(+)})$  и  $g = 0$ ,

$x \in \gamma$ , имеет лишь тривиальное решение. Разыскивая решение однородной задачи Дирихле (2.39), (2.40) при  $g = 0$ ,  $x \in \gamma$ , в виде потенциала простого слоя (2.18) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_+$ , получаем однородное уравнение, соответствующее (2.42). Это уравнение может иметь лишь тривиальное решение. Действительно, если предположить обратное, то представление (2.18) даст нетривиальное решение однородной задачи Дирихле, поскольку, если при некотором  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  потенциал  $u$ , задаваемый соотношением (2.18), равен нулю в  $\Omega_i$ , то его плотность  $f_+ = 0$  на  $\gamma$  (см. лемму 2.1).

Итак, для любой правой части  $g \in C^{1,\alpha}(\gamma)$  уравнение (2.42) имеет решение  $f_+ \in C^{0,\alpha}(\gamma)$ , и любая собственная функция задачи (2.1)–(2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus (D \cup \sigma(D^{(+)})$ ), представима в области  $\Omega_i$  в виде потенциала простого слоя (2.18) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_+$ .

Множества  $\sigma(D^{(+)})$  и  $\sigma(N^{(+)})$  не пересекаются, поэтому из доказанного выше следует, что любая собственная функция задачи (2.1)–(2.4), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , представима в области  $\Omega_i$  в виде потенциала простого слоя (2.18) с непрерывной по Гельдеру плотностью  $f_+$ .  $\square$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3.** Предположим, что  $w \in W$  является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ . Функции  $f_+$ ,  $f_\infty$ , определяемые равенствами (2.26) и (2.27), принадлежат пространству  $C^{0,\alpha}(\gamma)$ . Таким образом, функция  $u$ , представленная в виде потенциалов простого слоя (2.18), (2.19) с плотностями  $f_+$ ,  $f_\infty$ , принадлежит множеству  $U$  и удовлетворяет условиям (2.1)–(2.4). Функция  $u$  не может быть нулевой, так как в силу лемм 2.1 и 2.2 в этом случае плотности  $f_+$ ,  $f_\infty$  также были бы равны нулю, и, следовательно,

$$w := (L((f_+ - f_\infty)|r'|), f_+ + f_\infty) = 0,$$

что противоречит предположению о том, что  $w$  является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ . Итак, функция  $u$  является собственной функцией задачи (2.1)–(2.4), отвечающей собственному значению  $\beta$ .

Согласно леммам 2.4 и 2.5 любая собственная функция  $u$  задачи (2.1)–(2.4), отвечающая собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , может быть представлена в виде потенциалов простого слоя (2.18),

(2.19) с непрерывными по Гельдеру плотностями  $f_+$ ,  $f_\infty$ , соответственно. Отсюда непосредственно следует, что если  $u$  является собственной функцией задачи (2.1)–(2.4), отвечающей собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , то указанные плотности удовлетворяют системе интегральных уравнений (2.20), (2.21) при  $\beta = \beta_0$ . Плотности  $f_+$  и  $f_\infty$  не могут одновременно быть тождественны нулю, так как в этом случае  $u \equiv 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ . Следовательно,

$$w := (L((f_+ - f_\infty)|r'|), f_+ + f_\infty) \in W$$

является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0$ .  $\square$

**Теорема 2.4.** *Регулярное множество оператор-функции  $A(\beta)$ , определенной в (2.24), не пусто, а именно,  $C_0^{(1)} \cup B \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество  $\sigma(A)$  оператор-функции  $A(\beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметров  $(k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$ . Кроме того, с изменением параметров  $(k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе множества  $\Lambda$ , т. е. в точках  $\pm kn_+$ ,  $\pm kn_\infty$  и на бесконечности.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу фредгольмовости оператора  $A(\beta)$  при каждом фиксированном  $(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$ , установленной в теореме 2.2, теореме 2.1 о локализации собственных значений задачи (2.1)–(2.4) и теореме 2.3 о связи решений задач (2.1)–(2.4) и (2.24), оператор  $A(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty)$  обратим для любых

$$(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty) \in (C_0^{(1)} \cup B) \times \mathbb{R}_+^3.$$

Таким образом, справедливость настоящей теоремы непосредственно следует из свойств оператор-функции  $A(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty)$ , установленных в теореме 2.2, теореме И.Ц. Гохберга, М.Г. Крейна [12] об изолированности характеристических значений фредгольмовой голоморфной оператор-функции  $A(\beta)$  при наличии в области ее голоморфности хотя бы одной регулярной точки, теоремы S. Steinberg [155] о поведении характеристических значений такой оператор-функции в зависимости от изменения вещественного параметра  $k$  в случае, если

оператор-функция является совместно непрерывной функцией  $\beta$  и  $k$ . Отметим, что теорема S. Steinberg справедлива для частного случая, когда оператор-функция  $A(\beta, k)$  имеет вид  $A(\beta, k) := I + B(\beta, k)$ , где оператор  $B(\beta, k)$  вполне непрерывен.  $\square$

## § 2. Векторная задача в полной электродинамической постановке

**1. Постановка задачи и локализация собственных значений.** Сформулируем задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода с произвольным контуром поперечного сечения и постоянной диэлектрической проницаемостью. Пусть область поперечного сечения волновода  $\Omega_i$  ограничена дважды непрерывно дифференцируемым контуром  $\gamma$ . Диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  является кусочно-постоянной функцией, а именно, равна константе  $\varepsilon_+$  в области  $\Omega_i$ , а в области  $\Omega_e := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_i$  — константе  $\varepsilon_\infty > 0$ ; кроме того,  $\varepsilon_\infty < \varepsilon_+$ . Будем считать, что постоянная распространения  $\beta$  — неизвестный комплексный параметр,  $\omega > 0$  — заданная частота электромагнитных колебаний. Задача сводится (см. § 1 гл. 1) к отысканию таких значений параметра  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения  $E, H$  системы уравнений:

$$\operatorname{rot}_\beta E = i\omega\mu_0 H, \quad \operatorname{rot}_\beta H = -i\omega\varepsilon_0 E, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma, \quad (2.43)$$

где векторная операция  $\operatorname{rot}_\beta$  определена равенством (1.4), с. 19.

Обозначим через  $U$  множество функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\overline{\Omega}_i$  и  $\overline{\Omega}_e$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega_i$  и  $\Omega_e$ . Будем разыскивать нетривиальные решения  $\{E, H\}$  системы (2.43) в пространстве  $U^6$ , где  $U^2 = U \times U$ .

Потребуем, чтобы на контуре  $\gamma$  векторы  $E, H$  удовлетворяли условиям сопряжения (см. § 1 гл. 1), которые заключаются в том, что при переходе через эту границу касательные составляющие векторов  $E, H$  непрерывны:

$$\nu \times E^+ = \nu \times E^-, \quad x \in \gamma, \quad (2.44)$$

$$\nu \times H^+ = \nu \times H^-, \quad x \in \gamma. \quad (2.45)$$

Будем предполагать, что функции  $E, H$  удовлетворяют парциальным условиям излучения, т. е. существует такая константа  $R_0$ , что

для всех  $x : |x| \geq R_0$  функции  $E, H$  разлагаются в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды:

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) e^{il\varphi}. \quad (2.46)$$

При этом будем предполагать, что постоянные распространения  $\beta$  принадлежат множеству  $\Lambda$  — пересечению римановых поверхностей  $\Lambda_+$  и  $\Lambda_\infty$  функций  $\ln \chi_+(\beta)$  и  $\ln \chi_\infty(\beta)$ , соответственно.

**Определение 2.9.** Ненулевой вектор  $\{E, H\} \in U^6$  будем называть собственным вектором задачи (2.43)–(2.46), отвечающим собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнены условия (2.43)–(2.46).

**Теорема 2.5.** Мнимая и вещественная оси листа  $\Lambda_0^{(1)}$ , за исключением множества  $G$ , не содержат собственных значений задачи (2.43)–(2.46).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Вещественная и мнимая оси листа  $\Lambda_0^{(1)}$  представляют собой объединение трех множеств  $B, D$  и  $G$ . Докажем, что  $B$  и  $D$  не содержат собственных значений задачи (2.43)–(2.46). Предположим, что  $\{E, H\}$  — собственный вектор задачи (2.43)–(2.46), отвечающий собственному значению  $\beta \in B \cup D$ . Согласно утверждению 1.1, с. 20, для всех  $x$  из  $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$  имеет место равенство

$$\operatorname{rot}_\beta (\operatorname{rot}_\beta E) = k^2 \varepsilon E. \quad (2.47)$$

Введем следующие обозначения:

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\},$$

$$\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = R\},$$

где  $R \geq R_0$ . Умножая скалярно обе части уравнения (2.47) на  $\bar{E}$ , интегрируя по области  $\Omega$ , применяя формулу интегрирования по частям и используя граничные условия (2.44), (2.45), получаем

$$\int_{\Omega} |\operatorname{rot}_\beta E|^2 dx + \int_{\Gamma} \nu \times \operatorname{rot}_\beta E \cdot \bar{E} dx = k^2 \int_{\Omega} \varepsilon |E|^2 dx. \quad (2.48)$$

Для любой функции  $E$ , разлагающейся в ряд (2.46), и  $\beta \in D$  (т. е. при  $\chi_\infty > 0$ ) имеем:

$$\operatorname{Im} \int_{\Gamma} \nu \times \operatorname{rot}_\beta E \cdot \bar{E} dx = -4 \sum_{l=-\infty}^{\infty} |A_l|^2. \quad (2.49)$$

В этом нетрудно убедиться непосредственными вычислениями. Из двух последних равенств следует, что  $A_l = 0$  для всех  $l$  и  $R \geq R_0$ . Следовательно,  $E = 0$  при  $|x| \geq R_0$ . Как было доказано в утверждении 1.2, с. 20, функция  $E$  удовлетворяет в области  $\Omega_e$  уравнению Гельмгольца (1.16) с постоянным коэффициентом, следовательно, является аналитической по  $x$  в  $\Omega_e$ . Таким образом,

$$E = 0, \quad x \in \Omega_e, \quad (2.50)$$

следовательно,

$$H = 1/(i\omega\mu_0)\text{rot}_\beta E = 0, \quad x \in \Omega_e. \quad (2.51)$$

Докажем теперь, что вектор  $\{E, H\}$  равен нулю и в области  $\Omega_i$ . Согласно утверждению 1.4, с. 22, все компоненты этого вектора в рассматриваемом случае выражаются через две функции  $E_3$  и  $H_3$ , удовлетворяющие в области  $\Omega_i$  уравнению Гельмгольца (1.23), с. 22, с постоянным коэффициентом. Из (2.50), (2.51) и условий сопряжения (1.28), с. 23, получаем

$$E_3^- = 0, \quad \frac{\partial E_3^-}{\partial \nu} = 0, \quad H_3^- = 0, \quad \frac{\partial H_3^-}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \gamma. \quad (2.52)$$

Применяя в области  $\Omega_i$  к функциям  $E_3$  и  $H_3$  третью формулу Грина (2.8), с. 41, заключаем, что  $E_3 = 0$  и  $H_3 = 0$  в области  $\Omega_i$ . Используя представления (1.20), (1.21), с. 22, для остальных компонент вектора  $\{E, H\}$ , заключаем, что он равен нулю в  $\Omega_i$ . В силу предположения о гладкости  $\{E, H\}$  этот вектор равен нулю и на контуре  $\gamma$ . Итак, мы доказали, что при  $\beta \in D$  вектор  $\{E, H\}$  обращается в нуль на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Следовательно, множество  $\beta \in D$  свободно от собственных значений задачи (2.43)–(2.46).

Для любого  $\beta \in B$  и любой функции  $E$ , разлагающейся в ряд (2.46), в силу асимптотики (1.36), с. 26, подынтегральные выражения в равенстве (2.48) экспоненциально убывают при  $|x| \rightarrow \infty$ . Переходя в (2.48) к пределу при  $R \rightarrow \infty$ , получаем следующее равенство:

$$\int_{\Omega_i \cup \Omega_e} |\text{rot}_\beta E|^2 dx = k^2 \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} \varepsilon |E|^2 dx. \quad (2.53)$$

Используя уравнения (1.9) и (1.13), с. 20, формулу интегрирования

по частям и условие сопряжения (2.44), получаем равенство

$$\int_{\Omega_i \cup \Omega_e} |\text{rot}_\beta E|^2 dx = \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} |\nabla E|^2 dx + \beta^2 \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} |E|^2 dx. \quad (2.54)$$

Объединяя (2.53) и (2.54), получаем неравенство

$$\int_{\Omega_i \cup \Omega_e} |\nabla E|^2 dx + (\beta^2 - k^2 \varepsilon_+) \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} |E|^2 dx \leq 0. \quad (2.55)$$

Для любого  $\beta \in B$  коэффициент при втором слагаемом в неравенстве (2.55) больше нуля, следовательно,

$$E = 0, \quad H = 1/(i\omega\mu_0)\text{rot}_\beta E = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Таким образом, множество  $B$  свободно от собственных значений задачи (2.43)–(2.46).  $\square$

Отметим, что доказать отсутствие собственных значений  $\beta$  задачи (2.43)–(2.46) в области  $G$  с помощью неравенства (2.55) нельзя в силу того, что для любого  $\beta \in G$  коэффициент при втором слагаемом в неравенстве (2.55) меньше нуля. Также нельзя доказать с помощью этого неравенства и отсутствие собственных значений вне вещественной оси листа  $\Lambda_0^{(1)}$ , так как формула (2.54), из которой вытекает неравенство (2.55), справедлива лишь для вещественных  $\beta \in B$ . Вещественным  $\beta \in G$  соответствуют поверхностные волны. Комплексным значениям  $\beta \in C_0^{(1)}$  отвечают комплексные собственные волны. Теорема 2.5 обобщает результаты [50] и [6] о локализации спектра собственных волн диэлектрического волновода кругового сечения, полученные на основе анализа характеристического уравнения метода разделения переменных (см. п. 1 § 3 гл. 1).

**2. Нелинейная спектральная задача для системы сингулярных интегральных уравнений по контуру поперечного сечения волновода.** Сведем теперь задачу (2.43)–(2.46) к нелинейной спектральной задаче для системы сингулярных интегральных уравнений по контуру поперечного сечения волновода. Пусть вектор  $\{E, H\}$  является собственным вектором задачи (2.43)–(2.46), отвечающим собственному значению  $\beta \in \Lambda$ . Напомним, что точки ветвления  $\beta = \pm kn_+$ ,  $\beta = \pm kn_\infty$  не принадлежат поверхности  $\Lambda$ .

Следовательно, как было доказано в утверждении 1.4, с. 22, существуют функции  $u, v \in U$  такие, что

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{i}{k^2\varepsilon - \beta^2} \left( \mu_0\omega \frac{\partial v}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \\ E_2 &= \frac{-i}{k^2\varepsilon - \beta^2} \left( \mu_0\omega \frac{\partial v}{\partial x_1} - \beta \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} E_3 &= u, \\ H_1 &= \frac{i}{k^2\varepsilon - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial x_1} - \varepsilon_0\varepsilon\omega \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \\ H_2 &= \frac{i}{k^2\varepsilon - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial x_2} + \varepsilon_0\varepsilon\omega \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \\ H_3 &= v. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Потенциальные функции  $u(x)$  и  $v(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$[\Delta + (k^2\varepsilon_+ - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad (2.58)$$

$$[\Delta + (k^2\varepsilon_\infty - \beta^2)] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega_e. \quad (2.59)$$

Как было доказано в утверждении 1.5, с. 23, на контуре  $\gamma$  должны выполняться условия сопряжения

$$u^+ = u^-, \quad v^+ = v^-, \quad x \in \gamma,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2\varepsilon_+ - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial \tau} + \varepsilon_0\varepsilon_+\omega \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \right) &= \\ &= \frac{1}{k^2\varepsilon_\infty - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial v}{\partial \tau} + \varepsilon_0\varepsilon_\infty\omega \frac{\partial u^+}{\partial \nu} \right), \quad x \in \gamma, \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2\varepsilon_+ - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial u}{\partial \tau} - \mu_0\omega \frac{\partial v^-}{\partial \nu} \right) &= \\ &= \frac{1}{k^2\varepsilon_\infty - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial u}{\partial \tau} - \mu_0\omega \frac{\partial v^+}{\partial \nu} \right), \quad x \in \gamma. \end{aligned}$$

Из разложения (2.46) следует, что для всех  $x : |x| \geq R_0$  функции  $u, v$  разлагаются в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_{3,l} \\ B_{3,l} \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) e^{il\varphi}. \quad (2.61)$$

Очевидно, что если при некотором  $\beta_0 \in \Lambda$  будет найдено нетривиальное решение  $\{u, v\} \in U^2$  задачи (2.58)–(2.61), то вектор, построенный по формулам (2.56), (2.57), будет собственным вектором задачи (2.43)–(2.46), отвечающим собственному значению  $\beta_0$ . Решения задачи (2.58)–(2.61) будем разыскивать в виде потенциалов простого слоя

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} := \int_{\gamma} \Phi_+(\beta; x, y) \begin{bmatrix} f_+(y) \\ g_+(y) \end{bmatrix} dl(y), \quad x \in \Omega_i, \quad (2.62)$$

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} := \int_{\gamma} \Phi_\infty(\beta; x, y) \begin{bmatrix} f_\infty(y) \\ g_\infty(y) \end{bmatrix} dl(y), \quad x \in \Omega_e, \quad (2.63)$$

с плотностями  $f_+, f_\infty, g_+, g_\infty$ , принадлежащими пространству непрерывных по Гельдеру функций  $C^{0,\alpha}(\gamma)$ . Здесь

$$\Phi_+(\beta; x, y) := \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_+(\beta) |x - y|), \quad (2.64)$$

$$\Phi_\infty(\beta; x, y) := \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_\infty(\beta) |x - y|). \quad (2.65)$$

При всех  $\beta \in \Lambda$  и  $f_+, f_\infty, g_+, g_\infty \in C^{0,\alpha}(\gamma)$  функции  $u, v$ , задаваемые равенствами (2.62), (2.63), удовлетворяют условиям гладкости и уравнениям (2.58), (2.59). С помощью разложения (2.14) нетрудно убедиться, что функции  $u, v$  удовлетворяют условию (2.61).

Используем теперь граничные условия (2.60) для того, чтобы свести задачу (2.58)–(2.61) к нелинейной спектральной задаче для системы интегральных уравнений. Граничные условия (2.60) содержат предельные значения касательных производных функций  $u, v$  на контуре  $\gamma$ . По аналогии с [65, с. 56], можно показать, что для  $\beta \in \Lambda$  касательные производные потенциалов простого слоя (2.62) с непрерывными по Гельдеру плотностями при  $x \rightarrow z \in \gamma$  представимы

сингулярными интегралами с ядром Коши:

$$\lim_{x \rightarrow z \in \gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial \tau} = \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial \tau(x)} \Phi_+(\beta; z, y) f_+(y) dl(y), \quad z \in \gamma,$$

$$\lim_{x \rightarrow z \in \gamma} \frac{\partial v(x)}{\partial \tau} = \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial \tau(x)} \Phi_+(\beta; z, y) g_+(y) dl(y), \quad z \in \gamma.$$

Используя граничные условия (2.60), предельные свойства потенциалов простого слоя, а также их нормальных и касательных производных, получаем нелинейную спектральную задачу для системы интегральных уравнений:

$$(\mathcal{A}(\beta)f)(x) = 0, \quad x \in \gamma. \quad (2.66)$$

Здесь

$$\mathcal{A}f := \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_{23} & \mathcal{A}_{24} \\ \mathcal{A}_{31} & \mathcal{A}_{32} & \mathcal{A}_{33} & 0 \\ \mathcal{A}_{41} & 0 & \mathcal{A}_{43} & \mathcal{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_+ \\ f_{\infty} \\ g_+ \\ g_{\infty} \end{bmatrix},$$

$$(\mathcal{A}_{11}(\beta)f_+)(x) := \int_{\gamma} \Phi_+(\beta; x, y) f_+(y) dl(y), \quad x \in \gamma,$$

$$(\mathcal{A}_{12}(\beta)f_{\infty})(x) := - \int_{\gamma} \Phi_{\infty}(\beta; x, y) f_{\infty}(y) dl(y), \quad x \in \gamma,$$

$$(\mathcal{A}_{23}(\beta)g_+)(x) := \int_{\gamma} \Phi_+(\beta; x, y) g_+(y) dl(y), \quad x \in \gamma,$$

$$(\mathcal{A}_{24}(\beta)g_{\infty})(x) := - \int_{\gamma} \Phi_{\infty}(\beta; x, y) g_{\infty}(y) dl(y), \quad x \in \gamma,$$

$$(\mathcal{A}_{31}(\beta)f_+)(x) := \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{\infty} \omega}{\chi_+^2(\beta)} \left( \frac{f_+(x)}{2} + \int_{\gamma} \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} f_+(y) dl(y) \right), \quad x \in \gamma,$$

$$(\mathcal{A}_{32}(\beta)f_{\infty})(x) := \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{\infty} \omega}{\chi_{\infty}^2(\beta)} \left( -\frac{f_{\infty}(x)}{2} + \int_{\gamma} \frac{\partial \Phi_{\infty}(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} f_{\infty}(y) dl(y) \right), \quad x \in \gamma,$$

$$(\mathcal{A}_{33}(\beta)g_+)(x) := \left( \frac{\beta}{\chi_+^2(\beta)} - \frac{\beta}{\chi_{\infty}^2(\beta)} \right) \int_{\gamma} \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \tau(x)} g_+(y) dl(y), \quad x \in \gamma,$$

$$(\mathcal{A}_{41}(\beta)f_+)(x) := \left( \frac{\beta}{\chi_+^2(\beta)} - \frac{\beta}{\chi_{\infty}^2(\beta)} \right) \int_{\gamma} \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \tau(x)} f_+(y) dl(y), \quad x \in \gamma,$$

$$(\mathcal{A}_{43}(\beta)g_+)(x) := -\frac{\mu_0 \omega}{\chi_+^2(\beta)} \left( \frac{g_+(x)}{2} + \int_{\gamma} \frac{\partial \Phi_+(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} g_+(y) dl(y) \right), \quad x \in \gamma,$$

$$(\mathcal{A}_{44}(\beta)g_{\infty})(x) := \frac{\mu_0 \omega}{\chi_{\infty}^2(\beta)} \left( -\frac{g_{\infty}(x)}{2} + \int_{\gamma} \frac{\partial \Phi_{\infty}(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} g_{\infty}(y) dl(y) \right), \quad x \in \gamma.$$

Функции  $\Phi_+(\beta; x, y)$ ,  $\Phi_{\infty}(\beta; x, y)$  имеют логарифмическую особенность при  $x = y$ . Ядра интегральных операторов, содержащих нормальные производные этих функций, непрерывны. Операторы, ядра которых содержат касательные производные функций  $\Phi_+(\beta; x, y)$  и  $\Phi_{\infty}(\beta; x, y)$ , — сингулярные интегральные операторы с ядром Коши. Пусть контур  $\gamma$  задан параметрически  $r = r(t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Переходя к переменной интегрирования  $t$  и выделяя явно особенности ядер, преобразуем систему (2.66) к виду

$$(\mathcal{C}(\beta)w)(t) + (\mathcal{B}(\beta)w)(t) = 0, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (2.67)$$



Здесь вектор  $w = (w_j)_{j=1}^4$ ,

$$w_1(t) := (f_+(x) - f_\infty(x))|r'(t)|,$$

$$w_2(t) := (g_+(x) - g_\infty(x))|r'(t)|,$$

$$w_3(t) := f_+(x)|r'(t)|,$$

$$w_4(t) := g_+(x)|r'(t)|.$$

Интегральный оператор  $\mathcal{C}(\beta)$  определяется следующим образом:

$$\mathcal{C}(\beta)w := \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ c_{31}(\beta)I & c_{32}(\beta)S & c_{33}(\beta)I & c_{34}(\beta)S \\ c_{41}(\beta)S & c_{42}(\beta)I & c_{43}(\beta)S & c_{44}(\beta)I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}, \quad (2.68)$$

где  $I$  — единичный оператор в пространстве  $C^{0,\alpha}(\gamma)$ ,

$$Su := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} u(\tau) d\tau + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (2.69)$$

а функции  $c_{ij}(\beta)$  имеют вид

$$\begin{aligned} c_{31}(\beta) &:= \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_\infty}{\chi_\infty^2(\beta)}, & c_{32}(\beta) &:= c_{41}(\beta) := \frac{\beta}{\chi_\infty^2(\beta)}, \\ c_{33}(\beta) &:= \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_+}{\chi_+^2(\beta)} + \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_\infty}{\chi_\infty^2(\beta)}, & c_{34}(\beta) &:= c_{43}(\beta) := \frac{\beta}{\chi_+^2(\beta)} - \frac{\beta}{\chi_\infty^2(\beta)}, \\ c_{42}(\beta) &:= -\frac{\omega \mu_0}{\chi_\infty^2(\beta)}, & c_{44}(\beta) &:= -\frac{\omega \mu_0}{\chi_+^2(\beta)} - \frac{\omega \mu_0}{\chi_\infty^2(\beta)}. \end{aligned}$$

Интегральный оператор  $\mathcal{B}(\beta)$  в (2.67) имеет представление

$$\mathcal{B}(\beta)w := \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11}(\beta) & 0 & \mathcal{B}_{13}(\beta) & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_{22}(\beta) & 0 & \mathcal{B}_{24}(\beta) \\ \mathcal{B}_{31}(\beta) & \mathcal{B}_{32}(\beta) & \mathcal{B}_{33}(\beta) & \mathcal{B}_{34}(\beta) \\ \mathcal{B}_{41}(\beta) & \mathcal{B}_{42}(\beta) & \mathcal{B}_{43}(\beta) & \mathcal{B}_{44}(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}, \quad (2.70)$$

элементы которого с помощью оператора

$$Lu := -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t - \tau}{2} \right| u(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (2.71)$$

определяются следующим образом:

$$\mathcal{B}_{11}(\beta) := \mathcal{B}_{22}(\beta) := L^{-1} B_\infty^{(1)}(\beta),$$

$$\mathcal{B}_{13}(\beta) := \mathcal{B}_{24}(\beta) := L^{-1} \left( B_+^{(1)}(\beta) - B_\infty^{(1)}(\beta) \right),$$

$$\mathcal{B}_{31}(\beta) := -\frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_\infty}{\chi_\infty^2(\beta)} B_\infty^{(2)}(\beta),$$

$$\mathcal{B}_{32}(\beta) := \mathcal{B}_{41}(\beta) := \frac{\beta}{\chi_\infty^2(\beta)} B_\infty^{(3)}(\beta),$$

$$\mathcal{B}_{33}(\beta) := -\frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_+}{\chi_+^2(\beta)} B_+^{(2)}(\beta) - \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_\infty}{\chi_\infty^2(\beta)} B_\infty^{(2)}(\beta),$$

$$\mathcal{B}_{34}(\beta) := \mathcal{B}_{43}(\beta) := \frac{\beta}{\chi_+^2(\beta)} B_+^{(3)}(\beta) - \frac{\beta}{\chi_\infty^2(\beta)} B_\infty^{(3)}(\beta),$$

$$\mathcal{B}_{42}(\beta) := \frac{\omega \mu_0}{\chi_\infty^2(\beta)} B_\infty^{(2)}(\beta),$$

$$\mathcal{B}_{44}(\beta) := \frac{\omega \mu_0}{\chi_+^2(\beta)} B_+^{(2)}(\beta) + \frac{\omega \mu_0}{\chi_\infty^2(\beta)} B_\infty^{(2)}(\beta).$$

Здесь

$$B_{+/\infty}^{(k)}(\beta)u := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_{+/\infty}^{(k)}(\beta; t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \quad k = 1, 2, 3,$$

$$h_{+/\infty}^{(1)}(\beta; t, \tau) := 2\pi \Phi_{+/\infty}(\beta; x, y) + \ln \left| \sin \frac{t - \tau}{2} \right|,$$

$$h_{+/\infty}^{(2)}(\beta; t, \tau) := 4\pi |r'(\tau)| \frac{\partial \Phi_{+/\infty}(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)},$$

$$h_{+/\infty}^{(3)}(\beta; t, \tau) := 2|r'(\tau)| \frac{\partial h_{+/\infty}^{(1)}(\beta; t, \tau)}{\partial \tau(x)} - i,$$

$$x = x(t), \quad y = y(\tau).$$

Линейный непрерывный оператор  $L : C^{0,\alpha}(\gamma) \rightarrow C^{1,\alpha}(\gamma)$ , определенный равенством (2.71), непрерывно обратим (см., напр., [10, с. 10]).

При любом  $\beta \in \Lambda$  операторы

$$B_{+/\infty}^{(1)}(\beta) : C^{0,\alpha}(\gamma) \rightarrow C^{1,\alpha}(\gamma),$$

$$B_{+/\infty}^{(2)}(\beta), B_{+/\infty}^{(3)}(\beta), : C^{0,\alpha}(\gamma) \rightarrow C^{0,\alpha}(\gamma),$$

вполне непрерывны в силу того, что ядра  $h_{+/\infty}^{(2)}, h_{+/\infty}^{(3)}$  не имеют особенностей при  $t = \tau$ , а ядра  $h_{+/\infty}^{(1)}$  являются дважды непрерывно дифференцируемыми по  $t$  функциями  $(t, \tau) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ . В этом нетрудно убедиться, используя свойства функций Ханкеля. Следовательно, для любого  $\beta \in \Lambda$  оператор  $\mathcal{B}(\beta)$ , определенный равенством (2.70), является вполне непрерывным оператором, действующим в банаховом пространстве  $W := [C^{0,\alpha}(\gamma)]^4$ .

Линейный непрерывный оператор  $S : C^{0,\alpha}(\gamma) \rightarrow C^{0,\alpha}(\gamma)$ , определенный равенством (2.69), непрерывно обратим, и  $S^{-1} = -S$  (см., напр., [65, с. 118]). Точки ветвления  $\beta = \pm kn_+$ ,  $\beta = \pm kn_\infty$  не принадлежат поверхности  $\Lambda$ . Следовательно, линейный непрерывный оператор  $\mathcal{C} : W \rightarrow W$ , определенный равенством (2.68), непрерывно обратим в  $W$  при любом значении  $\beta \in \Lambda$ .

Таким образом, система интегральных уравнений (2.67) эквивалентна операторному уравнению

$$A(\beta)w := (I + B(\beta))w = 0, \quad (2.72)$$

где вполне непрерывный оператор  $B$ , действующий в банаховом пространстве  $W$ , определяется при помощи равенства

$$B(\beta) := \mathcal{C}^{-1}(\beta)\mathcal{B}(\beta),$$

а  $I$  — единичный оператор в  $W$ .

**Теорема 2.6.** При каждом фиксированном

$$(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$$

оператор  $A(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty) : W \rightarrow W$  фредгольмов. При каждом фиксированном  $(k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$  оператор-функция  $A(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty)$  голоморфна по  $\beta \in \Lambda$ . Оператор-функция  $A(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty)$  непрерывна по  $(\beta; k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^3$ .

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.2, с. 48.

Таким образом, задача (2.72) является спектральной задачей для фредгольмовой голоморфной оператор-функции.

**3. Дискретность характеристического множества и зависимость характеристических значений от параметров.** Относительно эквивалентности задач (2.43)–(2.46) и (2.72) справедлива следующая теорема, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 2.3, с. 49.

**Теорема 2.7.** Если  $w$  — собственная функция оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающая характеристическому значению

$$\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D,$$

то вектор  $\{E, H\}$ , построенный по формулам (2.56), (2.57), где функции  $u, v$  определяются равенствами (2.62), (2.63),  $\beta := \beta_0$ ,

$$f_+ := w_3/|r'|,$$

$$f_\infty := (w_3 - w_1)/|r'|,$$

$$g_+ := w_4/|r'|,$$

$$g_\infty := (w_4 - w_2)/|r'|,$$

является собственным вектором задачи (2.43)–(2.46), отвечающим собственному значению  $\beta_0$ . Если вектор  $\{E, H\}$  является собственным вектором задачи (2.43)–(2.46), отвечающим собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ , то функции  $u := E_z$  и  $v := H_z$  могут быть представлены в виде потенциалов простого слоя (2.62) и (2.63) с непрерывными по Гельдеру плотностями  $f_+, f_\infty$  и  $g_+, g_\infty$ , соответственно. При этом функция

$$w := ((f_+ - f_\infty)|r'|, (g_+ - g_\infty)|r'|, f_+|r'|, g_+|r'|) \in W$$

является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0$ .

Из теорем 2.5, 2.6, 2.7, теоремы И.Ц. Гохберга, М.Г. Крейна [12] об изолированности характеристических значений фредгольмовой голоморфной оператор-функции  $A(\beta)$  при наличии в области ее голоморфности хотя бы одной регулярной точки, и теоремы S. Steinberg [155] о поведении характеристических значений такой оператор-функции в зависимости от изменения вещественного параметра  $\omega$  в случае, если оператор-функция является непрерывной функцией  $\beta$  и  $\omega$ , непосредственно следует

**Теорема 2.8.** *Регулярное множество оператор-функции  $A(\beta)$ , определенной в (2.72), не пусто, а именно,  $B \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество  $\sigma(A)$  оператор-функции  $A(\beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметров  $(k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$ . Кроме того, с изменением параметров  $(k, \varepsilon_+, \varepsilon_\infty) \in \mathbb{R}_+^3$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе  $\Lambda$ , т. е. в точках  $\pm kn_+, \pm kn_\infty$  и на бесконечности.*

## ГЛАВА 3

# ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ ВОЛНОВОДОВ С РАЗМЫТОЙ ГРАНИЦЕЙ

## § 1. Скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода

**1. Постановка задачи и локализация собственных значений.** Сформулируем задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода с размытой границей, имеющего переменную диэлектрическую проницаемость, близкую к диэлектрической проницаемости окружающей среды. Обозначим через  $C^2(\mathbb{R}^2)$  пространство комплекснозначных дважды непрерывно дифференцируемых в  $\mathbb{R}^2$  функций. Пусть область  $\Omega_i$  поперечного сечения волновода является ограниченной, не обязательно односвязной. Всюду в этой главе будем предполагать, что диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  — вещественная функция из пространства  $C^2(\mathbb{R}^2)$ , равная константе  $\varepsilon_\infty$  вне  $\Omega_i$ . Указанное свойство гладкости функции  $\varepsilon$  используется в следующем параграфе при решении векторной задачи о собственных волнах. Результаты настоящего параграфа справедливы [44] для более общего случая:  $\varepsilon \in C^1(\Omega_i)$ , граница  $\gamma$  области  $\Omega_i$  — липшицева кривая, на  $\gamma$  функция  $u \in U$  удовлетворяет условиям сопряжения (2.3), с. 38. Однако, в целях единства изложения материала во всей главе, ограничимся предположением, что  $\varepsilon \in C^2(\mathbb{R}^2)$  и в настоящем параграфе. В скалярном приближении слабонаправляющего волновода (см. § 2 гл. 1) задача сводится к отысканию таких значений параметра  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения Гельмгольца:

$$[\Delta + (k^2\varepsilon - \beta^2)] u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (3.1)$$

Будем предполагать, что функция  $u$  удовлетворяет на бесконечности парциальным условиям излучения (1.59), с. 31, т. е. при достаточно большом  $R_0$  для всех  $|x| \geq R_0$  представима в виде абсолютно

и равномерно сходящегося ряда

$$u(r, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_{\infty} r) e^{il\varphi}. \quad (3.2)$$

Всюду в этой главе будем предполагать, что постоянные распространения  $\beta$  принадлежат поверхности Римана  $\Lambda$  функции  $\ln \chi_{\infty}(\beta)$ . Строение поверхности  $\Lambda$  подробно рассмотрено в § 1 гл. 1.

**Определение 3.10.** Ненулевую функцию  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  будем называть собственной функцией задачи (3.1), (3.2), отвечающей собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнены условия (3.1), (3.2).

**Теорема 3.9.** На  $\Lambda_0^{(1)}$  собственные значения задачи (3.1), (3.2) могут принадлежать лишь множеству  $G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $u$  — собственная функция задачи (3.1), (3.2), отвечающая собственному значению  $\beta \in D$ . Применим в открытом круге  $\Omega$  радиуса  $R \geq R_0$ , к функциям  $u$  и  $\bar{u}$  формулу Грина

$$\int_{\Omega} (u \Delta \bar{u} - \bar{u} \Delta u) dx = \int_{\Gamma} \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dl,$$

где  $\Gamma$  — граница круга  $\Omega$ . Получим равенство:

$$\int_{\Gamma} \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dl = 0, \quad R \geq R_0,$$

так как  $k^2 \varepsilon > \beta^2$  при  $\beta \in D$ . Отсюда, используя условие (3.2) и ортогональность тригонометрических функций, для любого  $R \geq R_0$  получим

$$2\pi \chi_{\infty} R \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ H_l^{(1)}(\chi_{\infty} R) H_l^{(2)'}(\chi_{\infty} R) - H_l^{(2)}(\chi_{\infty} R) H_l^{(1)'}(\chi_{\infty} R) \right] \times \\ \times |a_l|^2 = 0,$$

где  $a_l$  — коэффициенты ряда (3.2). Хорошо известно (см., напр., [88]), что выражение, стоящее в этой сумме в квадратных скобках, от  $l$  не зависит, а именно

$$H_l^{(1)}(\chi_{\infty} R) H_l^{(2)'}(\chi_{\infty} R) - H_l^{(2)}(\chi_{\infty} R) H_l^{(1)'}(\chi_{\infty} R) = \frac{4}{i\pi \chi_{\infty} R},$$

где  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Следовательно, для любого  $|x| \geq R_0$  все коэффициенты  $a_l$  в разложении (3.2) обращаются в нуль. А это значит, что  $u = 0$  при  $|x| \geq R_0$ . Пусть  $\Phi(\beta; x, y)$  — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца (3.1) [31]. Используя третью формулу Грина, выражающую решение уравнения (3.1) в  $\Omega$  через значение решения и его нормальной производной на  $\Gamma$ ,

$$u(x) = - \int_{\Gamma} \left[ u^-(y) \frac{\partial \Phi(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^-(y)}{\partial \nu(y)} \Phi(\beta; x, y) \right] dl(y), \quad x \in \Omega, \quad (3.3)$$

найдем, что  $u = 0$  при  $x \in \Omega$ . Итак, задача (3.1), (3.2) при  $\beta \in D$  имеет только тривиальное решение.

При остальных  $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$  из условий (3.1), (3.2) и асимптотической формулы (1.36), с. 26, нетрудно получить равенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} (\beta^2 - k^2 \varepsilon) |u|^2 dx = 0. \quad (3.4)$$

Для этого надо применить в круге  $\Omega$  радиуса  $R$  формулу Грина

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega} \bar{u} \Delta u dx = \int_{\Gamma} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} dl$$

и устремить  $R$  к бесконечности. Согласно асимптотике (1.36), с. 26, все подынтегральные выражения в этой формуле экспоненциально убывают на бесконечности при  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$ . При вещественных  $\beta$ , лежащих в интервале  $B$ , равенству (3.4) удовлетворяет лишь нулевая функция  $u$ . Действительно, если  $\beta \in B$  и  $|\beta| > kn_+$ , то из этого равенства сразу вытекает, что  $u = 0$  на всей плоскости. Если  $\beta \in B$  и  $|\beta| = kn_+$ , то из него следует, что  $\nabla u = 0$  в  $\mathbb{R}^2$ , т. е.  $u$  всюду принимает постоянное значение. Но из асимптотики (1.36), с. 26, вытекает, что на бесконечности  $u$  обращается в нуль. Значит  $u$  равняется нулю всюду. Возьмем от левой и правой частей равенства (3.4) мнимую часть, получим

$$\operatorname{Im}(\beta^2) \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx = 0.$$

Следовательно, собственные значения  $\beta$  задачи (3.1), (3.2) на  $\Lambda_0^{(1)}$  не могут иметь одновременно мнимую и вещественную части отличные от нуля, т. е. принадлежать множеству  $\Lambda_0^{(1)} \setminus (B \cup D \cup G)$ .  $\square$

**2. Нелинейная спектральная задача для интегрального уравнения по области поперечного сечения волновода.** Для изучения качественных свойств спектра сведем задачу (3.1), (3.2) к спектральной задаче для интегральной фредгольмовой голоморфной по  $\beta \in \Lambda$  и непрерывной по  $(\beta; \omega, n_\infty) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+^2$  оператор-функции.

**Лемма 3.6.** *Если  $u$  — собственная функция задачи (3.1), (3.2), отвечающая собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , то*

$$u(x) = (B(\beta)u)(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.5)$$

$$\text{где } (B(\beta)u)(x) := \int_{\Omega_i} \Phi_\infty(\beta; x, y) p(y) u(y) dy, \quad p(y) := k^2(\varepsilon(y) - \varepsilon_\infty),$$

$$\Phi_\infty(\beta; x, y) := \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_\infty(\beta) |x - y|), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad y \in \Omega_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем уравнение (3.1) в виде

$$[\Delta + (k^2 \varepsilon_\infty - \beta^2)] u = -pu.$$

Далее рассуждения проводятся на основе стандартного метода (см., напр., [25]) построения интегрального представления решения неоднородного уравнения Гельмгольца с помощью формулы Грина. Применить этот метод для всех  $\beta \in \Lambda$  можно в силу равенства (2.29), с. 51, справедливого для любого  $\beta \in \Lambda$  и произвольной  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , удовлетворяющей условию (3.2).  $\square$

При фиксированном  $\beta \in \Lambda$  положим

$$(K(\beta)v)(x) := \int_{\Omega_i} \Phi_\infty(\beta; x, y) \sqrt{p(x)p(y)} v(y) dy. \quad (3.6)$$

Будем рассматривать оператор  $K(\beta)$  как оператор, действующий в пространстве комплекснозначных функций  $L_2(\Omega_i)$ . Пусть

$$A(\beta) := I - K(\beta),$$

где  $I$  — единичный оператор в  $L_2(\Omega_i)$ . При всех  $\beta \in \Lambda$  ядро оператора  $K(\beta)$  слабополярно, следовательно, оператор  $A(\beta)$  фредгольмов.

**3. Дискретность характеристического множества и зависимость характеристических значений от параметров.** Сформулируем и докажем теорему о спектральной эквивалентности задачи (3.1), (3.2) о собственных волнах слабонаправляющего волновода и спектральной задачи

$$A(\beta)v = 0 \quad (3.7)$$

для оператор-функции  $A(\beta) : L_2(\Omega_i) \rightarrow L_2(\Omega_i)$ .

**Теорема 3.10.** *Если функция  $u$  является собственной функцией задачи (3.1), (3.2), отвечающей собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , то*

$$v := p^{1/2}u \in L_2(\Omega_i)$$

*есть собственная функция оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающая характеристическому значению  $\beta_0$ . Если  $v \in L_2(\Omega_i)$  является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , то*

$$u := B(\beta_0)(p^{-1/2}v) \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

*есть собственная функция задачи (3.1), (3.2), отвечающая собственному значению  $\beta_0$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 3.6. Докажем второе утверждение. Пусть функция  $v \in L_2(\Omega_i)$  — собственная функция оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающая характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda$ . Ядро  $\Phi_\infty(\beta; x, y)$  слабополярно при любом  $\beta \in \Lambda$ . Следовательно, функция

$$u := B(\beta_0)(p^{-1/2}v)$$

непрерывна в  $\bar{\Omega}_i$  (см., напр., [8, с. 327]). В силу известных свойств потенциала площади (см., напр., [8, с. 463]) функция  $u$  дважды непрерывно дифференцируема в  $\mathbb{R}^2$ ; число  $\beta_0$  и функция  $u$  удовлетворяют уравнению (3.1). С помощью теоремы сложения Графа (см., напр., [66, с. 201]) нетрудно убедиться, что число  $\beta_0$  и функция  $u$  удовлетворяют условию (3.2).  $\square$

**Теорема 3.11.** *Регулярное множество оператор-функции  $A(\beta)$ , определенной в (3.7), не пусто, а именно,  $\Lambda_0^{(1)} \setminus G \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество оператор-функции  $A(\beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметров  $(k, \varepsilon_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$ . Кроме того, с изменением  $(k, \varepsilon_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе поверхности  $\Lambda$ , т. е. в точках  $\pm kn_\infty$  и на бесконечности.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассуждая аналогично [33, с. 71], нетрудно показать, что оператор-функция  $A(\beta)$  голоморфна по  $\beta \in \Lambda$  и непрерывна как функция  $\beta \in \Lambda$ ,  $k > 0$  и  $\varepsilon_\infty > 0$ . В силу фредгольмовости оператора  $A(\beta)$ , теоремы 3.9 о локализации собственных значений задачи (3.1), (3.2) и теоремы 3.10 о спектральной эквивалентности задач (3.1), (3.2) и (3.7) оператор  $A(\beta)$  обратим для любых  $k, \varepsilon_\infty > 0$  и  $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus G$ . Таким образом, справедливость теоремы вытекает из теоремы И.Ц. Гохберга, М.Г. Крейна [12] об изолированности характеристических значений фредгольмовой голоморфной оператор-функции  $A(\beta)$  при наличии в области ее голоморфности хотя бы одной регулярной точки, и теоремы S. Steinberg [155] о поведении характеристических значений такой оператор-функции в зависимости от изменения вещественного параметра  $k$  в случае, если оператор-функция является совместно непрерывной функцией  $\beta$  и  $k$ .

**4. Существование собственных значений.** Относительно существования собственных значений задачи (3.1), (3.2) справедлива следующая

**Теорема 3.12.** *Задача (3.1), (3.2) имеет по крайней мере одно простое положительное собственное значение  $\beta$ , принадлежащее множеству  $G$ , которому отвечает положительная собственная функция.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть оператор  $K(\beta)$  при фиксированных значениях  $\beta \in G$  определяется равенством (3.6) и рассматривается как действующий в пространстве вещественных функций  $L_2(\Omega_i)$ . При фиксированных  $\beta \in G$  введем в рассмотрение задачу

$$v = \gamma K(\beta)v.$$

Ясно, что, если при некотором  $\beta_0 \in G$  функция  $v$  является собственной функцией оператора  $K(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\gamma = 1$ , то  $v$  является собственной функцией оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающей характеристическому значению  $\beta_0$ .

Заметим, что  $K(\beta)$  при любом  $\beta \in G$  является интегральным оператором с симметричным слабополярным положительным ядром (см., напр., [8, с. 327]). При фиксированном положительном  $\beta \in G$  оператор  $K(\beta)$  имеет счетное множество положительных характеристических значений. Для минимального из них справедливо равенство (см., напр., [8, с. 326])

$$\gamma_1(\beta) = \inf_{f \in L_2(\Omega_i)} \frac{(f, f)}{(K(\beta)f, f)}, \quad (3.8)$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $L_2(\Omega_i)$ . Покажем теперь, что существует такое  $\beta \in G$ , при котором  $\gamma_1(\beta) = 1$ . В силу непрерывной зависимости  $\Phi_\infty(\beta; x, y)$  от  $\beta \in \Lambda$  функция  $\gamma_1 = \gamma_1(\beta)$  непрерывна. Из (3.8) и того, что  $\Phi_\infty(\beta; x, y) \rightarrow \infty$  при  $\beta \rightarrow kn_\infty$ , получаем, что  $\gamma_1(\beta) \rightarrow 0$  при  $\beta \rightarrow kn_\infty$ .

Докажем, что  $\gamma_1(kn_+) > 1$ . Пусть  $v \in L_2(\Omega_i)$  — собственная функция оператора  $K(\beta)$ , отвечающая характеристическому значению  $\gamma_1$  при  $\beta = kn_+$ . Для функции  $u := \gamma_1 B(kn_+) (p^{-1/2}v)$ , рассуждая так же, как и при доказательстве теорем 3.9, 3.10, получаем равенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx + k^2 (\varepsilon_+ - \varepsilon_\infty) \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx - \gamma_1 \int_{\Omega_i} p |u|^2 dx = 0.$$

Очевидно, что при  $\gamma_1 \leq 1$  функция  $u$  может быть только нулевой. Поэтому  $\gamma_1(kn_+) > 1$ .

Обозначим через  $\beta_1$  решение уравнения  $\gamma_1(\beta) = 1$ . По теореме Ентча (см., напр., [8, с. 329])  $\gamma_1(\beta_1)$  есть простое характеристическое значение, и ему отвечает положительная собственная функция  $v_1$ . Следовательно,  $\beta_1$  является простым собственным значением задачи (3.1), (3.2), которому отвечает положительная собственная функция  $u_1 := B(\beta_1) (p^{-1/2}v_1)$ .  $\square$

Положительное значение  $\beta \in G$  и отвечающая ему собственная функция  $u$ , существование которых доказано в этой теореме, определяют собственную волну, которая в теории волноводов носит название основной.

## §2. Векторная задача в полной электродинамической постановке

**1. Постановка задачи и локализация собственных значений.** Сформулируем задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода с размытой границей и произвольной переменной диэлектрической проницаемостью. Задача сводится (см. § 1 гл. 1) к отысканию таких значений параметра  $\beta$ , при которых существуют нетривиальные решения  $E, H$  системы уравнений

$$\operatorname{rot}_\beta E = i\omega\mu_0 H, \quad \operatorname{rot}_\beta H = -i\omega\varepsilon_0 E, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.9)$$

где векторная операция  $\operatorname{rot}_\beta$  определена равенством (1.4), с. 19. Будем разыскивать нетривиальные решения  $\{E, H\}$  системы (3.9) в пространстве  $[C^2(\mathbb{R}^2)]^6$ .

Будем предполагать, что функции  $E, H$  удовлетворяют парциальным условиям излучения, т. е. существует такая константа  $R_0$ , что для всех  $x$  таких, что  $|x| \geq R_0$ , функции  $E, H$  разлагаются в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) e^{il\varphi}. \quad (3.10)$$

При этом будем предполагать, что постоянные распространения  $\beta$  принадлежат римановой поверхности  $\Lambda$  функции  $\ln \chi_\infty(\beta)$ . Строение поверхности  $\Lambda$  подробно рассмотрено в § 1 гл. 1.

**Определение 3.11.** Ненулевой вектор  $\{E, H\} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^6$  будем называть собственным вектором задачи (3.9), (3.10), отвечающим собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнены условия (3.9), (3.10).

Пусть известен собственный вектор  $\{E, H\}$  задачи (3.9), (3.10), отвечающий собственному значению  $\beta \in \Lambda$ . Тогда собственная волна волновода определяется по формуле (1.2), с. 19. Следовательно, поиск собственных волн сводится к решению нелинейной векторной спектральной задачи (3.9), (3.10).

**Теорема 3.13.** Области  $B$  и  $D$  листа  $\Lambda_0^{(1)}$  римановой поверхности  $\Lambda$  не содержат собственных значений задачи (3.9), (3.10).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\{E, H\}$  — собственный вектор задачи (3.9), (3.10), отвечающий собственному значению  $\beta \in B$ . Тогда

выполнено равенство (1.12), с. 20. Умножим его скалярно на  $\bar{H}$  и проинтегрируем по  $\mathbb{R}^2$ . Мы имеем право это делать в силу условия (3.10) и асимптотики (1.36), с. 26. В результате получим

$$\begin{aligned} k^2 \int_{\mathbb{R}^2} |H|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^2} (\operatorname{rot}_\beta (\varepsilon^{-1} \operatorname{rot}_\beta H)) \cdot \bar{H} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (\varepsilon^{-1} \operatorname{rot}_\beta H) \cdot \overline{\operatorname{rot}_\beta H} dx \geq \\ &\geq \frac{1}{\varepsilon_+} \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{rot}_\beta H \cdot \overline{\operatorname{rot}_\beta H} dx = \\ &= \frac{1}{\varepsilon_+} \int_{\mathbb{R}^2} (\operatorname{rot}_\beta (\operatorname{rot}_\beta H)) \cdot \bar{H} dx. \end{aligned}$$

Используя равенство (1.14), формулу (1.9), с. 20, и формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} k^2 \int_{\mathbb{R}^2} |H|^2 dx &\geq \frac{1}{\varepsilon_+} \int_{\mathbb{R}^2} (-\Delta H + \beta^2 H) \cdot \bar{H} dx = \\ &= \frac{1}{\varepsilon_+} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla H|^2 dx + \frac{\beta^2}{\varepsilon_+} \int_{\mathbb{R}^2} |H|^2 dx. \end{aligned}$$

В итоге получаем неравенство

$$(\beta^2 - k^2 \varepsilon_+) \int_{\mathbb{R}^2} |H|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla H|^2 dx \leq 0.$$

Из этого неравенства следует, что значениям  $\beta \in B$  отвечает только нулевое решение задачи (3.9), (3.10). Действительно, если  $\beta \in B$  и  $|\beta| > kn_+$ , то  $H = 0$  в  $\mathbb{R}^2$ . Следовательно, и

$$E = -1/(i\omega\varepsilon_0\varepsilon)\operatorname{rot}_\beta H = 0$$

в  $\mathbb{R}^2$ . Если же  $\beta \in B$  и  $|\beta| = kn_+$ , то функция  $H$  принимает постоянное значение в  $\mathbb{R}^2$ . Но из условия излучения (3.10) и асимптотики (1.36), с. 26, для любого  $\beta \in B$  следует, что  $H$  обращается в нуль на бесконечности. Значит,  $H = 0$  в  $\mathbb{R}^2$ , и  $E = 0$  в  $\mathbb{R}^2$  при  $\beta \in B$ . Следовательно, область  $B$  свободна от собственных значений задачи (3.9), (3.10).

Пусть  $\{E, H\}$  — собственный вектор задачи (3.9), (3.10), отвечающий собственному значению  $\beta \in D$ . Тогда имеет место равенство (1.11), с. 20. Умножим его скалярно на  $\bar{E}$  и проинтегрируем по кругу  $\Omega$  радиуса  $R \geq R_0$ . Для всех  $|x| \geq R_0$  справедливо разложение (3.10). Поэтому, используя формулу (1.9), формулу интегрирования по частям и равенство (1.13), получим

$$\begin{aligned} k^2 \int_{\Omega} \varepsilon |E|^2 dx &= \int_{\Omega} (\operatorname{rot}_{\beta} (\operatorname{rot}_{\beta} E)) \cdot \bar{E} dx = \\ &= \int_{\Omega} (-\Delta E + \beta^2 E + \operatorname{grad}_{\beta} (\operatorname{div}_{\beta} E)) \cdot \bar{E} dx = \\ &= - \int_{\Omega} |\operatorname{div}_{\beta} E|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla E|^2 dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial E}{\partial r} \cdot \bar{E} dx + \beta^2 \int_{\Omega} |E|^2 dx. \end{aligned}$$

Возьмем от левой и правой частей полученного равенства мнимую часть

$$\operatorname{Im} \int_{\Gamma} \frac{\partial E}{\partial r} \cdot \bar{E} dx = 0.$$

Отсюда, используя условие (3.10) и ортогональность тригонометрических функций, для любого  $R \geq R_0$  получим

$$2\pi \chi_{\infty} R \sum_{l=-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \left[ H_l^{(2)} (\chi_{\infty} R) H_l^{(1)'} (\chi_{\infty} R) \right] |A_l|^2 = 0.$$

Мнимая часть выражения, стоящего в этой сумме в квадратных скобках, не зависит от  $l$ , а именно:

$$\operatorname{Im} \left[ H_l^{(2)} (\chi_{\infty} R) H_l^{(1)'} (\chi_{\infty} R) \right] = \frac{2}{\pi \chi_{\infty} R}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Следовательно, для любого  $|x| \geq R_0$  все коэффициенты  $A_l$  в разложении (3.10) функции  $E$  обращаются в нуль. А это значит, что  $E = 0$  при  $|x| \geq R_0$ . В силу гладкости диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  функция  $E$  должна обращаться в нуль всюду в  $\mathbb{R}^2$  [121, с. 190]. Значит, и

$$H = 1/(i\omega\mu_0) \operatorname{rot}_{\beta} E = 0$$

в  $\mathbb{R}^2$ . Итак, значениям  $\beta \in D$  отвечает только нулевое решение задачи (3.9), (3.10). Следовательно, область  $D$  свободна от собственных значений задачи (3.9), (3.10).  $\square$

**2. Нелинейная спектральная задача для системы слабо-сингулярных интегральных уравнений по области поперечного сечения волновода.** Сведем задачу (3.9), (3.10) к спектральной задаче для интегральной оператор-функции. При этом мы будем использовать электромагнитные потенциалы, введенные в § 1 гл. 1.

**Лемма 3.7.** Пусть  $\{E, H\}$  — собственный вектор задачи (3.9), (3.10), отвечающий собственному значению  $\beta \in \Lambda$ . Тогда

$$E(x) = (B(\beta)E)(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} (B(\beta)E)(x) &:= k^2 \int_{\Omega_i} (\varepsilon(y) - \varepsilon_{\infty}) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) E(y) dy + \\ &+ \operatorname{grad}_{\beta} \int_{\Omega_i} \left( E \cdot \frac{\operatorname{grad} \varepsilon}{\varepsilon} \right) (y) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) dy, \quad (3.12) \end{aligned}$$

$$\Phi_{\infty}(\beta; x, y) := \frac{i}{4} H_0^{(1)} (\chi_{\infty}(\beta) |x - y|), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad y \in \Omega_i.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Вектор Герца  $\Pi$  удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца (1.19), с. 21. Следовательно, рассуждая аналогично доказательству леммы 3.6, запишем решение этого уравнения в виде

$$\Pi(x) = \frac{1}{\varepsilon_{\infty}} \int_{\Omega_i} (\varepsilon(y) - \varepsilon_{\infty}) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) E(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Отсюда и из равенства (1.17), с. 21, для  $x \in \mathbb{R}^2$  получим

$$E(x) = (k^2 \varepsilon_{\infty} + \operatorname{grad}_{\beta} \operatorname{div}_{\beta}) \frac{1}{\varepsilon_{\infty}} \int_{\Omega_i} (\varepsilon(y) - \varepsilon_{\infty}) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) E(y) dy.$$

Воспользуемся теперь теоремой о дивергенции [110]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\beta} \int_{\Omega_i} (\varepsilon(y) - \varepsilon_{\infty}) \Phi_{\infty}(\beta; x, y) E(y) dy &= \\ &= \int_{\Omega_i} \operatorname{div}_{\beta} [(\varepsilon(y) - \varepsilon_{\infty}) E(y)] \Phi_{\infty}(\beta; x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.13) \end{aligned}$$



и следующей очевидной формулой

$$\operatorname{div}_\beta ((\varepsilon - \varepsilon_\infty) \mathbf{E}) = \varepsilon_\infty \mathbf{E} \cdot (n^{-2} \operatorname{grad} \varepsilon). \quad (3.14)$$

В итоге получим требуемое равенство.  $\square$

При фиксированном  $\beta \in \Lambda$  будем рассматривать оператор  $B(\beta)$ , определенный равенством (3.12), как оператор, действующий в пространстве комплекснозначных функций  $[L_2(\Omega_i)]^3$ . Пусть

$$A(\beta) := I - B(\beta), \quad (3.15)$$

где  $I$  — единичный оператор в  $[L_2(\Omega_i)]^3$ . При всех  $\beta \in \Lambda$  ядро оператора  $B(\beta)$  слабополярно, следовательно, оператор  $A(\beta)$  фредгольмов.

**3. Дискретность характеристического множества и зависимость характеристических значений от параметров.** Сформулируем и докажем теорему о спектральной эквивалентности задачи (3.9), (3.10) о собственных волнах волновода с размытой границей и спектральной задачи

$$A(\beta)\mathbf{F} = 0 \quad (3.16)$$

для оператор-функции  $A(\beta) : [L_2(\Omega_i)]^3 \rightarrow [L_2(\Omega_i)]^3$ .

**Теорема 3.14.** Если вектор  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  является собственным вектором задачи (3.9), (3.10), отвечающим собственному значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , то

$$\mathbf{F} := \mathbf{E} \in [L_2(\Omega_i)]^3$$

есть собственный вектор оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающий характеристическому значению  $\beta_0$ . Если  $\mathbf{F}$  является собственным вектором оператор-функции  $A(\beta)$ , отвечающим характеристическому значению  $\beta_0 \in \Lambda$ , и это  $\beta_0$  не является собственным значением задачи (3.1), (3.2), то вектор  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ ,

$$\mathbf{E} := B(\beta_0)\mathbf{F}, \quad \mathbf{H} := (i\omega\mu_0)^{-1} \operatorname{rot}_{\beta_0} \mathbf{E},$$

есть собственный вектор задачи (3.9), (3.10), отвечающий собственному значению  $\beta_0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Первое утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 3.7. Докажем второе утверждение. Пусть вектор  $\mathbf{F} \in [L_2(\Omega_i)]^3$  — собственный вектор оператор-функции  $A(\beta)$ ,

отвечающий характеристическому значению  $\beta \in \Lambda$ . Ядро интегрального оператора  $B(\beta)$  слабополярно при любом  $\beta \in \Lambda$ . Следовательно, вектор  $\mathbf{E} := B(\beta)\mathbf{F}$  принадлежит пространству  $[C(\Omega_i)]^3$  (см., напр., [8, с. 327]). В силу известных свойств потенциала площади (см., напр., [8, с. 463]) вектор  $\mathbf{E}$  принадлежит пространству  $[C^2(\mathbb{R}^2)]^3$ .

По построению вектор  $\mathbf{E}$  удовлетворяет равенству (3.11). Применяя к левой и правой частям этого равенства операцию  $\operatorname{rot}_\beta$ , учитывая формулу (1.5), с. 20, и теорему о дивергенции (3.13), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\beta \mathbf{E}(x) &= k^2 \int_{\Omega_i} \operatorname{div}_\beta [(\varepsilon(y) - \varepsilon_\infty) \mathbf{E}(y)] \Phi_\infty(\beta; x, y) dy + \\ &+ (\Delta - \beta^2) \int_{\Omega_i} \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\operatorname{grad} \varepsilon}{\varepsilon} \right) (y) \Phi_\infty(\beta; x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Добавляя и вычитая из правой части этого равенства слагаемое

$$k^2 \varepsilon_\infty \int_{\Omega_i} \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\operatorname{grad} \varepsilon}{\varepsilon} \right) (y) \Phi_\infty(\beta; x, y) dy$$

и учитывая формулу Пуассона для потенциала площади

$$\begin{aligned} [\Delta + (k^2 \varepsilon_\infty - \beta^2)] \int_{\Omega_i} \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\operatorname{grad} \varepsilon}{\varepsilon} \right) (y) \Phi_\infty(\beta; x, y) dy &= \\ &= - \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\operatorname{grad} \varepsilon}{\varepsilon} \right) (x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

получим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\beta \mathbf{E}(x) &= k^2 \int_{\Omega_i} \operatorname{div}_\beta [(\varepsilon(y) - \varepsilon_\infty) \mathbf{E}(y)] \Phi_\infty(\beta; x, y) dy - \\ &- k^2 \varepsilon_\infty \int_{\Omega_i} \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\operatorname{grad} \varepsilon}{\varepsilon} \right) (y) \Phi_\infty(\beta; x, y) dy - \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\operatorname{grad} \varepsilon}{\varepsilon} \right) (x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Далее, в силу линейности операции  $\operatorname{div}_\beta$  и формулы (1.7), с. 20, имеем

$$\operatorname{div}_\beta [(\varepsilon - \varepsilon_\infty) \mathbf{E}] = \operatorname{div}_\beta (\varepsilon \mathbf{E}) - \varepsilon_\infty \operatorname{div}_\beta \mathbf{E},$$

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\text{grad} \varepsilon}{\varepsilon} = \varepsilon^{-1} \text{div}_\beta (\varepsilon \mathbf{E}) - \text{div}_\beta \mathbf{E}.$$

Используя два предыдущих равенства и равенство (3.19), нетрудно видеть, что функция  $u = \varepsilon^{-1} \text{div}_\beta (\varepsilon \mathbf{E})$  удовлетворяет уравнению (3.5).

В пункте 2 было показано, что если  $\beta$  не является собственным значением задачи (3.1), (3.2), то  $u = 0$  в  $\mathbb{R}^2$ . Итак, мы получили, что для вектора  $\mathbf{E}$  справедлива формула

$$\text{div}_\beta (\varepsilon \mathbf{E}) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.20)$$

и уравнение (3.11) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & k^2 \int_{\Omega_i} (\varepsilon(y) - \varepsilon_\infty) \Phi_\infty(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy - \\ & - \text{grad}_\beta \int_{\Omega_i} \Phi_\infty(\beta; x, y) \text{div}_\beta \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Пусть вектор  $\mathbf{H}$  определяется следующим равенством (т. е. векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют первому из уравнений (3.9)):

$$\mathbf{H} := (i\omega\mu_0)^{-1} \text{rot}_{\beta_0} \mathbf{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Из уравнения (3.21) и формулы (1.8), с. 20, имеем

$$\mathbf{H}(x) = -i\omega\varepsilon_0 \text{rot}_\beta \int_{\Omega_i} (\varepsilon(y) - \varepsilon_\infty) \Phi_\infty(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (3.22)$$

Отсюда следует, что если  $\mathbf{E} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^3$ , то и  $\mathbf{H} \in [C^2(\mathbb{R}^2)]^3$ . Докажем, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют второму из уравнений (3.9). Применим к обеим частям уравнения (3.22) операцию  $\text{rot}_\beta$  и полученное равенство почленно сложим с равенством (3.21), умноженным предварительно на  $i\omega\varepsilon_0\varepsilon_\infty$ . Получим

$$\begin{aligned} \text{rot}_\beta \mathbf{H} + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_\infty \mathbf{E} = & -i\omega\varepsilon_0 \text{rot}_\beta \text{rot}_\beta \int_{\Omega_i} (\varepsilon(y) - \varepsilon_\infty) \Phi_\infty(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy + \\ & + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_\infty k^2 \int_{\Omega_i} (\varepsilon(y) - \varepsilon_\infty) \Phi_\infty(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy - \\ & - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_\infty \text{grad}_\beta \int_{\Omega_i} \Phi_\infty(\beta; x, y) \text{div}_\beta \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Используя формулу (1.9), с. 20, и теорему о дивергенции (3.13), имеем

$$\begin{aligned} \text{rot}_\beta \mathbf{H} + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_\infty \mathbf{E} = & i\omega\varepsilon_0 [\Delta + (k^2\varepsilon_\infty - \beta^2)] \int_{\Omega_i} (\varepsilon(y) - \varepsilon_\infty) \Phi_\infty(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy - \\ & - i\omega\varepsilon_0 \text{grad}_\beta \int_{\Omega_i} \text{div}_\beta [(\varepsilon(y) - \varepsilon_\infty) \mathbf{E}(y)] \Phi_\infty(\beta; x, y) dy - \\ & - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_\infty \text{grad}_\beta \int_{\Omega_i} \Phi_\infty(\beta; x, y) \text{div}_\beta \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Из этого равенства, уравнения (3.20) и формулы Пуассона (3.18) окончательно получаем

$$\text{rot}_\beta \mathbf{H} + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_\infty \mathbf{E} = -i\omega\varepsilon_0 (\varepsilon - \varepsilon_\infty) \mathbf{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Следовательно, векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют второму из уравнений (3.9). Из (3.21), (3.22) с помощью теоремы сложения Графа легко получить, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют парциальным условиям излучения (3.10).  $\square$

**Теорема 3.15.** *Регулярное множество оператор-функции  $A(\beta)$ , определенной в (3.16), не пусто, а именно,  $B \cup D \subset \rho(A)$ . Характеристическое множество оператор-функции  $A(\beta)$  может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции  $A(\beta)$ . Каждое характеристическое значение  $\beta$  оператор-функции  $A(\beta)$  непрерывно зависит от параметров  $(k, \varepsilon_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$ . Кроме того, с изменением  $(k, \varepsilon_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$  характеристические значения оператор-функции  $A(\beta)$  могут появляться и исчезать только на границе  $\Lambda$ , т. е. в точках  $\pm k\rho_\infty$  и на бесконечности.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассуждая аналогично [33, с. 71], нетрудно показать, что оператор-функция  $A(\beta)$  голоморфна по  $\beta \in \Lambda$  и непрерывна как функция  $\beta \in \Lambda$ ,  $\varepsilon_\infty > 0$  и  $k > 0$ . В силу фредгольмовости оператора  $A(\beta)$ , теоремы 3.13 о локализации спектра задачи (3.9), (3.10) и теоремы 3.14 о спектральной эквивалентности задач (3.9), (3.10) и (3.16) оператор  $A(\beta)$  обратим для любых  $\varepsilon_\infty > 0$ ,  $k > 0$  и  $\beta \in B \cup D$ . Таким образом, справедливость настоящей теоремы следует из результатов [12] и [155].  $\square$

## ГЛАВА 4

# ЗАДАЧА О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА В ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СРЕДЕ

## § 1. Спектральная задача для сингулярного интегрального уравнения

Сформулируем задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в плоскостной среде. Схематическое изображение поперечного сечения такого волновода приведено на рис. 5.

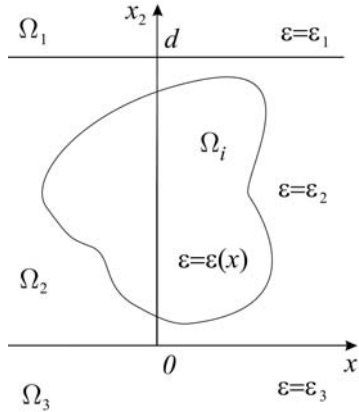


Рис. 5. Поперечное сечение цилиндрического диэлектрического волновода в плоскостной окружающей среде.

Пусть все трехмерное пространство

$$\{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty\}$$

занято изотропной средой без источников, и пусть диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = \varepsilon(x)$  является положительной вещественной

функцией, не зависящей от координаты  $x_3$ . Пусть существует ограниченная область  $\Omega_i$  на плоскости  $x_3 = \text{const}$  такая, что

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_\infty(x_2), \quad x \in \Omega_e = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_i,$$

где  $\varepsilon_\infty(x_2)$  зависит только от координаты  $x_2$  и является кусочно-постоянной функцией. Для определенности положим

$$\varepsilon_\infty(x_2) := \begin{cases} \varepsilon_1, & x_2 > d, \\ \varepsilon_2, & 0 < x_2 < d, \\ \varepsilon_3, & x_2 < 0. \end{cases}$$

Можно предположить без потери общности рассуждений, что

$$\varepsilon_2 \geq \varepsilon_3 \geq \varepsilon_1 > 0.$$

Обозначим через  $\varepsilon_+$  максимум функции  $\varepsilon$  в области  $\Omega_i$  и предположим, что  $\varepsilon_+ > \varepsilon_2$ . Введем следующие обозначения:

$$\Omega_1 := \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 > d\},$$

$$\Omega_2 := \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad 0 < x_2 < d\},$$

$$\Omega_3 := \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 < 0\}.$$

$$\Gamma_1 := \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 = d\},$$

$$\Gamma_2 := \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 = 0\}.$$

Предположим, что  $\Omega_i \subset \Omega_2$  и также, что  $\varepsilon(x)$  является непрерывной функцией в бесконечной области  $\Omega_2$ , т. е., что волновод имеет размытую границу.

Для простоты рассуждений мы рассматриваем здесь трехслойную среду, где возмущение диэлектрической проницаемости находится целиком в центральном слое, но, в действительности, методами, используемыми в этой главе, может быть исследована задача с произвольным конечным числом параллельных слоев, если возмущение целиком находится в одном из них и волновод имеет размытую границу.

Задача о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в плоскостной среде может быть сформулирована

как векторная спектральная задача для системы уравнений Максвелла (1.1), с. 17, в предположении, что векторы напряженности электрического и магнитного поля имеют вид (1.2), с. 19. Для полей, имеющих форму (1.2), система уравнений Максвелла (1.1) принимает вид

$$\operatorname{rot}_\beta \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2), \quad (4.1)$$

$$\operatorname{rot}_\beta \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2), \quad (4.2)$$

где векторная операция  $\operatorname{rot}_\beta$  определена равенством (1.4), с. 19.

Обозначим через  $U$  множество функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в  $\bar{\Omega}_1$ ,  $\bar{\Omega}_2$  и  $\bar{\Omega}_3$ , дважды непрерывно дифференцируемых в  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ , а также экспоненциально убывающих при  $|x| \rightarrow \infty$  по любому направлению, не параллельному прямым  $\Gamma_j$ , и ограниченных при  $|x| \rightarrow \infty$  параллельно прямым  $\Gamma_j$ . Будем разыскивать нетривиальные решения  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  системы уравнений (4.1), (4.2) в пространстве  $U^6$ . На границах раздела сред векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  должны удовлетворять условиям сопряжения (см. § 1 гл. 1)

$$\nu \times \mathbf{E}^+ = \nu \times \mathbf{E}^-, \quad \nu \times \mathbf{H}^+ = \nu \times \mathbf{H}^-, \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \quad (4.3)$$

Здесь  $\nu$  – вектор нормали к  $\Gamma_j$ ,  $f^+(f^-)$  – предел функции  $f$  сверху (снизу) прямой  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Обозначим символом  $\Lambda_0^{(1)}$  главный лист римановой поверхности функции  $\ln \chi(\beta)$ , где  $\chi(\beta) := \sqrt{k^2 \varepsilon_2 - \beta^2}$ , который определяется следующими условиями:

$$-\pi/2 < \arg \chi(\beta) < 3\pi/2, \quad \operatorname{Im}(\chi(\beta)) \geq 0.$$

**Определение 4.12.** Ненулевой вектор  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\} \in U^6$  будем называть собственным вектором задачи (4.1)–(4.3), отвечающим собственному значению

$$\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)} := \{\beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Im} \beta = 0, |\beta| > kn_2\},$$

если выполнены условия (4.1)–(4.3).

Получим интегральное представление для любого собственного вектора  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  задачи (4.1)–(4.3), отвечающего собственному значению  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Это представление будет использовано для сведения задачи (4.1)–(4.3) к нелинейной спектральной задаче для двумерного сингулярного интегрального уравнения.

**Определение 4.13.** Вектор-функция  $\Pi$  называется вектором Герца, или поляризационным потенциалом векторного поля  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ , если для  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$  справедливо следующее представление:

$$\mathbf{E} = (k^2 \varepsilon_\infty + \operatorname{grad}_\beta \operatorname{div}_\beta) \Pi, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \varepsilon_\infty \operatorname{rot}_\beta \Pi. \quad (4.5)$$

**Лемма 4.8.** Для любого собственного вектора  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  задачи (4.1)–(4.3), отвечающего собственному значению  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ , существует поляризационный потенциал  $\Pi \in U^3$ , который для всех значений  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$  удовлетворяет уравнению

$$[\Delta + (k^2 \varepsilon_\infty - \beta^2)] \Pi = -\frac{1}{\varepsilon_\infty} (\varepsilon - \varepsilon_\infty) \mathbf{E}, \quad (4.6)$$

и для  $x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  удовлетворяет следующим условиям сопряжения:

$$\Pi_l^+ = N \Pi_l^-, \quad l = 1, 2, 3, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \Pi_l^+}{\partial x_2} = N \frac{\partial \Pi_l^-}{\partial x_2}, \quad l = 1, 2, \quad (4.8)$$

$$\left( \frac{\partial \Pi_2^+}{\partial x_2} - \frac{\partial \Pi_2^-}{\partial x_2} \right) = (1 - N) \left( \frac{\partial \Pi_1^-}{\partial x_1} + i\beta \Pi_3^- \right), \quad (4.9)$$

где  $N := \varepsilon_{i+1}/\varepsilon_i$  для  $x \in \Gamma_i$ . Для  $x \in \mathbb{R}^2$  поляризационный потенциал  $\Pi$  имеет следующее интегральное представление:

$$\Pi(x) = \frac{1}{\varepsilon_\infty} \int_{\Omega_i} (\varepsilon(y) - \varepsilon_\infty) G(\beta; x, y) \mathbf{E}(y) dy, \quad (4.10)$$

где

$$G(\beta; x, y) := \Phi(\beta; x, y) + G^s(\beta; x, y),$$

$$\Phi(\beta; x, y) := \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi(\beta) |x - y|),$$

$$G^s(\beta; x, y) := \begin{bmatrix} G_n(\beta; x, y) & \partial G_c(\beta; x, y) / \partial x_1 & i\beta G_c(\beta; x, y) \\ 0 & G_t(\beta; x, y) & 0 \\ 0 & 0 & G_t(\beta; x, y) \end{bmatrix},$$

$$G_\alpha(\beta; x, y) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\alpha(\beta; x_2, y_2; \lambda) \frac{\exp(i\lambda(x_1 - y_1))}{2\sqrt{\lambda^2 + \beta^2 - k^2 \varepsilon_2}} d\lambda,$$

$$\alpha = t, n, c.$$

Функции  $R_\alpha$  определяются геометрией задачи и для трехслойной окружающей среды представлены в приложении А, с. 100.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование вектора  $\Pi$  такого, что представление (4.4), (4.5) и уравнение (4.6) справедливы, хорошо известно (см., напр., [109]). Если поляризационный потенциал  $\Pi$  удовлетворяет условиям (4.7)–(4.9), то векторы  $E$  и  $H$ , имеющие представление (4.4), (4.5), удовлетворяют условиям (4.3). Задача (4.6)–(4.9) имеет решение в виде (4.10) (см., напр., [92]). Функция  $G(\beta; x, y)$  — хорошо известная тензорная функция Грина для поляризационного потенциала [93]. Используя представление (4.10) для поляризационного потенциала  $\Pi$ , можно доказать, что  $\Pi \in U^3$  для любого  $\beta \in \hat{\Lambda}_0^{(1)}$ .  $\square$

Используя (4.4) и (4.10), получаем интегральное представление для любого собственного вектора  $\{E, H\}$  задачи (4.1)–(4.3), отвечающего собственному значению  $\beta \in \hat{\Lambda}_0^{(1)}$ :

$$E(x) = (k^2 \varepsilon_\infty + \text{grad}_\beta \text{div}_\beta) \frac{1}{\varepsilon_\infty} \int_{\Omega_i} (\varepsilon(y) - \varepsilon_\infty) G(\beta; x, y) E(y) dy, \quad (4.11)$$

$$H(x) = -i\omega \varepsilon_0 \text{rot}_\beta \int_{\Omega_i} (\varepsilon(y) - \varepsilon_\infty) G(\beta; x, y) E(y) dy,$$

где  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ . Отметим, что свойства тензорной функции Грина  $G(\beta; x, y)$  обеспечивают требуемое поведение векторов  $E$  и  $H$  на бесконечности [93].

Сведем теперь задачу (4.1)–(4.3) к нелинейной спектральной задаче для двумерного сингулярного интегрального уравнения. Это уравнение часто используется на практике (см., напр., [92], [96], [141], [154]) потому, что оно точно учитывает поведение поля в окружающей слоистой среде.

**Лемма 4.9.** Если  $\{E, H\}$  является собственным вектором задачи (4.1)–(4.3), отвечающим собственному значению  $\beta \in \hat{\Lambda}_0^{(1)}$ , то

$$(\mathcal{Q}(\beta)E)(x) = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad (4.12)$$

где

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}(\beta)E)(x) &:= E(x) + \frac{1}{2}\eta(x)E(x) - \\ &- \int_{\Omega_i} T(\beta; x, y) \left( \left( \frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_\infty} - 1 \right) E(y) \right) dy - \\ &- \int_{\Omega_i} T_1(x, y) \left( \left( \frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_\infty} - 1 \right) E(y) \right) dy - \\ &- \int_{\Omega_i} L(\beta; x, y) \left( \left( \frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_\infty} - 1 \right) E(y) \right) dy, \end{aligned}$$

$$TF := \begin{bmatrix} (K\mathcal{F})_1 + i\beta F_3 \partial\Phi/\partial x_1 \\ (K\mathcal{F})_2 + i\beta F_3 \partial\Phi/\partial x_2 \\ i\beta F_1 \partial\Phi/\partial x_1 + i\beta F_2 \partial\Phi/\partial x_2 + (k^2 \varepsilon_\infty - \beta^2) F_3 \Phi \end{bmatrix},$$

$$T_1 F := \sum_{l=1}^2 \begin{bmatrix} F_l \partial^2 \Phi_1 / \partial x_l \partial x_1 \\ F_l \partial^2 \Phi_1 / \partial x_l \partial x_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\eta(x) := \begin{pmatrix} \varepsilon(x)/\varepsilon_\infty - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon(x)/\varepsilon_\infty - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K(\beta; x, y)\mathcal{F}(y) := k^2 \varepsilon_\infty \mathcal{F}(y)\Phi(\beta; x, y) + \sum_{l=1}^2 \begin{bmatrix} F_l \partial^2 \Phi_0 / \partial x_l \partial x_1 \\ F_l \partial^2 \Phi_0 / \partial x_l \partial x_2 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_1(x, y) := -\frac{1}{2\pi} \ln |x - y|,$$

$$\Phi_0(\beta; x, y) := \Phi(\beta; x, y) - \Phi_1(x, y),$$

$$L(\beta; x, y)F(y) := (k^2 \varepsilon_\infty + \text{grad}_\beta \text{div}_\beta) G^s(\beta; x, y)F(y),$$

$$\mathcal{F} := (F_1, F_2)^T.$$

Утверждение леммы доказывается непосредственными вычислениями. Для этого надо внести оператор  $\text{grad}_\beta \text{div}_\beta$  под знак интеграла в соотношении (4.11) и использовать правило дифференцирования слабо сингулярных интегралов (см., напр., [145, с. 242]). Отметим, что

применение этих преобразований законно, так как плотности возникающих сингулярных интегралов равны нулю вне области  $\Omega_i$  и принадлежат пространству  $L_2(\Omega_i)$  в силу гладкости функций  $E$  и  $n$ . Отметим также, что для любого  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  и  $y \in \Omega_i$  функции  $G^s(\beta; x, y)$  и  $\Phi_0(\beta; x, y)$  дважды непрерывно дифференцируемы по  $x \in \Omega_i$ .

Для  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$ , определенный равенством (4.12), будем рассматривать как оператор в пространстве комплекснозначных функций  $[L_2(\Omega_i)]^3$ . Для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  имеет сингулярное ядро  $T_1(x, y)$ .

## § 2. Фредгольмовость сингулярного интегрального оператора

**Теорема 4.16.** При любом  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  фредгольмов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Через  $\mathcal{Q}^*(\beta)$  обозначим оператор, сопряженный с  $\mathcal{Q}(\beta)$ . Непосредственными вычислениями для  $x \in \Omega$  получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}^*(\beta)E)(x) = & E(x) + \frac{1}{2}\eta(x)E(x) - \\ & - \left(\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_\infty} - 1\right) \int_{\Omega} T^p(\beta; x, y) E(y) dy - \\ & - \left(\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_\infty} - 1\right) \int_{\Omega_i} T_1(x, y) E(y) dy - \\ & - \left(\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_\infty} - 1\right) \int_{\Omega} L^p(\beta; x, y) E(y) dy, \quad (4.13) \end{aligned}$$

$$T^p F := \begin{bmatrix} (\overline{K}\mathcal{F})_1 + i\overline{\beta}F_1\partial\overline{\Phi}/\partial x_1 \\ (\overline{K}\mathcal{F})_2 + i\overline{\beta}F_2\partial\overline{\Phi}/\partial x_2 \\ i\overline{\beta}F_3\partial\overline{\Phi}/\partial x_1 + i\overline{\beta}F_3\partial\overline{\Phi}/\partial x_2 + (k^2\varepsilon_\infty - \overline{\beta}^2)F_3\overline{\Phi} \end{bmatrix},$$

$$L^p F := (k^2\varepsilon_\infty + \overline{\text{grad}}_\beta \overline{\text{div}}_\beta) \overline{G^s(\beta; y, x)}^T F(y),$$

где  $\overline{\text{grad}}_\beta$  и  $\overline{\text{div}}_\beta$  означает, что множитель  $i\beta$  заменяется множителем  $-i\overline{\beta}$ ;  $G^T$  — матрица, транспонированная к  $G$ .

Заметим, что ядро  $T_1(x, y)$  сингулярное, симметричное и не зависит от  $\beta$ ; ядра  $T(\beta; x, y)$ ,  $T^p(\beta; x, y)$  слабо полярные для  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ ; ядра  $L(\beta; x, y)$  и  $L^p(\beta; x, y)$  непрерывны по  $x, y \in \Omega$  для  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ .

Докажем теперь, что оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  фредгольмов. Будем использовать общие результаты теории многомерных интегральных сингулярных матричных операторов (см., напр., [145]) и методику [71]. Положим

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}(\beta)E)(x) := & E(x) + \frac{1}{2}\eta(x)E(x) - \\ & - p(x) \int_{\mathbb{R}^2} (T(\beta; x, y) + L(\beta; x, y)) \left( \left( \frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_\infty} - 1 \right) E(y) \right) dy - \\ & - \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) \left( \left( \frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_\infty} - 1 \right) E(y) \right) dy, \quad (4.14) \end{aligned}$$

где  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $p(x)$  — бесконечно дифференцируемая вещественнозначная функция, имеющая компактный носитель в  $\mathbb{R}^2$ , и тождественно равная единице для  $x \in \Omega_i$ . Для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $\mathcal{D}(\beta)$  будем рассматривать как оператор в пространстве комплекснозначных функций  $[L_2(\mathbb{R}^2)]^3$ . Непосредственными вычислениями для  $x \in \mathbb{R}^2$  получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}^*(\beta)E)(x) = & E(x) + \frac{1}{2}\eta(x)E(x) - \\ & - \left(\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_\infty} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^2} p(y) (T^p(\beta; x, y) + L^p(\beta; x, y)) E(y) dy - \\ & - \left(\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_\infty} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) E(y) dy. \quad (4.15) \end{aligned}$$

Интегральные операторы, определенные третьими слагаемыми в правых частях равенств (4.14) и (4.15), в силу гладкости их ядер для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  вполне непрерывны в  $[L_2(\mathbb{R}^2)]^3$ . Обозначим их через  $\mathcal{C}(\beta)$  и  $\mathcal{C}^*(\beta)$ , соответственно. Положим при  $x \in \mathbb{R}^2$

$$(\mathcal{S}E)(x) := E(x) + \frac{1}{2}\eta(x)E(x) - \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) \left( \left( \frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_\infty} - 1 \right) E(y) \right) dy,$$

тогда

$$(\mathcal{S}^* \mathbf{E})(x) = \mathbf{E}(x) + \frac{1}{2} \eta(x) \mathbf{E}(x) - \left( \frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_\infty} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) \mathbf{E}(y) dy$$

и

$$\mathcal{D}(\beta) = \mathcal{C}(\beta) + \mathcal{S}, \quad \mathcal{D}^*(\beta) = \mathcal{C}^*(\beta) + \mathcal{S}^*,$$

где оператор  $\mathcal{S}^*$  — матричный интегральный оператор:

$$\mathcal{S}^* := [\mathcal{S}_{l,m}^*]_{l,m=1}^3.$$

Непосредственными вычислениями для  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $l, m = 1, 2$ , получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{l,m}^* E_m)(x) &= \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_\infty} - 1 \right) \right) \delta_{l,m} E_m(x) - \\ &- \left( \frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_\infty} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^2} (2\alpha_l(\varphi) \alpha_m(\varphi) - \delta_{l,n}) \frac{E_m(y)}{2\pi |x - y|^2} dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{3,3}^* E_3)(x) &= E_3(x), \\ (\mathcal{S}_{l,3}^* E_3)(x) &= 0, \\ (\mathcal{S}_{3,m}^* E_m)(x) &= 0, \end{aligned}$$

где  $\delta_{l,m}$  — символ Кронекера;  $\alpha_1(\varphi)$  и  $\alpha_2(\varphi)$  — декартовы координаты точки  $\alpha := (y - x) / |x - y|$ ,  $\alpha_1(\varphi) = \cos \varphi$ ,  $\alpha_2(\varphi) = \sin \varphi$ , где  $\varphi$  — полярный угол точки  $\alpha$  (точка  $\alpha$  принадлежит единичной окружности  $\Theta$  с центром в  $x$ ).

Функция  $\varepsilon$  непрерывна в  $\Omega_2$ , и  $\varepsilon(x) = \varepsilon_\infty$  для  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_i$ . Следовательно, характеристики операторов  $\mathcal{S}_{l,n}^*$  [145] непрерывны в  $\mathbb{R}^2$  и не зависят от  $x$  для  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_i$ . Непосредственными вычислениями получаем представление матричного символа  $\Psi^*(x, \alpha)$  оператора  $\mathcal{S}^*$  [145]:

$$\Psi^*(x, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 + \left( \frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_\infty} - 1 \right) \alpha_1^2(\varphi) & \left( \frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_\infty} - 1 \right) \alpha_1(\varphi) \alpha_2(\varphi) & 0 \\ \left( \frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_\infty} - 1 \right) \alpha_1(\varphi) \alpha_2(\varphi) & 1 + \left( \frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_\infty} - 1 \right) \alpha_2^2(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \Theta$ . Функция  $n$  вещественна, следовательно, матричный символ  $\Psi(x, \alpha)$  сингулярного интегрального оператора  $\mathcal{S}$  равен символу  $\Psi^*(x, \alpha)$ ,

$$\Psi(x, \alpha) = \Psi^*(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \Theta.$$

Легко проверяется, что имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Theta} |\det \Psi(x, \alpha)| &> 0, \\ \inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Theta} \left| \det \begin{pmatrix} \Psi_{1,1}(x, \alpha) & \Psi_{1,2}(x, \alpha) \\ \Psi_{2,1}(x, \alpha) & \Psi_{2,2}(x, \alpha) \end{pmatrix} \right| &> 0, \\ \inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Theta} |\Psi_{1,1}(x, \alpha)| &> 0. \end{aligned}$$

Следовательно, (см., напр, [145, с. 368]) оператор  $\mathcal{D}(\beta)$  фредгольмов.

Докажем теперь, что индекс оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$  равен индексу оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  для всех  $\beta \in \hat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Пусть вектор-функция  $W(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , принадлежит множеству  $N(\mathcal{D})$  нулей оператора  $\mathcal{D}(\beta)$ . Нетрудно видеть, что для всех  $x \in \Omega_i$  справедливо равенство

$$(\mathcal{D}(\beta)W)(x) = (\mathcal{Q}(\beta)W)(x) = 0. \quad (4.16)$$

Следовательно, для всех  $x \in \Omega_i$  вектор-функция  $W(x)$  совпадает с некоторой вектор-функцией  $V(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , принадлежащей множеству  $N(\mathcal{Q})$  нулей оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$ :

$$W(x) = V(x), \quad x \in \Omega_i.$$

По определению оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  имеем для всех  $x \in \mathbb{R}^2$  следующее равенство:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}(\beta)W)(x) &= W(x) + \frac{1}{2} \eta(x) W(x) - \\ &- p(x) \int_{\mathbb{R}^2} (T(\beta; x, y) + L(\beta; x, y)) \left( \left( \frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_\infty} - 1 \right) W(y) \right) dy - \\ &- \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) \left( \left( \frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_\infty} - 1 \right) W(y) \right) dy. \end{aligned}$$

Из двух последних равенств, учитывая то, что функция  $n(x) = n_\infty$  при  $x \in \Omega_e$ , получаем представление вектор-функции  $W(x)$  через  $V(x)$  для  $x \in \Omega_e$ :

$$\begin{aligned} W(x) &= p(x) \int_{\Omega} (T(\beta; x, y) + L(\beta; x, y)) \left( \left( \frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_\infty} - 1 \right) V(y) \right) dy + \\ &+ \int_{\Omega} T_1(x, y) \left( \left( \frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_\infty} - 1 \right) V(y) \right) dy. \end{aligned}$$

Таким образом, нули оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  линейно и взаимно однозначно связаны с нулями оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$ , и, следовательно, размерности множеств нулей этих операторов совпадают:

$$\dim N(\mathcal{D}) = \dim N(\mathcal{Q}). \quad (4.17)$$

Пусть теперь вектор-функция  $W^*(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , принадлежит множеству  $N(\mathcal{D}^*)$  нулей оператора  $\mathcal{D}^*(\beta)$ . Учитывая явный вид (4.15) этого оператора, получаем следующее равенство:

$$(\mathcal{D}^*(\beta)W^*)(x) = W^*(x) = 0, \quad x \in \Omega_e. \quad (4.18)$$

Из этого равенства и равенств (4.15), (4.13) имеем

$$(\mathcal{D}^*(\beta)W^*)(x) = (\mathcal{Q}^*(\beta)W^*)(x) = 0, \quad x \in \Omega_i.$$

Следовательно, для всех  $x \in \Omega_i$  вектор-функция  $W^*(x)$  совпадает с некоторой вектор-функцией  $V^*(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , принадлежащей множеству  $N(\mathcal{Q}^*)$  нулей оператора  $\mathcal{Q}^*(\beta)$ :

$$W^*(x) = V^*(x), \quad x \in \Omega_i. \quad (4.19)$$

Таким образом, нули оператора  $\mathcal{D}^*(\beta)$  линейно и взаимно однозначно связаны с нулями оператора  $\mathcal{Q}^*(\beta)$ , и, следовательно, размерности множеств нулей этих операторов совпадают:

$$\dim N(\mathcal{D}^*) = \dim N(\mathcal{Q}^*). \quad (4.20)$$

Окончательно, используя (4.17) и (4.20), для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  имеем равенство индексов оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$  и оператора  $\mathcal{D}(\beta)$ :

$$\text{Ind} \mathcal{D} = \dim N(\mathcal{D}) - \dim N(\mathcal{D}^*) = \dim N(\mathcal{Q}) - \dim N(\mathcal{Q}^*) = \text{Ind} \mathcal{Q}.$$

Согласно доказанному выше индекс оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  равен нулю. Следовательно, равен нулю и индекс оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$ .

Оператор  $\mathcal{D}(\beta)$  фредгольмов, а значит, нормально разрешим. Докажем теперь, что оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  также нормально разрешим. Рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{Q}(\beta)W)(x) = W^0(x), \quad x \in \Omega_i, \quad (4.21)$$

где вектор правой части  $W^0$  ортогонален множеству  $N(\mathcal{Q}^*)$  нулей оператора  $\mathcal{Q}^*(\beta)$ . Пусть вектор-функция  $U^0 \in [L_2(\mathbb{R}^2)]^3$  совпадает

с вектор-функцией  $W^0(x)$  для всех  $x \in \Omega_i$  и тождественно равна нулю в  $\Omega_e$ . Учитывая представления (4.18), (4.19) для нулей оператора  $\mathcal{D}^*(\beta)$ , приходим к заключению, что вектор-функция  $U^0$  ортогональна множеству нулей оператора  $\mathcal{D}^*(\beta)$ . Следовательно, в силу фредгольмовости оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  существует решение  $U \in [L_2(\mathbb{R}^2)]^3$  уравнения

$$(\mathcal{D}(\beta)U)(x) = U^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (4.22)$$

Представим вектор-функцию  $U(x)$  в виде суммы двух вектор-функций

$$U(x) := V(x) + W(x), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

где  $V(x) = 0$  при  $x \in \Omega_i$ , а  $W(x) = 0$  при  $x \in \Omega_e$ . Заметим, что для такой вектор-функции  $W(x)$  справедливо равенство (4.16), а вектор-функция  $U(x)$  удовлетворяет уравнению (4.22). Следовательно, имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} W^0(x) &= U^0(x) = \\ &= (\mathcal{D}(\beta)U)(x) = (\mathcal{D}(\beta)W)(x) = (\mathcal{Q}(\beta)W)(x), \quad x \in \Omega_i. \end{aligned}$$

Таким образом, для любой вектор-функции  $W^0$ , ортогональной множеству  $N(\mathcal{Q}^*)$  нулей оператора  $\mathcal{Q}^*(\beta)$ , существует решение  $W$  уравнения (4.21), принадлежащее пространству  $[L_2(\Omega_i)]^3$ . А это значит, что оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  нормально разрешим для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . И так, для всех  $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$  оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  нормально разрешим, индекс его равен нулю, следовательно, по определению 2.6, с. 48, он фредгольмов.  $\square$

**Теорема 4.17.** Пусть  $\{E, H\}$  — собственный вектор задачи (4.1)–(4.3), отвечающий собственному значению  $\beta_0 \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ . Тогда вектор  $F := E$ ,  $x \in \Omega_i$ , является собственным вектором оператор-функции  $\mathcal{Q}(\beta)$ , отвечающим тому же самому характеристическому значению  $\beta_0$ .

Утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 4.9.

**Приложение А.** Приведем явный вид функций

$$R_\alpha(\beta; x_2, y_2; \lambda), \quad \alpha = t, n, c.$$

Способ их построения методом преобразования Фурье изложен, например, в статье [119]. Для трехслойной геометрии и  $(x, y) \in \Omega_2^2$  имеем



следующие представления:

$$R_t := \frac{R_t^1 e^{p_2(x_2-y_2)} + R_t^2 e^{-p_2(x_2-y_2)} + R_t^3 e^{p_2(x_2+y_2)} + R_t^4 e^{-p_2(x_2+y_2)}}{Z^H}, \quad (4.23)$$

$$R_n := \frac{R_n^1 e^{p_2(x_2-y_2)} + R_n^2 e^{-p_2(x_2-y_2)} + R_n^3 e^{p_2(x_2+y_2)} + R_n^4 e^{-p_2(x_2+y_2)}}{Z^E}, \quad (4.24)$$

$$R_c := \frac{R_c^1 e^{p_2(x_2-y_2)} + R_c^2 e^{-p_2(x_2-y_2)} + R_c^3 e^{p_2(x_2+y_2)} + R_c^4 e^{-p_2(x_2+y_2)}}{Z^E Z^H}. \quad (4.25)$$

Для многозначных функций  $p_j := \sqrt{\lambda^2 + \beta^2 - k^2 \varepsilon_j}$  выбираются такие ветви, что  $\operatorname{Re}(p_j) > 0$ . Функции, входящие в знаменатели выражений (4.23)–(4.25), имеют следующий вид:

$$Z^H(\beta, \lambda) := \left(1 + \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right) e^{2p_2 d} - \left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right),$$

$$Z^E(\beta, \lambda) := \left(1 + \frac{p_3}{p_2 N_{32}}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2 N_{12}}\right) e^{2p_2 d} - \left(1 - \frac{p_3}{p_2 N_{32}}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2 N_{12}}\right),$$

где  $N_{ij} := \varepsilon_i / \varepsilon_j$  при  $i, j = 1, 2, 3$ . Функции, входящие в числитель выражения (4.23), представляются следующим образом:

$$R_t^1(\beta, \lambda) := R_t^2(\beta, \lambda) := \left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right),$$

$$R_t^3(\beta, \lambda) := \left(1 + \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right),$$

$$R_t^4(\beta, \lambda) := \left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right) e^{2p_2 d}.$$

Для функций, стоящих в числителе выражения (4.24), справедливы следующие представления:

$$R_n^1(\beta, \lambda) := R_n^2(\beta, \lambda) := \left(1 - \frac{p_3}{p_2 N_{32}}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2 N_{12}}\right),$$

$$R_n^3(\beta, \lambda) := \left(1 + \frac{p_3}{p_2 N_{32}}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2 N_{12}}\right),$$

$$R_n^4(\beta, \lambda) := \left(1 - \frac{p_3}{p_2 N_{32}}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2 N_{12}}\right) e^{2p_2 d}.$$

Числитель выражения (4.25) определяется следующими функциями:

$$R_c^1(\beta, \lambda) := e^{2p_2 d} \frac{2(1 - N_{23})}{p_2} \left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2 N_{12}}\right) - e^{2p_2 d} \frac{2(1 - N_{21})}{p_2} \left(1 + \frac{p_3}{p_2 N_{32}}\right) \left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right),$$

$$R_c^2(\beta, \lambda) := e^{2p_2 d} \frac{2(1 - N_{23})}{p_2} \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2 N_{12}}\right) - e^{2p_2 d} \frac{2(1 - N_{21})}{p_2} \left(1 - \frac{p_3}{p_2 N_{32}}\right) \left(1 + \frac{p_3}{p_2}\right),$$

$$R_c^3(\beta, \lambda) := \frac{2(1 - N_{23})}{p_2} \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_1}{p_2 N_{12}}\right) - e^{2p_2 d} \frac{2(1 - N_{21})}{p_2} \left(1 + \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 + \frac{p_3}{p_2 N_{32}}\right),$$

$$R_c^4(\beta, \lambda) := \frac{2(1 - N_{23})}{p_2} \left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right) \left(1 + \frac{p_1}{p_2 N_{12}}\right) e^{4p_2 d} - e^{2p_2 d} \frac{2(1 - N_{21})}{p_2} \left(1 - \frac{p_3}{p_2}\right) \left(1 - \frac{p_3}{p_2 N_{32}}\right).$$

Приведем явный вид функций  $R_\alpha(\beta; x_2, y_2; \lambda)$ ,  $\alpha = t, n, c$ , для трехслойной геометрии и  $y \in \Omega_2$ ,  $x \in \Omega_1$ :

$$R_t := e^{-p_1(x_2-d)} \left( e^{-p_2 y_2} + \frac{1}{R_{32}^t} e^{p_2 y_2} \right) \frac{1}{T_{12}^t F^t} \left( R_{21}^t + \frac{1}{R_{12}^t} \right) e^{p_2 d},$$

$$R_n := e^{-p_1(x_2-d)} N_{21} e^{p_2 y_2} \left( \frac{e^{-p_2 d} + \Lambda_{33}^n e^{p_2 d}}{F_n} + e^{-p_2 d} \right) + e^{-p_1(x_2-d)} N_{21} e^{-p_2 y_2} e^{p_2 d} \frac{(1 + \Lambda_{11}^n)}{F_n},$$

$$R_c := e^{-p_1(x_2-d)} (e^{p_2 y_2} C_1 + e^{-p_2 y_2} C_2).$$

Функции, входящие в эти представления, имеют следующий вид:

$$C_1 := \frac{N_{21}}{F_n} \left( a e^{p_2 d} (1 + \Lambda_{11}^n) + b \frac{1}{R_{32}^t} (1 + \Lambda_{33}^n e^{2p_2 d}) \right),$$

$$C_2 := \frac{N_{21}}{F_n} \left( a e^{3p_2 d} \frac{1}{R_{12}^t} (1 + \Lambda_{11}^n) + (1 + \Lambda_{33}^n e^{2p_2 d}) \right),$$

$$F^t := e^{2p_2 d} \frac{1}{R_{32}^t} \frac{1}{R_{12}^t} - 1, \quad F_n := e^{2p_2 d} \Lambda_{33}^n \Lambda_{11}^n - 1,$$

$$a := \frac{(N_{32} - 1) \left( \frac{p_2 + p_3}{p_2 - p_3} + \frac{p_3 - p_2}{p_3 + p_2} \right)}{\frac{2p_3}{p_3 + p_2} F^t (N_{32} p_2 - p_3)}, \quad b := \frac{N_{12} (N_{21} - 1) \left( \frac{2p_2}{p_2 - p_1} \right) e^{p_2 d}}{F^t (p_2 N_{12} - p_1)},$$

$$\Lambda_{33}^n := \frac{N_{32} p_2 + p_3}{N_{32} p_2 - p_3}, \quad \Lambda_{11}^n := \frac{N_{12} p_2 + p_1}{N_{12} p_2 - p_1}, \quad T_{ij}^t := \frac{2N_{ij} p_i}{p_i + p_j}, \quad R_{ij}^t := \frac{p_j - p_i}{p_j + p_i}.$$

## ГЛАВА 5

# ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ ВОЛНОВОДОВ С ПОСТОЯННОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

## § 1. Проекционные методы решения нелинейных спектральных задач

Для численного решения задач на собственные значения с нелинейным вхождением спектральных параметров в интегральные операторы (2.24) и (2.72) будем применять метод Галеркина. Теоретическое обоснование сходимости метода проведем на основе общих результатов статьи [5], посвященной исследованию сходимости проекционных методов решения нелинейных спектральных задач вида

$$A(\beta)u = 0, \quad A : U \rightarrow V,$$

где  $U$  и  $V$  — банаховы пространства, а оператор-функция  $A(\beta)$  является голоморфной и фредгольмовой при каждом  $\beta$ .

Приведем некоторые определения и необходимые нам формулировки теорем из этой работы. Пусть даны комплексные банаховы пространства  $U$  и  $U_n$ ,  $n \in N$ , где  $N$  — множество всех натуральных чисел. Через  $N'$ ,  $N''$  и т. д. будем обозначать бесконечные подмножества множества натуральных чисел  $N$ . Под сходимостью  $z_n \rightarrow z$ ,  $n \in N'$ , будем понимать сходимость при  $n \rightarrow \infty$ , когда индекс  $n$  пробегает множество  $N'$ . Пусть операторы  $p_n : U \rightarrow U_n$ ,  $n \in N$ , удовлетворяют условиям

$$\|p_n u\|_{U_n} \rightarrow \|u\|_U, \quad n \in N, \quad \forall u \in U, \quad (5.1)$$

$$\|p_n(\alpha u + \alpha' u') - (\alpha p_n u + \alpha' p_n u')\|_{U_n} \rightarrow 0, \quad n \in N, \quad \forall u, u' \in U, \quad (5.2)$$

где  $\alpha, \alpha'$  — произвольные комплексные числа.

Последовательность  $\{u_n\}_{n \in N'}$ , где  $u_n \in U$ , называется дискретно сходящейся к пределу  $u \in U$ , если  $\|u_n - p_n u\| \rightarrow 0$ ,  $n \in N'$ . Будем обозначать это так:  $u_n \rightarrow u$ ,  $n \in N'$ .

Последовательность  $\{u_n\}_{n \in N'}$  называется дискретно компактной или  $P$ -компактной, если для каждого  $N'' \subseteq N'$  существует такое подмножество  $N''' \subseteq N''$ , что последовательность  $\{u_n\}_{n \in N'''}$  дискретно сходится к некоторому пределу  $u \in U$ .

Пусть даны банаховы пространства  $V$  и  $V_n$ ,  $n \in N$ , и операторы  $q_n : V \rightarrow V_n$ , удовлетворяющие условиям

$$\|q_n v\|_{V_n} \rightarrow \|v\|_V, \quad n \in N, \quad \forall v \in V, \quad (5.3)$$

$$\|q_n(\alpha v + \alpha' v') - (\alpha q_n v + \alpha' q_n v')\|_{V_n} \rightarrow 0, \quad n \in N, \quad \forall v, v' \in V, \quad (5.4)$$

где  $\alpha, \alpha'$  — произвольные комплексные числа. Аналогично приведенным выше определениям вводятся понятия  $Q$ -сходимости и  $Q$ -компактности.

Пусть даны линейные операторы  $A : U \rightarrow V$  и  $A_n : U_n \rightarrow V_n$ . Будем говорить, что последовательность операторов  $\{A_n\}_{n \in N'}$  собственно сходится к оператору  $A$ , если выполнены условия

$$u_n \rightarrow u, \quad n \in N' \Rightarrow A_n u_n \rightarrow Au, \quad n \in N', \quad (5.5)$$

$$\|u_n\| \leq \text{const}, \quad \{A_n u_n\}_{n \in N'} \text{ } Q\text{-компактна} \Rightarrow \{u_n\}_{n \in N'} \text{ } P\text{-компактна.} \quad (5.6)$$

Пусть  $\rho(A) := \{\beta : \beta \in \Lambda, \exists A(\beta)^{-1} : V \rightarrow U\}$  — множество регулярных точек оператора  $A(\beta)$ ,  $\sigma(A) := \Lambda \setminus \rho(A)$  — множество сингулярных точек оператора  $A(\beta)$ ;

$$\rho(A_n) := \{\beta : \beta \in \Lambda, \exists A_n(\beta)^{-1} : V_n \rightarrow U_n\}, \quad \sigma(A_n) := \Lambda \setminus \rho(A_n).$$

Справедливы следующие теоремы [5].

**Теорема 5.18.** *Предположим, что при  $n \in N$  выполнены условия:*

1. Операторы  $p_n : U \rightarrow U_n$ ,  $q_n : V \rightarrow V_n$  удовлетворяют условиям (5.1), (5.2) и (5.3), (5.4).

2.  $\Lambda$  — область (открытое связное множество) в комплексной плоскости,  $A(\beta) : U \rightarrow V$  и  $A_n(\beta) : U_n \rightarrow V_n$  — голоморфные на  $\Lambda$  оператор-функции.

3. При каждом фиксированном  $\beta \in \Lambda$  операторы  $A(\beta)$ ,  $A_n(\beta)$  фредгольмовы, а именно представимы в виде суммы двух операторов, один из которых непрерывно обратим, а второй вполне непрерывен (конечномерен).

4.  $A_n(\beta) \rightarrow A(\beta)$  собственно  $\forall \beta \in \Lambda$ .

5. Нормы  $\|A_n(\beta)\|$  ограничены равномерно по  $n$  и  $\beta$  на каждом компакте  $\Lambda_0 \subset \Lambda$ .

6. Множество  $\rho(A) \neq \emptyset$ , т. е.  $\sigma(A) \neq \Lambda$ .

Пусть  $\beta_0 \in \sigma(A)$ , тогда существует такая последовательность точек  $\{\beta_n\}_{n \in N}$ ,  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ , что  $\beta_n \rightarrow \beta_0$ ,  $n \in N$ . Пусть  $\{\beta_n\}_{n \in N}$  — некоторая последовательность точек из  $\Lambda$ , такая что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$  и  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ . Тогда  $\beta_0 \in \sigma(A)$ .

**Теорема 5.19.** *Предположим, что выполнены условия 1 — 6 теоремы 5.18. Пусть  $\{\beta_n\}_{n \in N}$  — некоторая последовательность точек из  $\Lambda$  и  $\{u_n\}_{n \in N}$  — некоторая последовательность нормированных векторов,  $\|u_n\| = 1$ , таких что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ ,  $A_n(\beta_n)u_n = 0$  и  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ ,  $u_n \rightarrow u_0$ . Тогда  $\beta_0 \in \sigma(A)$  и  $A(\beta_0)u_0 = 0$ ,  $\|u_0\| = 1$ .*

Отметим, что эти результаты носят локальный характер и, следовательно, справедливы и в том случае, когда  $\Lambda$  — не область комплексной плоскости, а риманова поверхность.

## § 2. Метод Галеркина решения задач о собственных волнах

**1. Метод Галеркина решения задачи со слабосингулярным оператором.** Опишем численный метод решения задачи (2.24), с. 48. При построении и исследовании численного метода операторное уравнение (2.24) удобно трактовать как уравнение в гильбертовом пространстве

$$H := W_2^1 \times L_2.$$

При этом будем использовать известное (см., напр., [10, с. 10]) выражение для оператора  $L^{-1} : W_2^1 \rightarrow L_2$ :

$$L^{-1}(u; t) := \frac{c_0(u)}{\ln 2} + 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| c_k(u) e^{ikt}, \quad u \in W_2^1, \quad (5.7)$$

где

$$c_k(u) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\tau) e^{-ik\tau} d\tau$$

есть коэффициенты Фурье функции  $u$ . Отметим, что (см., напр., [10, с. 10])

$$\|L^{-1}\| = 2. \quad (5.8)$$

Приближенное решение  $w_n := (w_n^{(1)}, w_n^{(2)})$  уравнения (2.24) будем искать в виде

$$w_n^{(j)}(t) := \sum_{k=-n}^n \alpha_k^{(j)} e^{ikt}, \quad n \in N, \quad j = 1, 2.$$

Коэффициенты  $\alpha_k^{(j)}$  будем определять с помощью метода Галеркина, т. е. с помощью следующих уравнений:

$$\int_0^{2\pi} (Aw_n)^{(k)}(t) e^{-ijt} dt = 0, \quad j = -n, \dots, n, \quad k = 1, 2. \quad (5.9)$$

В силу (5.7) имеем

$$L^{-1}(w_n^{(1)}; t) = \frac{\alpha_0^{(1)}}{\ln 2} + 2 \sum_{k=-n}^n |k| \alpha_k^{(1)} e^{ikt},$$

поэтому равенства (5.9) можно записать в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\alpha_j^{(1)} + \sum_{k=-n}^n h_{jk}^{(1,1)}(\beta) d_j \alpha_k^{(1)} + \sum_{k=-n}^n h_{jk}^{(1,2)}(\beta) \alpha_k^{(2)} = 0, \quad j = -n, \dots, n, \quad (5.10)$$

$$\alpha_j^{(2)} + \sum_{k=-n}^n h_{jk}^{(2,1)}(\beta) d_j \alpha_k^{(1)} + \sum_{k=-n}^n h_{jk}^{(2,2)}(\beta) \alpha_k^{(2)} = 0, \quad j = -n, \dots, n. \quad (5.11)$$

Здесь  $d_j := \{1/\ln 2 \text{ при } j = 0, 2|j| \text{ при } j \neq 0\}$ ,

$$h_{jk}^{(l,m)}(\beta) := \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{(l,m)}(\beta; t, \tau) e^{-ijt} e^{ik\tau} dt d\tau.$$

Напомним, что ядра  $h^{(l,m)}$  не имеют особенности при  $t = \tau$ . Таким образом, применение метода Галеркина с тригонометрическим базисом

позволяет обратить главную часть сингулярных операторов аналитически.

Пусть  $H_n^T$  — множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше  $n$ . Обозначим через  $H_n$  подпространство  $H$  элементов вида  $(w_n^{(1)}, w_n^{(2)})$ ,  $w_n^{(1)}, w_n^{(2)} \in H_n^T$ . Введем в рассмотрение оператор проектирования  $p_n : H \rightarrow H_n$ :

$$p_n w := (\Phi_n w^{(1)}, \Phi_n w^{(2)}), \quad w := (w^{(1)}, w^{(2)}) \in H, \quad (5.12)$$

где  $\Phi_n$  — оператор Фурье,

$$\Phi_n(u; t) := \sum_{k=-n}^n c_k(u) e^{ikt}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\|p_n\| = 1. \quad (5.13)$$

Система линейных алгебраических уравнений (5.10), (5.11) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_n(\beta) w_n \equiv p_n A(\beta) w_n \equiv (I + p_n B(\beta)) w_n \equiv (I + B_n(\beta)) w_n = 0. \quad (5.14)$$

Здесь  $A_n : H_n \rightarrow H_n$ ,  $I$  — единичный оператор в пространстве  $H_n$ .

Обозначим  $\sigma(A_n)$  множество сингулярных точек оператора  $A_n(\beta)$ . Приближенные значения  $\beta_n$  постоянных распространения  $\beta$  будем искать как сингулярные точки оператора  $A_n(\beta)$ . Относительно сходимости описанного метода справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.20.** *Если  $\beta_0 \in \sigma(A)$ , то существует такая последовательность чисел  $\{\beta_n\}_{n \in N}$ ,  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ , что  $\beta_n \rightarrow \beta_0$ ,  $n \in N$ . Если  $\{\beta_n\}_{n \in N}$  — некоторая последовательность точек из  $\Lambda$ , такая, что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ ,  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ , то  $\beta_0 \in \sigma(A)$ . Пусть  $\{w_n\}_{n \in N}$  — некоторая последовательность нормированных векторов,  $\|w_n\| = 1$ , такие, что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ ,  $A_n(\beta_n) w_n = 0$ ,  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ ,  $w_n \rightarrow w_0$ . Тогда  $\beta_0 \in \sigma(A)$  и  $A(\beta_0) w_0 = 0$ ,  $\|w_0\| = 1$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство теоремы заключается в проверке условий 1 — 6 теорем 5.18 и 5.19 в рассматриваемом случае.

1. Оператор  $p_n : H \rightarrow H_n$  обладает свойствами (5.1), (5.2). Первое свойство выполняется в силу очевидных предельных соотношений

$$\|\Phi_n u\| \rightarrow \|u\|, \quad n \in N, \quad u \in L_2, \quad W_2^1.$$

Второе — очевидное следствие линейности оператора  $p_n$ .

2. Оператор-функции  $A(\beta)$  и  $A_n(\beta)$  голоморфны на  $\Lambda$ . Голоморфность оператор-функции  $A(\beta)$  доказана в теореме 2.2. Следовательно, в силу линейности и ограниченности оператора  $p_n$  таким же свойством обладает и  $A_n(\beta) = p_n A(\beta)$ .

3. При любом  $\beta \in \Lambda$  операторы  $A(\beta)$  и  $A_n(\beta)$  фредгольмовы. Это непосредственно вытекает из полной непрерывности оператора

$$B(\beta) : H \rightarrow H$$

и конечномерности оператора  $B_n(\beta)$  при  $\beta \in \Lambda$ .

4. Для любого  $\beta \in \Lambda$  последовательность операторов  $\{A_n(\beta)\}_{n \in N}$  собственно сходится к оператору  $A(\beta)$ . Для доказательства этого утверждения проверим выполнение условий (5.5), (5.6).

Верна оценка

$$\|A(\beta)\| \leq c(\beta), \quad \beta \in \Lambda, \quad (5.15)$$

где  $c(\beta)$  — непрерывная в области  $\Lambda$  функция:

$$c(\beta) := 1 + 2(c_{11}^2(\beta) + d_{11}^2(\beta))^{1/2} + (c_{12}^2(\beta) + d_{12}^2(\beta))^{1/2} + 2c_{21}(\beta) + c_{22}(\beta).$$

Здесь

$$c_{ij}^2(\beta) := \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |h^{(i,j)}(\beta; t, t_0)|^2 dt dt_0, \quad i, j = 1, 2,$$

$$d_{1j}^2(\beta) := \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{d}{dt} h^{(1,j)}(\beta; t, t_0) \right|^2 dt dt_0, \quad j = 1, 2.$$

Справедливость оценки (5.15) следует из неравенства

$$\|A(\beta)\| \leq 1 + (\|B^{(1,1)}(\beta)\| + \|B^{(2,1)}(\beta)\|) \|L^{-1}\| + \|B^{(1,2)}(\beta)\| + \|B^{(2,2)}(\beta)\|,$$

равенства (5.8) и очевидных оценок

$$\|B^{(2,j)}(\beta)\| \leq c_{2,j}(\beta), \quad B^{(2,j)}(\beta) : L_2 \rightarrow L_2,$$

$$\|B^{(1,j)}(\beta)\|^2 \leq c_{1,j}^2(\beta) + d_{1,j}^2(\beta), \quad B^{(1,j)}(\beta) : L_2 \rightarrow W_2^1, \quad j = 1, 2.$$

Из определения оператора  $A_n(\beta)$  и равенства (5.13) вытекает оценка

$$\|A_n(\beta)\| \leq \|A(\beta)\|, \quad n \in N, \quad \beta \in \Lambda. \quad (5.16)$$

$P$ -сходимость  $\{w_n\}_{n \in N}$  к  $w \in H$  означает, что

$$\|w_n - p_n w\| \rightarrow 0, \quad n \in N.$$

Справедливость условия (5.5) вытекает, таким образом, из оценки

$$\|A_n w_n - p_n A w\| \leq \|A_n\| \|w_n - p_n w\| + \|p_n\| \|A\| \|p_n w - w\|, \quad n \in N,$$

оценок (5.15), (5.16), равенства (5.13) и очевидного предельного соотношения

$$\|p_n w - w\| \rightarrow 0, \quad n \in N.$$

Проверим условие (5.6).  $P$ -компактность последовательности векторов  $\{A_n w_n\}_{n \in N}$  означает, что для любого  $N' \subseteq N$  существует такое  $N'' \subseteq N'$ , что последовательность  $\{A_n w_n = w_n + B_n w_n\}_{n \in N''}$   $P$ -сходится к  $z \in H$ . Если  $\|w_n\| \leq \text{const}$ ,  $n \in N''$ , то существует слабо сходящаяся подпоследовательность  $\{w_n\}_{n \in N'''}$ ,  $N''' \subset N''$ . Вполне непрерывный оператор  $B$ , как известно, переводит ее в сильно сходящуюся:

$$\|B w_n - u\| \rightarrow 0, \quad n \in N''', \quad u \in H.$$

Отсюда в силу неравенства

$$\|B_n w_n - p_n u\| \leq \|p_n\| \|B w_n - u\|$$

и равенства (5.13) следует, что последовательность  $\{B_n w_n\}_{n \in N'''}$   $P$ -сходится к  $u \in H$ . Таким образом,  $\{w_n\}_{n \in N'''} P$ -сходится к вектору  $w = z - u \in H$ , и условие (5.6) выполнено.

5. Нормы  $\|A_n(\beta)\|$  ограничены равномерно по  $n$  и  $\beta$  на каждом компакте  $\Lambda_0 \subset \Lambda$ . Справедливость этого утверждения непосредственно следует из оценок (5.15) и (5.16).

6. Множество  $\rho(A)$  не пусто, т. е.  $\sigma(A) \neq \Lambda$ . Справедливость этого утверждения доказана в теореме 2.4, с. 60.  $\square$

Численный алгоритм поиска характеристических значений  $\beta_n$  и отвечающих им собственных векторов  $w_n$  оператор-функции  $A_n(\beta)$  будет описан в третьем пункте настоящего параграфа.

## 2. Метод Галеркина решения задачи с ядром Гильберта.

Опишем теперь численный метод решения задачи (2.72), с. 71. При построении и исследовании численного метода операторное уравнение (2.72) удобно трактовать как уравнение в гильбертовом пространстве  $H := [L_2]^4$ . Уравнение (2.72) по сравнению с уравнением (2.24),

помимо интегральных операторов с гладкими ядрами, оператора  $L$  с логарифмической особенностью ядра, содержит оператор  $S$  с ядром Гильберта (2.69). Будем использовать известное выражение (см., напр., [11]) для оператора  $S^{-1} : L_2 \rightarrow L_2$ :

$$S^{-1}(u; t) := -i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sign}(k) c_k(u) e^{ikt}, \quad u \in L_2, \quad (5.17)$$

где

$$c_k(u) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\tau) e^{-ikt\tau} d\tau$$

есть коэффициенты Фурье функции  $u$ . При этом мы полагаем, что  $\text{sign}(0) = 1$ . Известно также (см., напр., [11]), что

$$S^{-1} = -S, \quad \|S^{-1}\| = \|S\| = 1. \quad (5.18)$$

Приближенное решение  $w_n := (w_n^{(1)}, w_n^{(2)}, w_n^{(3)}, w_n^{(4)})$  уравнения (2.72) будем искать в виде

$$w_n^{(j)}(t) := \sum_{k=-n}^n \alpha_k^{(j)} e^{ikt}, \quad n \in N, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Коэффициенты  $\alpha_k^{(j)}$  будем определять с помощью метода Галеркина,

$$\int_0^{2\pi} (Aw_n)^{(j)}(t) e^{-ikt} dt = 0, \quad k = -n, \dots, n, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (5.19)$$

В силу (5.7) и (5.17) действие операторов  $L^{-1}$  и  $S^{-1}$  на базисные функции выражается в явном виде (тригонометрические функции являются собственными функциями этих операторов, отвечающими известным собственным значениям). Равенства (5.19) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестного вектора  $\{\alpha_k^{(j)}\}$ ,  $k = -n, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . Элементы матрицы этой системы определяются собственными значениями операторов  $L^{-1}$  и  $S^{-1}$  и интегралами вида

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h_{+/\infty}^{(l)}(\beta; t, \tau) e^{-ijt} e^{ik\tau} dt d\tau, \quad l = 1, 2, 3.$$

Отметим, что функции  $h_{+/\infty}^{(l)}(\beta; t, \tau)$  не имеют особенностей при  $t = \tau$ .

Исследуем сходимость метода Галеркина. Обозначим через  $H_n$  подпространство  $H$  элементов  $(w_n^{(1)}, w_n^{(2)}, w_n^{(3)}, w_n^{(4)})$ , где каждая из функций  $w_n^{(1)}, w_n^{(2)}, w_n^{(3)}, w_n^{(4)}$  принадлежит  $H_n^T$  — множеству всех тригонометрических полиномов порядка не выше  $n$ . Введем в рассмотрение оператор проектирования  $p_n : H \rightarrow H_n$ :

$$p_n w := (\Phi_n w^{(1)}, \Phi_n w^{(2)}, \Phi_n w^{(3)}, \Phi_n w^{(4)}), \\ w := (w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}, w^{(4)}) \in H,$$

где  $\Phi_n$  — оператор Фурье

$$\Phi_n(u; t) := \sum_{k=-n}^n c_k(u) e^{ikt}.$$

Ясно, что

$$\|p_n\| = 1.$$

Система уравнений метода Галеркина (5.19) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_n(\beta) w_n \equiv p_n A(\beta) w_n \equiv (I + p_n B(\beta)) w_n \equiv (I + B_n(\beta)) w_n = 0. \quad (5.20)$$

Здесь  $A_n : H_n \rightarrow H_n$ ,  $I$  — единичный оператор в пространстве  $H_n$ .

Приближенные значения  $\beta_n$  постоянных распространения  $\beta$  будем искать как сингулярные точки оператора  $A_n(\beta)$ . Относительно сходимости описанного метода справедлива следующая теорема, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 5.20.

**Теорема 5.21.** *Если  $\beta_0 \in \sigma(A)$ , то существует такая последовательность чисел  $\{\beta_n\}_{n \in N}$ ,  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ , что  $\beta_n \rightarrow \beta_0$ ,  $n \in N$ . Если  $\{\beta_n\}_{n \in N}$  — некоторая последовательность точек из  $\Lambda$ , такая, что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ ,  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ , то  $\beta_0 \in \sigma(A)$ . Пусть  $\{\beta_n\}_{n \in N}$  — некоторая последовательность точек из  $\Lambda$  и  $\{w_n\}_{n \in N}$  — некоторая последовательность нормированных векторов,  $\|w_n\| = 1$ , такие, что  $\beta_n \in \sigma(A_n)$ ,  $A_n(\beta_n) w_n = 0$ ,  $\beta_n \rightarrow \beta_0 \in \Lambda$ ,  $w_n \rightarrow w_0$ . Тогда  $\beta_0 \in \sigma(A)$  и  $A(\beta_0) w_0 = 0$ ,  $\|w_0\| = 1$ .*

**3. Метод обратных итераций с невязкой решения нелинейных конечномерных спектральных задач.** В предыдущем параграфе были построены конечномерные нелинейные спектральные задачи (5.14), (5.20) вида

$$A(\beta)u = 0, \quad (5.21)$$

где  $A$  — матрица, элементы которой являются комплекснозначными функциями комплексного параметра  $\beta$ ,  $u$  — искомый вектор с комплексными компонентами. Такие задачи можно решать с помощью варианта метода обратных итераций с невязкой, предложенного в работе [149]. Приведем алгоритм этого метода.

Пусть известно некоторое приближение  $\sigma \in \Lambda$  (где  $\Lambda$  — область на комплексной плоскости) к искомому характеристическому значению  $\beta$  такое, что матрица  $A(\sigma)$  обратима, а также начальное приближение  $u^{(0)}$  к собственному вектору. Обозначим  $\|u\|$  — максимум норму вектора  $u$ ,  $e(u)$  — единичный вектор с единицей в позиции максимального по модулю значения вектора  $u$ . Алгоритм приближенного решения нелинейной спектральной задачи (5.21) состоит в следующем.

Очередное приближение  $\beta_{l+1}$  к характеристическому значению  $\beta$  вычисляется как ближайший к  $\beta_l$  корень уравнения

$$\left( e(u^{(l)}), A^{-1}(\sigma)A(\beta_{l+1})u^{(l)} \right) = 0.$$

Далее вычисляется невязка  $r^{(l)} = A(\beta_{l+1})u^{(l)}$  и решается система линейных алгебраических уравнений  $A(\sigma)\hat{u}^{(l)} = r^{(l)}$ . Затем по формулам  $\bar{u}^{(l+1)} = u^{(l)} - \hat{u}^{(l)}$ ,  $u^{(l+1)} = \bar{u}^{(l+1)} / \|\bar{u}^{(l+1)}\|$  вычисляется очередное приближение  $u^{(l+1)}$  к собственному вектору  $u$ . Итерационный процесс останавливается, если относительная ошибка характеристического значения достигает заданной точности  $\epsilon$ .

Относительно сходимости этого метода справедлива следующая теорема [149].

**Теорема 5.22.** Пусть элементы матрицы  $A(\beta)$  являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями параметра  $\beta \in \Lambda$ . Пусть вектор  $u$  является нормализованным собственным вектором, отвечающим простому изолированному характеристическому значению  $\beta$  задачи (5.21). Тогда метод обратных итераций с невяз-

кой решения задачи (5.21) сходится для любого начального приближения  $\sigma$ , достаточно близкого к  $\beta$ . Справедливы следующие оценки скорости сходимости:

$$\|u^{(l+1)} - u\| / \|u^{(l)} - u\| = O(\sigma - \beta), \quad |\beta_{l+1} - \beta| = O(\|u^{(l)} - u\|).$$

Отметим, что эти результаты носят локальный характер и, следовательно, справедливы и в том случае, когда  $\Lambda$  — не область комплексной плоскости, а риманова поверхность. В рассматриваемых нами случаях решения задач (2.1)–(2.4), с. 38, и (2.43)–(2.46), с. 61, описанным методом, элементы матрицы  $A(\beta)$  являются аналитическими функциями параметра  $\beta$  на римановой поверхности  $\Lambda$ . Следовательно, предположение теоремы 5.22 о гладкости элементов матрицы  $A(\beta)$  выполняется.

В теореме 5.22 доказана сходимость метода в случае поиска собственного вектора, отвечающего простому изолированному характеристическому значению  $\beta$  задачи (5.21). Однако метод обратных итераций с невязкой мы применяли и для поиска собственных векторов, отвечающих характеристическим значениям  $\beta$  кратности, равной двум. Такая ситуация возникает, когда одному значению постоянного распространения  $\beta$  соответствуют две собственные волны. Это справедливо, например, для основных волн волноводов кругового и квадратного поперечного сечений. Хотя в этих случаях теорема 5.22 и не гарантирует сходимости, наблюдалась устойчивая сходимость метода. При этом на первом шаге алгоритма выбирались два ортогональных друг другу начальных приближения.

### §3. Численные эксперименты

Приведем результаты численного решения ряда конкретных спектральных задач теории диэлектрических волноводов, подтверждающие практическую эффективность предлагаемых методов.

Задача (2.43)–(2.46), с. 61, решалась для волноводов кругового и квадратного сечений, т. е. для таких волноводов, для которых либо известны точные решения, либо имеются экспериментальные данные, либо результаты вычислений, полученные другими методами.

Ранее метод интегральных уравнений для численного решения задачи (2.43)–(2.46) применялся в работах [29] и [62] в частном случае

поиска поверхностных собственных волн, амплитуды которых экспоненциально затухают на бесконечности, а постоянные распространения  $\beta$  лежат в интервале  $(kn_\infty, kn_+)$ . Для аппроксимации построенных с помощью формулы Грина систем интегродифференциальных уравнений с логарифмической особенностью ядер в [29], [62] применялся метод механических квадратур. При вычислении несобственных интегралов в [62] особенности ядер выделялись аналитически, а в [29] — численно, путем сгущения сетки. В качестве тестового примера в [29], [62] решалась задача о поиске постоянных распространения поверхностных собственных волн волновода кругового сечения. В этом случае точные значения постоянных распространения  $\beta$  определяются как корни характеристических уравнений (1.62), с. 32.

В наших расчетах значения параметров задачи были выбраны такими же, как в [29]:  $\varepsilon_+ = 2$ ,  $\varepsilon_\infty = 1$ ,  $kR = 4$ . В этом случае уравнения (1.62) имеют корни  $\beta \in (kn_\infty, kn_+)$  лишь при  $l = 0, 1, 2$ . Всего таких корней пять. Результаты вычислений  $h := \beta/k$  представлены в таблице.

$l$	0	0	1	1	2
$h$	1.200026	1.164818	1.020626	1.320590	1.167256
	1.200026	1.164819	1.020628	1.320590	1.167256
	1.1995	1.1643	1.0216	1.3202	1.1870

В первой строке таблицы помещены номера  $l$  уравнений (1.62), во второй — корни этих уравнений, в третьей — решения, полученные с помощью метода Галеркина (5.19), в четвертой — результаты работы [29]. Результаты наших вычислений, представленные в таблице, получены при использовании пяти базисных функций в методе Галеркина (5.19). Дальнейшее увеличение их числа не привело к изменению сходимости. Отметим, что в [29] вычисления фактически сводились к поиску характеристических значений задачи вида (5.21) с матрицей размерности, равной 64, в наших расчетах матрица имеет размерность, равную 20. В [62] точность аналогичных вычислений составила 0,1 процента.

Решение задачи (2.43)–(2.46) для волновода квадратного сечения было основано на аппроксимации контура  $\Gamma$  кривой (см., напр., [114]):

$$r(t) := \left( \left( \frac{\cos t}{a} \right)^{2m} + \left( \frac{\sin t}{a} \right)^{2m} \right)^{-1/2m}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (5.22)$$

При  $m = 1$  эта кривая представляет собой окружность радиуса  $a$ , а при  $m \rightarrow \infty$  она стремится к квадрату со стороной  $2a$ .

Результаты расчетов сравнивались с экспериментальными данными из работы [35]. Как и в [35], были получены дисперсионные кривые, показывающие зависимость величины  $h := \beta/k$  от  $p := ka/\pi$  при фиксированных  $\varepsilon_+ = 2.08$ ,  $\varepsilon_\infty = 1$ . Результаты расчетов представлены на рис. 6, с. 118, сплошной линией. Квадратиками на рис. 6 обозначены экспериментальные данные из работы [35].

Разыскивались также собственные векторы задачи (2.43)–(2.46) отвечающие комплексным собственным значениям  $\beta \in C_0^{(1)}$ . Для волновода кругового поперечного сечения радиуса  $R$  результаты сравнивались с результатами, полученными в статье [123]. В этой работе применялся итерационный метод, предложенный в [124], суть которого заключается в том, что приближенное решение задачи ищется в виде разложения по собственным векторам симметричной части соответствующего ей дифференциального оператора.

Следуя [123], были построены дисперсионные кривые для комплексных собственных значений — графики зависимости вещественной и мнимой части параметра  $h := \beta/(kn_\infty)$  от  $V := kR\sqrt{\varepsilon_+ - \varepsilon_\infty}$  при фиксированном значении  $(\varepsilon_+ - \varepsilon_\infty)/(2\varepsilon_\infty) = 30$ . Результаты вычислений представлены на рис. 7, с. 118. Непрерывными линиями изображены точные решения, полученные как корни уравнения (1.62) с номером  $l = 1$  (верхний график —  $\text{Im}(h)$ , нижний —  $\text{Re}(h)$ ). Кружочками на рис. 7 отмечены результаты наших вычислений, которые с графической точностью совпали с результатами работы [123]. На рис. 8 и 9 изображены линии уровня функций  $|\text{E}_3|$  и  $|\text{H}_3|$ , соответственно, при  $V = 2$ .

Помимо комплексных собственных волн волновода кругового поперечного сечения, для демонстрации эффективности предлагаемого метода разыскивались также комплексные собственные волны диэлектрического волновода квадратного поперечного сечения. На рис. 7 квадратиками отмечены значения  $\text{Im}(h)$  и  $\text{Re}(h)$ , а на рис. 10 и 11 при  $V = 2$  изображены линии уровня функций  $|\text{E}_3|$  и  $|\text{H}_3|$  для волновода квадратного сечения.

Для демонстрации сходимости метода было изучено поведение функции

$$e(M) := \frac{\|\alpha(M) - \alpha(M+10)\|}{\|\alpha(M+10)\|},$$



где  $\alpha$  — вектор коэффициентов метода Галеркина (5.19),  $M$  — число базисных функций этого метода. На рис. 12 для различных значений параметра  $m$ , определяющего степень аппроксимации квадрата гладкой кривой (5.22), изображены графики функции

$$\max_h e(M),$$

где максимум брался по параметру  $h$ , принадлежавшему множеству тех значений  $h$ , для которых были получены дисперсионные кривые, изображенные на рис. 6 и 7.

Отметим, что все остальные вычисления, а именно, вычисление коэффициентов метода Галеркина (5.19) методом механических квадратур, вычисление характеристических значений и собственных векторов конечномерных нелинейных спектральных задач методом обратных итераций с невязкой проводились с точностью  $10^{-9}$ . Результаты вычислений для волновода квадратного поперечного сечения, изображенные на рис. 6, 7, 10 и 11, получены при  $m = 20$  и  $M = 201$ . Отметим также, что результаты вычислений для волновода кругового поперечного сечения, изображенные на рис. 7, 8 и 9, получены при  $M = 3$ , а дальнейшее увеличение  $M$  не повлияло на точность вычислений.

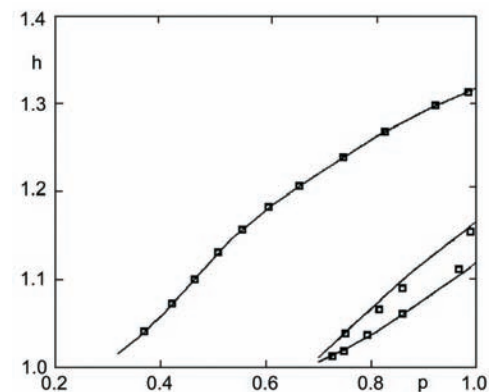


Рис. 6. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода квадратного поперечного сечения,  $h := \beta/k$ ,  $p := ka/\pi$ . Сплошные линии — результаты расчетов методом Галеркина. Квадратиками обозначены экспериментальные данные [35].

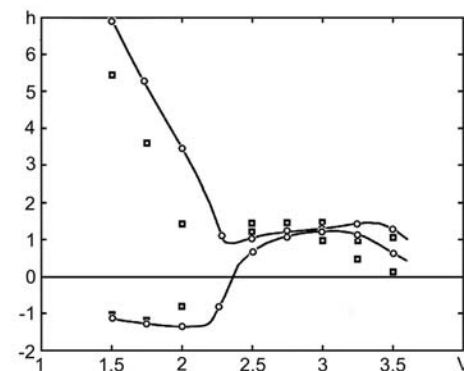


Рис. 7. Дисперсионные кривые для комплексных собственных волн,  $h := \beta/(kn_\infty)$ , а  $V := kR\sqrt{\varepsilon_+ - \varepsilon_\infty}$  (верхний график —  $\text{Im}(h)$ , нижний —  $\text{Re}(h)$ ). Сплошные линии — точные решения для волновода кругового сечения. Кружочками и квадратиками обозначены результаты расчетов методом Галеркина для волноводов кругового и квадратного поперечного сечения, соответственно.

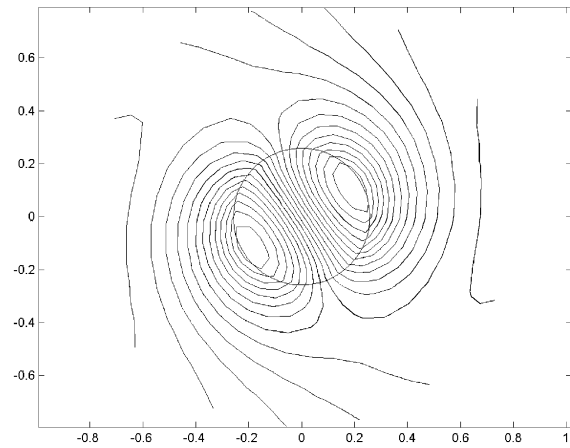


Рис. 8. Линии уровня функции  $|E_3|$  для волновода кругового поперечного сечения.

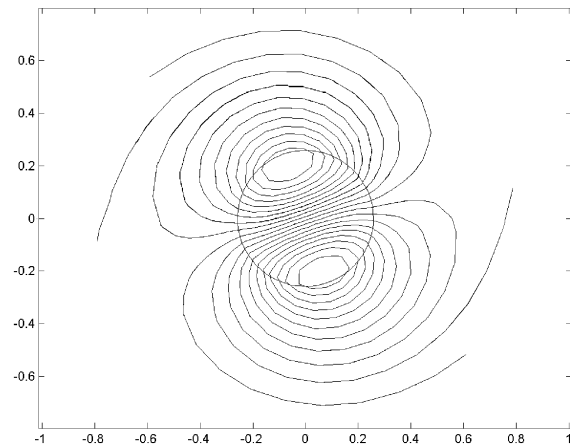


Рис. 9. Линии уровня функции  $|H_3|$  для волновода кругового поперечного сечения.

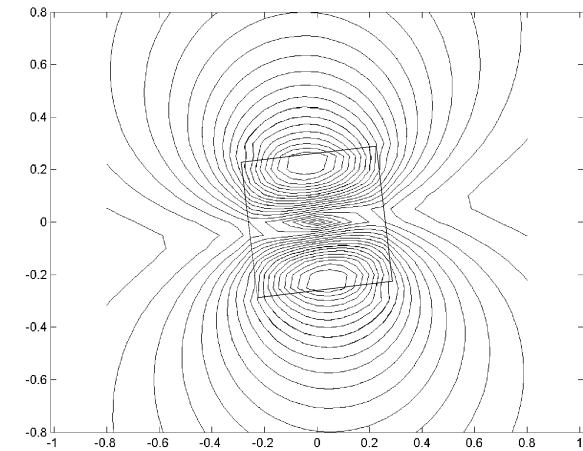


Рис. 10. Линии уровня функции  $|E_3|$  для волновода квадратного поперечного сечения.

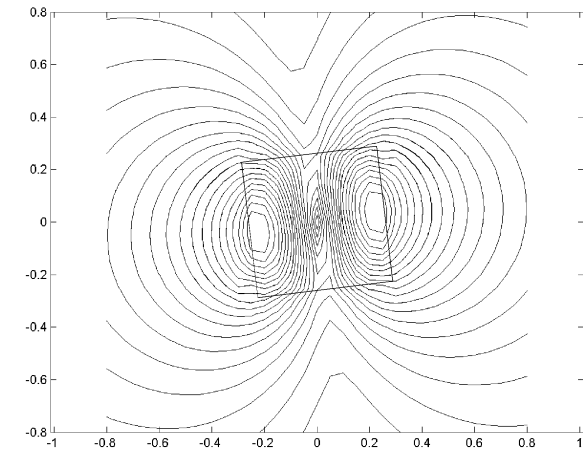


Рис. 11. Линии уровня функции  $|H_3|$  для волновода квадратного поперечного сечения.

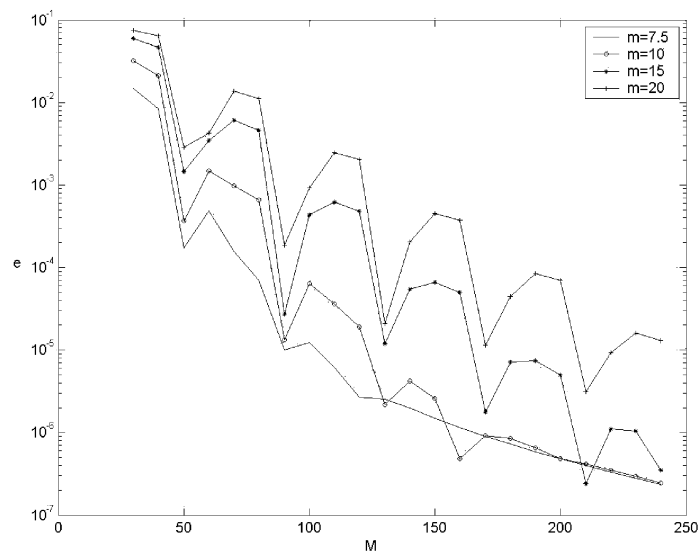


Рис. 12. Зависимость относительной ошибки  $e$  метода Галеркина от числа базисных функций  $M$  и параметра  $m$ , определяющего “гладкость” контура  $\Gamma$ .

## РАЗДЕЛ 2. ТОЧНЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

### Введение

В данном разделе книги предлагается и исследуется численный метод, ориентированный на расчет поверхностных собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов, находящихся в однородной окружающей среде. Он основан на сочетании метода точных нелокальных граничных условий и метода конечных элементов. Как и в первом разделе, будем использовать классическую модель, согласно которой волновод предполагается неограниченным и линейно изотропным, то есть относительная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  волновода не меняется вдоль оси  $Ox_3$  и является достаточно гладкой функцией поперечных координат. Будем для определенности считать, что поперечное сечение волновода  $\Omega_i$  является односвязной ограниченной областью в  $\mathbb{R}^2$  и имеет кусочно-гладкую границу  $\gamma := \partial\Omega_i$ ,

$$\varepsilon := \varepsilon_\infty = \text{const} > 0 \text{ в } \Omega_e, \quad \varepsilon_+ := \max_{x \in \overline{\Omega}_i} \varepsilon(x) > \varepsilon_\infty, \quad \min_{x \in \overline{\Omega}_i} \varepsilon(x) > \varepsilon_\infty^1,$$

где  $\Omega_e := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_i$ . Магнитная проницаемость волновода всюду предполагается равной магнитной проницаемости свободного пространства  $\mu_0$ . Будем также предполагать, что постоянная распространения  $\beta$  является вещественной и положительной.

Амплитуды собственных волн в  $\mathbb{R}^2$  удовлетворяют следующим уравнениям (см. с. 19):<sup>2)</sup>

$$(\mathcal{P}_{\text{ЕН}}) \quad \text{rot}_\beta \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad \text{rot}_\beta \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

<sup>1)</sup>Рассмотрение многосвязных и несвязных областей  $\Omega_i$ , так же как и волноводов с размытой границей (в этом случае необходимо писать знак  $\geq$  вместо  $>$  в последнем условии), не вносит дополнительных трудностей.

<sup>2)</sup>А также условиям сопряжения на границе  $\gamma$ , см. с. 22. Здесь мы их не указываем, поскольку для рассматриваемых операторов они являются естественными.

Кроме того, для поверхностных волн имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|E|^2 + |H|^2) dx < +\infty.$$

Дифференциальные операции с индексом  $\beta$  введены на с. 19.

В предыдущем разделе было показано, что из этой системы вытекают следующие уравнения для определения  $H$  (см. утв. 1.1, с. 20):

$$(\mathcal{P}_H) \quad \operatorname{rot}_\beta (\varepsilon^{-1} \operatorname{rot}_\beta H) = k^2 H, \quad \operatorname{div}_\beta H = 0,$$

а также система уравнений для определения поля  $E$ :

$$(\mathcal{P}_E) \quad \operatorname{rot}_\beta (\operatorname{rot}_\beta E) = k^2 \varepsilon E, \quad \operatorname{div}_\beta (\varepsilon E) = 0.$$

Здесь  $k := (\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2} \omega$  — продольное волновое число. Также было показано, что для существования поверхностных волн (амплитуды которых экспоненциально убывают на бесконечности) необходимо, чтобы

$$(\beta, k) \in \Lambda, \quad \Lambda := \{(\beta, k) : \beta/\sqrt{\varepsilon_+} < k < \beta/\sqrt{\varepsilon_\infty}, \beta > 0\}.$$

Если  $(\beta, k) \in \Lambda$ , то поперечное волновое число  $p := (\beta^2 - k^2 \varepsilon_\infty)^{1/2}$  является вещественным, положительным и определяет скорость затухания амплитуд собственных волн на бесконечности. Точнее,  $E$  и  $H$  убывают на бесконечности как  $\exp(-p|x|)/\sqrt{|x|}$  (см. с. 26).

Уравнений  $(\mathcal{P}_H)$  достаточно для нахождения пар чисел  $(\beta, k)$  и соответствующих им ненулевых вектор-функций  $H$  с компонентами из пространства Лебега  $L_2(\mathbb{R}^2)$ . По найденному  $H$  поле  $E$  определяется из второго уравнения системы  $(\mathcal{P}_{EH})$ . Аналогично из системы  $(\mathcal{P}_E)$  можно найти  $(\beta, k, E)$ , а для вычисления  $H$  использовать первое уравнение в  $(\mathcal{P}_{EH})$ .

Сравним между собой системы уравнений  $(\mathcal{P}_{EH})$ ,  $(\mathcal{P}_H)$  и  $(\mathcal{P}_E)$  с точки зрения их численного решения. С нашей точки зрения для численного решения более подходящей является система  $(\mathcal{P}_H)$ . Действительно, по сравнению с  $(\mathcal{P}_{EH})$  она содержит существенно меньше неизвестных. Далее, несмотря на внешнее сходство систем  $(\mathcal{P}_H)$  и  $(\mathcal{P}_E)$ , их решения обладают в общем случае различной гладкостью: векторное поле  $H$ , в отличие от  $E$ , не может иметь разрывов первого рода и, следовательно, является более удобным для аппроксимации.

В частности,  $H \in [H^1(\mathbb{R}^2)]^3$ , т. е. компоненты поля  $H$  являются элементами  $H^1(\mathbb{R}^2)$  — пространства Соболева комплекснозначных скалярных функций, имеющих конечную норму

$$\|\varphi\|_{1,\mathbb{R}^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla \varphi|^2 + |\varphi|^2) dx.$$

Дополнительный и весьма важный аргумент в пользу системы  $(\mathcal{P}_H)$  состоит в том, что она эквивалентна одному уравнению

$$(\mathcal{P}) \quad \operatorname{rot}_\beta (\varepsilon^{-1} \operatorname{rot}_\beta H) - \varepsilon_\infty^{-1} \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta H) = k^2 H.$$

Ясно, что с точки зрения аппроксимации уравнение  $(\mathcal{P})$  существенно проще системы  $(\mathcal{P}_H)$ . Эти утверждения основаны на следующей теореме, доказанной в [94] (для удобства читателей мы приводим этапы доказательства).

**Теорема.** Следующие утверждения эквивалентны:

- (i)  $(E, H)$  есть нетривиальное решение  $(\mathcal{P}_{EH})$  и  $E, H \in [L_2(\mathbb{R}^2)]^3$ .
- (ii)  $H$  есть нетривиальное решение  $(\mathcal{P})$  и  $H \in [H^1(\mathbb{R}^2)]^3$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если имеет место (i), то имеет место также  $(\mathcal{P}_H)$ . Из вторых уравнений систем  $(\mathcal{P}_{EH})$  и  $(\mathcal{P}_H)$  следует, что дополнительно к  $H \in [L_2(\mathbb{R}^2)]^3$  имеем также, что  $\operatorname{rot}_\beta H \in [L_2(\mathbb{R}^2)]^3$  и  $\operatorname{div}_\beta H \in L_2(\mathbb{R}^2)$ . Отсюда выводится, что  $H \in [H^1(\mathbb{R}^2)]^3$ . Ясно, что если  $H$  — решение системы  $(\mathcal{P}_H)$ , то  $H$  удовлетворяет также  $(\mathcal{P})$ .

Обратно, пусть имеет место (ii). Положим  $\varphi = \operatorname{div}_\beta H$ . Применяя  $\operatorname{div}_\beta$  к обеим частям  $(\mathcal{P})$ , получим  $-\varepsilon_\infty^{-1} \operatorname{div}_\beta (\operatorname{grad}_\beta \varphi) = k^2 \varphi$ , что равносильно уравнению  $-\Delta \varphi + (\beta^2 - k^2 \varepsilon_\infty) \varphi = 0$  в  $\mathbb{R}^2$ . Так как  $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^2)$ , то отсюда следует, что  $\varphi = 0$ , т. е.  $\operatorname{div}_\beta H = 0$  в  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

Из текста “доказательства” видно, что постоянную  $\varepsilon_\infty^{-1}$  в уравнении  $(\mathcal{P})$  можно было бы заменить на произвольную положительную постоянную. Выбор этой константы объясняется тем, что уравнение  $(\mathcal{P})$  в области  $\Omega_\varepsilon$ , в которой  $\varepsilon = \varepsilon_\infty$ , сводится к однородному уравнению Гельмгольца

$$-\Delta H + p^2 H = 0, \quad p^2 := \beta^2 - k^2 \varepsilon_\infty,$$

поскольку (см. с. 20),

$$\operatorname{rot}_\beta (\operatorname{rot}_\beta H) = -\Delta H + \beta^2 H + \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta H).$$

Этот факт в дальнейшем будет играть важную роль.

Итак, исходную задачу о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов сформулируем следующим образом.

*Найти  $(\beta, k) \in \Lambda$  и ненулевые функции  $H \in [H^1(\mathbb{R}^2)]^3$  такие, что в  $\mathbb{R}^2$  справедливо уравнение (P).*

Вопросы разрешимости сформулированной нами задачи, а также качественные свойства дисперсионных кривых впервые были исследованы в работе [94]. В ней задача естественным образом сводится к спектральной задаче вида  $A(\beta)H = k^2 H$  в пространстве  $[H^1(\mathbb{R}^2)]^3$ . Более точно, для каждого заданного  $\beta > 0$  отыскиваются собственные числа  $k^2 = k^2(\beta)$  и собственные функции  $H = H(\beta)$  оператора  $A(\beta)$ . Показывается, что  $A(\beta)$  — неограниченный, самосопряженный и положительно определенный оператор. Он порождается левой частью уравнения (P) и квадратично зависит от параметра  $\beta$ . В работе [94] доказано, что при произвольной  $\epsilon$ , удовлетворяющей условиям, сформулированным на с. 122, свойства решений задачи качественно такие же, как и для задачи о собственных волнах волновода кругового поперечного сечения с постоянной диэлектрической проницаемостью (эта задача была подробно рассмотрена ранее на с. 31). А именно, при любом  $\beta > 0$  существует конечное число (не меньше двух) собственных чисел  $k^2(\beta)$ , образующих дискретный спектр  $A(\beta)$ , и соответствующие им собственные подпространства функций  $H(\beta)$  конечной размерности. Число решений возрастает с ростом  $\beta$  и стремится к бесконечности при  $\beta \rightarrow \infty$ . Кроме того, все числа  $k^2 \geq \beta^2/\epsilon_\infty$  образуют непрерывный спектр оператора  $A(\beta)$ . Функции  $\beta \rightarrow k(\beta)$ , называемые дисперсионными кривыми, являются возрастающими, имеют линейную асимптотику, а именно,  $k(\beta)/\beta \rightarrow \epsilon_+^{1/2}$  при  $\beta \rightarrow \infty$ . Значения частот электромагнитных колебаний  $\omega$ , при которых  $k^2(\beta) = \beta^2/\epsilon_\infty$ , называются критическими частотами, а соответствующие значения волновых чисел  $k$  — точками отсечки. Благодаря монотонной зависимости  $k$  от  $\beta$  эти результаты легко интерпретировать в терминах зависимости  $\beta$  от  $k$  (или от  $\omega$ ), более полезной с точки зрения практических приложений.

Эти результаты дают достаточно полное представление о качественных свойствах спектра собственных волн, однако для расчета спектральных характеристик волноводов требуется привлечение соответствующих численных методов (см. обзоры [53], [102]). Отметим

две особенности рассматриваемых задач, которые являются существенными с точки зрения численных методов.

1. Исходная задача формулируется на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ . При численном решении обычно необходимы те или иные дополнительные меры по ограничению области интегрирования.

2. Исходная задача представляет собой параметрическую спектральную задачу, которая, кроме конечного дискретного спектра, имеет также полуограниченный непрерывный спектр, что характерно для задач в неограниченных областях. При численном решении обычно необходимы дополнительные меры по отсеиванию “ложных” приближенных решений, соответствующих непрерывной части спектра (напомним, что его положение известно точно).

Одним из эффективных численных методов является метод конечных элементов (МКЭ), который активно применяется для численного анализа спектральных характеристик диэлектрических волноводов с 70-х годов прошлого столетия (см., например, обзорные статьи [53], [102]). Его развитие во многом определяется разработкой новых конечных элементов, а также методов, позволяющих свести задачу в неограниченной области к новой задаче в ограниченной области. В этих методах вводится искусственная граница  $\Gamma$ , разбивающая плоскость на две части: конечную расчетную область  $\Omega$ , и неограниченную область  $\Omega_\infty$ . На  $\Gamma$  ставятся некоторые граничные условия, учитывающие поведение амплитуд собственных волн на бесконечности.

Краевые условия на искусственной границе  $\Gamma$ , предложенные к началу 90-х годов прошлого столетия, являлись локальными и приближенными (подробный обзор см. в статье [53]). Их основной недостаток с практической точки зрения заключался в том, что на частотах, близких к критическим, размер расчетной области  $\Omega$  приходилось выбирать слишком большим. С начала 90-х годов получил распространение иной подход, основанный на использовании точных нелокальных условий, позволяющих эквивалентным образом свести исходную задачу к задаче в ограниченной области  $\Omega$ . Обзор результатов, полученных на основе этого подхода, содержится в работе [102]. Точные условия на контуре  $\Gamma$  имеют вид  $L_\Gamma u + S_\Gamma u = 0$ , где  $L_\Gamma$  — дифференциальный оператор естественного краевого условия, а  $S_\Gamma$  — некоторый нелокальный (интегральный) оператор. Для построения оператора  $S_\Gamma$  в явном виде используются два метода: граничных интегральных уравнений и разделения переменных.

Метод граничных интегральных уравнений оказывается эффективным в случае плоскопараллельной слоистой окружающей среды (функция  $\varepsilon_\infty$  является кусочно-постоянной). Функция Грина для уравнения Гельмгольца в этом случае хорошо известна, и на ее основе строится представление решения задачи в области  $\Omega_\infty$ . Такой подход комбинирования метода конечных элементов с методом интегральных уравнений был использован в статье [103] для численного решения задачи о собственных волнах слабонаправляющего диэлектрического волновода на подложке.

Для волновода в однородной окружающей среде более эффективным является метод разделения переменных. В связи с этим отметим работу [126], в которой предполагалась переменной также магнитная проницаемость  $\mu$  волновода, а исходная задача формулировалась в терминах поля  $E$ :

$$\operatorname{rot}_\beta (\mu^{-1} \operatorname{rot}_\beta E) = \omega^2 \varepsilon_0 E, \quad \operatorname{div}_\beta (\varepsilon E) = 0.$$

На основе метода разделения переменных в ней сформулированы точные нелокальные краевые условия в случае круговой области  $\Omega$ . В итоге получается нелинейная спектральная задача относительно  $\omega$ , в операторной постановке имеющая вид  $A(\beta, \omega)H = \omega^2 B H$ . Здесь  $A$  и  $B$  — самосопряженные операторы, действующие в гильбертовом пространстве вектор-функций, удовлетворяющих, в частности, ограничению  $\operatorname{div}_\beta (\varepsilon E) = 0$ . Для аппроксимации этой задачи указываются специальные конечные элементы, а также приводится итерационный метод решения конечномерной задачи.

Оператор  $S_\Gamma = S_\Gamma(p)$  точного нелокального краевого условия для задачи  $(\mathcal{P})$  в явном виде был построен в работе [15] для круговой области  $\Omega$ , используя также метод разделения переменных ( $p$  — поперечное волновое число). В операторной постановке эквивалентная задача в круге имеет вид  $A(\beta, k)H = k^2 B H$ , где  $A$  и  $B$  — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве  $[H^1(\Omega)]^3$ , причем оператор  $B$  является компактным. Для аппроксимации этой задачи можно использовать традиционные конечные элементы, однако для решения соответствующих конечномерных задач, как и в [126], требуются специальные итерационные методы, учитывающие нелинейное вхождение спектрального параметра. Теория и практика таких методов на сегодняшний день недостаточно разработаны, а эффективность имеющихся оставляет желать лучшего.

В данном разделе мы развиваем подход, предложенный в статье [22], и эквивалентным образом сводим исходную задачу  $(\mathcal{P})$  к линейной обобщенной задаче на собственные значения относительно первых двух компонент  $\mathcal{H}$  поля  $H$  вида  $\mathcal{A}(p)\mathcal{H} = \beta^2 \mathcal{B}(p)\mathcal{H}$ . Здесь  $\mathcal{A}(p)$  — ограниченный, а  $\mathcal{B}(p)$  — компактный самосопряженный операторы в гильбертовом пространстве  $[H^1(\Omega)]^2$ , нелинейно зависящие от параметра  $p$  ( $\Omega$  — круг,  $p$  — поперечное волновое число). Для аппроксимации этой задачи также можно использовать традиционные конечные элементы. Квадраты постоянных распространения собственных волн ( $\beta^2$ ) мы получаем, решая задачу при  $p > 0$ , а квадраты точек отсечки ( $\beta^{02}$ ) — при  $p = 0$ . По точкам отсечки  $\beta^0$  легко вычисляются критические частоты  $\omega^0$ .

Поперечное волновое число широко используется в качестве одной из спектральных характеристик диэлектрических волноводов (см., например, монографию [75] и обзорные статьи [9], [53]). Традиционно в инженерной и физической литературе изучается зависимость волнового числа  $p$  от частоты электромагнитных колебаний  $\omega$  (зная эту зависимость, легко восстановить зависимость постоянной распространения  $\beta$  от  $\omega$ ). Мы же предлагаем искать дисперсионные кривые в параметрическом виде  $p \rightarrow (\beta(p), \omega(p))$ . Благодаря тому, что конечномерная задача вычисления функции  $p \rightarrow \beta^2(p)$  является стандартной и для ее реализации имеются эффективные численные методы, в итоге получаем экономичный метод вычисления дисперсионных кривых и собственных волн.

Вкратце содержание настоящего раздела книги таково. Шестая глава содержит абстрактные результаты, необходимые для исследования существования решений и оценок точности схем МКЭ, конструируемых в седьмой и восьмой главах. Седьмая глава посвящена решению скалярной задачи, а восьмая — векторной задачи  $(\mathcal{P})$ . Скалярная задача рассматривается как модельная. Методика ее изучения позволяет легко понять все элементы предлагаемого подхода и напрямую обобщается на векторный случай. Обе задачи эквивалентным образом сводятся к спектральным задачам для самосопряженных операторов в круге  $\Omega$ . Изучаются вопросы существования и свойства решений полученных задач. Строятся их конечноэлементные аппроксимации и получаются оценки точности. В девятой главе описываются результаты вычислительных экспериментов с целью практической оценки точности предлагаемых методов.

## ГЛАВА 6

ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ  
И МЕТОД ГАЛЕРКИНА С ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Здесь рассматриваются обобщенные задачи на собственные значения в гильбертовом пространстве и изучается метод Галеркина с возмущениями для их приближенного решения. Этот метод широко и успешно используется в практике вычислений. Материал главы является основой как исследований вопросов существования поверхностных собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов, так и для анализа методов их приближенного определения, рассматриваемых в следующих главах.

## § 1. Обобщенная задача на собственные значения

Пусть  $V$  — бесконечномерное вещественное гильбертово пространство с нормой  $\|\cdot\|$  и скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$ ;  $A, B$  — ограниченные самосопряженные операторы в  $V$ . Рассмотрим задачу на собственные значения: *найти такие  $\lambda \in \mathbb{R}$  и ненулевые  $u \in V$ , что*

$$Au = \lambda Bu, \quad (6.1)$$

или, на языке симметричных билинейных форм этих операторов,

$$(P_\lambda) \quad a(u, v) = \lambda b(u, v) \quad \forall v \in V.$$

Дополнительно будем предполагать, что оператор  $B$  является компактным, размерность образа  $B$  равна бесконечности<sup>1)</sup>,

$$m_A \|u\|^2 \leq a(u, u) \leq M_A \|u\|^2, \quad 0 \leq b(u, u) \leq M_B \|u\|^2, \quad u \in V, \quad (6.2)$$

где  $m_A > 0$ . Кратко условия (6.2) будем записывать в виде<sup>2)</sup>

$$m_A I \leq A \leq M_A I, \quad 0 \leq B \leq M_B I.$$

<sup>1)</sup>Образ  $B := \text{Im} B := \{f \in V : f = Bu, u \in V\}$ .

<sup>2)</sup> $I$  обозначает тождественный оператор в  $V$ . Оценки снизу в (6.2) означают, что  $A$  — положительно определенный оператор, а  $B$  — неотрицательный.

Отметим, что из условий на формы  $a$  и  $b$  следует, что

$$|a(u, v)| \leq M_A \|u\| \|v\|, \quad |b(u, v)| \leq M_B \|u\| \|v\|, \quad u, v \in V.$$

Пара  $(\lambda, u)$ ,  $u \neq 0$ , удовлетворяющая  $(P_\lambda)$ , называется собственной парой;  $\lambda$  — собственным числом;  $u$  — собственным элементом, соответствующим  $\lambda$ . Множество  $U(\lambda) := \ker(A - \lambda B)$ , состоящее из собственных элементов, соответствующих  $\lambda$ , называется собственным подпространством, а его размерность  $(\dim U(\lambda))$  — кратностью  $\lambda$ <sup>1)</sup>. В дальнейшем задачу вида (6.1), как это принято, будем понимать как задачу нахождения пар  $(\lambda, U(\lambda))$ .

Нетрудно видеть, что элементы из  $\ker B$  не могут быть собственными элементами, а собственные числа  $\lambda$  являются положительными. Ясно также, что задача на собственные значения  $Bu = \mu Au$  или

$$(P_\mu) \quad b(u, v) = \mu a(u, v) \quad \forall v \in V, \quad u \neq 0,$$

имеет собственное число  $\mu = 0$ , которому соответствует собственное подпространство  $\ker B$ , причем пара  $(\mu, u)$ ,  $\mu > 0$ , является собственной парой задачи  $(P_\mu)$  тогда и только тогда, когда  $(\lambda, u)$  — собственная пара  $(P_\lambda)$  и  $\lambda = 1/\mu$ .

Задача  $(P_\mu)$  равносильна задаче на собственные значения

$$Tu = \mu u, \quad T := A^{-1}B. \quad (6.3)$$

Оператор  $T$  как произведение ограниченного и компактного операторов является компактным. Кроме того, он является самосопряженным в гильбертовом пространстве  $V_A$ <sup>2)</sup>. Из теории компактных операторов непосредственно следует (см., напр., [70, с. 245])

**Теорема 6.23.** *Существует счетное множество положительных чисел  $\lambda^K$ ,  $K = 1, 2, \dots$ , с единственной точкой накопления  $+\infty$ , образующих полный набор собственных чисел задачи  $(P_\lambda)$ . Соответствующие им собственные подпространства  $U^K$ ,  $K \geq 1$ , — конечномерны,  $V_A = \bigoplus_{K=1}^{\infty} U^K \oplus \ker B$ <sup>3)</sup>.*

<sup>1)</sup> $\ker A := \ker a := \{u \in V : a(u, u) = 0\}$ .

<sup>2)</sup>Элементами  $V_A$  являются элементы  $V$ , форма  $a$  определяет скалярное произведение в нем. В силу (6.2) норма  $\|\cdot\|_A := a^{1/2}(\cdot, \cdot)$  в  $V_A$  эквивалентна норме  $V$ .

<sup>3)</sup> $\oplus$  означает прямую сумму пространств. Если  $V = U \oplus W$ , то  $U = V \ominus W = W^\perp$  есть ортогональное дополнение  $W$ .

Пусть  $\mu^K := 1/\lambda^K$ . Тогда  $(\mu^K, U^K)$ ,  $K \geq 1$ , — решения задачи  $(P_\mu)$ .

Введем другую нумерацию собственных чисел  $\lambda^K$ ,  $K = 1, 2, \dots$  (нумерацию по возрастанию с учетом кратности). А именно, пронумеруем их по возрастанию,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots,$$

указывая каждое число  $\lambda^K$  в этом ряду столько раз, какова его кратность. Известно следующее вариационное описание этих чисел (минимаксный принцип Куранта — Фишера):

$$\frac{1}{\lambda_i} = \mu_i = \max_{V_i \subset V} \min_{v \in V_i \setminus \{0\}} R(v), \quad i = 1, 2, \dots, \quad R(v) := \frac{b(v, v)}{a(v, v)}.$$

Здесь максимум берется по всем подпространствам  $V$  размерности  $i$ ; функционал  $R$  называется отношением Рэля.

Далее будем считать, что  $r_K$  есть кратность  $\lambda^K$ , а  $k$  означает такой номер, соответствующий  $K$ , что

$$\lambda^K = \lambda_k, \quad \lambda_{k-1} < \lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+r_K-1} < \lambda_{k+r_K}.$$

Соответственно, полагая  $\mu_i = 1/\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , получим<sup>1)</sup>:

$$0 < \dots \leq \mu_3 \leq \mu_2 \leq \mu_1,$$

$$\mu^K = \mu_k, \quad \mu_{k+r_K} < \mu_{k+r_K-1} = \dots = \mu_{k+1} = \mu_k < \mu_{k-1}. \quad (6.4)$$

В каждом пространстве  $U^K$  фиксируем некоторый ортонормированный в  $V_A$  базис так, что  $\text{span}$  означает линейную оболочку)

$$U^K = \text{span}\{u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+r_K-1}\}. \quad (6.5)$$

Тогда последовательности  $\lambda_i$  (или  $\mu_i$ ),  $i = 1, 2, \dots$ , будет поставлена в соответствие ортонормированная в  $V_A$  последовательность собственных элементов, образующих базис в  $V_A \ominus \ker B$ :

$$u_1, u_2, u_3, \dots, \quad a(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad b(u_i, u_j) = \mu_i \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Произвольный элемент  $v \in V$  представим в виде

$$v = v_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i, \quad v_0 \in \ker B, \quad c_i = a(v, u_i).$$

<sup>1)</sup>В (6.4) нужно опустить правое неравенство при  $k = 1$ , как и левое — в (6.23).

Отметим, что  $a(v_0, u_i) = \lambda_i b(v_0, u_i) = 0$  для всех  $i \geq 1$ . Кроме того,

$$a(v, v) = c_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2, \quad b(v, v) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i c_i^2, \quad c_0^2 = a(v_0, v_0).$$

## § 2. Метод Галеркина с возмущениями

**1. Описание метода.** Пусть  $h \in \mathbb{R}_+$  — малый параметр, а  $\{V_h\}_h$  — предельно плотная последовательность конечномерных подпространств  $V$ , т. е.

$$(H_1) \quad V_h \subseteq V; \quad \forall u \in V: \quad \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad ^1)$$

Введем симметричные билинейные формы  $a_h$  и  $b_h$ , являющиеся возмущениями (аппроксимациями) форм  $a$  и  $b$  на  $V_h \times V_h$ . Будем считать, что для любого  $v \in V_h$  справедливы оценки

$$(H_2) \quad m_a \|v\|^2 \leq a_h(v, v) \leq M_a \|v\|^2, \quad 0 \leq b_h(v, v) \leq M_b \|v\|^2,$$

где постоянные  $m_a$ ,  $M_a$  и  $M_b$  не зависят от  $h$ ,  $m_a > 0$ .

Рассмотрим аппроксимацию задачи  $(P_\mu)$  методом Галеркина с возмущениями: *найти*  $(\mu^h, y) \in \mathbb{R} \times V_h \setminus \{0\}$  *такие, что*

$$(P_\mu^h) \quad b_h(y, v) = \mu^h a_h(y, v) \quad \forall v \in V_h.$$

Пусть  $h$  фиксировано,  $N_h$  есть размерность пространства  $V_h$ , а элементы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h}$  определяют в нем базис. Тогда задача  $(P_\mu^h)$  эквивалентна алгебраической задаче на собственные значения

$$B_h x = \mu^h A_h x, \quad 0 \neq x \in \mathbb{R}^{N_h}. \quad (6.6)$$

Здесь  $x$  есть вектор коэффициентов разложения  $y$  по указанному базису, а симметричные матрицы  $A_h$  и  $B_h$  имеют следующие элементы:

$$a_{ij} := a_h(\varphi_i, \varphi_j), \quad b_{ij} := b_h(\varphi_i, \varphi_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, N_h.$$

<sup>1)</sup>В теории аппроксимации, как правило, вместо малого параметра  $h$  используется “большой” параметр  $n$ , указывающий на размерность подпространства. Параметр  $h$  общепринят в теории МКЭ и обозначает максимальный размер конечных элементов. Использование  $h$  вместо  $n$  существенно облегчит нам дальнейшие ссылки.



Из условий  $(H_2)$  следует, что  $A_h$  является положительно определенной матрицей, а  $B_h$  — неотрицательно определенной. Ясно, что задача (6.6) имеет нулевое собственное число кратности  $\dim(\ker B_h)$  и, скажем,  $n_h$  положительных собственных чисел  $\mu^{hK}$ , суммарной кратности, равной  $N_h^b := N_h - \dim(\ker B_h)$ ,  $n_h \leq N_h^{b1}$ . Как и в исходной задаче  $(P_\mu)$  занумеруем положительные собственные числа в убывающем порядке с учетом кратности:

$$0 < \mu_{N_h^b}^h \leq \dots \leq \mu_2^h \leq \mu_1^h.$$

Поставим им в соответствие собственные элементы

$$y_{N_h^b}, \dots, y_2, y_1, \quad a_h(y_i, y_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N_h^b.$$

Тогда любой элемент  $v_h \in V_h$  представим в виде

$$v_h = y_0 + \sum_{i=1}^{N_h^b} c_i y_i, \quad y_0 \in \ker B_h, \quad c_i = a_h(v_h, y_i). \quad (6.7)$$

Отметим, что  $a_h(y_0, y_i) = 0$ ,  $1 \leq i \leq N_h^b$ . Кроме того,

$$a_h(v_h, v_h) = c_0^2 + \sum_{i=1}^{N_h^b} c_i^2, \quad b_h(v_h, v_h) = \sum_{i=1}^{N_h^b} \mu_i^h c_i^2, \quad c_0^2 = a_h(y_0, y_0). \quad (6.8)$$

Аппроксимацию собственного подпространства  $U^K$ ,  $K \geq 1$ , задачи  $(P_\mu)$ , соответствующего собственному числу  $\mu^K$  кратности  $r_K$ , определим следующим образом (см. (6.5)):

$$U_h^K := \text{span}(y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+r_K-1}),$$

а числа  $\mu_{k+r_K-1}^h, \dots, \mu_{k+1}^h, \mu_k^h$  будем рассматривать как приближения собственного числа  $\mu^K$ . Здесь  $k$  связано с  $K$  согласно (6.4).

Прежде чем перейти к рассмотрению вопросов, касающихся сходимости и точности описанных приближений, определим способ измерения близости собственных подпространств  $U^K$  и  $U_h^K$  посредством величины, называемой раствором между подпространствами. Дадим его определение.

<sup>1)</sup>Далее мы наложим дополнительные ограничения на формы  $a_h$  и  $b_h$  (см. условие  $(H_3)$ ). В этом случае  $N_h^b \rightarrow \infty$  при  $h \rightarrow 0$ .

Пусть  $H$  — гильбертово пространство с нормой  $\|\cdot\|_H$  и скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)_H$ ,  $U$  — его подпространство. Оператор  $P$  называется ортопроектором в  $H$  на  $U$ , если  $Pu$  есть такой элемент  $U$ , что

$$\|u - Pu\|_H := \inf_{v \in U} \|u - v\|_H, \quad u \in H,$$

или, эквивалентно,

$$(u - Pu, v)_H = 0 \quad \forall v \in U, \quad u \in H.$$

Ясно, что  $P$  является линейным оператором и  $\|Pu\|_H \leq \|u\|_H$ .

Пусть теперь  $U$  и  $U_h$  — конечномерные подпространства  $H$  одинаковой размерности. Раствор между ними определяется следующим образом (см., напр., [56, с. 195]):

$$\Theta_H(U, U_h) := \max_{u \in U, \|u\|_H=1} \|u - P_h u\|_H := \max_{y \in U_h, \|y\|_H=1} \|y - Py\|_H,$$

где  $P$  и  $P_h$  — ортопроекторы в  $H$  на  $U$  и  $U_h$ , соответственно.

Имеют место равенства

$$\min_{u \in U, \|u\|_H=1} \|P_h u\|_H^2 = \min_{y \in U_h, \|y\|_H=1} \|Py\|_H^2 = 1 - \Theta_H^2(U, U_h). \quad (6.9)$$

Отметим, что из оценки  $\Theta_V(U^K, U_h^K) \leq \varepsilon$  следует, что для любого элемента  $y \in U_h^K$ ,  $\|y\| = 1$ , найдется такой  $u \in U^K$ , что  $\|y - u\| \leq \varepsilon$ . Ясно также, что

$$c^{-1} \Theta_V(U^K, U_h^K) \leq \Theta_{V_A}(U^K, U_h^K) \leq c \Theta_V(U^K, U_h^K)$$

при  $c = (M_A/m_A)^{1/2}$ . Для заданных форм  $d$  и  $d_h$  положим

$$E_d(\varphi_h) := \sup_{v_h \in V_h, \|v_h\|=1} |d(\varphi_h, v_h) - d_h(\varphi_h, v_h)|, \quad \varphi_h \in V_h.$$

Следующие величины характеризуют максимально возможные возмущения форм  $a$  и  $b$ , соответственно:

$$\sup_{v \in V_h, \|v\|=1} E_a(v), \quad \sup_{v \in V_h, \|v\|=1} E_b(v).$$

Далее нам понадобится также функционал

$$E_{ab}(v) := E_a(v) + E_b(v), \quad v \in V_h.$$

**2. Сходимость и точность метода.** В контексте предыдущих определений введем дополнительные обозначения. Во-первых, отметим, что оператор  $T : V \rightarrow V$  в (6.3) на языке билинейных форм определяется так, что  $Tf$  есть решение уравнения

$$a(Tf, v) = b(f, v) \quad \forall v \in V.$$

Аналогично введем оператор  $T_h$ :

$$T_h : V_h \rightarrow V_h, \quad a_h(T_h f_h, v) = b_h(f_h, v) \quad \forall v \in V_h.$$

Приближенная задача  $(P_h^\mu)$  теперь может быть записана в виде

$$T_h y = \mu^h y. \quad (6.10)$$

Введем также оператор  $T^h : V_h \rightarrow V_h$  так, что

$$a(T^h f_h, v) = b(f_h, v) \quad \forall v \in V_h.$$

Легко видеть, что  $T^h = P_h T$ , где  $P_h$  — ортопроектор в  $V_A$  на  $V_h$ .

Дискретная задача: *найти  $(\mu^h, y) \in \mathbb{R} \times V_h \setminus \{0\}$  такие, что*

$$T^h y = \mu^h y, \quad (6.11)$$

определяет метод Галеркина для задачи (6.3).

Изучению сходимости и оценкам точности метода Галеркина и метода Галеркина с возмущениями посвящено множество работ. В первую очередь, отметим здесь результаты, представленные в монографиях [56], [34], относящиеся к 60-м годам прошлого века (см. также цитированную там литературу). В них изучается близость решений задач (6.10), (6.11) к решениям (6.3) в общей ситуации, когда оператор  $T$  — произвольный компактный оператор, действующий в банаховом пространстве. Получены следующие условия:

$$\|T - P_h T\| \rightarrow 0, \quad \|T_h - T^h\| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0, \quad (6.12)$$

которые являются достаточными для сходимости  $\mu_k^h \rightarrow \mu_k$  при  $h \rightarrow 0$  и  $k = 1, 2, \dots$  (см., напр., [56, с. 257–261])<sup>1)</sup>. Кроме того, при естественном предположении о малости  $h$  (т. е. при  $h$  меньших некоторого

<sup>1)</sup>Из условий (6.12) следует, что  $\|T - T_h\| \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Поэтому имеет место предел  $N_h^b := \dim V_h - \dim(\ker B_h) = \dim(\operatorname{Im} T_h) \rightarrow \infty$  при  $h \rightarrow 0$ , так как  $\dim(\operatorname{Im} T) = \infty$ .

фиксированного  $h_0$ ) получены оценки, которые в наших обозначениях имеют вид<sup>1)</sup>:

$$|\mu_k - \mu_k^h| \leq c_k (\epsilon_h^2 + \|T_h - T^h\|), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6.13)$$

$$\Theta_V(U^K, U_h^K) \leq c_K (\epsilon_h + \|T_h - T^h\|), \quad K = 1, 2, \dots \quad (6.14)$$

Здесь величина

$$\epsilon_h := \max_{u \in U^K, \|u\|=1} \|u - P_h u\|$$

характеризует погрешность приближения собственных элементов элементами из  $V_h$ . Оценка величины  $\epsilon_h$  является стандартной задачей в теории проекционных методов (в частности, в теории метода конечных элементов). Отметим, что оценка (6.13) используется при доказательстве (6.14).

Обсудим условия (6.12). Из эквивалентности норм в  $V_A$  и  $V$  следует, что проектор  $P_h$  ограничен в  $V$  и для любого  $u \in V$

$$\|(I - P_h)u\| = \|u - P_h u\| \leq c \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0$$

в силу условия  $(H_1)$ . Поэтому  $\|T - P_h T\| = \|(I - P_h)T\| \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$  (см., напр., [56, лемма 15.4, с. 202]). Таким образом, первое условие в (6.12) выполняется, если справедливо предположение  $(H_1)$ .

Малость величины  $\|T_h - T^h\|$  зависит от малости возмущения форм  $a$  и  $b$ . Действительно, поскольку для любых  $f, v \in V_h$  имеет место представление

$$\begin{aligned} a_h(T^h f - T_h f, v) &= \\ &= [a(T^h f, v) - a_h(T_h f, v)] + [a_h(T^h f, v) - a(T^h f, v)] = \\ &= [b(f, v) - b_h(f, v)] + [a_h(T^h f, v) - a(T^h f, v)], \end{aligned}$$

а  $T^h = P_h T$ , то  $|a_h(T^h f - T_h f, v)| \leq (E_b(f) + E_a(P_h T f))\|v\|$ . Полагая здесь  $v = T^h f - T_h f$  и учитывая условия  $(H_2)$ , получим

$$\|T^h - T_h\| \leq c \sup_{f \in V_h, \|f\|=1} (E_b(f) + E_a(P_h T f)).$$

Таким образом, условий  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  и условия

<sup>1)</sup>Здесь и далее буквой  $c$ , возможно с индексом, обозначаются различные положительные постоянные, не зависящие от  $h$ .

$$(H_3) \quad \sup_{f \in V_h, \|f\|=1} (E_b(f) + E_a(P_h T f)) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0$$

достаточны для сходимости  $\mu_k^h \rightarrow \mu_k$  при  $h \rightarrow 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Оценки (6.13), (6.14) являются неупрощаемыми для метода Галеркина (в этом случае  $T_h = T^h$ ), но не всегда являются таковыми для метода Галеркина с возмущениями. Дело здесь в том, что погрешность возмущений в этих оценках оценивается на самом “плохом” элементе  $V_h$ .

Уточнениям и упрощениям доказательств отмеченных выше оценок было посвящено множество работ (см., напр., [106], [150], [157], [112], [113], [108], [91], [95], [143], [158], [76]). Особо выделим среди них работы Дж. Осборна (J. Osborn) и его коллег. В разработанной ими методике сначала оценивается точность собственных элементов, а лишь затем — собственных чисел. Например, в [150] были получены абстрактные оценки точности, приводящие к оптимальным оценкам спектральных аппроксимаций задач на собственные значения для дифференциальных или интегральных операторов (не обязательно самосопряженных). В [95] получены аналогичные оценки, приводящие к оптимальным оценкам, в частности, в методе конечных элементов с численным интегрированием. Например, там получена оценка (ср. с (6.14))

$$\Theta_V(U^K, U_h^K) \leq c_K (\epsilon_h + \|(T_h - T^h)|_{U_{Kh}}\|), \quad (6.15)$$

где  $(T_h - T^h)|_{U_{Kh}}$  есть сужение оператора  $T_h - T^h$  на  $U_{Kh}$  — собственное подпространство в методе Галеркина (без возмущений), определяемое аналогично  $U_h^K$ .

На наш взгляд, наиболее естественные и удобные для применения в разнообразных приложениях оценки точности метода Галеркина с возмущениями получены в [76], [77], [78] (для самосопряженных положительно определенных операторов  $A$  и  $B$  в гильбертовом пространстве). В этих работах доказан следующий аналог оценки (6.15):

$$\Theta_V(U^K, U_h^K) \leq c_K (\epsilon_h + \max_{u \in U^K, \|u\|=1} E_{ab}(P_h u)).$$

Ниже мы получим обобщение этих результатов на случай неотрицательно определенного оператора  $B$ .

**3. Оценки точности.** Исследуем близость решений задач  $(P_\mu)$  и  $(P_\mu^h)$ . Пусть  $(\mu^K, U^K)$  — решение задачи  $(P_\mu)$ ,  $r_K$  — кратность  $\mu^K$  при  $K \geq 1$ . Пусть далее  $\mu_{k+r_K-1}^h, \dots, \mu_{k+1}^h, \mu_k^h$  и  $U_h^K$  — их аппроксимации, определенные выше в п. 1. Положим

$$\epsilon_h(u) := \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| + E_{ab}(P_h u), \quad u \in V,$$

$$\Sigma_h(y) := |a(y, y) - a_h(y, y)| + |b(y, y) - b_h(y, y)|, \quad y \in V_h,$$

через  $P_h$  обозначим ортопроектор в  $V_A$  на  $V_h$ . По определению

$$a(u - P_h u, v) = 0 \quad \forall v \in V_h, \quad u \in V.$$

Из условия (6.2) следует, что

$$\|u - P_h u\| \leq c \inf_{v \in V_h} \|u - v\| \leq c \epsilon_h(u), \quad c = (M_A/m_A)^{1/2}.$$

Будем предполагать, что выполнены условия  $(H_1)$ – $(H_3)$ . Как было показано выше, эти условия обеспечивают сходимость приближенных собственных чисел:  $\mu_k^h \rightarrow \mu_k$  при  $h \rightarrow 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$

**Теорема 6.24.** Пусть выполнены условия  $(H_1)$ – $(H_3)$ . Тогда при достаточно малых  $h$  справедлива оценка

$$\Theta_V(U^K, U_h^K) \leq c_K \max_{u \in U^K, \|u\|=1} \epsilon_h(u), \quad K \geq 1.$$

Здесь постоянная  $c_K$  зависит от  $\mu^K$ , но не зависит от  $h$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $u \in U^K$  — собственный элемент. Положим  $y := P_h u$  и разложим  $y$  по системе  $\{y_i\}$  (см. (6.7)). Имеем

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^{N_h^b} c_i y_i =: v_h + Q_h u + w_h,$$

$$v_h := y_0 + \sum_{i=k+r_K}^{N_h^b} c_i y_i, \quad Q_h u := \sum_{i=k}^{k+r_K-1} c_i y_i \in U_h^K, \quad w_h := \sum_{i=1}^{k-1} c_i y_i.$$

Рассмотрим величину

$$\sigma_h(y) := \sup_{\eta_h \in V_h, \|\eta_h\|=1} |b_h(y, \eta_h) - \mu_k a_h(y, \eta_h)|.$$

Так как  $a(y, \eta_h) = a(P_h u, \eta_h) = a(u, \eta_h) = 1/\mu^K b(u, \eta_h)$ , то

$$\begin{aligned} b_h(y, \eta_h) - \mu^K a_h(y, \eta_h) &= \\ &= [b_h(y, \eta_h) - b(y, \eta_h)] + \mu^K [a(y, \eta_h) - a_h(y, \eta_h)] + b(y - u, \eta_h). \end{aligned}$$

Отсюда при  $c := \max\{1, \mu^K, M_B\}$  имеем

$$\sigma_h(y) \leq c (E_{ab}(y) + \|u - P_h u\|) = c \epsilon_h(u).$$

Докажем, что справедливы оценки

$$\|v_h\| \leq c_K \sigma_h(y), \quad \|w_h\| \leq c_K \sigma_h(y). \quad (6.16)$$

Тогда  $\|P_h u - Q_h u\| = \|v_h + w_h\| \leq c_K \sigma_h(y) \leq c_K \epsilon_h(u)$ ,

$$\begin{aligned} \Theta_V(U^K, U_h^K) &\leq \max_{u \in U^K, \|u\|=1} \|u - Q_h u\| \leq \max_{u \in U^K, \|u\|=1} (\|u - P_h u\| + \\ &\quad + \|P_h u - Q_h u\|) \leq c_K \max_{u \in U^K, \|u\|=1} \epsilon_h(u), \end{aligned}$$

т. е. утверждение теоремы будет доказано.

Получим сначала первую оценку в (6.16). Пусть  $\rho_K$  характеризует отделенность собственного числа  $\mu^K$ , т. е.

$$\rho_K := \max_{\mu_i: \mu_i \neq \mu_k} |\mu_k - \mu_i|^{-1}.$$

Поскольку  $\mu_k^h \rightarrow \mu_k$  при  $h \rightarrow 0$ , то для достаточно малых  $h$  имеем

$$\mu_k - \mu_{k+r_K}^h > c(\mu_k - \mu_{k+r_K}), \quad \mu_{k-1}^h - \mu_k > c(\mu_{k-1} - \mu_k) \quad (6.17)$$

с некоторой постоянной  $c \in (0, 1)$ . Так как система  $\{y_i\}$  является  $a_h$ -ортонормальной, то из определения  $v_h$  и (6.8) вытекает, что

$$\begin{aligned} a_h(y, v_h) &= a_h(v_h, v_h), \quad b_h(y, v_h) = b_h(v_h, v_h), \\ b_h(v_h, v_h) &\leq \mu_{k+r_K}^h a_h(v_h, v_h). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Из (6.18), (6.17) и  $(H_2)$  имеем

$$\begin{aligned} -b_h(y, v_h) + \mu^K a_h(y, v_h) &= \\ &= -b_h(v_h, v_h) + \mu_k a_h(v_h, v_h) \geq (\mu_k - \mu_{k+r_K}^h) a_h(v_h, v_h) \geq \\ &\geq c m_a (\mu_k - \mu_{k+r_K}) \|v_h\|^2 \geq c m_a \rho_K^{-1} \|v_h\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует первая оценка в (6.16).

Докажем вторую оценку в (6.16). Аналогично (6.18) имеем

$$\begin{aligned} a_h(y, w_h) &= a_h(w_h, w_h), \quad b_h(y, w_h) = b_h(w_h, w_h), \\ b_h(w_h, w_h) &\geq \mu_{k-1}^h a_h(w_h, w_h). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} b_h(y, w_h) - \mu_k a_h(y, w_h) &= b_h(w_h, w_h) - \mu_k a_h(w_h, w_h) \geq \\ &\geq (\mu_{k-1}^h - \mu_k) a_h(w_h, w_h) \geq c m_a \rho_K^{-1} \|w_h\|^2. \quad \square \end{aligned}$$

**Теорема 6.25.** Пусть выполнены условия  $(H_1)$ – $(H_3)$  и

$$\max_{u \in U^K, \|u\|=1} \epsilon_h(u) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Тогда при достаточно малых  $h$  справедлива оценка

$$|\mu^K - \mu_i^h| \leq c_K \max_{u \in U^K, \|u\|=1} (\epsilon_h^2(u) + \Sigma_h(P_h u)), \quad i = k, \dots, k + r_K - 1,$$

где  $K \geq 1$ , постоянная  $c_K$  зависит от  $\mu^K$ , но не зависит от  $h$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Непосредственно проверяется, что для любых  $u \in U^K$ ,  $y \in V_h$  имеет место следующее равенство ( $\mu_i = \mu^K$  при  $i = k, \dots, k + r_K - 1$ ):

$$\begin{aligned} (\mu_i^h - \mu^K) a_h(y, y_i) &= b(y - u, y_i - u) - \mu_i a(y - u, y_i - u) + \\ &\quad + [b_h(y, y) - b(y, y)] - \mu_i [a_h(y, y) - a(y, y)] + \\ &\quad + [b_h(y, y_i - y) - b(y, y_i - y)] - \mu_i [a_h(y, y_i - y) - a(y, y_i - y)], \end{aligned}$$

где  $y_i$  — собственный элемент, соответствующий  $\mu_i^h$ ,  $\|y_i\|_A = 1$ . Поэтому

$$\begin{aligned} |\mu^K - \mu_i^h| |a_h(y, y_i)| &\leq c_K (\|y - u\| \|y_i - u\| + \Sigma_h(y) + E_{ab}(y) \|y_i - y\|) \leq \\ &\leq c_K (\|y - u\| \|y_i - u\| + \Sigma_h(y) + E_{ab}(y) (\|y_i - u\| + \|y - u\|)). \end{aligned}$$

Выберем здесь  $u = P^K y_i$  ( $P^K$  — ортопроектор в  $V_A$  на  $U^K$ ), положим  $y = P_h u$  и учтем, что

$$\|y - u\| := \|P_h u - u\| \leq c \epsilon_h(u), \quad E_{ab}(y) \leq \epsilon_h(u),$$

$$\begin{aligned} \|y_i - u\| &\leq c \|y_i - u\|_A \leq c \sup_{y \in U_h^K, \|y\|_A=1} \|y - P^K y\|_A =: \\ &=: c \Theta_{V_A}(U^K, U_h^K) \leq c \Theta_V(U^K, U_h^K) \leq c_K \max_{u \in U^K, \|u\|=1} \epsilon_h(u). \end{aligned}$$

В результате будем иметь

$$|\mu^K - \mu_i^h| |a_h(P_h u, y_i)| \leq c_K \max_{u \in U^K, \|u\|=1} (\epsilon_h^2(u) + \Sigma_h(P_h u)).$$

Из этой оценки будет следовать утверждение теоремы, если будет показано, что

$$a_h(P_h u, y_i) \geq c = \text{const} > 0. \quad (6.19)$$

Докажем (6.19). Пусть  $\psi_h := a_h(P_h u, y_i) - a(P_h u, y_i)$ . Поскольку

$$\begin{aligned} \|P^K y_i\|_A &\leq \|y_i\|_A := 1, \\ |\psi_h| &\leq c E_a(P_h u) \|y_i\|_A \leq c E_{ab}(P_h u) \leq c \epsilon_h(u), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} a_h(P_h u, y_i) &= a(P_h u, y_i) + \psi_h = a(u, y_i) + \psi_h = a(u, P^K y_i) + \psi_h = \\ &= \|P^K y_i\|_A^2 + \psi_h \geq 1 - \Theta_{V_A}^2(U^K, U_h^K) - c \epsilon_h(u) \geq 1 - c_K \epsilon_h(u). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались свойством ортопроектора (6.9). Отсюда следует (6.19) при достаточно малом  $h$ .  $\square$

### § 3. Параметрическая задача на собственные значения

Задачи, которые мы будем изучать в последующих двух главах, могут быть сформулированы в следующем общем виде.

Пусть  $\overline{\mathbb{R}}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$  и задано семейство самосопряженных ограниченных операторов  $A(p)$  и  $B(p)$ ,  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$ <sup>1)</sup>, действующих в вещественном бесконечномерном гильбертовом пространстве  $V$  с нормой  $\|\cdot\|$  и скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$ . При заданном  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$  требуется найти такие  $\lambda \in \mathbb{R}$  и ненулевые  $u \in V$ , что

$$(\mathcal{P}) \quad A(p)u = \lambda B(p)u,$$

<sup>1)</sup>Или, равносильно, самосопряженные оператор-функции  $p \rightarrow A(p)$  и  $p \rightarrow B(p)$  на  $\overline{\mathbb{R}}_+$

или, на языке симметричных билинейных форм, порождаемых этими операторами,

$$a(p, u, v) = \lambda b(p, u, v) \quad \forall v \in V.$$

В данном параграфе нас будут интересовать ответы на следующие вопросы:

- (i) сколько решений  $(\lambda, u)$  имеет задача при заданном  $p$  и как собственные числа  $\lambda$  зависят от  $p$ ?
- (ii) сколько имеется решений  $(\lambda, u)$  с заданным  $\lambda$  при различных значениях параметра  $p$ ?

Мы исследуем эти вопросы для таких классов операторов, которые возникают в приложениях, рассматриваемых в следующих главах.

В связи с этим напомним некоторые определения. Говорят, что самосопряженная оператор-функция  $p \rightarrow C(p)$ ,  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$ , является (a) непрерывной на  $\overline{\mathbb{R}}_+$ , если  $\|C(p) - C(\bar{p})\| \rightarrow 0$  при  $\bar{p} \rightarrow p \in \overline{\mathbb{R}}_+$ ; (b) локально липшиц-непрерывной на  $\mathbb{R}_+$ , если для любого замкнутого отрезка  $\omega \subset \mathbb{R}_+$  найдется такая постоянная  $L_C(\omega)$ , что<sup>1)</sup>

$$\|C(p) - C(\bar{p})\| \leq L_C(\omega) |p - \bar{p}|, \quad p, \bar{p} \in \omega;$$

(c) дифференцируемой на  $\mathbb{R}_+$ , если существует такая самосопряженная оператор-функция  $p \rightarrow C'(p)$ , определенная на  $\mathbb{R}_+$ , что

$$\left\| \frac{1}{p - \bar{p}} (C(p) - C(\bar{p})) - C'(p) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \bar{p} \rightarrow p \in \mathbb{R}_+;$$

(d) аналитической на  $\mathbb{R}_+$ , если в некоторой окрестности произвольной точки  $p_0 \in \mathbb{R}_+$  она представляется сходящимся рядом

$$C(p) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(p_0) (p - p_0)^n,$$

имеющим ненулевой радиус сходимости, где  $C_n$  — самосопряженные операторы;

(e) возрастающей (убывающей, неубывающей, невозрастающей), если функция  $p \rightarrow c(p, u, u)$  является возрастающей (убывающей, неубывающей, невозрастающей) при каждом фиксированном  $u \in V$ . Здесь  $c(p, u, u) := (C(p)u, u)$  — билинейная форма оператора  $C(p)$ .

<sup>1)</sup>Если  $L_C(\omega)$  не зависит от  $\omega$ , то  $C(p)$  является липшиц-непрерывной.

Отметим также, что

$$\|C(p)\| = \sup_{u \in V} \frac{|c(p, u, u)|}{\|u\|^2} = \sup_{u \in V, \|u\|=1} |c(p, u, u)|.$$

Ясно, что дифференцируемая оператор-функция является локально липшиц-непрерывной и, тем более, непрерывной. Далее, если функция  $p \rightarrow c(p, u, u)$  является дифференцируемой при каждом фиксированном  $u \in V$  и

$$\left| \frac{d}{dp} c(p, u, u) \right| \leq M(p) \|u\|^2,$$

где  $M$  — локально ограниченная функция<sup>1)</sup>, то  $C(p)$  является дифференцируемой и

$$(C'(p)u, u) = \frac{d}{dp} c(p, u, u) \quad \forall u \in V.$$

**Определение 6.14.** Оператор-функции со свойствами а) и б) отнесем к множеству  $\mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}}_+, V)$ .  $\square$

Определим класс рассматриваемых задач. Будем считать, что:

A<sub>1</sub>)  $0 \leq A(p) \leq M_A(p)I$ ,  $0 \leq B(p) \leq M_B I$  при  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$ , где  $M_A$  — локально ограниченная функция;

A<sub>2</sub>)  $r_0 := \dim(\ker A(0)) \in [1, \infty)$ . При каждом  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$ :  $B(p)$  — компактный оператор,  $\ker B(p) = \ker B(0)$ ,  $\dim(\operatorname{Im} B(p)) = \infty$ ;

A<sub>3</sub>)  $A(p) + B(p) \geq m_{AB}I$  при  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$ ,  $m_{AB} > 0$ ;

A<sub>4</sub>) отношение Рэлея  $R(p, u) := a(p, u, u)/b(p, u, u)$  возрастает по  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$  при фиксированном  $u \in \tilde{V}$ , где  $\tilde{V}$  есть ортогональное дополнение  $\ker B(0)$  до пространства  $V_{A(p)+B(p)}$ ;

A<sub>5</sub>) оператор-функции  $A(p)$  и  $B(p)$  принадлежат множеству  $\mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}}_+, V)$ .

Отметим, что независимость величин  $M_B$  и  $m_{AB}$  от  $p$  не является для дальнейшего существенным.

Изучим по отдельности вопросы (i) и (ii), поставленные выше.

<sup>1)</sup>Ограниченная на каждом компакте из  $\mathbb{R}_+$ .

**1. Вопросы (i).** На часть вопросов отвечает

**Теорема 6.26.** При каждом  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$  существует счетное множество чисел  $\lambda^K(p)$ ,  $K \geq 1$ , с единственной точкой накопления  $+\infty$ , образующих полный набор собственных чисел задачи (P). Соответствующие им собственные подпространства  $U^K(p)$  конечномерны при  $K \geq 1$ ,  $V_{A(p)+B(p)} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} U^K(p) \oplus \ker B(0)$ . Кроме того,

$$\lambda^1(0) := \min_{K \geq 1} \lambda^K(0) = 0, \quad \dim U^1(0) = r_0.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Задача (P) при фиксированном  $p$  является обобщенной задачей на собственные значения. Преобразуем ее к виду

$$\tilde{A}(p)u = \tilde{\lambda}B(p)u, \quad u \in V \setminus \{0\}. \quad (6.20)$$

Здесь  $\tilde{A}(p) := A(p) + B(p)$ ,  $\tilde{\lambda} := \lambda + 1$ . Нетрудно видеть, что

$$m_{AB}I \leq \tilde{A}(p) \leq \tilde{M}_A(p)I, \quad \tilde{M}_A(p) := M_A(p) + M_B.$$

При фиксированном  $p$  задача (6.20) была рассмотрена нами ранее. Существование пар  $(\lambda^K(p), U^K(p))$  непосредственно следует из теоремы 6.23. Заключительные утверждения являются очевидными, так как  $\ker A(0) \cap \ker B(0) = \{0\}$  (см. A<sub>3</sub>).  $\square$

**Следствие 6.1.** Задача (P) эквивалентна задаче нахождения при каждом  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$  таких чисел  $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+$  и ненулевых  $u \in \tilde{V}$ , что

$$a(p, u, v) = \lambda b(p, u, v) \quad \forall v \in \tilde{V}. \quad \square$$

Рассмотрим зависимость собственных чисел от параметра  $p$ . Для этого при  $K = 1, 2, \dots$  на плоскости с осями  $(p, \lambda)$  при каждом  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$  отметим точки  $(p, \lambda^K(p))$ . Совокупность этих точек при фиксированном  $K$  образует на плоскости некоторую кривую (см. далее теорему 6.27), которую принято называть дисперсионной. Каждой точке такой кривой, например  $(p, \lambda^K(p))$ , соответствует собственное подпространство  $U^K(p)$ , размерность которого (кратность  $\lambda^K(p)$ ) обозначим через  $r_K(p)$ .

Чтобы изучить свойства дисперсионных кривых, нам будет удобно использовать нумерацию чисел  $\lambda^K(p)$  с учетом кратности. А именно, пронумеруем их по возрастанию,

$$0 \leq \lambda_1(p) \leq \lambda_2(p) \leq \lambda_3(p) \leq \dots, \quad \lambda_n(p) \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

указывая каждое число  $\lambda^K(p)$  в этом ряду столько раз, какова его кратность. Ясно, что функции  $\lambda_i = \lambda_i(p)$ ,  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$ ,  $i \geq 1$ , в совокупности полностью определяют дисперсионные кривые.

Как и в предыдущем параграфе, номеру  $K$  числа  $\lambda^K(p)$  поставим в соответствие целое  $k$  по правилу:  $\lambda_k(p) = \lambda^K(p)$ ,

$$\lambda_{k-1}(p) < \lambda_k(p) = \dots = \lambda_{k+r_K(p)-1}(p) < \lambda_{k+r_K(p)}(p), \quad (6.21)$$

а в каждом пространстве  $U^K(p)$  фиксируем некоторый ортонормированный в  $V_{A(p)+B(p)}$  базис так, что

$$U^K(p) = \text{span}\{u_k(p), u_{k+1}(p), \dots, u_{k+r_K(p)-1}(p)\}. \quad (6.22)$$

Тогда при каждом  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$  последовательности  $\lambda_i(p)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , будет поставлена в соответствие (неоднозначно) последовательность собственных элементов  $u_i(p)$ .

**Теорема 6.27.** При каждом  $i \geq 1$  функция  $p \rightarrow \lambda_i(p)$

a) является неотрицательной и возрастающей;

b) непрерывна в нуле, локально липшиц-непрерывна на  $\mathbb{R}_+$ .

Кроме того,  $\lambda_i(p) \searrow +0$  при  $p \rightarrow +0$ ,  $i = 1, \dots, r_0$ ;  $\lambda_{r_0+1}(0) > 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** При каждом  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$  и всех  $i \geq 1$  числа  $\lambda_i(p) + 1$  являются собственными числами задачи (6.20). Учитывая следствие 6.1 и используя минимаксный принцип Куранта — Фишера, получим

$$\frac{1}{\lambda_i(p) + 1} = \max_{V_i \subset \tilde{V}} \min_{v \in V_i \setminus \{0\}} \tilde{R}(p, v), \quad (6.23)$$

где максимум берется по всем подпространствам  $\tilde{V}$  размерности  $i$ ,

$$\tilde{R}(p, v) := \frac{b(p, v, v)}{a(p, v, v) + b(p, v, v)} = \frac{1}{a(p, v, v)/b(p, v, v) + 1}.$$

Из условия  $A_4$  заключаем, что  $\tilde{R}(p, v)$  убывает по  $p$  при фиксированном  $v \in \tilde{V}$ ; поэтому утверждение a) следует из (6.23).

Пусть  $p, \bar{p} \in \overline{\mathbb{R}}_+$ ,  $a(p) = a(p, v, v)$ ,  $b(p) = b(p, v, v)$ . Имеем

$$R(p, v) - R(\bar{p}, v) = \frac{(b(p) - b(\bar{p}))a(\bar{p}) + (a(\bar{p}) - a(p))b(\bar{p})}{(a(p) + b(p))(a(\bar{p}) + b(\bar{p}))}.$$

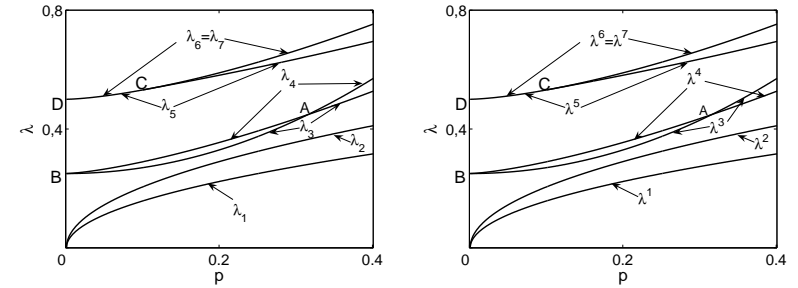


Рис. 13. На левом рисунке изображена часть плоскости  $(p, \lambda)$  и гладкие дисперсионные кривые, занумерованные по возрастанию с учетом кратности. В точках 0 и B рождаются по две кривых кратности 1, в D — одна кривая кратности 3; в точке A кривые пересекаются, в C — расщепляются. На правом рисунке использована другая нумерация этих же кривых (также с учетом кратности).

Отсюда легко выводится оценка  $|R(p, v) - R(\bar{p}, v)| = \epsilon(p, \bar{p})$ , где

$$\epsilon(p, \bar{p}) := c(\bar{p})(\|A(p) - A(\bar{p})\| + \|B(p) - B(\bar{p})\|),$$

$$c(\bar{p}) := m_{AB}^{-2}(M_A(\bar{p}) + M_B).$$

Таким образом,  $R(p, v) - \epsilon(p, \bar{p}) \leq R(\bar{p}, v) \leq R(p, v) + \epsilon(p, \bar{p})$ ; поэтому из принципа Куранта — Фишера имеем

$$\lambda_i(p) - \epsilon(p, \bar{p}) \leq \lambda_i(\bar{p}) \leq \lambda_i(p) + \epsilon(p, \bar{p}),$$

или  $|\lambda_i(p) - \lambda_i(\bar{p})| \leq \epsilon(p, \bar{p})$ . Отсюда следуют требуемые утверждения b), поскольку при  $\bar{p} = 0$  имеем (см. условие  $A_5$ ):

$$\epsilon(p, 0) = c(0)(\|A(p) - A(0)\| + \|B(p) - B(0)\|) \rightarrow 0 \quad \text{при } p \rightarrow 0,$$

а для всех  $p, \bar{p} \in \omega := [\omega_1, \omega_2] \subset \mathbb{R}_+$ ,

$$\epsilon(p, \bar{p}) \leq c_\omega(L_A(\omega) + L_B(\omega))|p - \bar{p}|,$$

где  $c_\omega$  есть верхняя грань  $c(p)$  на  $\omega$ .

Наконец, число  $\lambda^1(0) = 0$  имеет кратность  $r_0$  (см. теорему 6.26). Поэтому  $\lambda_i(0) = 0$ ,  $i \leq r_0$ , и заключительное утверждение теоремы следует из монотонности и непрерывности функций  $\lambda_i$  в нуле.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.1.** Утверждение о локальной липшицевости функций  $\lambda_i(p)$  не может быть усилено, даже если дисперсионные кривые являются бесконечно дифференцируемыми. Нетрудно видеть, что это связано с возможным пересечением кривых (см. левый рис. 13; функция  $\lambda_3(p)$  не имеет производной в точке, соответствующей точке A).

**2. Вопросы (ii).** Посмотрим на задачу  $(\mathcal{P})$  с другой точки зрения. Будем считать неотрицательное  $\lambda$  фиксированным и искать такие  $(p, u) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times V \setminus \{0\}$ , что

$$A(p)u = \lambda B(p)u.$$

Эта задача существенно сложнее, чем  $(\mathcal{P})$ , поскольку она представляет собой нелинейную (относительно  $p$ ) задачу на собственные значения. Тем не менее, благодаря монотонной зависимости отношения Рэлея от  $p$  оказывается возможным дать конструктивный ответ на вопрос (ii). С этой целью рассмотрим “линейную” задачу

$$A(0)u = \lambda^0 B(0)u, \quad u \in V \setminus \{0\}. \quad (6.24)$$

Эта задача на собственные значения была изучена нами выше. Она имеет счетное множество неотрицательных собственных чисел  $\lambda^{0K}$ , которые пронумеруем по возрастанию с учетом кратности:

$$0 = \lambda_1^0 = \lambda_2^0 = \dots = \lambda_{r_0}^0 < \lambda_{r_0+1}^0 \leq \lambda_{r_0+2}^0 \leq \dots, \quad \lambda_n^0 \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Числа  $\lambda_i^0$ ,  $i \geq 1$  будем называть критическими, а на задачу (6.24) будем ссылаться как на задачу определения критических чисел.

Определим на полуоси  $\overline{\mathbb{R}}_+$  ступенчатую функцию, непрерывную слева, неубывающую и принимающую целые значения:

$$n(x) := \max\{i : \lambda_i^0 \leq x, i = 1, 2, \dots\}.$$

Отметим, что точками разрыва этой функции являются числа  $\lambda^{0K}$ , на множестве  $[0, \lambda_{r_0+1}^0)$  ее значения равны  $r_0$ .

**Теорема 6.28.** При каждом  $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+$  существует в точности  $n(\lambda)$  таких неотрицательных чисел  $p_i(\lambda)$  (необязательно различных) и соответствующих им элементов  $u_i(\lambda)$  (одинаковым  $p_i$  соответствуют линейно-независимые  $u_i$ ), что  $(\lambda, u_i(\lambda))$  есть решение задачи  $(\mathcal{P})$  при  $p = p_i(\lambda)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть задано неотрицательное число  $\lambda$ , а  $(\lambda_i(p), u_i(p))$ ,  $i = 1, 2, \dots$  — решения задачи  $(\mathcal{P})$ . Поскольку функции  $p \rightarrow \lambda_i(p)$  возрастают, то алгебраическое уравнение

$$\lambda_i(p) = \lambda$$

при фиксированном  $i \geq 1$  либо имеет одно решение  $p_i = p_i(\lambda)$  (если  $\lambda_i(0) \leq \lambda$ ), либо не имеет решения. Из определения функции  $n(x)$  следует, что в точности  $n(\lambda)$  таких уравнений имеют решение.  $\square$

## §4. Метод Галеркина с возмущениями для параметрической задачи

**1. Дискретная задача.** Пусть, как и в §2,  $\{V_h\}_h$  — предельно плотная последовательность конечномерных подпространств  $V$ , симметричные билинейные формы  $a_h(p, \cdot, \cdot)$  и  $b_h(p, \cdot, \cdot)$  есть возмущения (аппроксимации) форм  $a(p, \cdot, \cdot)$  и  $b(p, \cdot, \cdot)$  на  $V_h \times V_h$  при фиксированных  $h$  и  $p$ . Рассмотрим аппроксимацию задачи  $(\mathcal{P})$  методом Галеркина с возмущениями: при каждом  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$  найти такие  $\lambda^h \in \mathbb{R}$  и ненулевые  $y \in V_h$ , что

$$(\mathcal{P}_h) \quad a_h(p, y, v) = \lambda^h b_h(p, y, v) \quad \forall v \in V_h.$$

Пусть  $h$  и  $p$  фиксированы,  $N_h$  есть размерность пространства  $V_h$ , а элементы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h}$  определяют в нем базис. Тогда задача  $(\mathcal{P}_h)$  сводится к алгебраической задаче на собственные значения

$$A_h(p)x = \lambda^h B_h(p)x, \quad 0 \neq x \in \mathbb{R}^{N_h}.$$

Здесь  $x$  есть вектор коэффициентов разложения  $y$  по указанному базису, симметричные матрицы  $A_h(p)$  и  $B_h(p)$  имеют элементы

$$a_{ij}(p) := a_h(p, \varphi_i, \varphi_j), \quad b_{ij}(p) := b_h(p, \varphi_i, \varphi_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, N_h.$$

Будем говорить, что вектор  $x$  соответствует элементу  $y$ , а матрица  $A_h(p)$  ( $B_h(p)$ ) порождается формой  $a_h$  ( $b_h$ ).

**Определение 6.15.** Матричная функция  $p \rightarrow C_h(p)$ ,  $p \geq 0$ , (a) является непрерывной в нуле, если

$$\|C_h(p) - C_h(0)\| \rightarrow 0 \text{ при } p \rightarrow +0;$$

(b) является локально липшиц-непрерывной на  $\mathbb{R}_+$ , если для любого замкнутого отрезка  $\omega \subset \mathbb{R}_+$  найдется такая постоянная  $L_c(\omega)$ , что

$$\|C_h(p) - C_h(\bar{p})\| \leq L_c(\omega)|p - \bar{p}|, \quad p, \bar{p} \in \omega, \quad u \in V_h.$$

Симметричные матричные функции со свойствами (a) и (b) отнесем к множеству  $\mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}}_+, V_h)$ .

Наложим следующие ограничения на формы  $a_h$  и  $b_h$ :

$$A_1^h) \quad |a_h(p, u, u)| \leq M_a(p)\|u\|_{1,\Omega}^2, \quad 0 \leq b_h(p, u, u) \leq M_b\|u\|_{1,\Omega}^2, \quad p \in \overline{\mathbb{R}}_+, \quad u \in V_h, \text{ где } M_a \text{ — локально ограниченная функция;}$$



$A_2^h) \ker B_h(p) = \ker B_h(0)$  при каждом  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$ ;

$A_3^h) A_h(p) + B_h(p) \geq m_{ab} I_h$  при  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$ ,  $m_{ab} > 0$ ;

$A_4^h)$  отношение Рэлея  $a_h(p, u, u)/b_h(p, u, u)$  возрастает по  $p$  при любом фиксированном  $u \in \tilde{V}_h$ , где  $\tilde{V}_h$  есть ортогональное дополнение  $\ker B_h(0)$  до пространства  $V_{h, A_h(p)+B_h(p)}$ <sup>1)</sup>;

$A_5^h)$  матричные функции  $A_h(p)$  и  $B_h(p)$  принадлежат множеству  $\mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}}_+, V_h)$ .

Здесь величины  $M_a$ ,  $M_b$  и  $m_{ab}$  считаются не зависящими от  $h$ .

Положим  $N_h^b := N_h - \dim(\ker B_h(0))$ .

**Теорема 6.29.** При каждом  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$  задача  $(\mathcal{P}_h)$  имеет конечное число (скажем  $n_h(p)$ ) собственных чисел  $\lambda^{hK}(p)$  суммарной кратности  $N_h^b$  и соответствующих им собственных подпространств

$$U_h^K(p), \quad V_{h, A_h(p)+B_h(p)} = \bigoplus_{K=1}^{n_h(p)} U_h^K(p) \oplus \ker B_h(0).$$

Кроме того, если  $\lambda_1^h(p) \leq \lambda_2^h(p) \leq \dots \leq \lambda_{N_h^b}^h(p)$  есть собственные числа, занумерованные с учетом кратности, то функции  $p \rightarrow \lambda_i^h(p)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_h^b$ , являются непрерывными в нуле, локально липшиц-непрерывными на  $\mathbb{R}_+$  и возрастающими.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Размерность пространства  $\tilde{V}_h$  равна  $N_h^b$ . Поскольку  $\ker B_h(p) = \ker B_h(0)$  при всех  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$ , а по условию  $A_3^h$  имеем  $\ker A_h(0) \cap \ker B_h(0) = \{0\}$ , то элементы из  $\ker B_h(0)$  не могут быть собственными элементами. Преобразуем задачу  $(\mathcal{P}_h)$  к виду

$$\tilde{a}_h(p, y, v) = \tilde{\lambda}^h b_h(p, y, v), \quad v \in \tilde{V}_h,$$

где  $\tilde{a}_h := a_h + b_h$ ,  $\tilde{\lambda}^h := \lambda^h + 1$ . Обе формы  $\tilde{a}_h$  и  $b_h$  положительно определены на  $\tilde{V}_h$ . Отсюда следует существование пар  $(\lambda^{hK}(p), U_h^K(p))$  и свойства пространств  $U_h^K(p)$ .

Доказательство остальных утверждений теоремы проводится совершенно аналогично доказательству соответствующих утверждений теоремы 6.27.  $\square$

<sup>1)</sup>Символом  $V_{h, A_h(p)+B_h(p)}$  обозначено пространство  $V_h$  со скалярным произведением  $a_h(p, \cdot, \cdot) + b_h(p, \cdot, \cdot)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.2.** Сопоставим условия  $A_1$ – $A_5$  и  $A_1^h$ – $A_5^h$ . Видим, что формы  $a_h$  и  $b_h$  наследуют свойства невозмущенных форм  $a$  и  $b$ , кроме условия неотрицательности формы  $a$ . Если условия  $A_1^h$ – $A_5^h$  дополнить условием

$$A_0^h) \quad A_h(p) \geq 0, \quad r_0 := \dim(\ker A_h(0)),$$

то можно утверждать также, что<sup>1)</sup>  $\lambda_i^h(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow +0$ ,  $i = 1, 2, \dots, r_0$ , и  $\lambda_{r_0+1}^h(0) > 0$ .

**2. Оценки точности.** Пусть  $K \geq 1$ ,  $\lambda^K(p)$  — собственное число кратности  $r_K(p)$  задачи  $(\mathcal{P})$ ;  $U^K(p)$  — соответствующее ему собственное подпространство (см. (6.22)); целое  $k$  связано с  $K$  согласно (6.21). Пусть далее  $\lambda_i^h(p)$ ,  $i = 1, \dots, N_h^b$  — упорядоченные по возрастанию с учетом кратности собственные числа задачи  $(\mathcal{P}_h)$ ,  $y_i^h(p)$  — соответствующие им собственные элементы. Числа  $\lambda_k^h(p)$ ,  $\lambda_{k+1}^h(p)$ ,  $\dots$ ,  $\lambda_{k+r_K(p)-1}^h(p)$  будем рассматривать как приближения собственного числа  $\lambda^K(p)$ , а пространство

$$U_h^K(p) := \text{span}\{y_k^h(p), y_{k+1}^h(p), \dots, y_{k+r_K(p)-1}^h(p)\},$$

как аппроксимацию собственного подпространства  $U^K(p)$ .

Введем обозначения. Для заданных форм  $d$  и  $d_h$  положим

$$E_d(\varphi_h) := \sup_{v_h \in V_h, \|v_h\|=1} |d(p, \varphi_h, v_h) - d_h(p, \varphi_h, v_h)|, \quad \varphi_h \in V_h,$$

через  $P_h$  обозначим ортопроектор в  $V_{A(p)+B(p)}$  на  $V_h$ . Пусть

$$\epsilon_h(u) := \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| + E_a(P_h u) + E_b(P_h u), \quad u \in V,$$

$$\Sigma_h(y) := |a(p, y, y) - a_h(p, y, y)| + |b(p, y, y) - b_h(p, y, y)|, \quad y \in V_h.$$

Дополнительно к условиям  $A_1^h$ – $A_5^h$  предположим, что

$$A_6^h) \quad \sup_{f \in V_h, \|f\|=1} (E_b(f) + E_b(P_h T(p)f) + E_a(P_h T(p)f)) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

где  $T(p) := (A(p) + B(p))^{-1} B(p)$ .

**Теорема 6.30.** Пусть выполнены условия  $(H_1)$ ,  $A_1$ – $A_5$ ,  $A_1^h$ – $A_6^h$ , кроме того,  $\max_{u \in U^K, \|u\|=1} \epsilon_h(u) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Тогда при достаточно малом  $h$  для любого  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$  и  $K \geq 1$  имеют место оценки

$$\Theta_V(U^K(p), U_h^K(p)) \leq c_K \max_{u \in U^K(p), \|u\|=1} \epsilon_h(u),$$

$$|\lambda^K(p) - \lambda_i^h(p)| \leq c_K \max_{u \in U^K(p), \|u\|=1} (\epsilon_h^2(u) + \Sigma_h(P_h u)),$$

<sup>1)</sup>См. аналогичное утверждение теоремы 6.27.

где постоянная  $c_K$  зависит от  $\lambda^K(p)$  и  $p$ , но не зависит от  $h$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся результатами § 2. Исходную задачу  $(\mathcal{P})$  представим в виде

$$b(p, u, v) = \mu \tilde{a}(p, u, v) \quad \forall v \in V,$$

где  $\tilde{a} := a + b$ ,  $\mu := (\lambda + 1)^{-1}$ . При фиксированном  $p$  это задача типа  $(P_\mu)$ . Задачу  $(\mathcal{P}_h)$  представим в виде ее аппроксимации  $(P_\mu^h)$ :

$$b_h(p, y, v) = \mu^h \tilde{a}_h(p, y, v) \quad \forall v \in V_h,$$

где  $\tilde{a}_h := a_h + b_h$ ,  $\mu^h := (\lambda^h + 1)^{-1}$ . Из условий  $A_2^h$ ,  $A_3^h$  и  $A_6^h$  следует, что выполнены условия  $(H_2)$  и  $(H_3)$ . Поэтому можно воспользоваться теоремой 6.24, из которой следует первая оценка теоремы.

Из теоремы 6.25 вытекает, что

$$|\mu^K(p) - \mu_i^h(p)| \leq c_K \max_{u \in U^K(p), \|u\|=1} (\epsilon_h^2(u) + \Sigma_h(P_h u)).$$

Отсюда следует вторая оценка, поскольку при достаточно малом  $h$

$$|\lambda^K(p) - \lambda_i^h(p)| = |1/\mu^K(p) - 1/\mu_i^h(p)| \leq c_K |\mu^K(p) - \mu_i^h(p)|. \quad \square$$

## ГЛАВА 7

### СКАЛЯРНАЯ ЗАДАЧА О ПОВЕРХНОСТНЫХ СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ

Данная глава посвящена решению задачи о поверхностных собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов, находящихся в однородной окружающей среде, в приближении слабо-направляющего волновода. Исходная задача формулируется следующим образом: *требуется найти пары чисел  $(\beta, k) \in \Lambda$  и ненулевые вещественные  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ , удовлетворяющие в  $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$  уравнению*

$$-\Delta u + \beta^2 u = k^2 \varepsilon u, \quad (7.1)$$

и условиям сопряжения

$$u^+ = u^-, \quad \partial u^+ / \partial \nu = \partial u^- / \partial \nu, \quad x \in \gamma. \quad (7.2)$$

Здесь функция  $\varepsilon$  и граница волновода  $\gamma$  удовлетворяют условиям, сформулированным во введении, с. 122. Напомним, что

$$\Lambda := \{(\beta, k) : \beta / \sqrt{\varepsilon_+} < k < \beta / \sqrt{\varepsilon_\infty}, \beta > 0\},$$

функция  $\varepsilon$  равна постоянной  $\varepsilon_\infty$  вне волновода  $\Omega_i$ . Отметим, что в области  $\Omega_e := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_i$  уравнение (7.1) имеет вид

$$-\Delta u + p^2 u = 0, \quad (7.3)$$

где  $p := (\beta^2 - k^2 \varepsilon_\infty)^{1/2} > 0$  — поперечное волновое число.

Далее мы будем рассматривать обобщенную формулировку задачи:

$$(\mathcal{P}_\infty) \quad \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla v + \beta^2 uv) \, dx = k^2 \int_{\mathbb{R}^2} \varepsilon uv \, dx \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

На эту задачу можно смотреть как на параметрическую спектральную задачу, считая параметром либо  $\beta$ , либо  $k$ .

### § 1. Постановка задачи в ограниченной области

Введем новую пару неизвестных параметров  $(\beta, p)$ , предполагая, что  $p$  и  $k$  связаны равенством

$$p = (\beta^2 - k^2 \varepsilon_\infty)^{1/2}, \quad (7.4)$$

и множество

$$K := \{(\beta, p) : \beta > 0, 0 < p < \sqrt{(\varepsilon_+ - \varepsilon_\infty)/\varepsilon_+} \beta\}.$$

Легко проверяется, что формула (7.4) устанавливает взаимно однозначное соответствие между  $\Lambda$  и  $K$ <sup>1)</sup>.

Укажем два метода, каждый из которых позволяет свести исходную задачу в неограниченной области (на плоскости) к одной и той же задаче в ограниченной области (в круге). Первый метод основывается на дифференциальном уравнении (7.1), а второй — на слабой форме  $(\mathcal{P}_\infty)$ . Второй метод далее будет использован нами при рассмотрении векторной задачи.

**1. Первый метод.** Рассмотрим новую задачу: найти пары чисел  $(\beta, p) \in K$  и ненулевые  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ , удовлетворяющие в  $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$  уравнению

$$-\Delta u + p^2 \sigma u = \beta^2(\sigma - 1)u, \quad \sigma = \varepsilon/\varepsilon_\infty, \quad (7.5)$$

а также условиям сопряжения (7.2). Легко заметить, что уравнение (7.5) переходит в (7.1) при условии (7.4) и наоборот. Поэтому эти задачи эквивалентны в том смысле, что между их решениями имеется взаимно однозначное соответствие:  $(\beta, k, u)$  — решение задачи (7.1) тогда и только тогда, когда  $(\beta, p, u)$  — решение (7.5). Сведем задачу (7.5) к задаче в ограниченной области, предполагая, что начало координат находится в  $\Omega_i$ .

Пусть  $B_{R_0} := \{x : |x| < R_0\}$  — круг минимального радиуса  $R_0$  такой, что  $\Omega_i \subseteq B_{R_0}$ . Выберем число  $R$ , большее или равное  $R_0$ , и положим  $\Omega := B_R$ ,  $\Gamma := \partial\Omega$ ,  $\Omega_\infty := \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$  (см. рис. 14).

Решение задачи (7.5) удовлетворяет уравнению (7.3) вне  $\Omega_i$  и поэтому является там гладким. Обозначим через  $u_p(u)$  его сужение

<sup>1)</sup>Достаточно заметить, что лучи  $\{k = k_0\beta, \beta \in \mathbb{R}_+\}$ , лежащие в  $\Lambda$ , преобразуются в лучи  $\{p = p_0\beta, \beta \in \mathbb{R}_+\}$  из  $K$ ,  $p_0^2 = 1 - k_0^2 \varepsilon_\infty$ .

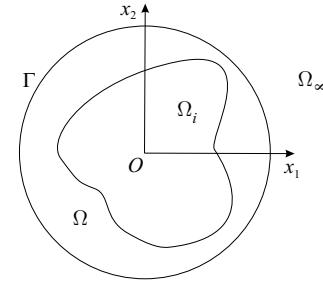


Рис. 14. Разбиение плоскости.

на область  $\bar{\Omega}_\infty (\bar{\Omega})$ . Тогда  $u_p$  удовлетворяет уравнению (7.3), а на  $\Gamma$  справедливы равенства

$$u_p = u, \quad u_{p\nu} = u_\nu.$$

Здесь  $\nu$  — единичная нормаль к  $\Gamma$ , внешняя по отношению к  $\Omega$ ,  $u_\nu$  — производная  $u$  в направлении  $\nu$ . Функция  $u_p$  как решение внешней краевой задачи

$$-\Delta u_p + p^2 u_p = 0, \quad x \in \Omega_\infty, \quad u_p = u, \quad x \in \Gamma,$$

легко находится методом разделения переменных. Имеем

$$u_p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_n(pr)}{K_n(pR)} a_n(u) e^{in\varphi}, \quad a_n(u) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u|_{r=R} e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (7.6)$$

Здесь  $(r, \varphi)$  — полярные координаты с началом в центре  $B_R$ ,  $K_n(r)$  — модифицированная функция Бесселя порядка  $n$ . Таким образом, для определения  $(\beta, p, u)$  получим следующую задачу в круге, в которую параметр  $p$  нелинейно входит в нелокальное краевое условие

$$-\Delta u + p^2 \sigma u = \beta^2(\sigma - 1)u, \quad x \in \Omega, \quad (7.7)$$

$$u_\nu + S_\Gamma(p)u = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Здесь

$$S_\Gamma(p)u := -u_{p\nu} = \frac{1}{R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{K}_n(Rp) a_n(u) e^{in\varphi}, \quad \mathbb{K}_n(r) := -r \frac{K'_n(r)}{K_n(r)}.$$

Эта задача и есть искомая задача в ограниченной области.

Далее мы исследуем обобщенную разрешимость задачи (7.7), а также построим и изучим численный метод ее решения на основе метода конечных элементов. Для этого нам понадобится ее обобщенная (слабая) формулировка. Она получается стандартным способом: уравнение (7.7), предварительно умноженное на произвольно выбранную функцию  $v \in V := H^1(\Omega)$ , интегрируется по области  $\Omega$ , а затем используется формула интегрирования по частям и учитывается краевое условие на  $\Gamma$ . В результате приходим к обобщенной формулировке задачи (7.7): *найти  $(\beta, p, u) \in K \times V \setminus \{0\}$  такие, что*

$$(\mathcal{P}) \quad a(p, u, v) = \beta^2 b(u, v) \quad \forall v \in V,$$

где

$$\begin{aligned} a(p, u, v) &:= a_0(p, u, v) + s_\infty(p, u, v), \\ s_\infty(p, u, v) &:= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{K}_n(pR) a_n(u) \overline{a_n(v)}, \\ a_0(p, u, v) &:= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + p^2 \sigma uv) dx, \quad b(u, v) := \int_{\Omega} (\sigma - 1) uv dx. \end{aligned} \quad (7.8)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 7.3.** Свойства форм  $a_0$  и  $b$  (такие как ограниченность, знакоопределенность) являются очевидными. Свойства  $s_\infty$  определяются как скоростью убывания коэффициентов Фурье  $a_n(u)$ ,  $u \in V$ , так и свойствами функций  $r \rightarrow \mathbb{K}_n(r)$  при целых  $n$ . Далее мы покажем, в частности, что  $\mathbb{K}_n(r) > |n|$  при всех  $r > 0$  и  $n$  и  $\mathbb{K}_n(r) < |n| + r$  при  $n \neq 0$ . Отметим также, что в силу равенства Парсевалия

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n(u)|^2 = \frac{1}{R} \int_{\Gamma} u^2 d\Gamma. \quad (7.9)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 7.4.** Условие  $(\beta, p) \in K$  в формулировке задачи  $(\mathcal{P})$  не является ограничением. Действительно, множество  $K$  допускает следующее эквивалентное определение:

$$K := \{(\beta, p) : p > 0, \beta > (\varepsilon_+ / (\varepsilon_+ - \varepsilon_\infty))^{1/2} p\}.$$

Напомним, что  $1 \leq \sigma \leq \varepsilon_+ / \varepsilon_\infty$ . Если  $(\beta, p, u)$  удовлетворяет тождеству  $(\mathcal{P})$ , то нетрудно видеть, что

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + \beta^2 u^2) dx + s_\infty(p, u, u) = \int_{\Omega} \sigma(\beta^2 - p^2) u^2 dx.$$

Так как  $s_\infty(p, u, u) \geq 0$  отсюда следует неравенство  $\beta^2 > p^2$ , а также оценка  $\beta^2 < \varepsilon_+ / \varepsilon_\infty (\beta^2 - p^2)$ , равносильная оценке  $\beta > (\varepsilon_+ / (\varepsilon_+ - \varepsilon_\infty))^{1/2} p$ ; следовательно,  $(\beta, p) \in K$ . Поэтому задачу  $(\mathcal{P})$  можно рассматривать как задачу на собственные значения относительно  $\beta^2$ , а  $p > 0$  — считать параметром. Задачи такого типа были рассмотрены нами в предыдущей главе.

Прежде чем перейти к второму методу вывода задачи  $(\mathcal{P})$ , рассмотрим эквивалентные нормировки пространства  $H^{1/2}(\Gamma)$  и укажем гладкие продолжения функций из  $H^1(\Omega)$  с сохранением класса. На этой основе мы получим другое представление формы  $s_\infty$ .

**2. Пространство  $H^{1/2}(\Gamma)$ .** Используем общепринятое обозначение  $H^{1/2}(\Gamma)$  для пространства следов на  $\Gamma$  функций из  $H^1(\mathbb{R}^2)$  (см., напр., [60, с. 55]); через  $u|_\Gamma$  будем обозначать след функции  $u$  на  $\Gamma$ <sup>1)</sup>. Норма в  $H^{1/2}(\Gamma)$  может быть определена следующими двумя эквивалентными способами<sup>2)</sup>:

$$\|u\|_{1/2, \Gamma} := \inf_{v \in H^1(\Omega), v|_\Gamma = u} \|v\|_{1, \Omega}, \quad |u|_{1/2, \Gamma} := \inf_{v \in H^1(\Omega_\infty), v|_\Gamma = u} \|v\|_{1, \Omega_\infty}.$$

Известно, что  $H^{1/2}(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$ , бесконечно-дифференцируемые функции образуют плотное подмножество в  $H^{1/2}(\Gamma)$ . В частности, ряд Фурье функции  $u \in H^{1/2}(\Gamma)$ ,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(u) e^{in\varphi}, \quad a_n(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi, \quad (7.10)$$

сходится к  $u$ , т. е. если  $u_N$  есть отрезок ряда Фурье,

$$u_N = \sum_{n=-N}^N a_n(u) e^{in\varphi},$$

то  $\|u - u_N\|_{1/2, \Gamma} \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Отметим, что поскольку  $u_N$  — вещественная функция, то

$$u_N = \bar{u}_N = \sum_{n=-N}^N \overline{a_n(u)} e^{-in\varphi}.$$

<sup>1)</sup>Понятие следа обобщает понятие сужения. Для непрерывных функций из  $H^1(\mathbb{R}^2)$  эти понятия совпадают.

<sup>2)</sup>Две нормы  $\|\cdot\|_{(1)}$  и  $\|\cdot\|_{(2)}$  эквивалентны на  $V$ , если  $c_1 \|u\|_{(2)} \leq \|u\|_{(1)} \leq c_2 \|u\|_{(2)} \forall u \in V$ ,  $c_1 > 0$ . Числа  $c_1$  и  $c_2$  называют постоянными эквивалентности.

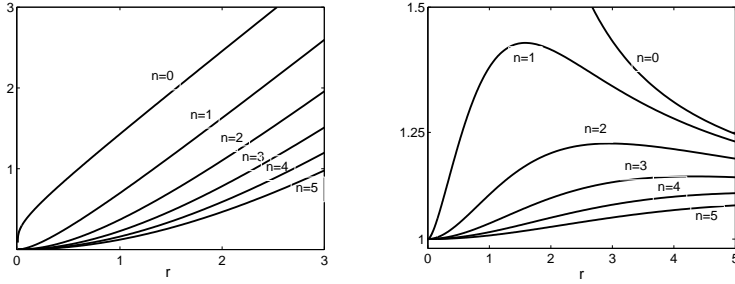


Рис. 15. На левом рисунке представлены графики функций  $\mathbb{K}_n(r) - n$  для ряда значений  $n$ , на правом — функций  $\mathbb{K}_n(r)/\mathbb{I}_n(r)$ .

**Лемма 7.10.** Пусть  $I_n(r)$ ,  $K_n(r)$  — модифицированные функции Бесселя порядка  $n$ ,

$$\mathbb{I}_n(r) := r \frac{I'_n(r)}{I_n(r)}, \quad \mathbb{K}_n(r) := -r \frac{K'_n(r)}{K_n(r)}, \quad r \in \mathbb{R}_+,$$

функция  $u \in H^{1/2}(\Gamma)$  представлена рядом Фурье (7.10). Тогда

$$\|u\|_{1/2,\Gamma}^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_n(R) |a_n(u)|^2, \quad |u|_{1/2,\Gamma}^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{K}_n(R) |a_n(u)|^2.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Вычислим норму  $\|u\|_{1/2,\Gamma}$ . Пусть  $u_N$  — отрезок ряда Фурье функции  $u$ ,

$$\|\tilde{u}_N\|_{1,\Omega}^2 = \inf_{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma} = u_N} \left\{ \|v\|_{1,\Omega}^2 := \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + |v|^2) dx \right\}.$$

Хорошо известно, что  $\tilde{u}_N$  является решением следующей краевой задачи<sup>1)</sup>:

$$-\Delta \tilde{u}_N + \tilde{u}_N = 0, \quad x \in \Omega, \quad \tilde{u}_N|_{\Gamma} = u_N.$$

Ее решение находится методом разделения переменных:

$$\tilde{u}_N = \sum_{n=-N}^N \frac{I_n(r)}{I_n(R)} a_n(u) e^{in\varphi}.$$

<sup>1)</sup>Решение этой задачи бесконечно дифференцируемо в  $\overline{\Omega}$ .

Таким образом, используя интегрирование по частям, имеем

$$\begin{aligned} \|u_N\|_{1/2,\Gamma}^2 &:= \|\tilde{u}_N\|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} (-\Delta \tilde{u}_N + \tilde{u}_N) \tilde{u}_N dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}_N}{\partial r} u_N ds = \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}_N}{\partial r} \tilde{u}_N ds = 2\pi \sum_{n=-N}^N \mathbb{I}_n(R) |a_n(u)|^2. \end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу при  $N \rightarrow \infty$ , получим первую формулу. Аналогично получается вторая формула. При этом внутренняя краевая задача заменяется на внешнюю (в области  $\Omega_{\infty}$ ), а функция Бесселя  $I_n$  — на  $K_n$ .  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 7.5.** Для функций  $R \rightarrow \mathbb{I}_n(R)$  и  $R \rightarrow \mathbb{K}_n(R)$ ,  $R > 0$ , можно получить вариационное описание. Из леммы 7.10 вытекает, что

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_n(R) |a_n(u)|^2 = \inf_{v \in H^1(B_R), v|_{\partial B_R} = u} \left\{ \int_{B_R} (|\nabla v|^2 + |v|^2) dx \right\}. \quad (7.11)$$

Выберем здесь  $u = (e^{ik\varphi} + e^{-ik\varphi})/2 = \cos(k\varphi)$ . Тогда левая часть в (7.11) будет равна  $c_k \mathbb{I}_k(R)$ , где все  $c_k = \pi$ , кроме  $c_0 = 2\pi$  (поскольку  $\mathbb{I}_{-n}(R) = \mathbb{I}_n(R)$ , см. далее). В правой части сделаем замену переменных в интеграле ( $r := r/R$ ), переходя к единичному кругу  $B_1$ . В результате получим для любого целого  $k$  следующую формулу:

$$\mathbb{I}_k(R) = \frac{1}{c_k} \inf_{v \in H^1(B_1), v|_{\partial B_1} = \cos(k\varphi)} \left\{ \int_{B_1} (|\nabla v|^2 + R^2 |v|^2) dx \right\}.$$

Обозначая через  $B_1^{\infty}$  дополнение  $\overline{B_1}$  до  $\mathbb{R}^2$ , аналогично получим

$$\mathbb{K}_k(R) = \frac{1}{c_k} \inf_{v \in H^1(B_1^{\infty}), v|_{\partial B_1^{\infty}} = \cos(k\varphi)} \left\{ \int_{B_1^{\infty}} (|\nabla v|^2 + R^2 |v|^2) dx \right\}.$$

Отсюда следует, в частности, что функция  $r \rightarrow \mathbb{K}_n(r)$  (как и  $r \rightarrow \mathbb{I}_n(r)$ ) возрастает при всех целых  $n$  и  $\mathbb{K}_k(R) \leq (R/R_0)^2 \mathbb{K}_k(R_0)$  при  $R \geq R_0$ .

**Лемма 7.11.** Для всех целых  $n$  справедливы оценки

$$\mathbb{I}_n(r) \leq \mathbb{K}_n(r) \leq c_0^2(r) \mathbb{I}_n(r), \quad r \in \mathbb{R}_+,$$

где  $c_0$  — непрерывная на  $\mathbb{R}_+$  невозрастающая функция; кроме того,  $c_0(r) \rightarrow +\infty$  при  $r \rightarrow 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Модифицированные функции Бесселя  $I_n(z)$  и  $K_n(z)$ <sup>1)</sup> являются линейно независимыми решениями уравнения

$$z^2 w'' + z w' - (z^2 + n^2)w = 0.$$

Ясно, что  $K_{-n}(z) = K_n(z)$  и  $I_{-n}(z) = I_n(z)$ . Следовательно, по определению имеем  $\mathbb{K}_{-n}(z) = \mathbb{K}_n(z)$  и  $\mathbb{I}_{-n}(z) = \mathbb{I}_n(z)$ . Поэтому далее можно ограничиться неотрицательными  $n$ .

Учитывая асимптотические формулы при малых  $z$ <sup>2)</sup>

$$K_0(z) \approx \ln\left(\frac{1}{z}\right), \quad K_n(z) \approx \frac{(n-1)!}{2} \left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad I_n(z) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad (7.12)$$

нетрудно получить, что  $\mathbb{K}_n(0) = \mathbb{I}_n(0) = n$ ,  $n \geq 0$ . Для определителя Вронского справедлива формула

$$W(K_n, I_n) := -K'_n(z)I_n(z) + K_n(z)I'_n(z) = 1/z,$$

откуда следует, что  $\mathbb{K}_n(r) + \mathbb{I}_n(r) = 1/K_n(r)I_n(r)$ . Продифференцируем это тождество:

$$\mathbb{K}'_n(r) + \mathbb{I}'_n(r) = \frac{\mathbb{K}_n(r) - \mathbb{I}_n(r)}{rK_n(r)I_n(r)}.$$

Полагая здесь  $a(r) := (rK_n(r)I_n(r))^{-1}$ ,  $f(r) := 2\mathbb{K}'_n(r)$ , для определения  $y(r) := \mathbb{K}_n(r) - \mathbb{I}_n(r)$  получим задачу

$$y'(r) + a(r)y(r) = f(r), \quad r > 0, \quad y(0) = 0.$$

Так как функции  $a$  и  $f$  являются неотрицательными ( $I_n$  и  $K_n$  — положительны,  $\mathbb{K}_n(r)$  — возрастает по  $r$  согласно замечанию 7.5), то  $y$  также является неотрицательной, т. е.  $\mathbb{I}_n(r) \leq \mathbb{K}_n(r)$ .

Получим вторую оценку. Из рекуррентных соотношений

$$-K'_n(z) = K_{n-1}(z) + \frac{n}{z}K_n(z), \quad -K'_n(z) = K_{n+1}(z) - \frac{n}{z}K_n(z)$$

следуют другие формулы для  $\mathbb{K}_n$ :

$$\mathbb{K}_n(z) = n + z \frac{K_{n-1}(z)}{K_n(z)} = -n + z \frac{K_{n+1}(z)}{K_n(z)}. \quad (7.13)$$

<sup>1)</sup>Относительно свойств этих функций см., напр., [88, с. 247], [1, с. 374]. Далее  $z$  означает комплексную переменную,  $w'(z) := dw(z)/dz$ ;  $r \in \mathbb{R}_+$ .

<sup>2)</sup> $f(z) \approx g(z)$ , если  $f(z) = g(z) + o(g(z))$ .

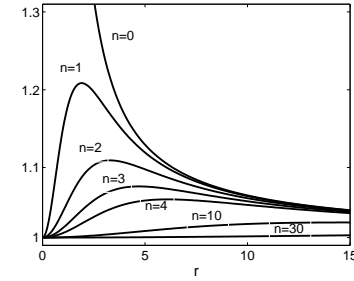


Рис. 16. Графики функций  $(n^2 + r^2)^{1/2}/\mathbb{I}_n(r)$  для ряда значений  $n$ .

Поскольку  $0 < K_{n-1}(r) < K_n(r)$  при  $n \geq 1$  и  $r > 0$ , то

$$n \leq \mathbb{K}_n(r) \leq n + r, \quad \mathbb{K}_n(r) \geq r - n, \quad n \geq 1, \quad r \in \mathbb{R}_+.$$

Аналогичные рассуждения приводят к оценкам

$$\mathbb{I}_n(r) = n + r \frac{I_{n+1}(r)}{I_n(r)} \geq n, \quad \mathbb{I}_n(r) = -n + r \frac{I_{n-1}(r)}{I_n(r)} \geq r - n,$$

так как  $I_n(r) \leq I_{n-1}(r)$  при  $n \geq 1$ . Следовательно,

$$\mathbb{K}_n(r) \leq n + r \leq 2n + \mathbb{I}_n(r) \leq 3\mathbb{I}_n(r), \quad n = 1, 2, \dots$$

Нетрудно убедиться, что функция

$$C_0(r) := \frac{\mathbb{K}_0(r)}{\mathbb{I}_0(r)} = \frac{K_1(r)}{K_0(r)} \frac{I_0(r)}{I_1(r)}$$

убывает на  $\mathbb{R}_+$  (а именно, каждая дробь убывает по  $r$ ) и  $C_0(r) \rightarrow +\infty$  при  $r \rightarrow +0$ ,  $C_0(r) \rightarrow 1$  при  $r \rightarrow +\infty$ . Полагая  $c_0^2(r) = \max\{C_0(r), 3\}$ , получим искомую оценку  $\mathbb{K}_n(r) \leq c_0^2(r) \mathbb{I}_n(r)$ ,  $n \geq 0$ ,  $r \in \mathbb{R}_+$ .  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.6. Графики функций  $\mathbb{K}_n(r)/\mathbb{I}_n(r)$  для ряда значений  $n$  изображены на правом рис. 15. Вычисления показывают, что при больших значениях  $r$  они монотонно стремятся к единице, сохраняя порядок,  $c_0^2(r) = C_0(r)$ . Отметим, что  $C_0(r) \approx 2/(\ln(1/r)r^2)$  при малых  $r$ .

**Следствие 7.2.** Нормы  $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}$  и  $|u|_{1/2,\Gamma}$  эквивалентны; точнее

$$\|u\|_{1/2,\Gamma} \leq |u|_{1/2,\Gamma} \leq c_0 \|u\|_{1/2,\Gamma}, \quad u \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Здесь постоянная  $c_0 := c_0(R_0)$  зависит лишь от  $R_0$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup>Напомним, что  $\Omega$  есть круг радиуса  $R \geq R_0$ ,  $\Gamma := \partial\Omega$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемые оценки непосредственно вытекают из лемм 7.10, 7.11, если учесть, что  $c_0(R) \leq c_0(R_0)$ .  $\square$

**Следствие 7.3.** Для любой функции  $u \in H^1(\Omega)$

$$|u|_{1/2,\Gamma} \leq c_0 \|u\|_{1,\Omega}, \quad c_0 := c_0(R_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения следует справедливость неравенства  $\|u\|_{1/2,\Gamma} \leq \|u\|_{1,\Omega}$ . Поэтому имеем следующие оценки сверху и снизу:  $|u|_{1/2,\Gamma} \leq c_0 \|u\|_{1/2,\Gamma} \leq c_0 \|u\|_{1,\Omega}$ .  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.7. Норма  $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}$ , введенная выше, имеет два важных свойства, не зависящих от радиуса  $R$  области  $\Omega$ :

$$\|u\|_{1/2,\Gamma} \leq \|u\|_{1,\Omega}, \quad u \in H^1(\Omega), \quad \|u\|_{1/2,\Gamma} \leq \|u\|_{1,\Omega_\infty}, \quad u \in H^1(\Omega_\infty).$$

Вторая оценка следует из неравенств  $\|u\|_{1/2,\Gamma} \leq |u|_{1/2,\Gamma} \leq \|u\|_{1,\Omega_\infty}$ . Учитывая следующие оценки, на доказательстве которых мы не будем останавливаться (см. рис. 16):

$$1 \leq (n^2 + r^2)^{1/2} / \mathbb{I}_n(r) \leq C^2(r), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

придем к третьей эквивалентной нормировке пространства  $H^{1/2}(\Gamma)$ :

$$\|u\|_{1/2,\Gamma}^2 := \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n^2 + R^2)^{1/2} |a_n(u)|^2. \quad (7.14)$$

Имеем  $\|u\|_{1/2,\Gamma} \leq \|u\|_{1/2,\Gamma} \leq C(r) \|u\|_{1/2,\Gamma}$ . Здесь  $C^2(r) := r / \mathbb{I}_0(r)$  — убывающая функция (см. кривую  $n = 0$  на рис. 16),  $C^2(r) \approx 2/r$  при малых  $r$ . Ясно, что можно принять  $R = 1$  в (7.14) (при этом изменятся лишь постоянные эквивалентности). Норма (7.14) с  $R = 1$  наиболее часто используется для нормировки пространства  $H^{1/2}(\Gamma)$  (см., напр., [59, с. 29]).

**3. Свойства функций  $\mathbb{K}_n$ .** Зафиксируем свойства функций  $r \rightarrow \mathbb{K}_n(r)$ , отмеченные в ходе доказательства леммы 7.11, а также укажем некоторые новые.

**Лемма 7.12.** При каждом целом  $n$  функция  $z \rightarrow \mathbb{K}_n(z)$  является аналитической<sup>1)</sup> в правой полуплоскости  $\mathbb{C}_+ := \{r + iy : r > 0\}$  и непрерывной в  $\overline{\mathbb{C}_+} := \{r + iy : r \geq 0\}$ . Кроме того,

$$\mathbb{K}_n(\bar{z}) = \overline{\mathbb{K}_n(z)}, \quad \mathbb{K}_n(z) = \mathbb{K}_{-n}(z), \quad \mathbb{K}_n(0) = |n|; \quad (7.15)$$

$$|\mathbb{K}_n(z)/z| \leq 1, \quad |\mathbb{K}'_n(z)| \leq 2(|n| + |z|), \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad n \neq 0, \quad (7.16)$$

<sup>1)</sup>Дифференцируемой в смысле комплексного анализа.

где  $\tilde{\mathbb{K}}_n(z) = \mathbb{K}_n(z) - \mathbb{K}_n(0)$ . При малых  $z$  справедливы формулы

$$\tilde{\mathbb{K}}_0(z) \approx \ln^{-1}\left(\frac{1}{z}\right), \quad \tilde{\mathbb{K}}_{\pm 1}(z) = \frac{z^2}{\mathbb{K}_0(z)}, \quad \tilde{\mathbb{K}}_n(z) \approx \frac{z^2}{2(|n| - 1)}. \quad (7.17)$$

При  $r \in \mathbb{R}_+$  и  $n \neq 0$  имеем:  $|n| \leq \mathbb{K}_n(r) \leq |n| + r$ ,  $0 \leq \mathbb{K}'_n(r) \leq 2|n|$ ; кроме того,  $\mathbb{K}_0(0) = 0$ ,  $\mathbb{K}'_0(r) > 0$  при  $r > 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что при целых  $n$  модифицированная функция Бесселя  $K_n$  является аналитической на  $z$ -плоскости с разрезом вдоль отрицательной вещественной оси, причем в  $\overline{\mathbb{C}_+}$  она не имеет нулей (см., напр., [1, с. 377]). Поскольку

$$\mathbb{K}_n(z) := -zK'_n(z)/K_n(z) = \mathbb{K}_n(0) + zK_{n-1}(z)/K_n(z),$$

то отсюда следует, что  $\mathbb{K}_n$  является аналитической в  $\mathbb{C}_+$  и непрерывной в  $\overline{\mathbb{C}_+} \setminus \{0\}$ . Непрерывность в нуле следует из асимптотик (7.17), которые легко вывести из асимптотик в нуле функций  $K_n$  (см. (7.12)). Равенства (7.15), как и оценки  $|n| \leq \mathbb{K}_n(r) \leq |n| + r$  при  $n \neq 0$ , были установлены в лемме 7.11.

Докажем первую оценку в (7.16). Функция  $\phi(z) := \tilde{\mathbb{K}}_n(z)/z$  равна  $K_{n-1}(z)/K_n(z)$  (см. (7.13)) и является аналитической в  $\mathbb{C}_+$ . Поэтому максимум ее модуля достигается либо на мнимой оси, либо в бесконечно удаленной точке. Поскольку  $\mathbb{K}_n(\bar{z}) = \overline{\mathbb{K}_n(z)}$ , то достаточно ограничиться рассмотрением мнимой полуоси  $\{0 + iy, y \geq 0\}$ . В бесконечно удаленной точке  $|K_{n-1}(z)/K_n(z)| = 1$ , поскольку при  $|z| \rightarrow \infty$

$$K_n(z) = (2/\pi z)^{1/2} e^{-z} (1 + O(z^{-1})).$$

Пусть  $z = iy$ ,  $y \geq 0$ . По определению  $K_n(z)$  имеем в этом случае

$$K_{n-1}(z)/K_n(z) = i \overline{H_{n-1}^{(1)}(y)/H_n^{(1)}(y)},$$

где  $H_n^{(1)}(y) = J_n(y) + iY_n(y)$  — функция Ханкеля порядка  $n$ . Поэтому

$$|\phi(z)| := |\tilde{\mathbb{K}}_n(z)/z| = \frac{J_{n-1}^2(y) + Y_{n-1}^2(y)}{J_n^2(y) + Y_n^2(y)} \leq 1,$$

так как согласно формуле Николсона [3, с. 444]

$$J_n^2(y) + Y_n^2(y) = \frac{8}{\pi^2 y} \int_0^\infty K_0(2y \operatorname{sh}(t)) \operatorname{ch}(2nt) dt \nearrow n.$$

Докажем теперь вторую оценку в (7.16). Дифференцируя функцию  $\mathbb{K}_n := -zK'_n/K_n$  и используя равенство  $(zK'_n)' = (z^2 + n^2)K_n/z$ , легко вычислить, что

$$\mathbb{K}'_n(z) = (\mathbb{K}_n^2(z) - z^2 - n^2)/z.$$

Отсюда при вещественных  $z = r$  получим  $\mathbb{K}'_n(r) \leq 2|n|$  при  $n \neq 0$ , поскольку  $\mathbb{K}_n(r) \leq |n| + r$ . При  $z \in \mathbb{C}_+$  и  $n \neq 0$  имеем

$$\mathbb{K}_n(z) =: |n| + z\phi(z),$$

где  $|\phi(z)| \leq 1$ . Поэтому

$$\mathbb{K}'_n(z) = 2|n|\phi(z) + (\phi^2(z) - 1)z.$$

Отсюда следует требуемая оценка:  $|\mathbb{K}'_n(z)| \leq 2(|n| + |z|)$ .  $\square$

Графики функций  $r \rightarrow \mathbb{K}_n(r) - \mathbb{K}_n(0)$  для ряда значений  $n$  приведены на рис. 15 (напомним, что  $\mathbb{K}_n(0) = n$  для неотрицательных  $n$ ). Отметим качественное различие свойств кривых при  $n = 0$  и  $n \neq 0$ . Оно в основном объясняется формулами (7.17).

**4. Метагармоническое продолжение функции.** Положим

$$H_0^1(\Omega_\infty) := \{v \in H^1(\Omega_\infty) : v|_\Gamma = 0\},$$

произвольно фиксируем вещественное  $p, p > 0$ , и определим функции

$$1_x := \min\{1, x^2\}, \quad 1^x := \max\{1, x^2\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что  $1_x \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ .

**Определение 7.16.** Функцию  $u_p$  назовем метагармонической в области  $D \subset \mathbb{R}^2$ , если  $-\Delta u_p + p^2 u_p = 0$  в  $D$ .

**Определение 7.17.** Функцию  $u_p \in H^1(\mathbb{R}^2)$  назовем метагармоническим продолжением функции  $u \in H^1(\Omega)$ , если  $u_p$  является метагармонической в области  $\Omega_\infty$  и  $u_p|_\Omega = u$ .

Отметим, что справедливо тождество

$$\int_{\Omega_\infty} (\nabla u_p \cdot \nabla v + p^2 u_p v) dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_\infty). \quad (7.18)$$

**Лемма 7.13.** Метагармоническое продолжение  $u_p$  произвольной функции  $u \in H^1(\Omega)$  существует, единственно и

$$\|u_p\|_{1, \mathbb{R}^2} \leq c(p) \|u\|_{1, \Omega},$$

где  $c$  — локально ограниченная функция на  $\mathbb{R}_+$ . Кроме того, симметричная неотрицательная форма

$$s_\infty(p, u, v) := \int_{\Omega_\infty} (\nabla u_p \cdot \nabla v_p + p^2 u_p v_p) dx, \quad u, v \in H^1(\Omega),$$

совпадает с формой (7.8) и является ограниченной на  $H^1(\Omega)$ :

$$0 \leq s_\infty(p, u, u) \leq M_s(p) \|u\|_{1, \Omega}^2, \quad M_s(p) := c_0^2(R_0) 1^p. \quad (7.19)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Определим на  $H^1(\Omega_\infty)$  функционал

$$|u|_{1, p}^2 := \int_{\Omega_\infty} (|\nabla u|^2 + p^2 u^2) dx.$$

По определению  $-\Delta u_p + p^2 u_p = 0$  в  $\Omega_\infty$ ,  $u_p|_\Gamma = u$ . Поэтому  $u_p|_{\Omega_\infty}$  является решением задачи минимизации

$$|u_p|_{1, p}^2 = \min_{v \in H^1(\Omega_\infty): v|_\Gamma = u} |v|_{1, p}^2.$$

Хорошо известно, что решение этой задачи существует и единственно, поскольку квадратичный функционал  $u \rightarrow |u|_{1, p}^2$  является ограниченным и коэрцитивным:

$$1_p \|u\|_{1, \Omega_\infty}^2 \leq |u|_{1, p}^2 \leq 1^p \|u\|_{1, \Omega_\infty}^2.$$

Функционал  $|u_p|_{1, p}^2$  нетрудно вычислить в терминах коэффициентов Фурье функции  $u|_\Gamma$ . Рассуждая так же, как при доказательстве леммы 7.10, получим

$$s_\infty(p, u, u) := |u_p|_{1, p}^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{K}_n(pR) |a_n(u)|^2 \quad \forall u \in V.$$

Положим здесь  $u := u + tv$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $v \in V$ , и вычислим производную по  $t$  от обеих частей при  $t = 0$ . В результате придем к формуле (7.8).



Принимая во внимание следствие 7.3, теперь имеем

$$\begin{aligned} s_\infty(p, u, u) &:= |u_p|_{1,p}^2 \leq 1^p \min_{v \in H^1(\Omega_\infty): v|_{\Gamma}=u} \|v\|_{1,\Omega_\infty}^2 =: \\ &=: 1^p |u|_{1/2,\Gamma}^2 \leq c_0^2(R_0) 1^p \|u\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|u_p\|_{1,\mathbb{R}^2}^2 &= \|u\|_{1,\Omega}^2 + \|u_p\|_{1,\Omega_\infty}^2 \leq \|u\|_{1,\Omega}^2 + s_\infty(p, u, u)/1_p \leq \\ &\leq (1 + M_s(p)/1_p) \|u\|_{1,\Omega}^2 =: c^2(p) \|u\|_{1,\Omega}^2. \quad \square \end{aligned}$$

**Лемма 7.14.** Пусть ограниченная функция  $u$  является гармонической или метагармонической вне замкнутого круга  $B_{R_0}$ . Обозначим коэффициенты Фурье функции  $u|_{\partial B_{R_0}} \in L_2(\partial B_{R_0})$  символами  $a_n(u|_{\partial B_{R_0}})$ . Тогда при всех целых  $n$  и  $R \geq R_0$  справедливы оценки

$$|a_n(u|_{\partial B_R})| \leq (R_0/R)^{|n|} |a_n(u|_{\partial B_{R_0}})|.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим случай метагармонической функции  $u$ . Воспользуемся представлением (7.6). Оно справедливо в неограниченной области  $\mathbb{R}^2 \setminus B_R$  при любом  $R \geq R_0$ . Поэтому вне круга  $B_{R_0}$  имеем

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_n(pr)}{K_n(pR_0)} a_n(u|_{\partial B_{R_0}}) e^{in\varphi}. \quad (7.20)$$

Пусть  $\varrho_n(p) := K_n(Rp)/K_n(pR_0)$ , тогда  $\varrho_n(p) = \varrho_{-n}(p) > 0$ . Из асимптотик (7.12) функций Бесселя при малых  $p$  легко получить равенство  $\varrho_n(0) = (R_0/R)^{|n|}$ . Поскольку функция  $r \rightarrow \mathbb{K}_n(r)$  возрастающая, имеем  $\varrho'_n(p) = (\mathbb{K}_n(R_0p) - \mathbb{K}_n(Rp))\varrho_n(p)/p \leq 0$ . Поэтому при всех  $n$  справедливы оценки  $0 < \varrho_n(p) \leq \varrho_n(0) = (R_0/R)^{|n|}$ .

Рассмотрим теперь равенство (7.20) в точках  $r = R$  и заметим, что ряд, в силу равенства Парсеваля (см. (7.9)), равномерно сходится. Умножим обе его части на функцию  $e^{-ik\varphi}/2\pi$  и проинтегрируем по  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . В результате получим  $a_k(u|_{\partial B_R}) = \varrho_k(p)a_k(u|_{\partial B_{R_0}})$  при всех  $k$ . Отсюда следует оценка  $|a_k(u|_{\partial B_R})| \leq (R_0/R)^{|k|} |a_k(u|_{\partial B_{R_0}})|$ .

Случай гармонической функции  $u$  рассматривается аналогично. В этом случае в формуле (7.20) множитель  $K_n(pr)/K_n(pR_0)$  достаточно заменить на  $(R_0/r)^{|n|}$ .  $\square$

**5. Второй метод.** Приведем доказательство “эквивалентности” задач  $(\mathcal{P}_\infty)$  и  $(\mathcal{P})$ . Метод перехода от задачи на плоскости к задаче в круге описывается в первой части доказательства.

**Теорема 7.31.** Задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$  и  $(\mathcal{P})$  эквивалентны в следующем смысле. Если  $(\beta, k, u)$  — решение задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$ , то  $(\beta, p, u|_\Omega)$  — решение задачи  $(\mathcal{P})$  при  $p = (\beta^2 - \varepsilon_\infty k^2)^{1/2}$ . Обратно: если  $(\beta, p, u)$  есть решение задачи  $(\mathcal{P})$ , то  $(\beta, k, u_p)$ , где  $k = ((\beta^2 - p^2)/\varepsilon_\infty)^{1/2}$ ,  $u_p$  — метагармоническое продолжение  $u$ , является решением задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $(\beta, k, u)$  удовлетворяет тождеству  $(\mathcal{P}_\infty)$ . Определим число  $p$  согласно (7.4). Тогда  $(\beta, p) \in K$ , поскольку  $(\beta, k) \in \Lambda$ . Запишем тождество  $(\mathcal{P}_\infty)$  в следующем виде:

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + \beta^2 uv) dx + \int_{\Omega_\infty} (\nabla u \cdot \nabla v + p^2 uv) dx = k^2 \int_{\Omega} \varepsilon uv dx. \quad (7.21)$$

Здесь  $v$  — произвольная функция из  $H^1(\mathbb{R}^2)$ . Заметим, что если принять  $v = 0$  в области  $\overline{\Omega}$ , то получим тождество

$$\int_{\Omega_\infty} (\nabla u \cdot \nabla v + p^2 uv) dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_\infty).$$

Следовательно,  $u$  является метагармонической в  $\Omega_\infty$  (7.18) и  $u = u_p$ . Ограничимся в (7.21) только такими  $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$ , что  $v = v_p$ , и учтем определение формы  $s_\infty$  (см. лемму 7.13). Тогда получим, что

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + \beta^2 uv) dx + s_\infty(p, u, v) = k^2 \int_{\Omega} \varepsilon uv dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (7.22)$$

Так как  $p^2 = \beta^2 - \varepsilon_\infty k^2$ , то

$$k^2 \int_{\Omega} \varepsilon uv dx = -p^2 \int_{\Omega} \sigma uv dx + \beta^2 \int_{\Omega} \sigma uv dx.$$

Поэтому тождество (7.22) преобразуется к виду

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + p^2 \sigma uv) dx + s_\infty(p, u, v) = \beta^2 \int_{\Omega} (\sigma - 1) uv dx.$$

Следовательно,  $(\beta, p, u|_\Omega)$  есть решение задачи  $(\mathcal{P})$ .

Докажем обратное утверждение. Пусть  $(\beta, p, u)$  — решение  $(\mathcal{P})$ . Определим  $k = ((\beta^2 - p^2)/\varepsilon_\infty)^{1/2}$ . Так как  $(\beta, p) \in K$ , то  $(\beta, k) \in \Lambda$ . Пусть  $u_p$  и  $w_p$  — метагармонические продолжения  $u$  и произвольно-го  $w \in V$ , соответственно. Учитывая определение формы  $s_\infty$ , имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla u_p \cdot \nabla w + \beta^2 u_p w) dx + \int_{\Omega_\infty} (\nabla u_p \cdot \nabla w_p + p^2 u_p w_p) dx = \\ = k^2 \int_{\Omega} \varepsilon u_p w dx. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Пусть  $v$  — произвольная функция из  $H^1(\mathbb{R}^2)$  такая, что  $v|_{\Omega} = w$ . В области  $\Omega_\infty$  представим ее в виде  $v = w_p + \eta$ . Ясно, что  $\eta \in H_0^1(\Omega_\infty)$  и

$$\int_{\Omega_\infty} (\nabla u_p \cdot \nabla \eta + p^2 u_p \eta) dx = 0.$$

Учтем это тождество в (7.23). Тогда получим

$$\int_{\Omega} (\nabla u_p \cdot \nabla v + \beta^2 u_p v) dx + \int_{\Omega_\infty} (\nabla u_p \cdot \nabla v + p^2 u_p v) dx = k^2 \int_{\Omega} \varepsilon u_p v dx.$$

Поскольку  $p^2 = \beta^2 - \varepsilon_\infty k^2$ , то предыдущее тождество преобразуется к виду

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_p \cdot \nabla v + \beta^2 u_p v) dx = k^2 \int_{\mathbb{R}^2} \varepsilon u_p v dx.$$

Отсюда следует, что  $(\beta, k, u_p)$  — решение задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$ .  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 7.8.** По определению задача  $(\mathcal{P})$  зависит от выбора области  $\Omega$ , точнее, — от параметра  $R$  (радиуса  $\Omega$ ). Поэтому правильнее было бы писать  $(\mathcal{P}_R)$ ,  $\Omega_R$ ,  $\Gamma_R$  и т.д. Чтобы не перегружать обозначения, мы эти зависимости от  $R$  будем подразумевать, но не будем указывать явно. Это соглашение дополнительно оправдывается тем, что в тройке  $(\beta, p, u)$ , определяющей решение задачи  $(\mathcal{P})$ , от  $R$  зависит только  $u$ , причем тривиальным образом:  $u$  есть сужение на область  $\Omega$  функции, определенной в  $\mathbb{R}^2$ , которая не зависит от  $R$ . С теоретической точки зрения выбор  $R$  не важен при условии, что  $\Omega \supseteq \Omega_i$ . С практической точки зрения величина  $R$  имеет важное значение и ее выбор будет влиять на эффективность численных методов, которые будут обсуждаться далее.

**ЗАМЕЧАНИЕ 7.9.** По-видимому, D. Givoli [115] [116] был первым, кто предложил использовать метод разделения переменных для получения точного нелокального краевого условия на фиктивной границе при решении краевых задач в неограниченных областях. Оператор  $S_\Gamma$  был им назван DtN оператором

(Dirichlet-to-Newmann), поскольку он преобразует, фактически, краевые условия Дирихле на фиктивной границе в условия Неймана. Мы выбрали конечную (расчетную) область  $\Omega$  в форме круга исходя из соображений простоты изложения и проводимых выкладок. Для рассматриваемых нами задач оператор  $S_\Gamma$  нетрудно определить и для эллиптической области  $\Omega$  (см., напр., [97]). Такой выбор оправдан на практике, если область  $\Omega_i$  поперечного сечения волновода сильно вытянута в одном направлении.

## § 2. Существование и свойства решений

Задачу  $(\mathcal{P})$  (см. замечание 7.4) далее будем рассматривать как параметрическую задачу на собственные значения: *при каждом  $p > 0$  найти такие  $(\beta, u) \in \mathbb{R}_+ \times V \setminus \{0\}$ , что*

$$(\mathcal{P}) \quad a(p, u, v) = \beta^2 b(u, v) \quad \forall v \in V.$$

Формы  $a$  и  $b$  зависят от функции  $\sigma := \varepsilon/\varepsilon_\infty$ . В данном параграфе будут использованы лишь следующие свойства этой функции:

$$1 \leq \sigma \leq \sigma_+ := \varepsilon_+/\varepsilon_\infty \quad \text{в } \Omega; \quad \sigma|_{\Omega \setminus \Omega_i} = 1; \quad C(\overline{\Omega}_i) \ni \sigma|_{\overline{\Omega}_i} \geq 1 + \sigma_0.$$

Здесь  $\sigma_0 > 0$ <sup>1)</sup>. Предположения о гладкости  $\sigma$  в  $\Omega_i$ , а также о гладкости  $\partial\Omega_i$  понадобятся нам в следующих параграфах.

Укажем необходимые в дальнейшем свойства форм  $a$  и  $b$ . Отметим, что пространство  $V := H^1(\Omega)$  является гильбертовым. Скалярное произведение в нем определяется равенством

$$(u, v) := \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx, \quad u, v \in V.$$

**1. Свойства форм  $a$  и  $b$ .** Наиболее просто устроена форма  $b$ ,

$$b(u, v) := \int_{\Omega} (\sigma - 1)uv dx.$$

**Лемма 7.15.** *Форма  $b(\cdot, \cdot)$  является симметричной,*

$$0 \leq b(u, u) \leq M_B \|u\|_{1, \Omega}^2, \quad u \in V.$$

<sup>1)</sup>См. соответствующее замечание на с. 122.

Порождаемый ею оператор  $B$  является самосопряженным, компактным и неотрицательным<sup>1)</sup>,  $\ker B = \{u \in V : u = 0 \text{ на } \Omega_i\}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку  $\sigma = 1$  вне  $\Omega_i$ , то

$$0 \leq b(u, u) = \int_{\Omega_i} (\sigma - 1)u^2 dx \leq M_B \|u\|_{0,\Omega}^2 \leq M_B \|u\|_{1,\Omega}^2, \quad (7.24)$$

где  $M_B := \sigma_+ - 1$ . Из симметричности и ограниченности формы  $b$  следует самосопряженность  $B$ ; компактность  $B$  есть следствие первой оценки сверху в (7.24) и компактности вложения  $H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ . Отметим, что ядро и образ  $B$  являются бесконечномерными.  $\square$

Рассмотрим форму  $a$ . Она была определена нами при  $p > 0$  следующим образом:

$$\begin{aligned} a(p, u, v) &:= a_0(p, u, v) + s_\infty(p, u, v) := \\ &:= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + p^2 \sigma uv) dx + 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{K}_n(pR) a_n(u) \overline{a_n(v)}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Далее без дополнительных ссылок будем использовать свойства функций  $\mathbb{K}_n$ , указанные в лемме 7.12. Поскольку для всех целых  $n$  имеем  $\mathbb{K}_n(pR) \rightarrow |n|$  при  $p \rightarrow 0$ , то по определению примем

$$a(0, u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| a_n(u) \overline{a_n(v)}. \quad (7.26)$$

В силу этого далее будем считать, что при всех  $p \geq 0$  форма  $a$  имеет определение (7.25).

**Лемма 7.16.** При каждом  $p \geq 0$  форма  $a$  является симметричной, неотрицательной и ограниченной,

$$m_A(p) \|u\|_{1,\Omega}^2 \leq a(p, u, u) \leq M_A(p) \|u\|_{1,\Omega}^2, \quad u \in V, \quad (7.27)$$

где  $m_A(p) := 1_p$ ,  $M_A(p) := (\sigma_+ + c_0^2(R_0)) 1^p$ .

Если  $(A(p)u, v) = a(p, u, v)$  для любых  $u, v \in V$ , то  $A(p)$  является самосопряженным и неотрицательным оператором;

$$\ker A(0) = \{u : u = \text{const в } \Omega\}; \quad A(p) + B \geq m_{AB} I,$$

<sup>1)</sup>Оператор  $B$  в  $V$  определяется по теореме Рисса равенством  $(Bu, v) = b(u, v)$ , где  $u, v \in V$ .

где постоянная  $m_{AB} > 0$  зависит от  $\Omega$  и  $\varepsilon$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Симметричность и неотрицательность формы  $a$  являются очевидными. Напомним, что при  $p > 0$  (см. (7.19))

$$0 \leq s_\infty(p, u, u) \leq M_s(p) \|u\|_{1,\Omega}^2, \quad M_s(p) := c_0^2(R_0) 1^p. \quad (7.28)$$

Ясно, что эти оценки справедливы и при  $p = 0$ , т. к.  $\mathbb{K}_n(0) \leq \mathbb{K}_n(Rp)$ . Учитывая (7.28), из (7.25) легко вывести оценки (7.27) (напомним, что имеют место неравенства  $1 \leq \sigma \leq \sigma_+$ ). Из них следует, что  $A(p)$  является самосопряженным и неотрицательным. Отметим, что  $m_A(0) = 0$ , а  $m_A(p) > 0$  при  $p > 0$ .

Утверждение о ядре  $A(0)$  становится очевидным, если учесть, что при  $u = \text{const}$  в  $\Omega$ , имеем  $u|_{\Gamma} = \text{const}$ ;  $a_n(u) = 0$  при  $n \neq 0$  (коэффициент  $a_0(u) \neq 0$  отсутствует в определении  $a(0, u, u)$ ). Наконец,

$$a(p, u, u) + b(u, u) \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} (\sigma - 1)u^2 dx =: |u|_{1,\Omega}^2 + \rho^2(u). \quad (7.29)$$

Отметим, что  $\rho$  есть непрерывная полунорма на  $L_2(\Omega)$  и она не обращается в нуль на постоянных в  $\Omega$  функциях. Хорошо известно, что в этом случае справедлива оценка (см., напр., [81, с. 25])

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq c_{\Omega} (|u|_{1,\Omega}^2 + \rho^2(u)),$$

где постоянная  $c_{\Omega}$  зависит от области  $\Omega$ . Прибавляя к обеим частям этой оценки  $|u|_{1,\Omega}^2$ , получим:  $|u|_{1,\Omega}^2 + \rho^2(u) \geq m_{AB} \|u\|_{1,\Omega}^2$ , а из (7.29) — заключительное утверждение леммы.  $\square$

**Лемма 7.17.** Функция  $p \rightarrow a(p, u, u)$ ,  $u \in V$ , является дифференцируемой на  $\mathbb{R}_+$ , непрерывной в нуле и возрастающей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть фиксировано  $u \in V$ . Убедимся, что ряд, определяющий  $s_\infty(p, u, u)$ , можно почленно дифференцировать по  $p$  на любом отрезке  $\omega := [\omega_1, \omega_2]$  из  $\mathbb{R}_+$ . Для этого достаточно убедиться, что формальная производная ряда

$$s'(p) := 2\pi R \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{K}'_n(pR) |a_n(u)|^2$$

сходится равномерно в  $\omega$ . Напомним, что все функции  $r \rightarrow \mathbb{K}_n(r)$  являются возрастающими, непрерывными в нуле и аналитическими на  $\mathbb{R}_+^{1)}$ ,  $0 < \mathbb{K}'_n(r) \leq |n| + r$  при  $r > 0$  и  $n \neq 0$ .

Пусть  $\mu_\omega := \max\{\mathbb{K}'_0(pR), pR : p \in \omega\}$ . Нетрудно видеть, что ряд  $s'(p)$  мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\begin{aligned} 2\pi R \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n| + \mu_\omega) |a_n(u)|^2 &= \\ &= Rs_\infty(0, u, u) + \mu_\omega 2\pi R \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n(u)|^2 = \\ &= Rs_\infty(0, u, u) + \mu_\omega \int_{\Gamma} u^2 d\Gamma \leq D_\omega \|u\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались оценкой (7.28) при  $p = 0$ , равенством Парсеваля (7.9) и непрерывностью вложения  $H^1(\Omega) \subset L_2(\Gamma)$ . Следовательно, ряд  $s'(p)$  сходится равномерно на  $\omega$ . Поскольку  $s'(p) \geq 0$ , то при  $p \in \omega$  и  $u \neq 0$  имеем

$$0 < \frac{d}{dp} a(p, u, u) = 2p \int_{\Omega} \sigma u^2 dx + s'(p) \leq D_A(p) \|u\|_{1,\Omega}^2,$$

где  $D_A(p) := 2p\sigma_+ + D_\omega$ . Отсюда также следует, что  $a(p, u, u)$  возрастает по  $p$ .

Пусть теперь  $\epsilon(p) := \max\{\mathbb{K}_0(pR)/R, p\}$ . Поскольку при всех  $n$  справедливы оценки  $0 \leq \mathbb{K}_n(pR) - |n| \leq R\epsilon(p)$ , то

$$\begin{aligned} 0 \leq a(p, u, u) - a(0, u, u) &= \\ &= p^2 \int_{\Omega} \sigma u^2 dx + 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathbb{K}_n(pR) - |n|) |a_n(u)|^2 \leq \\ &\leq p^2 \sigma_+ \|u\|_{0,\Omega}^2 + \epsilon(p) 2\pi R \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n(u)|^2 = \\ &= p^2 \sigma_+ \|u\|_{0,\Omega}^2 + \epsilon(p) \|u\|_{0,\Gamma}^2 \leq (p^2 \sigma_+ + c_\Omega \epsilon(p)) \|u\|_{1,\Omega}^2, \quad (7.30) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup>Напомним, что вещественная функция аналитична в  $\omega$ , если в каждой точке  $\omega$  она раскладывается в равномерно сходящийся ряд Тейлора.

где  $c_\Omega$  — постоянная вложения  $H^1(\Omega) \subset L_2(\Gamma)$ . Отсюда следует, что  $a$  является непрерывной в нуле, так как  $\epsilon(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow 0$ .  $\square$

**Следствие 7.4.** Оператор  $A_1(p) := A(p) - A(0)$  является неотрицательным и компактным при  $p > 0$ ,  $\|A_1(p)\| \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как  $(A_1(p)u, u) = a(p, u, u) - a(0, u, u)$ , то из (7.30) имеем

$$0 \leq (A_1(p)u, u) \leq p^2 \sigma_+ \|u\|_{0,\Omega}^2 + \epsilon(p) \|u\|_{0,\Gamma}^2.$$

Отсюда следует компактность оператора  $A_1(p)$  в силу того, что вложения  $H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$  и  $H^1(\Omega) \subset L_2(\Gamma)$  являются компактными. Ясно, что

$$\|A_1(p)\| = \sup_{u \in V, u \neq 0} \frac{|(A_1(p)u, u)|}{\|u\|_{1,\Omega}^2} \leq p^2 \sigma_+ + c_\Omega \epsilon(p) \rightarrow 0, \quad p \rightarrow 0.$$

**2. Существование и свойства решений задачи (P).** Напомним операторную формулировку задачи: при каждом заданном  $p > 0$  найти такие  $(\beta, u) \in \mathbb{R}_+ \times V \setminus \{0\}$ , что  $A(p)u = \beta^2 Bu$ . Рассмотрим также задачу

$$A(0)u = \beta^2 Bu, \quad (7.31)$$

собственные числа которой определяют критические числа.

Задачи подобного вида были изучены нами в главе 6 (см. § 3, с. 141), где спектральный параметр  $\beta^2$  обозначался через  $\lambda$ , а параметр  $p$  пробегал  $\mathbb{R}_+^{1)}$ . Были доказаны две теоремы (6.26 и 6.27), посвященные, соответственно, существованию решений и свойствам дисперсионных кривых. Чтобы воспользоваться этими результатами, необходимо проверить пять условий (см. условия  $A_1$ – $A_5$  на с. 143), которым должны удовлетворять операторы  $A(p)$  и  $B$ .

**Лемма 7.18.** Оператор-функция  $p \rightarrow A(p)$  и оператор  $B$  удовлетворяют условиям  $A_1$ – $A_5$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Напомним условия  $A_1$ – $A_5$  (опуская части, касающиеся зависимости  $B$  от  $p$ ), а также укажем леммы предыдущего пункта, посвященные их проверке.

<sup>1)</sup>Рассматриваемая задача несколько проще, поскольку оператор  $B$  не зависит от  $p$ .

В леммах 7.15 и 7.16 было доказано, что

$$m_A(p) \leq A(p) \leq M_A(p)I, \quad p \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq B \leq M_B I, \\ r_0 := \dim(\ker A(0)) = 1, \quad \dim(\operatorname{Im} B(p)) = \infty,$$

где  $m_A(0) = 0$ ,  $m_A(p) > 0$  при  $p > 0$ . Эти оценки означают, что выполнены как условия  $A_1$ , так и условия  $A_2$ .

В лемме 7.16 при всех  $p$  из  $\overline{\mathbb{R}}_+$  была установлена оценка

$$A(p) + B(p) \geq m_{AB} I,$$

означающая выполнение условия  $A_3$ . Там же было доказано, что при любом  $u \in V$  функция  $p \rightarrow a(p, u, u)$  возрастает. Поэтому отношение Рэлея  $R(p, u) := a(p, u, u)/b(u, u)$  также возрастает по  $p$  на  $\tilde{V}^1$  (условие  $A_4$ ).

Непрерывность в нуле функции  $p \rightarrow a(p, u, u)$  была доказана в лемме 7.17. Там же была установлена ее дифференцируемость на полуоси  $\mathbb{R}_+$ . Такие функции локально липшиц-непрерывны, поскольку

$$|a(p, u, u) - a(\bar{p}, u, u)| = \left| \int_{\bar{p}}^p \frac{d}{d\rho} a(\rho, u, u) d\rho \right| \leq \\ \leq \left| \int_{\bar{p}}^p D_A(\rho) \|u\|_{1,\Omega}^2 d\rho \right| \leq L_\omega |p - \bar{p}| \|u\|_{1,\Omega}^2,$$

где  $p, \bar{p} \in \omega := [\omega_1, \omega_2] \subset \mathbb{R}_+$ . Таким образом, функция  $p \rightarrow A(p)$ , как и  $B$ , принадлежат множеству  $\mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}}_+, V)$  (условия  $A_5$ ).  $\square$

**Теорема 7.32.** *При каждом  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$  существует счетное множество чисел  $\beta^K(p)$ ,  $K \geq 1$ , с единственной точкой накопления  $+\infty$ , квадраты которых образуют полный набор собственных чисел задачи (P) при  $p > 0$  и задачи (7.31) при  $p = 0$ . Соответствующие им собственные подпространства  $U^K(p)$  конечномерны,  $V_{A(p)+B} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} U^K(p) \oplus \ker B^2$ . Кроме того, если  $\{\beta_i(p)\}_{i=1}^{\infty}$  есть числа  $\beta^K(p)$ ,  $K = 1, 2, \dots$ , занумерованные по возрастанию с учетом*

<sup>1)</sup>  $\tilde{V}$  есть ортогональное дополнение  $\ker B$  до пространства  $V_{A(p)+B}$ .

<sup>2)</sup> Кратность  $\beta^K(p)$  определим как кратность  $\beta^{K^2}(p) := (\beta^K(p))^2$ . Соответствующие им собственные элементы будем называть также собственными функциями.

кратности, то

- a) функции  $p \rightarrow \beta_i(p)$  и  $p \rightarrow \beta_i^2(p) - p^2$ ,  $i \geq 1$ , являются возрастающими, непрерывными в нуле и локально липшиц-непрерывными на  $\mathbb{R}_+$ ;  
b)  $\beta_1(p) \searrow +0$  при  $p \rightarrow +0$ ,  $\beta_2(0) > 0$ ;  
c) если  $k_0 := (\varepsilon_+ / (\varepsilon_+ - \varepsilon_\infty))^{1/2}$ , то  $\frac{\beta_i(p)}{p} > k_0$ ,  $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\beta_i(p)}{p} = k_0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из теорем 6.26 и 6.27 главы 6, которыми мы можем воспользоваться благодаря предыдущей лемме, следуют все утверждения теоремы, кроме утверждения о монотонности функций  $p \rightarrow \beta_i^2(p) - p^2$  и c).

Пусть  $p > 0$ . Используем минимаксный принцип Куранта — Фишера. Имеем

$$\beta_i^2(p) = \min_{V_i \subset \tilde{V}} \max_{v \in V_i \setminus \{0\}} R(p, v), \quad R(p, v) := \frac{a(p, v, v)}{b(v, v)}.$$

Поэтому

$$\beta_i^2(p) - p^2 = \min_{V_i \subset \tilde{V}} \max_{v \in V_i \setminus \{0\}} \tilde{R}(p, v), \quad \tilde{R}(p, v) := R(p, v) - p^2. \quad (7.32)$$

Простые преобразования приводят к равенству

$$\tilde{R}(p, v) = \frac{1}{b(v, v)} \left( \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + p^2 v^2) dx + s_\infty(p, v, v) \right).$$

Теперь из (7.32) следует, что функция  $p \rightarrow \beta_i^2(p) - p^2$  является неотрицательной и возрастающей.

Докажем второе утверждение в c), поскольку первое следует из принадлежности  $(\beta_i(p), p)$  множеству  $K$ . Обозначим через  $B_r$  круг малого радиуса  $r$  с центром в такой точке  $x_+ \in \overline{\Omega}_i$ , что

$$\varepsilon_+ = \varepsilon(x_+) = \max_{x \in \overline{\Omega}_i} \varepsilon(x), \quad \delta_r := \max_{x \in \overline{B}_r} \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon(x)}{\varepsilon_\infty},$$

и пусть  $V_r$  есть множество функций из  $V$ , равных нулю вне  $B_r$ . Отметим, что  $s_\infty(p, u, u) = 0$  на  $V_r$ ;  $\sigma(x) := \varepsilon(x)/\varepsilon_\infty \leq \varepsilon_+/\varepsilon_\infty$  в  $B_r$ ,

$$\sigma(x) - 1 = \frac{\varepsilon_+}{\varepsilon_\infty} - 1 - \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon(x)}{\varepsilon_\infty} \geq \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_\infty - \varepsilon_\infty \delta_r}{\varepsilon_\infty} =: \frac{d_r}{\varepsilon_\infty}.$$

Нетрудно видеть, что для любого  $v \in V_r$  справедлива оценка

$$R(p, v) \leq \frac{\varepsilon_\infty}{d_r} \left( \int_{B_r} |\nabla v|^2 dx \right) \left( \int_{B_r} v^2 dx \right)^{-1} + \frac{\varepsilon_+ p^2}{d_r}.$$

Обозначим через  $(\lambda_r^i, u^i)$  собственные пары оператора Лапласа в круге  $B_r$  при краевых условиях Дирихле ( $u^i$  продолжим нулем вне круга  $B_r$ ). Поскольку  $\lambda_r^i = r^{-2} \lambda_1^i$ , то

$$\beta_i^2(p) = \min_{V_i \subset \tilde{V}} \max_{v \in V_i \setminus \{0\}} R(p, v) \leq \frac{\varepsilon_\infty \lambda_1^i}{r^2 d_r} + \frac{\varepsilon_+ p^2}{d_r}.$$

Следовательно,

$$k_0^2 \leq \frac{\beta_i^2(p)}{p^2} \leq \frac{\varepsilon_\infty \lambda_1^i}{p^2 r^2 d_r} + \frac{\varepsilon_+}{d_r}.$$

Переходя здесь к пределу при  $r \rightarrow 0$ ,  $p \rightarrow \infty$  так, чтобы  $pr \rightarrow \infty$ , получим второе утверждение с), так как  $\delta_r \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_+/d_r \rightarrow k_0^2$ .  $\square$

**3. Аналитичность дисперсионных кривых.** Согласно следствию 7.4 оператор  $A(p)$  допускает представление в виде суммы самосопряженных неотрицательных операторов,  $A(p) =: A(0) + A_1(p)$ , причем операторы  $A_1(p)$  являются компактными и  $\|A_1(p)\| \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow 0$ . Оператор  $A(0)$  порождается формой  $a(0, \cdot, \cdot)$  (см. (7.26)),

$$(A_1(p)u, v) := p^2 \int_{\Omega} \sigma uv dx + 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbb{K}}_n(pR) a_n(u) \overline{a_n(v)}, \quad (7.33)$$

где  $\tilde{\mathbb{K}}_n(z) = \mathbb{K}_n(z) - \mathbb{K}_n(0)$ . Задачу  $(\mathcal{P})$  преобразуем к виду

$$\tilde{A}(p)u := A_0 u + A_1(p)u = \lambda B u, \quad A_0 := A(0) + B, \quad \lambda := \beta^2 + 1. \quad (7.34)$$

Далее будет показано, что оператор  $A_1(p)$ , рассматриваемый как возмущение положительно определенного оператора  $A_0$ , аналитически зависит от  $p$ . В этом случае, привлекая аналитическую теорию возмущений линейных операторов, получим следующее утверждение.

**Теорема 7.33.** *Все собственные числа задачи  $(\mathcal{P})$  представляются аналитическими на  $\mathbb{R}_+$  функциями. Точнее, существует последовательность скалярных функций  $\lambda^i(p)$  и последовательность вектор-функций  $u^i(p)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , аналитических на  $\mathbb{R}_+$  и таких,*

что для каждой точки  $p \in \mathbb{R}_+$  последовательность  $\lambda^i(p)$  представляет полный набор собственных чисел задачи  $(\mathcal{P})$ , а последовательность  $u^i(p)$  образует полное в  $V/\ker B(0)$  семейство собственных элементов.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим эквивалентную формулировку (7.34) задачи  $(\mathcal{P})$ . Задачи такого типа при более общих предположениях относительно операторов задачи изучались в книге [48, с. 520]. Поскольку оператор  $\tilde{A}(p)$  положительно определен при всех  $p$ , то определен самосопряженный и компактный оператор

$$T(p) := \tilde{A}^{-1/2}(p) B \tilde{A}^{-1/2}(p).$$

Он также аналитически зависит от переменной  $p$  на  $\mathbb{R}_+$  [48, с. 523]. Ясно, что

$$T(p)v = \mu(p)v, \quad \lambda(p) =: \mu^{-1}(p) - 1, \quad u =: \tilde{A}^{-1/2}(p)v.$$

Нас интересуют только ненулевые собственные числа  $T(p)$ . Так как  $\ker T(p) = \ker B(0)$  при всех  $p$ , то они могут быть получены как решения задачи

$$\tilde{T}(p)v = \mu(p)v, \quad v \in \tilde{V} \setminus \{0\}, \quad \tilde{V} := V/\ker B(0), \quad (7.35)$$

где  $\tilde{T}(p)$  есть сужение  $T(p)$  на  $\tilde{V}$ . Известно, что все собственные числа и соответствующие им собственные элементы этой задачи представляются аналитическими на  $\mathbb{R}_+$  функциями ([48, см. теорему 3.9 и замечание 3.11 на с. 490]), причем собственные элементы образуют базис в  $\tilde{V}$ . Отсюда следуют утверждения теоремы, если учесть связь между исходной задачей и (7.35).  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 7.10.** Разницу между двумя нумерациями  $\{\lambda_i(p)\}$  и  $\{\lambda^i(p)\}$  дисперсионных кривых демонстрирует рис. 13, с. 146.

**ЗАМЕЧАНИЕ 7.11.** Согласно теореме 7.32 аналитические функции  $\lambda^i(p)$  определены по непрерывности при  $p = 0$ . Аналогичное утверждение, на доказательстве которого мы не останавливаемся, справедливо и для собственных элементов  $u^i(p)$ .

Докажем аналитичность семейства операторов  $A_1(p)$ . Для этого достаточно убедиться, что справедлива

**Лемма 7.19.** *Функция  $p \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbb{K}}_n(pR) a_n(u) \overline{a_n(v)}$  при фиксированных  $u, v \in V$  является аналитической на  $\mathbb{R}_+$ . Радиус сходимости ее ряда Тейлора в любой точке  $p_0 > 0$  равен  $p_0$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $u, v \in V$ . Введем в рассмотрение числа  $c_n := a_n(u) \overline{a_n(v)}$  и функции  $\phi_n(z) := \tilde{\mathbb{K}}_n(z)/z$ , где аргумент  $z \in \mathbb{C}_+ := \{p + iy : p > 0\}$ . Определим ряды

$$s_0 := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|, \quad s(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbb{K}}_n(Rz) c_n.$$

Из равенства Парсеваля (7.9), с. 155, и вложения  $V \subset L_2(\Gamma)$  следует, что числовой ряд  $s_0$  сходится. Действительно,

$$s_0^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n(u)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n(v)|^2 \leq c \|u\|_{1,\Omega}^2 \|v\|_{1,\Omega}^2.$$

Ряд  $s(z)$  преобразуется к виду

$$s(z) = c_0 \mathbb{K}_0(Rz) + Rz \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} c_n \phi_n(Rz) =: c_0 \mathbb{K}_0(Rz) + Rz s_1(z).$$

Функциональный ряд  $s_1$  мажорируется рядом  $s_0$ , так как  $|\phi_n(z)| \leq 1$  в  $\mathbb{C}_+$  при  $n \neq 0$ . Поэтому  $s_1$  сходится равномерно в  $\mathbb{C}_+$ . Поскольку при каждом  $n$  функции  $\phi_n(z)$ , а также  $\mathbb{K}_0(z)$  являются аналитическими в односвязной области  $\mathbb{C}_+$ , то по теореме Вейерштрасса  $s_1(z)$ , а следовательно и  $s(z)$ , являются аналитическими в  $\mathbb{C}_+$ . Отметим, что поскольку аналитичность  $s$  теряется в нуле, то радиус сходимости ряда Тейлора

$$s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s^{(k)}(z_0, u, v) (z - z_0)^k, \quad s^{(k)}(z_0, u, v) := \frac{s^{(k)}(z_0)}{k!},$$

при вещественном положительном  $z_0 = p_0$  равен в точности  $p_0$ . Коэффициенты этого ряда представляют собой симметричные, вещественные и ограниченные билинейные формы на  $V$  и могут быть получены разложением в ряд Тейлора в точке  $z_0$  функций  $\tilde{\mathbb{K}}_n(Rz)$  в определении  $s(z)$  и группировкой слагаемых.  $\square$

**4. Множество решений задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$ .** Напомним, что задача  $(\mathcal{P}_\infty)$  является обобщенной формулировкой задачи нахождения пар чисел  $(\beta, k) \in \Lambda$  и ненулевых вещественных  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ , удовлетворяющих в  $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$  уравнению

$$-\Delta u + \beta^2 u = k^2 \varepsilon u,$$

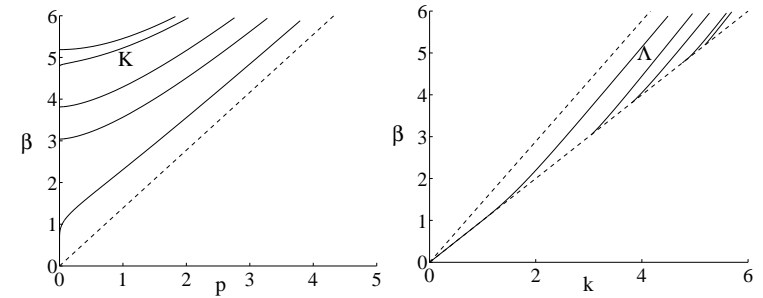


Рис. 17. Дисперсионные кривые для волновода прямоугольного поперечного сечения с размерами  $1.5 \times 1$ ;  $\varepsilon(x) = 2.0$ ,  $x \in \Omega_i$ ;  $\varepsilon_\infty = 1$ . На левом рисунке пунктирной линией изображена часть границы области  $K$ , на правом — граница  $\Lambda$ .

где продольное волновое число  $k$  пропорционально частоте электромагнитных колебаний  $\omega$ ,  $k := (\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2} \omega$ .

Между множествами решений этой задачи и задачи  $(\mathcal{P})$  имеется взаимно однозначное соответствие, определяемое теоремой 7.31. А именно, если тройка  $(\beta_i(p), p, u_i(p))$  есть решение задачи  $(\mathcal{P})$ ,  $i \geq 1$ , то при  $k_i(p) = (\beta_i^2(p) - p^2)/\varepsilon_\infty^{1/2}$  тройка  $(\beta_i(p), k_i(p), u_{ip}(p))$  — решение задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$  и наоборот<sup>1)</sup>. Таким образом, из теоремы 7.32, с. 173, посвященной описанию множества решений задачи  $(\mathcal{P})$ , нетрудно получить информацию о множестве решений задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$ . Дадим, предварительно, несколько пояснений.

В задаче  $(\mathcal{P}_\infty)$  волновое число  $k$  (или частоту  $\omega$ ) будем считать параметром, а  $(\beta, u)$  — неизвестными, и будем интересоваться зависимостью решений от  $k$ . Пусть  $(\beta_i(p), u_i(p))$ ,  $i \geq 1$ ,  $p \in \mathbb{R}_+$ , есть решения задачи  $(\mathcal{P})$  и  $k_i(p) = (\beta_i^2(p) - p^2)/\varepsilon_\infty^{1/2}$ . Тогда решениями задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$  являются тройки  $(\beta_i(p), k_i(p), u_{ip}(p))$ ,  $i \geq 1$ ,  $p \in \mathbb{R}_+$ . В плоскости  $(k, \beta)$  функции

$$k = k_i(p), \quad \beta = \beta_i(p), \quad p \in \mathbb{R}_+, \quad i = 1, 2, \dots,$$

определяют дисперсионные кривые задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$ , параметризованные поперечным волновым числом  $p$ . Согласно утверждению а) теоремы 7.32, функции  $p \rightarrow k_i(p)$ ,  $p \rightarrow \beta_i(p)$  локально удовлетворяют условию Липшица, непрерывны в нуле и возрастают. При  $p \rightarrow 0$

<sup>1)</sup>Напомним, что  $u_{ip}(p)$  есть метагармоническое продолжение  $u_i(p)|_\Omega$ .

имеем  $k_i(p) \rightarrow k_i^0 = \beta_i^0 / \varepsilon_\infty^{1/2}$ ,  $\beta_i(p) \rightarrow \beta_i^0$ . Таким образом,  $i$ -я дисперсионная кривая начинается в критической точке  $(k_i^0, \beta_i^0)$ . Число  $\omega_i^0 := k_i^0 / (\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2}$  называется критической частотой. На рис. 17 в качестве иллюстрации сказанному выше представлены первые дисперсионные кривые задачи  $(\mathcal{P})$  (слева) и  $(\mathcal{P}_\infty)$  (справа) для однородного волновода прямоугольного поперечного сечения. Ясно, что дисперсионные кривые допускают параметризацию

$$\beta_i = \beta_i(k), \quad k \in (k_i^0, \infty), \quad i = 1, 2, \dots^1$$

Числа  $(\beta_i^0)^2$  являются решениями следующей задачи: *найти пары  $(\beta^2, u) \in \mathbb{R}_+ \times V \setminus \{0\}$  такие, что*

$$(\mathcal{P}^0) \quad a(0, u, v) = \beta^2 b(u, v) \quad \forall v \in V.$$

Напомним, что

$$a(0, u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| a_n(u) \overline{a_n(v)}.$$

Задачу  $(\mathcal{P}^0)$  назовем задачей определения критических чисел. Согласно теореме 7.32

$$0 = \beta_1^0 < \beta_2^0 \leq \beta_3^0 \leq \dots, \quad \beta_i^0 \rightarrow \infty, \quad i \rightarrow \infty.$$

Определим ступенчатую функцию

$$n(k) := \max\{i : k_i^0 < k, \quad i = 1, 2, \dots\}.$$

Число  $n(k)$  в точности равно числу решений  $(\beta_i(k), u_i(k))$  задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$  при фиксированном  $k > 0$ . Из приведенных выше рассуждений и теоремы 7.32 непосредственно следует

**Теорема 7.34.** *При каждом  $k > 0$  существует конечное число собственных чисел  $\beta^K(k)$ ,  $1 \leq K \leq m(k)$ , суммарной кратности  $n(k)$  и соответствующих им собственных подпространств  $U^K(k)$  таких, что  $(\beta^K(k), k, u)$  есть решение задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$  при любом  $u \in U^K(k)$ . Кроме того, если*

$$0 < \beta_1(k) \leq \beta_2(k) \leq \dots \leq \beta_{n(k)}(k)$$

<sup>1)</sup>Впрочем, как и параметризацию  $k_i = k_i(\beta)$ ,  $\beta \in (\beta_i^0, \infty)$ ,  $i = 1, 2, \dots$

есть нумерация чисел  $\{\beta^K(k)\}_{K=1}^{m(k)}$  с учетом кратности, то

- a)  $n(k) \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ ;  $\beta_1(k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow +0$ ;
- b) функции  $k \rightarrow \beta_i(k)$ ,  $k \geq k_i^0$ ,  $i = 1, \dots, n(k)$ , возрастают и локально монотонны;
- c)  $\varepsilon_\infty^{1/2} k < \beta_i(k) < \varepsilon_+^{1/2} k$ ,  $k > k_i^0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\beta_i(k)/k) = \varepsilon_+^{1/2}$ ,  $i = 1, \dots, n(k)$ .

При каждом  $k > 0$ , как следует из этой теоремы, существует по крайней мере одно решение задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$ . Число решений неограниченно возрастает с ростом  $k$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 7.12.** Обратим внимание на то, что качественное поведение дисперсионной кривой  $p \rightarrow \beta_1(p)$  на рис. 17 отличается от поведения других кривых. В частности, она вогнута и экспоненциально приближается к оси  $\beta$  при малых  $p$ . Проанализируем поведение  $\beta_1(p)$  при малых  $p$ . Оператор  $A(p)$  имеет вид

$$A(p) = A(0) + A_1(p),$$

где компактный оператор  $A_1(p)$  определяется формулой (7.33), с. 175. При малых  $p$  функции  $\tilde{\mathbb{K}}_n(Rp)$  имеют асимптотику (7.17). Введем в рассмотрение параметры  $\epsilon := p^2 \ln(1/p)$  и  $\epsilon_0 := \mathbb{K}_0(pR) \approx 1/\ln(1/p)$  и определим операторы

$$(A_0 u, v) := a(0, u, v) + \epsilon_0 2\pi a_0(u) \overline{a_0(v)},$$

$$(E(p)u, v) := p^2 \int_{\Omega} \sigma uv \, dx + 2\pi \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \tilde{\mathbb{K}}_n(pR) a_n(u) \overline{a_n(v)}.$$

Тогда задача  $(\mathcal{P})$  примет вид

$$A_0 u + E(p)u = \beta^2(p)Bu.$$

Используя равенство Парсеваля, легко показать, что  $\|E(p)\| \leq c\epsilon$ . Поэтому при малых  $p$  задача на собственные значения

$$A_0 u = \lambda Bu,$$

является хорошим приближением задачи  $(\mathcal{P})$ , поскольку  $0 \leq \beta^2(p) - \lambda \leq c\epsilon$ . Эта задача зависит от малого параметра  $\epsilon_0$ . Пусть  $(\lambda_0, u_0)$  — ее собственные пары при нулевом значении  $\epsilon_0$ . Используя теорию асимптотических разложений собственных пар (см., напр., [48, теорема 2.6, с. 551]), получим разложение для собственных чисел  $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \epsilon_0 + O(\epsilon_0^2)$ . Для простого собственного числа справедливо представление  $\lambda_1 = (A_0 u_0, u_0)/(B u_0, u_0)$ . Окончательно имеем

$$\beta^2(p) = \lambda_0 + \lambda_1 \epsilon_0 + O(\epsilon_0^2) + O(\epsilon) = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbb{K}_0(pR) + O(\mathbb{K}_0^2(pR)).$$

Рассмотрим первую собственную пару  $(\beta_1^2(p), u_1(p))$ . В этом случае  $\lambda_0 = 0$  а  $u_0$  — постоянная в  $\Omega$  функция (она принадлежит ядру  $A_0$  при  $\epsilon_0 = 0$ ). Поэтому

$$\beta_1^2(p) = \lambda_1 \mathbb{K}_0(Rp) + O(\mathbb{K}_0^2(pR)), \quad \lambda_1 := 2\pi / \int_{\Omega} (\sigma - 1) \, dx.$$



Таким образом, при малых  $p$  поведение функции  $p \rightarrow \beta_1(p)$  совпадает с поведением функции  $\mathbb{K}_0^{1/2}(Rp)$  (график функции  $\mathbb{K}_0(p)$  см. на левом рис. 15, с. 157).

### §3. Дискретная задача

Для приближенного решения задачи  $(P)$  используем метод Галеркина с возмущениями. Абстрактная оценка точности этого метода была получена в первой главе (см. теорему 6.30 на с. 150). Для дискретизации задачи используем метод конечных элементов (МКЭ) с численным интегрированием, основанный на конформной аппроксимации  $V_h$  пространства Соболева  $V := H^1(\Omega)$ . Наряду с численным интегрированием дополнительное возмущение в метод Галеркина вносит усечение бесконечной суммы, входящей в определение формы  $a$ .

**1. Пространство конечных элементов.** Опишем кратко пространство конечных элементов  $V_h$  (подробнее см., напр., [55, с. 47], либо [159], [160], либо [23, с. 114]). Пусть  $\{\mathcal{T}_h\}_h$  — семейство точных регулярных триангуляций круга  $\Omega$ , зависящее от малого параметра  $h > 0$ . А именно,  $\mathcal{T}_h$  есть такая совокупность треугольных конечных элементов  $e$ , что <sup>1)</sup>

$$\bar{\Omega}_h := \bigcup_{e \in \mathcal{T}_h} e = \bar{\Omega}, \quad h := \max_{e \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(e).$$

Допускается использование элементов двух типов — элементов с тремя прямолинейными сторонами (прямолинейные элементы) и элементов с двумя прямолинейными и одной криволинейной стороной (криволинейные элементы). С практической точки зрения естественно использовать криволинейные элементы только в качестве приграничных, то есть когда две вершины треугольника  $e$  лежат на  $\partial\Omega$  (окружности), или на  $\partial\Omega_i$  (границе волновода) (см. рис. 18).

Рассмотрим элемент  $e \in \mathcal{T}_h$  с вершинами  $a_1, a_2$  и  $a_3$  (либо криволинейный, либо прямолинейный). Будем считать, что две его стороны  $a_1a_2$  и  $a_1a_3$  — прямолинейные, а третья лежит на кривой  $\ell$ , параметризованной дуговой координатой  $s$  так, что  $a_2 = \chi(s_2)$ ,  $a_3 = \chi(s_3)$ . При этом  $l_e = s_3 - s_2$  — длина дуги  $a_2a_3$ <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup>Общими у элементов могут быть либо сторона, либо вершина;  $e$  — замкнутое множество.

<sup>2)</sup> $\ell$  — либо кривая линия, либо — прямая,  $\ell = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \chi(s), s \in [0, L]\}$ .

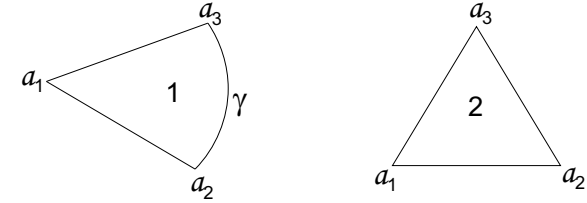


Рис. 18. Приграничные (1) и внутренние (2) треугольники,  $\gamma$  есть часть  $\partial\Omega$  или  $\partial\Omega_i$ .

Пусть  $\hat{e}$  — базисный треугольник в плоскости  $(\hat{x}_1\hat{x}_2)$  с вершинами  $\hat{a}_1 = (0, 0)$ ,  $\hat{a}_2 = (1, 0)$ ,  $\hat{a}_3 = (0, 1)$ . Определим отображение

$$x = x_e(\hat{x}) := a_1 + B_e \hat{x} + \hat{x}_1 \frac{\Phi(\hat{x}_2) - \Phi_I(\hat{x}_2)}{1 - \hat{x}_2}.$$

Здесь  $\Phi(t) := \chi(s_2 + t(s_3 - s_2))$ ;  $\Phi_I(t) := a_2 + t(a_3 - a_2)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , — параметрическое представление хорды  $a_2a_3$ ;

$$B_e := \begin{pmatrix} (a_2 - a_1)_1 & (a_3 - a_1)_1 \\ (a_2 - a_1)_2 & (a_3 - a_1)_2 \end{pmatrix}.$$

Отображение  $x = x_e(\hat{x})$  задает преобразование  $\hat{e}$  на  $e$ , сохраняющее ориентацию, причем  $a_i = x_e(\hat{a}_i)$ . Известно, что это взаимно однозначное диффеоморфное отображение, если  $h$  достаточно мало. Точнее, если <sup>1)</sup>

$$c^{-1}h^2 \leq \det B_e \leq ch^2, \quad \|B_e\| \leq ch, \quad \|B_e^{-1}\| \leq ch, \quad (7.36)$$

то

$$c^{-1}h^2 \leq \det(Dx_e(\hat{x})) \leq ch^2 \quad \forall \hat{x} \in \hat{e}, \quad (7.37)$$

$$\|\det(Dx_e)\|_{j,\infty,\hat{e}} \leq ch^{j+2}, \quad \|x_e\|_{j,\infty,\hat{e}} \leq ch^j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (7.38)$$

где  $Dx_e$  — матрица Якоби отображения  $x_e$ . Здесь и далее буква  $c$  (возможно с индексом) используется для обозначения различных постоянных, не зависящих от  $h$ .

<sup>1)</sup>Здесь  $\|A\|$  означает спектральную (вторую) норму матрицы  $A$ . Отметим, что  $|Ay| \leq \|A\| |y|$ ,  $y \in \mathbb{R}^2$ ;  $\|A\| = \|A^T\|$ .

Обозначим через  $\hat{x} = x_e^{-1}(x)$  обратное отображение к  $x_e$ , а символом  $\hat{P}_m$  — множество полиномов степени не выше  $m$  на  $\hat{e}$ ,  $m \geq 0$ ,

$$\hat{P}_m := \left\{ \sum_{0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq m} c_\alpha \hat{x}_1^{\alpha_1} \hat{x}_2^{\alpha_2}, c_\alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\dim \hat{P}_m =: \hat{M} := (m+1)(m+2)/2.$$

Введем следующее пространство функций на  $e$ :

$$P_m^e := \{p: p(x) = \hat{p}(x_e^{-1}(x)), \hat{p} \in \hat{P}_m, x \in e\}, \quad m \geq 1.$$

Если  $\hat{\varphi}_i(\hat{x})$ ,  $i = 1, \dots, \hat{M}$ , — базис Лагранжа в  $\hat{P}_m$ ,  $m \geq 1$ , связанный с узлами интерполяции  $\hat{\omega} := \{\hat{a}_i, i = 1, \dots, \hat{M}\}^1$ , то базис Лагранжа в  $P_m^e$  составляют функции  $\varphi_i^e(x) = \hat{\varphi}_i(x_e^{-1}(x))$ ,  $i = 1, \dots, \hat{M}$ . Они связаны с узлами интерполяции  $\omega^e := \{a_i^e := x_e(\hat{a}_i), \hat{a}_i \in \hat{\omega}\}$  на элементе  $e$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 7.13.** Если  $\ell$  — отрезок прямой (то есть все стороны  $e$  прямолинейные), то  $x_e(\hat{x}) = a_1 + B_e \hat{x}$  — аффинное отображение, а  $P_m^e$  — пространство полиномов степени не выше  $m$ . Заметим также, что для криволинейных элементов  $e$  функции из  $P_m^e$  не являются полиномами. Тем не менее, сужение произвольной функции из  $P_m^e$  на любую сторону  $e$  (в том числе криволинейную) является полиномом степени не выше  $m$  относительно дуговой координаты этой стороны (см., напр., [23, с. 118]).

Триангуляция  $\mathcal{T}_h$  называется регулярной, если выполнены условия (7.37) и (7.38) для любого элемента  $e \in \mathcal{T}_h$ . Далее будем предполагать, что длины сторон элементов из  $\mathcal{T}_h$  имеют порядок  $h$ , а углы треугольников отделены от нуля и  $\pi$  равномерно по  $h$ . Этим условиям достаточно для выполнения (7.36), то есть для регулярности триангуляции.

Аппроксимация  $V_h$  пространства  $V$  определяется теперь следующим образом:

$$V_h := \{v_h \in C(\bar{\Omega}) : v_h|_e \in P_m^e \forall e \in \mathcal{T}_h\}.$$

Это пространство конечномерно и базис Лагранжа в нем определяется обычным способом: если  $\omega_h := \{a_i, i = 1, \dots, N_h\}$  — сетка узлов

<sup>1)</sup>То есть  $\hat{\varphi}_i \in \hat{P}_m$ ,  $\hat{\varphi}_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij}$  для  $i, j = 1, \dots, \hat{M}$ . Предполагается, что на каждой стороне  $\hat{e}$  выбрано  $m+1$  равномерно расположенных узлов интерполяции, включая вершины элемента.

на  $\bar{\Omega}$ , образованная различными точками из  $\bigcup \{\omega^e, e \in \mathcal{T}_h\}$ , то узлу  $a_l \in \omega_h$  ставится в соответствие базисная функция  $\varphi_l \in V_h$  такая, что  $\varphi_l(a_j) = \delta_{lj}$ ,  $l, j = 1, \dots, N_h$ . По определению имеем

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N_h} c_i \varphi_i(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad c_i = u_h(a_i), \quad u_h \in V_h.$$

Введем обозначения:  $\hat{u}(\hat{x}) := u(x_e(\hat{x}))$  — образ функции  $u(x)$ , определенной на  $e$ , при преобразовании координат  $x = x_e(\hat{x})$ ,  $\hat{x} \in \hat{e}$ ;

$$|u|_{k,h}^2 := \sum_{e \in \mathcal{T}_h} |u|_{k,e}^2, \quad \|u\|_{k,h}^2 := \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{k,e}^2, \quad \|u\|_{k,\infty,h} := \max_{e \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{k,\infty,e}.$$

Регулярность триангуляции  $\mathcal{T}_h$  обеспечивает справедливость следующих оценок:

$$|\hat{u}|_{s,p,\hat{e}} \leq c h^{s-2/p} \|u\|_{s,p,e}, \quad |u|_{s,p,e} \leq c h^{2/p-s} |\hat{u}|_{s,p,\hat{e}}, \quad (7.39)$$

$$\|v_h\|_{k,h} \leq c h^{l-k} \|v_h\|_{l,h}, \quad 0 \leq l < k, \quad v_h \in V_h, \quad (7.40)$$

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0, \quad u \in V, \quad (7.41)$$

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} \leq c h^k \|u\|_{k+1,h}, \quad k = 0, \dots, m. \quad (7.42)$$

Здесь  $s \geq 0$ ,  $p \in [1, \infty]$ ;  $\|\cdot\|_{s,p,e}$ ,  $|\cdot|_{s,p,e}$  — норма и полунорма в пространстве Соболева  $W_p^s(e)$ <sup>1)</sup>. Оценка (7.40) называется в теории МКЭ обратным неравенством.

**2. Формулы численного интегрирования.** Для приближенного вычисления интегралов по области  $\Omega$  будем использовать составные квадратурные формулы. Пусть  $m \geq 1$  то же, что и в определении  $V_h$ , а  $\hat{S}$  — некоторая заданная квадратурная формула на элементе  $\hat{e}$  с положительными коэффициентами, точная на полиномах из  $\hat{P}_{2m-1}$ <sup>2)</sup>:

$$\int_{\hat{e}} \varphi(\hat{x}) d\hat{x} \approx \sum_{i=1}^Q \hat{c}_i \varphi(\hat{b}_i) =: \hat{S}(\varphi), \quad \hat{c}_i > 0.$$

<sup>1)</sup>Мы используем стандартные обозначения для функциональных пространств, см. с. 10.

<sup>2)</sup>Использование таких квадратур в МКЭ при решении краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка приводит к оптимальным оценкам точности в нормах  $H^1$  и  $L_2$ .

Примеры таких квадратур хорошо известны. При  $m = 1$  подходящей, например, является формула с одним узлом (в центре тяжести  $\hat{e}$ ) или с тремя узлами (в вершинах  $\hat{e}$ ).

Пусть  $J_e(\hat{x}) := Dx_e(\hat{x})$  — матрица Якоби преобразования  $x_e$ , а  $|J_e(\hat{x})| := \det J_e(\hat{x}) > 0$ . Тогда следующие формулы определяют искомую составную квадратуру  $S_h(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi(x) dx &= \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \int_e \varphi(x) dx = \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \int_{\hat{e}} |J_e(\hat{x})| \varphi(x_e(\hat{x})) d\hat{x} \approx \\ &\approx \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^Q \hat{c}_i |J_e(\hat{b}_i)| \varphi(x_e(\hat{b}_i)) =: \sum_{e \in \mathcal{T}_h} S_e(\varphi) =: S_h(\varphi). \end{aligned}$$

Определим дискретные аналоги норм в  $H^1(\Omega)$  и  $L_2(\Omega)$ :

$$\|u_h\|_{1,V_h}^2 := S_h(|\nabla u_h|^2 + u_h^2), \quad \|u_h\|_{0,V_h}^2 := S_h(u_h^2).$$

**Теорема 7.35.** Пусть триангуляция  $\mathcal{T}_h$  является регулярной, а квадратурная формула  $\hat{S}$  точна на любом полиноме из  $\hat{P}_{2m-2}$  и имеет положительные коэффициенты. Тогда справедливы оценки

$$c^{-1} \|u_h\|_{1,\Omega} \leq \|u_h\|_{1,V_h} \leq c \|u_h\|_{1,\Omega}, \quad u_h \in V_h, \quad (7.43)$$

$$\|u_h\|_{0,V_h} \leq c \|u_h\|_{0,\Omega}, \quad u_h \in V_h. \quad (7.44)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $e \in \mathcal{T}_h$ ,  $\hat{P}_m \ni \hat{u}(\hat{x}) := u_h(x_e(\hat{x}))$  — образ функции  $u_h = u_h|_e$  при отображении  $x = x_e(\hat{x})$ . Обозначая  $J_e^{-T} := (J_e^{-1})^T$ , имеем  $|\nabla u_h(x)| = |J_e^{-T}(\hat{x}) \hat{\nabla} \hat{u}(\hat{x})|^{(1)}$ . Из условий регулярности триангуляции вытекают следующие равномерные по  $\hat{x} \in \hat{e}$  оценки:

$$c^{-1} h^2 \leq |J_e(\hat{x})| \leq c h^2, \quad \|J_e(\hat{x})\| \leq c h, \quad \|J_e^{-1}(\hat{x})\| \leq c h^{-1}. \quad (7.45)$$

Из условий на  $\hat{S}$  следует, что

$$\hat{I}(\hat{u}) := \int_{\hat{e}} (|\hat{\nabla} \hat{u}|^2 + \hat{u}^2) d\hat{x} \sim \hat{S}(|\hat{\nabla} \hat{u}|^2 + \hat{u}^2) =: \hat{s}(\hat{u}) \text{ на } \hat{P}_m,^{(2)}$$

<sup>1)</sup>  $\hat{\nabla} = (\partial/\partial \hat{x}_1, \partial/\partial \hat{x}_2)^T$ .

<sup>2)</sup>  $f(u) \sim g(u)$  на  $U$ , если  $c_1 f(u) \leq g(u) \leq c_2 g(u)$  для  $\forall u \in U$ ,  $c_1, c_2$  не зависят от  $h$  и  $u$ ,  $c_1 > 0$ .

поскольку, как нетрудно видеть, как  $\hat{I}^{1/2}$ , так и  $\hat{s}^{1/2}$  являются нормами на  $\hat{P}_m$ . Докажем, что

$$I(u_h) := \int_e (h^2 |\nabla u_h|^2 + u_h^2) dx \sim S_e(h^2 |\nabla u_h|^2 + u_h^2) =: S(u_h) \quad (7.46)$$

на  $P_m^e$ . Используя оценку  $|y| \leq \|A\| |A^{-1}y|$ ,  $y \in \mathbb{R}^2$ , а также оценки (7.45), имеем

$$\begin{aligned} I(u_h) &= \int_{\hat{e}} |J_e| \left( h^2 |J_e^{-T} \hat{\nabla} \hat{u}|^2 + \hat{u}^2 \right) d\hat{x} \leq c h^2 \hat{I}(\hat{u}) \leq c h^2 \hat{s}(\hat{u}) \leq \\ &\leq c \frac{h^2}{\min |J_e|} S_e(\|J^T\|^2 |J^{-T} \nabla u_h|^2 + u_h^2) \leq c S(u_h). \end{aligned}$$

Такие же рассуждения приводят к неравенству  $S(u_h) \leq c I(u_h)$ , что доказывает (7.46). Аналогично доказывается, что также

$$\int_e |\nabla u_h|^2 dx \sim S_e(|\nabla u_h|^2) \quad \text{на } P_m^e. \quad (7.47)$$

Из (7.46) и (7.47) имеем

$$\int_e ((1 + h^2) |\nabla u_h|^2 + u_h^2) dx \sim S_e((1 + h^2) |\nabla u_h|^2 + u_h^2).$$

Отсюда, после суммирования по всем  $e \in \mathcal{T}_h$ , следуют оценки (7.43).

Функционал  $\hat{S}^{1/2}(\hat{u}^2)$  определяет полунорму, а  $(\int_{\hat{e}} \hat{u}^2 d\hat{x})^{1/2}$  — норму на  $\hat{P}_m$ . Поэтому, как и ранее, имеем

$$S_e(u_h^2) \leq c h^2 \hat{S}(\hat{u}^2) \leq c h^2 \int_{\hat{e}} \hat{u}^2 d\hat{x} \leq c \frac{h^2}{\min |J_e|} \int_e u_h^2 dx \leq c \int_e u_h^2 dx.$$

Суммируя эти оценки по всем  $e \in \mathcal{T}_h$ , приходим к (7.44).  $\square$

**Следствие 7.5.**  $S_h(|\nabla u_h|^2) \sim |u_h|_{1,\Omega}^2$ ,

$$S_e(|\nabla u_h|^2 + u_h^2) \sim \int_e (|\nabla u_h|^2 + u_h^2) dx.$$

**3. Дискретная задача. Свойства решений.** Определим билинейные формы  $a_{0h}, b_h, s_N$ , являющиеся аппроксимациями на  $V_h \times V_h$  форм  $a_0, b$  и  $s_\infty$ , соответственно. Для этого заменим интегралы по области  $\Omega$  в определении форм  $a_0$  и  $b$  на составную квадратуру  $S_h$ , бесконечный ряд в определении  $s_\infty$  — конечным. В итоге получим

$$a_{0h}(p, u, v) := S_h(\nabla u \cdot \nabla v + p^2 \sigma uv), \quad \sigma := \varepsilon/\varepsilon_\infty,$$

$$b_h(u, v) := S_h((\sigma - 1)uv),$$

$$s_N(p, u, v) := 2\pi \sum_{n=-N}^N \mathbb{K}_n(pR) a_n(u) \overline{a_n(v)}.$$

Здесь  $u, v \in V_h$ ,  $N \geq 0$ . Предполагается, что коэффициенты Фурье функций  $u$  и  $v$  вычисляются точно. Последнее нетрудно выполнить аналитически, так как  $u$  и  $v$  на  $\Gamma$  являются кусочно-полиномиальными (степени  $m$ ) функциями относительно угловой координаты  $\varphi$ .

Отметим, что при аппроксимации формы  $s_\infty$  возникает дополнительный параметр  $N$ . Далее будем считать, что  $N = N(h)$ , поэтому введем обозначение

$$a_h(p, u, v) := a_{0h}(p, u, v) + s_N(p, u, v).$$

Рассмотрим конечномерную задачу: *при каждом  $p \in \mathbb{R}_+$  найти числа  $\beta^h \in \mathbb{R}_+$  и ненулевые  $u_h \in V_h$  такие, что*<sup>1)</sup>

$$(\mathcal{P}_h) \quad a_h(p, u_h, v) = \beta^{h2} b_h(u_h, v) \quad \forall v \in V_h.$$

При  $p > 0$  эта задача является дискретным аналогом задачи  $(\mathcal{P})$ , а при  $p = 0$  — задачи  $(\mathcal{P}^0)$  для определения критических чисел.

Пусть  $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} y_i \varphi_i$ ,  $y_i = u_h(a_i)$ ;  $y := (y_1, y_2, \dots, y_{N_h})^T$  — вектор узловых параметров  $u_h$ . Введем матрицы

$$A_h(p) := \{a_h(p, \varphi_j, \varphi_i)\}_{i,j=1}^{N_h}, \quad B_h := \{b_h(\varphi_j, \varphi_i)\}_{i,j=1}^{N_h}.$$

Тогда задача  $(\mathcal{P}_h)$  может быть записана как параметрическая обобщенная алгебраическая задача на собственные значения:

$$A_h(p)y = \beta^{h2} B_h y, \quad y \in \mathbb{R}^{N_h} \setminus \{0\}.$$

<sup>1)</sup> Числа  $\beta^h$ , как и  $\beta^{h2}$ , мы далее будем называть собственными числами.

Задачи подобного вида были изучены нами в главе 6 (см. § 4, с. 148), где спектральный параметр  $\beta^{h2}$  обозначался через  $\lambda^h$ . Прежде чем использовать результаты теоремы 6.29, необходимо убедиться, что семейства матриц  $A_h(p)$  и  $B_h$  удовлетворяют условиям  $A_1^h - A_5^h$ , с. 148.

**Лемма 7.20.** *Семейства матриц  $A_h(p)$ ,  $p \geq 0$  и  $B_h$  удовлетворяют условиям  $A_1^h - A_5^h$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Учтем, что  $\mathbb{K}_n(r) \geq 0$  при  $r \in \mathbb{R}_+$ . Привлекая лемму 7.13, получаем

$$0 \leq s_N(p, u_h, u_h) \leq s_\infty(p, u_h, u_h) \leq M_s(p) \|u_h\|_{1,\Omega}^2.$$

Учитывая (7.43), также имеем<sup>1)</sup>:

$$a_{0h}(p, u_h, u_h) \geq 1_p S_h(|\nabla u_h|^2 + u_h^2) \geq 1_p c^{-2} \|u_h\|_{1,\Omega}^2.$$

Аналогично доказывается неравенство  $a_{0h}(p, u_h, u_h) \leq 1^p c^2 \|u_h\|_{1,\Omega}^2$ . Из этих оценок следует, что

$$m_a(p) \|u_h\|_{1,\Omega}^2 \leq a_h(p, u_h, u_h) \leq M_a(p) \|u_h\|_{1,\Omega}^2, \quad (7.48)$$

где  $m_a(p) := 1_p c^{-2}$ ,  $M_a(p) := 1^p c^2 + M_s(p)$ ,  $p \in \mathbb{R}_+$ . Оценки

$$0 \leq b_h(u_h, u_h) \leq M_b \|u_h\|_{1,\Omega}^2, \quad M_b := (\sigma_+ - 1)c^2, \quad (7.49)$$

являются очевидными. Из (7.48) и (7.49) следует, что выполнены условия  $A_1^h$ . Далее, по определению

$$a_h(0, u_h, u_h) = S_h(|\nabla u_h|^2) + 2\pi \sum_{n=-N}^N |n| |a_n(u_h)|^2 \geq 0.$$

Учитывая (7.47), получаем, что  $\ker A_h(0) = \{u_h : u_h = \text{const в } \Omega\}$ . Поэтому  $r_0 = 1$  и выполнены условия  $A_2^h$  (см. замечание 6.2).

Поскольку  $\sigma|_{\overline{\Omega}_i} \geq 1 + \sigma_0$ , то, учитывая (7.47) и следствие 7.5, имеем при  $c_0 := \min\{1, \sigma_0\}$ :

$$\begin{aligned} a_h(p, u_h, u_h) + b_h(u_h, u_h) &\geq S_h(|\nabla u_h|^2) + \sigma_0 \sum_{e \in \Omega_i} S_e(u_h^2) \geq \\ &\geq c_0 \left( \sum_{e \in \Omega \setminus \Omega_i} S_e(|\nabla u_h|^2) + \sum_{e \in \Omega_i} S_e(|\nabla u_h|^2 + u_h^2) \right) \geq \\ &\geq c \left( \int_{\Omega} |\nabla u_h|^2 dx + \int_{\Omega_i} u_h^2 dx \right) \geq m_{ab} \|u_h\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup>  $1_p := \min\{1, p^2\}$ ,  $1^p := \max\{1, p^2\}$

Отметим, что постоянная  $m_{ab}$  зависит от  $\Omega$ .

Перейдем к условию  $A_4^h$ . Имеем ( $1 \geq \sigma/\sigma_+$ ):

$$b_h(u, u) = \sum_{e \in \Omega_i} S_e((\sigma - 1)u^2) \geq \sigma_0 \sum_{e \in \Omega_i} S_e(u^2) \geq \sigma_0/\sigma_+ \sum_{e \in \Omega_i} S_e(\sigma u^2).$$

С другой стороны, очевидно,  $b_h(u, u) \leq \sum_{e \in \Omega_i} S_e(\sigma u^2) =: S(u)$ . Поэто-

му, если  $u \in \tilde{V}_h^{(1)}$ , то  $S(u) \neq 0$ . Отсюда легко следует, что отношение Рэлея  $R_h(p, u) := a_h(p, u, u)/b_h(u, u)$  возрастает по  $p$  при  $u \in \tilde{V}_h$  (условие  $A_4^h$ ).

Проверим условие  $A_5^h$ . Пусть  $u \in V_h$ . Непрерывность в нуле функции  $p \rightarrow a_h(p, u, u)$  доказывается так же, как и для формы  $a$  (см. лемму 7.17, с. 170). Учитывая, что  $\mathbb{K}'_n(r) > 0$  при  $r > 0$ , имеем

$$0 \leq \frac{d}{dp} a_h(p, u, u) = 2p S_h(\sigma u^2) + \frac{d}{dp} s_N(p, u, u) \leq cp \|u\|_{0, V_h}^2 + \frac{d}{dp} s_\infty(p, u, u) \leq cp \|u\|_{0, \Omega}^2 + \widetilde{M}_s(p) \|u\|_{1, \Omega}^2 \leq \widetilde{M}_a(p) \|u\|_{1, \Omega}^2.$$

Таким образом,  $A_h(p) \in \mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}}_+, V_h)$ .  $\square$

Пусть  $N_h^b := \dim(\text{Im } B_h)$ . Из теоремы 6.29, с. 149 (см. также замечание 6.2), непосредственно следует

**Теорема 7.36.** *При каждом  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$  задача  $(\mathcal{P}_h)$  имеет конечное число (скажем  $n_h(p)$ ) собственных чисел  $\beta^{hK}(p)$  суммарной кратности  $N_h^b$  и соответствующих им собственных подпространств*

$$U_h^K(p), \quad K = 1, 2, \dots, n_h(p), \quad V_{h, A_h(p)+B_h} = \bigoplus_{K=1}^{n_h(p)} U_h^K(p) \oplus \ker B_h.$$

Кроме того, если  $0 \leq \beta_1^h(p) \leq \beta_2^h(p) \leq \dots \leq \beta_{N_h^b}^h(p)$  есть собственные числа, занумерованные с учетом кратности, то функции  $p \rightarrow \beta_i^h(p)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_h^b$ , являются непрерывными в нуле, локально липшиц-непрерывными на  $\mathbb{R}_+$  и возрастающими;  $\beta_1^h(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow +0$ ;  $\beta_2^h(0) > 0$ .

<sup>1)</sup>  $\tilde{V}_h$  есть ортогональное дополнение  $\ker B_h$  до пространства  $V_{h, A_h(p)+B_h}$ .

#### §4. Оценки точности

При каждом фиксированном  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$  задача  $(\mathcal{P}_h)$  является схемой Галеркина с возмущениями для задачи  $(\mathcal{P})$ . Задачи такого типа были изучены в главе 6.

Пусть  $\beta_i^2(p)$  и  $\beta_i^{h2}(p)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , — упорядоченные по возрастанию с учетом кратности собственные числа задачи  $(\mathcal{P})$  и  $(\mathcal{P}_h)$  соответственно,  $u_i(p)$  и  $u_i^h(p)$  — соответствующие им собственные функции. Пусть далее  $\beta^K(p)$  имеет кратность  $r_K = r_K(p)$ ,  $K \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \beta^K(p) &= \beta_k(p), \quad \beta_{k-1}(p) < \beta_k(p) = \dots = \beta_{k+r_K-1}(p) < \beta_{k+r_K}(p), \\ U^K(p) &:= \text{span}\{u_k(p), \dots, u_{k+r_K-1}(p)\}, \\ U_h^K(p) &:= \text{span}\{u_k^h(p), \dots, u_{k+r_K-1}^h(p)\}. \end{aligned}$$

Целью данного параграфа является оценка зависимости величин

$$|\beta^K(p) - \beta_i^h(p)|, \quad k \leq i \leq k + r_K - 1,$$

и раствора  $\Theta_V(U^K(p), U_h^K(p))$  от параметров  $h$  и  $N$  дискретной задачи  $(\mathcal{P}_h)$ .

Теорема 6.30, с. 150, приводит к следующим оценкам этих величин:

$$\Theta_V(U^K(p), U_h^K(p)) \leq c \max_{u \in U^K(p), \|u\|_{1, \Omega}=1} \epsilon_h(u), \quad (7.50)$$

$$|\beta^{K2}(p) - \beta_i^{h2}(p)| \leq c \max_{u \in U^K(p), \|u\|_{1, \Omega}=1} (\epsilon_h^2(u) + \Sigma_h(P_h u)). \quad (7.51)$$

Здесь  $c = c(K, p)$ ,  $P_h := P_h(p)$  — ортопроектор в  $V_{A(p)+B}$  на  $V_h$ ,

$$\epsilon_h(u) := \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1, \Omega} + E_a(P_h u) + E_b(P_h u), \quad u \in V,$$

$$\Sigma_h(y) := |a(p, y, y) - a_h(p, y, y)| + |b(y, y) - b_h(y, y)|, \quad y \in V_h,$$

для заданных форм  $d$  и  $d_h$ ,

$$E_d(\varphi_h) := \sup_{v_h \in V_h, \|v_h\|=1} |d(\varphi_h, v_h) - d_h(\varphi_h, v_h)|, \quad \varphi_h \in V_h.$$

Для того, чтобы воспользоваться оценками (7.50), (7.51), необходимо убедиться в выполнении условий  $(H_1)$ ,  $A_6^h$ . Фактически необходимо проверить лишь условие <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Здесь  $T(p) := (A(p) + B)^{-1}B$ ,  $A(p)$  и  $B$  — операторы задачи  $(\mathcal{P})$ .

$$A_6^h) \sup_{f \in V_h, \|f\|=1} (E_b(f) + E_b(P_h T(p)f) + E_a(P_h T(p)f)) \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0,$$

поскольку  $(H_1)$  выполняется очевидным образом (см. (7.41), с. 184).

Прежде чем приступить к анализу правых частей в (7.50) и (7.51), оценим два типа возмущений в формах  $a$  и  $b$ , а именно возмущений от использования квадратурных формул и от усечения ряда.

До конца главы будем предполагать, что  $K \geq 1$  и  $p \geq 0$  являются фиксированными,  $\varepsilon|_{\Omega_i} \subset W_\infty^{2m}(\Omega_i)$ , а собственные функции  $u$  из  $U^K(p)$  обладают следующей гладкостью:

$$u|_{\Omega_i} \subset H^{m+1}(\Omega_i), \quad u|_{\Omega \setminus \Omega_i} \subset H^{m+1}(\Omega \setminus \Omega_i), \quad (7.52)$$

где  $m$  то же число, что и в определении пространства  $V_h$ . Будем использовать дополнительные обозначения

$$|u|_j := |u|_{j,\Omega_i} + |u|_{j,\Omega \setminus \Omega_i}, \quad \|u\|_j := \|u\|_{j,\Omega_i} + \|u\|_{j,\Omega \setminus \Omega_i}, \quad j \geq 0.$$

**1. Оценки погрешности численного интегрирования.** Введем обозначения функционалов погрешности квадратурных формул:

$$\widehat{E}(\hat{f}) := \int_{\hat{e}} \hat{f}(\hat{x}) d\hat{x} - \hat{S}(\hat{f}), \quad E_e(f) := \int_e f(x) dx - S_e(f),$$

$$E_h(f) := \sum_{e \in T_h} E_e(f).$$

**Лемма 7.21.** Пусть  $\widehat{E}(\hat{f}) = 0$  для любого полинома  $\hat{f} \in \widehat{P}_{2m-1}$ , а  $p|_e \in W_\infty^{2m}(e)$  для любого  $e \in T_h$ . Обозначим символом  $E_h$  любую из величин  $E_h(puv)$ ,  $E_h\left(pu \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$  или  $E_h\left(p \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$ ,  $i, j = 1, 2$ . Тогда

$$|E_h| \leq c \|p\|_{2m,\infty,h} h^{2m} \|u\|_{m,h} \|v\|_{m,h} \quad \forall u, v \in V_h.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обоснование оценок подобного типа проводится по стандартной в МКЭ схеме: в функционале погрешности осуществляется переход на базисный элемент, используется лемма Брамбла — Гильберта и совершается обратный переход на исходный элемент (см., напр, [80, с. 178], [23, с. 176]). Имеет место оценка

$$|E_e(puv)| = |\widehat{E}(\hat{f})| \leq \|\hat{f}\|_{0,\infty,\hat{e}} \leq \|\hat{f}\|_{2m,\infty,\hat{e}},$$

где  $\hat{f} := \hat{\sigma} \hat{u} \hat{v}$ ,  $\hat{\sigma} := |J_e(\hat{x})| \hat{p}(\hat{x})$ ,  $\hat{p}(\hat{x}) := p(x_e(\hat{x}))$ ,  $|J_e(\hat{x})|$  — якобиан преобразования  $x_e$ . Так как  $\widehat{E}(\widehat{P}_{2m-1}) = 0$ , то из леммы Брамбла — Гильберта [105] следует, что

$$|E_e(puv)| \leq c |\hat{f}|_{2m,\infty,\hat{e}}. \quad (7.53)$$

Поскольку  $\hat{u}, \hat{v} \in \widehat{P}_m$ , а полунормы  $|\cdot|_{i,\infty,\hat{e}}$  и  $|\cdot|_{i,\hat{e}}$  эквивалентны на  $\widehat{P}_m$ , то, пользуясь правилом Лейбница, получим

$$\begin{aligned} |\hat{f}|_{2m,\infty,\hat{e}} &\leq c \sum_{i,j=0}^m |\hat{\sigma}|_{2m-i-j,\infty,\hat{e}} |\hat{u}|_{i,\infty,\hat{e}} |\hat{v}|_{j,\infty,\hat{e}} \leq \\ &\leq c \sum_{i,j=0}^m |\hat{\sigma}|_{2m-i-j,\infty,\hat{e}} |\hat{u}|_{i,\hat{e}} |\hat{v}|_{j,\hat{e}}. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Из условий регулярности триангуляции (см. оценки (7.37) — (7.39) на с. 184) и правила Лейбница следует

$$\begin{aligned} |\hat{\sigma}|_{s,\infty,\hat{e}} &\leq c \sum_{l=0}^s |J_e|_{s-l,\infty,\hat{e}} |\hat{p}|_{l,\infty,\hat{e}} \leq \\ &\leq c \sum_{l=0}^s h^{s-l+2} h^l \|p\|_{l,\infty,e} = c h^{s+2} \|p\|_{s,\infty,e}. \end{aligned}$$

Таким образом, из (7.54) будем иметь

$$\begin{aligned} |\hat{f}|_{2m,\infty,\hat{e}} &\leq c \sum_{i,j=0}^m h^{2m-i-j+2} \|p\|_{2m-i-j,\infty,e} h^{i-1} \|u\|_{i,e} h^{j-1} \|v\|_{j,e} \leq \\ &\leq c h^{2m} \|p\|_{2m,\infty,e} \|u\|_{m,e} \|v\|_{m,e}. \end{aligned}$$

Комбинируя последнюю оценку и (7.53), имеем требуемое

$$\begin{aligned} |E_h(puv)| &= \left| \sum_{e \in T_h} E_e(puv) \right| \leq c h^{2m} \sum_{e \in T_h} \|p\|_{2m,\infty,e} \|u\|_{m,e} \|v\|_{m,e} \leq \\ &\leq c h^{2m} \|p\|_{2m,\infty,h} \sum_{e \in T_h} \|u\|_{m,e} \|v\|_{m,e} \leq c h^{2m} \|p\|_{2m,\infty,h} \|u\|_{m,h} \|v\|_{m,h}. \end{aligned}$$

Приведенные выше рассуждения полностью повторяются и в двух оставшихся случаях. Например,

$$E_h := E_h\left(p \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = \sum_{e \in T_h} I_e, \quad I_e := E_e\left(p \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i}\right).$$

Поскольку  $\nabla u = J_e^T \hat{\nabla} \hat{u}$ ,  $J_e$  — матрица Якоби преобразования  $x_e$ , то  $I_e$  представляет собой сумму слагаемых вида  $\hat{E}(\hat{f})$ ,

$$\hat{f} := \hat{\sigma} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}_j} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}_i}, \quad \hat{\sigma} := \frac{1}{|J_e(\hat{x})|} \frac{\partial x_{ei}(\hat{x})}{\partial \hat{x}_k} \frac{\partial x_{ej}(\hat{x})}{\partial \hat{x}_l} \hat{p},$$

причем  $|\hat{E}(\hat{f})| \leq c |\hat{f}|_{2m, \infty, \hat{e}}$ . Как и ранее, имеем  $|\hat{\sigma}|_{s, \infty, \hat{e}} \leq c h^s \|p\|_{s, \infty, e}$ ,

$$\begin{aligned} |\hat{E}(\hat{f})| &\leq c |\hat{f}|_{2m, \infty, \hat{e}} \leq c \sum_{i,j=0}^{m-1} |\hat{\sigma}|_{2m-i-j, \infty, \hat{e}} |\hat{u}|_{i+1, \hat{e}} |\hat{v}|_{j+1, \hat{e}} \leq \\ &\leq c h^{2m} \|p\|_{2m, \infty, e} \|u\|_{m, e} \|v\|_{m, e}. \end{aligned}$$

Отсюда, после суммирования по  $e \in \mathcal{T}_h$ , следует оценка  $E_h$ .  $\square$

**Следствие 7.6.** Пусть  $\varepsilon|_{\Omega_i} \in W_\infty^{2m}(\Omega_i)$ ,  $u, v \in V_h$ ,  $p \in \mathbb{R}_+$ . Тогда

$$\begin{aligned} |a_0(p, u, v) - a_{0h}(p, u, v)| &\leq c h^{2m} \|u\|_{m, h} \|v\|_{m, h}, \\ |b(u, v) - b_h(u, v)| &\leq c h^{2m} \|u\|_{m, h} \|v\|_{m, h}. \end{aligned}$$

**2. Вспомогательные утверждения.** Следующие две леммы понадобятся нам при оценке возмущений метода Галеркина.

**Лемма 7.22.** Пусть  $u \in U^K(p)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Тогда

$$\|u - P_h u\|_{1, \Omega} \leq c h^k \|u\|_{k+1}, \quad \|P_h u\|_{k, h} \leq c \|u\|_k. \quad (7.55)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из эквивалентности норм в  $V_{A(p)+B}$  и в  $V$  следует, что проектор  $P_h$  ограничен в  $V$  и

$$\|u - P_h u\|_{1, \Omega} \leq c \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1, \Omega} \quad \forall u \in V.$$

Первая оценка леммы следует из этой оценки и неравенства (7.42), с. 184, так как  $\|u\|_{k, h} = \|u\|_k$ . Справедливость второй оценки в (7.55) при  $k = 1$  вытекает из ограниченности  $P_h$  в  $V$ , поскольку

$$\|P_h u\|_{1, h} = \|P_h u\|_{1, \Omega}.$$

Пусть  $k \geq 2$ , а  $\pi_h$  есть такой проектор  $V$  на  $V_h$ , что

$$\|u - \pi_h u\|_{1, \Omega} \leq c h^{k-1} \|u\|_k, \quad \|u - \pi_h u\|_{k, h} \leq c \|u\|_k.$$

Например, в качестве  $\pi_h$  можно выбрать оператор  $V_h$ -интерполяции<sup>1)</sup>. Используя обратное неравенство (7.40), имеем

$$\begin{aligned} \|\pi_h u - P_h u\|_{k, h} &\leq c h^{1-k} \|\pi_h u - P_h u\|_{1, \Omega} \leq \\ &\leq c h^{1-k} (\|u - \pi_h u\|_{1, \Omega} + \|u - P_h u\|_{1, \Omega}) \leq c \|u\|_k. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|P_h u\|_{k, h} \leq \|u\|_{k, h} + \|u - \pi_h u\|_{k, h} + \|\pi_h u - P_h u\|_{k, h} \leq c \|u\|_k. \quad \square$$

Обозначим через  $\mathcal{A}(\Omega)$  множество функций из  $H^1(\Omega)$ , гармонических или метагармонических в  $\Omega \setminus \overline{\Omega}_i$ . Отметим, что  $U^K(p) \subset \mathcal{A}(\Omega)$ .

**Лемма 7.23.** Пусть  $p \in \mathbb{R}_+$ ,

$$S_N(u) := 2\pi \sum_{|n| > N} \mathbb{K}_n(Rp) |a_n(u)|^2, \quad u \in \mathcal{A}(\Omega).$$

Тогда<sup>2)</sup>

$$S_N(P_h u) \leq c (\|u - P_h u\|_{1, \Omega}^2 + (R_0/R)^{2N} \|u\|_{1, \Omega}^2).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Справедливы два следующих неравенства (см. замечание 7.5, с. 158):

$$S_N(P_h u) \leq 2(S_N(u - P_h u) + S_N(u)), \quad \mathbb{K}_n(Rp) \leq 1^p \mathbb{K}_n(R).$$

Поэтому (см. следствие 7.3):

$$\begin{aligned} S_N(u - P_h u) &:= 2\pi \sum_{|n| > N} \mathbb{K}_n(Rp) |a_n(u - P_h u)|^2 \leq \\ &\leq 1^p 2\pi \sum_{|n| > N} \mathbb{K}_n(R) |a_n(u - P_h u)|^2 \leq 1^p \|u - P_h u\|_{1/2, \Gamma}^2 \leq c \|u - P_h u\|_{1, \Omega}^2. \end{aligned}$$

Из леммы 7.14 следует, что

$$|a_n(u)| \leq (R_0/R)^{|n|} |a_n(u_0)|, \quad u_0 = u|_{\partial B_{R_0}}.$$

Кроме того,  $\mathbb{K}_n(Rp) \leq (Rp/R_0)^2 \mathbb{K}_n(R_0)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} S_N(u) &\leq p^2 (R_0/R)^{2N} 2\pi \sum_{|n| > N} \mathbb{K}_n(R_0) |a_n(u_0)|^2 \leq \\ &\leq p^2 (R_0/R)^{2N} \|u\|_{1/2, \partial B_{R_0}}^2 \leq c (R_0/R)^{2N} \|u\|_{1, B_{R_0}}^2 \leq c (R_0/R)^{2N} \|u\|_{1, \Omega}^2. \end{aligned}$$

Теперь из оценок  $S_N(u - P_h u)$  и  $S_N(u)$  следует требуемое утверждение.

<sup>1)</sup>  $\pi_h u \in V_h$ ,  $\pi_h u(a_i) = u(a_i)$  в каждой точке сетки  $a_i$ .

<sup>2)</sup> Напомним, что  $R \geq R_0$ ,  $R_0 := \min\{r : \Omega_i \subseteq B_r\}$ .

**3. Оценки возмущений.** Оценим возмущения форм, вызванные численным интегрированием и усечением ряда. Положим

$$\epsilon_{hm} := h^m + (R_0/R)^N, \quad \epsilon_{h0} := \|(I - P_h)T(p)\| + h^2 + (R_0/R)^N.$$

**Теорема 7.37.** Пусть  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$ ,  $u_h \in V_h$ ,  $u \in U^K(p)$ . Тогда

$$E_a(P_h T(p)u_h) \leq c \epsilon_{h0} \|u_h\|_{1,\Omega}, \quad (7.56)$$

$$E_a(P_h u) \leq c \epsilon_{hm} \|u\|_{m+1}, \quad (7.57)$$

$$|a(p, P_h u, P_h u) - a_h(p, P_h u, P_h u)| \leq c \epsilon_{hm}^2 \|u\|_{m+1}^2. \quad (7.58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем для любых  $f_h, v_h \in V_h$ <sup>1)</sup>:

$$(a - a_h)(p, f_h, v_h) = (a_0 - a_{0h})(p, f_h, v_h) + 2\pi \sum_{|n|>N} \mathbb{K}_n(Rp) a_n(f_h) \overline{a_n(v_h)}.$$

Воспользуемся следствием 7.6. Тогда

$$\begin{aligned} |(a - a_h)(p, f_h, v_h)| &\leq c h^{2m} \|f_h\|_{m,h} \|v_h\|_{m,h} + \\ &+ 2\pi \sum_{|n|>N} \mathbb{K}_n(Rp) |a_n(f_h)| |a_n(v_h)|. \end{aligned} \quad (7.59)$$

Выберем здесь  $f_h = P_h v$ ,  $v = T(p)u_h$  и учтем, что  $v \in \mathcal{A}(\Omega)$ ,

$$2\pi \sum_{|n|>N} \mathbb{K}_n(Rp) |a_n(v_h)|^2 \leq c \|v_h\|_{1,\Omega}^2$$

и  $\|v_h\|_{m,h} \leq c h^{1-m} \|v_h\|_{1,\Omega}$  (обратное неравенство). Используя неравенство Коши — Буняковского и лемму 7.23, получим

$$\begin{aligned} |(a - a_h)(p, P_h v, v_h)| &\leq c h^2 \|P_h v\|_{1,\Omega} \|v_h\|_{1,\Omega} + c S_N^{1/2}(P_h v) \|v_h\|_{1,\Omega} \leq \\ &\leq c (h^2 \|v\|_{1,\Omega} + \|v - P_h v\|_{1,\Omega} + (R_0/R)^N \|v\|_{1,\Omega}) \|v_h\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Отметим, что  $T(p)$  — компактный оператор при каждом  $p \geq 0$ , кроме того,  $\|v\|_{1,\Omega} \leq c \|u_h\|_{1,\Omega}$ ,  $\|v - P_h v\|_{1,\Omega} \leq \|(I - P_h)T(p)\| \|u_h\|_{1,\Omega}$ . Отсюда следует оценка (7.56).

Выберем теперь в (7.59)  $f_h = P_h u$  и учтем оценки (7.55). Получим

$$\begin{aligned} |(a - a_h)(p, P_h u, v_h)| &\leq c h^{m+1} \|P_h u\|_{m,h} \|v_h\|_{1,\Omega} + c S_N^{1/2}(P_h u) \|v_h\|_{1,\Omega} \leq \\ &\leq c \epsilon_{hm} \|u\|_{m+1} \|v_h\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup>  $(a - a_h)(p, u, v) = a(p, u, v) - a_h(p, u, v)$ .

Отсюда следует (7.57). Оценку (7.58) нетрудно получить из (7.55) и леммы 7.23, выбирая в (7.59) функции  $f_h = v_h = P_h u$ .  $\square$

**Теорема 7.38.** Пусть  $u_h \in V_h$ ,  $u \in U^K(p)$ . Тогда

$$E_b(u_h) \leq c h^2 \|u_h\|_{1,\Omega}, \quad (7.60)$$

$$E_b(P_h u) \leq c h^{m+1} \|u\|_m, \quad (7.61)$$

$$|b(P_h u, P_h u) - b_h(P_h u, P_h u)| \leq c h^{2m} \|u\|_m^2. \quad (7.62)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 7.6

$$|b(u_h, v_h) - b_h(u_h, v_h)| \leq c h^{2m} \|u_h\|_{m,h} \|v_h\|_{m,h}, \quad u_h, v_h \in V_h.$$

Дважды применяя здесь обратное неравенство, получим (7.60). Выбирая  $u_h = P_h u$ , используя (7.55) и обратное неравенство, будем иметь (7.61). Полагая  $u_h = v_h = P_h u$  и учитывая (7.55), получим (7.62).  $\square$

**4. Оценки точности приближенных решений.** Используя полученные выше оценки величин, входящих в условие  $A_6^h$  и неравенства (7.50), (7.51), оценим точность приближенного метода.

**Теорема 7.39.** Пусть  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$ ,  $\varepsilon|_{\Omega_i} \subset W_\infty^{2m}(\Omega_i)$ , выполнены условия гладкости (7.52) и

$$N \geq c_0 \ln(1/h), \quad c_0 = \frac{m}{\ln(R/R_0)}.$$

Тогда при достаточно малом  $h$  имеют место оценки

$$\Theta_V(U^K(p), U_h^K(p)) \leq c h^m, \quad |\beta^K(p) - \beta_i^h(p)| \leq c h^{2m},$$

где  $K \geq 1$ ,  $i = k, \dots, k + r_K - 1$ ,  $c = c(K, p)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся оценками (7.56), (7.60). Пусть  $u_h \in V_h$ ,  $v_h = P_h T(p)u_h$ . Тогда

$$E_b(v_h) \leq c h^2 \|v_h\|_{1,\Omega} \leq c h^2 \|u_h\|_{1,\Omega}.$$

Легко видеть, что  $(R_0/R)^N \leq h^m$ . Поэтому

$$\begin{aligned} E_b(u_h) + E_b(P_h T(p)u_h) + E_a(P_h T(p)u_h) &\leq c(h^2 + \epsilon_{h0}) \|u_h\|_{1,\Omega} \leq \\ &\leq c(h + \|(I - P_h)T(p)\|) \|u_h\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$



Отсюда следует справедливость условия  $A_6^h$ , поскольку в силу условия  $(H_1)$  и компактности оператора  $T(p)$  имеем  $\|(I - P_h)T(p)\| \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$  (см., напр., [56, лемма 15.4, с. 202]).

Обратимся к оценкам (7.50), (7.51). Из оценок (7.57) и (7.61) получаем, что

$$E_a(P_h u) + E_b(P_h u) \leq c h^m \|u\|_{m+1}.$$

Следовательно, с учетом (7.42) имеем  $\epsilon_h(u) \leq c h^m \|u\|_{m+1}$ . Оценка

$$\Sigma_h(P_h u) \leq c h^{2m} \|u\|_{m+1}^2$$

вытекает непосредственно из (7.58) и (7.62). Таким образом, из оценок (7.50), (7.51) имеем

$$\Theta_V(U^K(p), U_h^K(p)) \leq c h^m, \quad |\beta^{K^2}(p) - \beta_i^{h^2}(p)| \leq c h^{2m}, \quad (7.63)$$

поскольку в силу конечномерности пространства  $U^K(p)$

$$\max_{u \in U^K(p), \|u\|=1} \|u\|_{m+1} \leq c, \quad c = c(K, p).$$

Ясно, что из (7.63) следует также, что  $|\beta^K(p) - \beta_i^h(p)| \leq c h^{2m}$ .  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.14. В случае волновода кругового поперечного сечения (область  $\Omega_i$  является кругом  $B_{R_0}$ ) естественно выбрать  $R = R_0$ . Однако этот выбор исключается в формулировке теоремы (иначе  $c_0 = \infty$ ). Преодолеть это ограничение нетрудно, если уточнить лемму 7.23. В этом случае

$$S_N(P_h u) \leq c (\|u - P_h u\|_{1,\Omega}^2 + (N+1)^{-2m} \|u\|_{1,\Omega}^2).$$

Для доказательства этого утверждения достаточно  $m$  раз проинтегрировать по частям в выражении  $a_n(u)$  при оценке  $S_N(u)$ . Далее, повторяя доказательство теоремы 7.39, нетрудно получить, что ее результаты остаются справедливыми при  $N = O(1/h)$ .

## ГЛАВА 8

### ВЕКТОРНАЯ ЗАДАЧА О ПОВЕРХНОСТНЫХ СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ

Данная глава посвящена решению векторной задачи о поверхностных собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов, находящихся в однородной окружающей среде. Формулировка задачи (см. введение к настоящему разделу) сводится к нахождению пар чисел  $(\beta, k) \in \Lambda$  и ненулевых  $\mathbf{H} \in [H^1(\mathbb{R}^2)]^3$ , удовлетворяющих в  $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$  уравнению

$$\operatorname{rot}_\beta \left( \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot}_\beta \mathbf{H} \right) - \frac{1}{\varepsilon_\infty} \operatorname{grad}_\beta (\operatorname{div}_\beta \mathbf{H}) = k^2 \mathbf{H}, \quad (8.1)$$

а также условиям сопряжения на границе  $\gamma$  (с. 22). Напомним, что  $\Lambda := \{(\beta, k) : \beta/\sqrt{\varepsilon_+} < k < \beta/\sqrt{\varepsilon_\infty}, \beta > 0\}$ ; дифференциальные операции с индексом  $\beta$  введены на с. 19; диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  удовлетворяет условиям, сформулированным на с. 122; символом  $H^1(\mathbb{R}^2)$  обозначено пространство Соболева комплекснозначных функций.

Дадим краткий обзор содержания главы. В § 1 задача (8.1) формулируется в слабой форме. Показывается, что решение  $\mathbf{H}$  имеет вид  $\mathbf{H} = (\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, i\mathbf{H}_3)$ , где  $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3$  — вещественные функции. Далее задача формулируется в терминах векторного поля  $\mathbf{H} := (\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3)$  и эквивалентным образом сводится к задаче в ограниченной области (в круге  $\Omega$ ). Она представляет собой самосопряженную квадратичную задачу на собственные значения в вещественном гильбертовом пространстве  $[H^1(\Omega)]^3$  следующего вида<sup>1)</sup>:

$$A(p)\mathbf{H} + \beta C\mathbf{H} - \beta^2 B\mathbf{H} = 0. \quad (8.2)$$

Оператор  $A(p)$  является положительно определенным при каждом  $p > 0$ ,  $B$  — неотрицательным и компактным,  $C$  — компактным оператором. Оказывается, что третью компоненту  $\mathbf{H}$  можно исключить из уравнения (8.2) и получить задачу  $\mathcal{A}(p)\mathcal{H} = \beta^2 \mathcal{B}(p)\mathcal{H}$

<sup>1)</sup>Здесь, как и ранее,  $p := (\beta^2 - k^2 \varepsilon_\infty)^{1/2}$  считается параметром.

в  $[H^1(\Omega)]^2$ ,  $\mathcal{H} := (H_1, H_2)$ . Свойства операторов  $\mathcal{A}(p)$  и  $\mathcal{B}(p)$ , разрешимость задачи и свойства дисперсионных кривых  $p \rightarrow \beta(p)$  исследуются в § 2. Эти результаты позволяют описать множество решений исходной задачи (8.1), а также свойства дисперсионных кривых  $k \rightarrow \beta(k)$  (см. § 3). В § 4 строится и исследуется конечномерная аппроксимация задачи (8.2) на основе МКЭ, а ее точность оценивается в заключительном § 5.

Необходимо отметить, что изложение материала следует схеме, принятой в предыдущей главе (посвященной скалярному случаю). Поскольку при этом также существенно используются результаты главы 6, то мы предполагаем, что читатель знаком с материалом глав 6 и 7.

### § 1. Эквивалентные постановки задачи

**1. Линейная спектральная задача на плоскости.** Обозначим через  $H^1(D)$  пространство Соболева комплекснозначных скалярных функций на области  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $V^l(D) := [H^1(D)]^l$ . Положим для  $\mathbf{H}, \mathbf{H}'$  из  $V^l(D)$ ,  $l \geq 1$ :

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}' := H_1 H'_1 + \dots + H_l H'_l, \quad |\mathbf{H}|^2 := \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}}, \quad \nabla \mathbf{H} := (\nabla H_1, \dots, \nabla H_l),$$

$$\nabla \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H}' := \nabla H_1 \cdot \nabla H'_1 + \dots + \nabla H_l \cdot \nabla H'_l, \quad |\nabla \mathbf{H}|^2 := \nabla \mathbf{H} \cdot \nabla \overline{\mathbf{H}}.$$

Пространство  $V^l(D)$  является гильбертовым; скалярное произведение и норма в нем определяются стандартно:

$$(\mathbf{H}, \mathbf{H}') := \int_D (\nabla \mathbf{H} \cdot \nabla \overline{\mathbf{H}'} + \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}'} ) dx, \quad \|\mathbf{H}\|_{1,D} := (\mathbf{H}, \mathbf{H})^{1/2}.$$

Рассмотрим обобщенную (слабую) формулировку задачи (8.1). Она получается обычным образом и имеет следующий вид [94].

Найти  $(\beta, k) \in \Lambda$  и ненулевые  $\mathbf{H} \in V^3(\mathbb{R}^2)$  такие, что для любого вектора  $\mathbf{H}' \in V^3(\mathbb{R}^2)$  имеет место равенство

$$(\overline{\mathcal{P}}_\infty) \quad \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot}_\beta \mathbf{H} \cdot \overline{\operatorname{rot}_\beta \mathbf{H}'} + \frac{1}{\varepsilon_\infty} \operatorname{div}_\beta \mathbf{H} \cdot \overline{\operatorname{div}_\beta \mathbf{H}'} \right) dx = k^2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}'} dx.$$

Эрмитову форму в левой части  $(\overline{\mathcal{P}}_\infty)$  обозначим через  $\tilde{C}(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}')$  и проясним характер ее зависимости от параметра  $\beta$ . Для этого нам

потребуется ряд дополнительных обозначений. Пусть

$$\sigma := \varepsilon_\infty^{-1} - \varepsilon^{-1}, \quad \sigma_+ := \varepsilon_\infty^{-1} - \varepsilon_+^{-1}.$$

Отметим, что  $0 \leq \sigma \leq \sigma_+$  в  $\mathbb{R}^2$ ,  $\sigma = 0$  в  $\Omega_e$ . Будем обозначать прямыми заглавными буквами векторные поля в  $\mathbb{R}^3$  ( $\mathbf{H}, \mathbf{H}', \dots$ ), а соответствующие им поля в  $\mathbb{R}^2$ , образованные первыми двумя компонентами, — соответствующими каллиграфическими буквами ( $\mathcal{H}, \mathcal{H}', \dots$ ). Так, если  $\mathbf{F} := (F_1, F_2, F_3)$ , то  $\mathcal{F} := (F_1, F_2)$ . Положим

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} := \partial H_2 / \partial x_1 - \partial H_1 / \partial x_2, \quad \operatorname{div} \mathcal{H} := \partial H_1 / \partial x_1 + \partial H_2 / \partial x_2,$$

$$a_D(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}') := \int_D (\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathcal{H} \operatorname{rot} \overline{\mathcal{H}'} + \varepsilon_\infty^{-1} \operatorname{div} \mathcal{H} \operatorname{div} \overline{\mathcal{H}'} +$$

$$+ \varepsilon^{-1} \nabla H_3 \cdot \nabla \overline{H'_3} + \beta^2 \varepsilon^{-1} \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}'} ) dx, \quad b_D(\mathbf{H}, \mathbf{H}') := \int_D \sigma \mathcal{H} \cdot \overline{\mathcal{H}'} dx,$$

$$\tilde{c}_D(\mathbf{H}, \mathbf{H}') := \int_D \sigma (\nabla H_3 \cdot \overline{\mathcal{H}'} - \mathcal{H} \cdot \nabla \overline{H'_3}) dx.$$

Справедливо представление [94]

$$\tilde{C}(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}') = a_{\mathbb{R}^2}(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}') + i\beta \tilde{c}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') - \beta^2 b_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{H}, \mathbf{H}').$$

Здесь мнимая единица является сомножителем  $\tilde{c}_{\mathbb{R}^2}$  и больше нигде в коэффициенты форм не входит. Структура формы  $\tilde{C}$  позволяет вовсе освободиться от комплексных коэффициентов в формулировке задачи  $(\overline{\mathcal{P}}_\infty)$ . Действительно, будем искать решение задачи в виде  $\mathbf{H}^* := (\mathcal{H}, iH_3)$ ,  $\mathcal{H} := (H_1, H_2)$ . Полагая также  $\mathbf{H}' := (\mathcal{H}', iH'_3)$  в тождестве  $(\overline{\mathcal{P}}_\infty)$ , придем к новой задаче для определения неизвестных  $(\beta, k, \mathbf{H})$ ,  $\mathbf{H} := (H_1, H_2, H_3)$ .

Найти  $(\beta, k) \in \Lambda$  и ненулевые  $\mathbf{H} \in V^3(\mathbb{R}^2)$  такие, что для любого вектора  $\mathbf{H}' \in V^3(\mathbb{R}^2)$  имеет место равенство

$$(\mathcal{P}_\infty) \quad C(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}') = k^2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}'} dx.$$

Здесь  $C(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}') := a_{\mathbb{R}^2}(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}') - \beta c_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') - \beta^2 b_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{H}, \mathbf{H}')$ ,

$$c_D(\mathbf{H}, \mathbf{H}') := \int_D \sigma (\nabla H_3 \cdot \overline{\mathcal{H}'} + \mathcal{H} \cdot \nabla \overline{H'_3}) dx.$$

Очевидно, что форма  $C$  является эрмитовой и вещественной (т. е. вещественна при вещественных  $H, H'$ ). Кроме того, она является положительно определенной при каждом  $\beta > 0$  (см. [94]):

$$C(\beta; H, H) \geq \frac{1}{\varepsilon_+} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla H|^2 + \beta^2 |H|^2) dx, \quad H \in V^3(\mathbb{R}^2). \quad (8.3)$$

Следовательно, решения задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$  могут быть выбраны вещественными. Поэтому далее мы будем иметь дело с более простой с вычислительной точки зрения задачей  $(\mathcal{P}_\infty)$ , считая все пространства функций вещественными и опуская знаки комплексного сопряжения в определении форм.

Пользуясь методикой, развитой в предыдущей главе, задачу  $(\mathcal{P}_\infty)$  сведем к задаче в круге. Пусть, как и ранее,  $\Omega := B_R$  — открытый круг радиуса  $R \geq R_0$  с границей  $\Gamma$  такой, что  $\Omega_i \subseteq \Omega$ ,  $\Omega_\infty := \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$  (см. рис. 14 на с. 154). Пусть также

$$V_0^3(\Omega_\infty) := \{H \in V^3(\Omega_\infty) : H|_\Gamma = 0\}.$$

**2. Метагармоническое продолжение.** Непосредственным обобщением скалярного случая (с. 163) является

**Определение 8.18.** Пусть  $l = 2, 3$ . Функцию  $H \in V^l(\mathbb{R}^2)$  назовем метагармонической в области  $D \subset \mathbb{R}^2$ , если каждая его компонента является метагармонической в  $D$ , т. е.

$$-\Delta H + p^2 H = 0, \quad x \in D, \quad p \neq 0^1.$$

Функцию  $H_p \in V^l(\mathbb{R}^2)$  назовем метагармоническим продолжением функции  $H \in V^l(\Omega)$ , если она является метагармонической в области  $\Omega_\infty$  и  $H_p|_\Omega = H$ .  $\square$

Поскольку метагармоническое продолжение вектор-функции определяется покомпонентно, то его свойства непосредственно выводятся из свойств метагармонических продолжений скалярных функций. Например, из леммы 7.13, с. 164, следует, что

$$\int_{\Omega_\infty} (\nabla H_p \cdot \nabla H'_p + p^2 H_p \cdot H'_p) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{K}_n(Rp) a_n(H) \cdot \overline{a_n(H')}, \quad (8.4)$$

<sup>1)</sup>Если  $A$  интегральный или дифференциальный оператор в  $V$ , то его действие в  $V^l$  определяется покомпонентно:  $AH := (AH_1, \dots, AH_l)$ .

где  $a_n(H) := a_n(H|_\Gamma)$  — коэффициент Фурье функции  $H|_\Gamma$ :

$$a_n(H) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H|_{r=R} e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Далее, если ограниченная функция  $H$  является метагармонической (или гармонической) вне замкнутого круга  $B_{R_0}$ , то при всех  $R \geq R_0$  справедливы оценки (см. лемму 7.14, с. 165)

$$|a_n(H|_{\partial B_R})| \leq (R_0/R)^{|n|} |a_n(H|_{\partial B_{R_0}})|.$$

Определим билинейную форму на  $V^3(\Omega)$  равенством

$$s_\infty(p; H, H') := a_{\Omega_\infty}(p; H_p, H'_p), \quad H, H' \in V^3(\Omega), \quad (8.5)$$

где  $H_p, H'_p$  есть метагармонические продолжения функций  $H, H'$ . Получим “явное” представление формы  $s_\infty$ .

Для этого определим билинейную форму  $I_\Gamma : V^2(\Omega) \times V^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}') := \int_{\Omega} \nabla \mathcal{H} \cdot \nabla \mathcal{H}' dx - \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \mathcal{H} \operatorname{rot} \mathcal{H}' + \operatorname{div} \mathcal{H} \operatorname{div} \mathcal{H}') dx, \quad (8.6)$$

а также усиленное пространство Соболева [28]

$$H^1(\Omega, \Gamma) := \{u \in H^1(\Omega) : u|_\Gamma \in H^1(\Gamma)\} \subset H^1(\Omega)$$

с естественной нормой  $\|u\|_{H^1(\Omega, \Gamma)} = \|u\|_{1, \Omega} + \|u\|_{1, \Gamma}$ . Известно, что в нем плотно множество  $C^\infty(\bar{\Omega})$ <sup>1)</sup> [82], [83].

**Лемма 8.24.**  $I_\Gamma$  — симметричная и ограниченная форма. Кроме того, если компоненты  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{H}'$  из  $H^1(\Omega, \Gamma)$ , то

$$I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}') = \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} H'_2 + \frac{\partial H'_1}{\partial \varphi} H_2 \right) \Big|_{r=R} d\varphi, \quad (8.7)$$

а для любых  $\mathcal{H}, \mathcal{H}' \in V^2(\mathbb{R}^2)$  имеет место равенство

$$\int_{\Omega_\infty} (\operatorname{rot} \mathcal{H} \operatorname{rot} \mathcal{H}' + \operatorname{div} \mathcal{H} \operatorname{div} \mathcal{H}') dx = \int_{\Omega_\infty} \nabla \mathcal{H} \cdot \nabla \mathcal{H}' dx + I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}'). \quad (8.8)$$

<sup>1)</sup>Элементами  $C^\infty(\bar{\Omega})$  являются сужения на  $\bar{\Omega}$  бесконечно дифференцируемых функций в  $\mathbb{R}^2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что  $I_\Gamma$  — симметричная форма. Интегралы в (8.6) включают одинаковые слагаемые. После их взаимного сокращения получим

$$I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}') = \int_{\Omega} ((\mathcal{H}'_{1,2} \mathcal{H}_{2,1} - \mathcal{H}'_{1,1} \mathcal{H}_{2,2}) + (\mathcal{H}_{1,2} \mathcal{H}'_{2,1} - \mathcal{H}_{1,1} \mathcal{H}'_{2,2})) dx. \quad (8.9)$$

Здесь  $\mathcal{H}_{i,j} = \partial \mathcal{H}_i / \partial x_j$ . Из (8.9) следует оценка

$$|I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}')| \leq |\mathcal{H}|_{1,\Omega} |\mathcal{H}'|_{1,\Omega}. \quad (8.10)$$

Отсюда также следует ограниченность  $I_\Gamma$  на  $[H^1(\Omega, \Gamma)]^2 \subset V^2(\Omega)$ . Поскольку вложение  $[C^\infty(\Omega)]^2 \subset [H^1(\Omega, \Gamma)]^2$  является плотным, то представление (8.7) достаточно проверить лишь для  $\mathcal{H}, \mathcal{H}' \in [C^\infty(\Omega)]^2$ . Это осуществляется интегрированием по частям в (8.9).

С учетом плотности вложения  $[C_0^\infty(\mathbb{R}^2)]^2 \subset V^2(\mathbb{R}^2)$  аналогично доказывается также справедливость тождества<sup>1)</sup>:

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\operatorname{rot} \mathcal{H} \operatorname{rot} \mathcal{H}' + \operatorname{div} \mathcal{H} \operatorname{div} \mathcal{H}') dx = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \mathcal{H} \cdot \nabla \mathcal{H}' dx. \quad (8.11)$$

Из (8.11) следует (8.8), если учесть определение  $I_\Gamma$ .  $\square$

Далее нам понадобится также представление функционала  $I_\Gamma$  в терминах коэффициентов Фурье.

**Лемма 8.25.** *Справедливо представление*

$$I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}') = 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n(\mathcal{H}) \times \overline{a_n(\mathcal{H}')}, \quad (8.12)$$

причем

$$|n| |a_n(\mathcal{H})|^2 + i n a_n(\mathcal{H}) \times \overline{a_n(\mathcal{H})} \geq 0 \quad (8.13)$$

для всех  $n$  и  $\mathcal{H} \in V^2$ . Здесь  $a \times b := a_1 b_2 - a_2 b_1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулу (8.12) достаточно проверить лишь для гладких функций. Она получается подстановкой разложения в ряд Фурье функции  $\mathcal{H}|_\Gamma$  в следующее представление  $I_\Gamma$ :

$$I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}') = \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \varphi} \mathcal{H}'_2 - \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial \varphi} \mathcal{H}'_1 \right) \Big|_{r=R} d\varphi.$$

<sup>1)</sup>  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  — множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем.

Оценка (8.13) следует из вещественности величины  $i n a_n(\mathcal{H}) \times \overline{a_n(\mathcal{H})}$  и оценки  $|i n a_n(\mathcal{H}) \times \overline{a_n(\mathcal{H})}| \leq |n| |a_n(\mathcal{H})|^2$ .  $\square$

Из определения формы  $s_\infty$  и (8.8) следует ( $\varepsilon = \varepsilon_\infty$  в  $\Omega_\infty$ ):

$$\begin{aligned} s_\infty(p; \mathbf{H}, \mathbf{H}') &= \varepsilon_\infty^{-1} \int_{\Omega_\infty} (\operatorname{rot} \mathcal{H}_p \operatorname{rot} \mathcal{H}'_p + \operatorname{div} \mathcal{H}_p \operatorname{div} \mathcal{H}'_p + \\ &\quad + \nabla(\mathbf{H}_p)_3 \cdot \nabla(\mathbf{H}'_p)_3 + p^2 \mathbf{H}_p \cdot \mathbf{H}'_p) dx = \\ &= \varepsilon_\infty^{-1} \int_{\Omega_\infty} (\nabla \mathbf{H}_p \cdot \nabla \mathbf{H}'_p + p^2 \mathbf{H}_p \cdot \mathbf{H}'_p) dx + \varepsilon_\infty^{-1} I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}'). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Учитывая представление (8.4), окончательно имеем

$$s_\infty(p; \mathbf{H}, \mathbf{H}') = \frac{2\pi}{\varepsilon_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{K}_n(Rp) a_n(\mathbf{H}) \cdot \overline{a_n(\mathbf{H}')} + \varepsilon_\infty^{-1} I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}'). \quad (8.15)$$

Здесь функции  $\mathbb{K}_n(z) := -z K'_n(z) / K_n(z)$  те же, что в скалярной задаче (их свойства указаны в лемме 7.12, с. 161).

Нетрудно заметить, что, если  $\mathbf{H}, \mathbf{H}' \in V^3(\mathbb{R}^2)$  и  $\mathbf{H}_p, \mathbf{H}'_p$  — метагармонические продолжения соответственно  $\mathbf{H}|_\Omega$  и  $\mathbf{H}'|_\Omega$ , то

$$a_{\Omega_\infty}(p; \mathbf{H}_p, \mathbf{H}'_p) = a_{\Omega_\infty}(p; \mathbf{H}_p, \mathbf{H}').$$

Действительно, положим  $\eta := \mathbf{H}'_p - \mathbf{H}'$ . Из определения формы  $I_\Gamma$  и метагармонического продолжения следует, что

$$\int_{\Omega_\infty} (\nabla \mathbf{H}_p \cdot \nabla \eta + p^2 \mathbf{H}_p \cdot \eta) dx + I_\Gamma(\mathcal{H}, \eta) = 0,$$

поскольку  $\eta \in V^3(\mathbb{R}^2)$  и  $\eta|_\Omega = 0$ . Тогда из (8.14) имеем ( $\mathbf{H}'_p = \eta + \mathbf{H}'$ ):

$$\begin{aligned} a_{\Omega_\infty}(p; \mathbf{H}_p, \mathbf{H}'_p) &= \varepsilon_\infty^{-1} \int_{\Omega_\infty} (\nabla \mathbf{H}_p \cdot \nabla \mathbf{H}'_p + p^2 \mathbf{H}_p \cdot \mathbf{H}'_p) dx + \varepsilon_\infty^{-1} I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}') = \\ &= \varepsilon_\infty^{-1} \int_{\Omega_\infty} (\nabla \mathbf{H}_p \cdot \nabla \mathbf{H}' + p^2 \mathbf{H}_p \cdot \mathbf{H}') dx + \varepsilon_\infty^{-1} I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}') = a_{\Omega_\infty}(p; \mathbf{H}_p, \mathbf{H}'). \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из тождества (8.8). Отметим также, что из этого равенства следует, что  $\mathbf{H}_p$  является метагармоническим продолжением  $\mathbf{H}$  тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{H}_p|_\Gamma = \mathbf{H}|_\Gamma, \quad a_{\Omega_\infty}(p; \mathbf{H}_p, \mathbf{H}') = 0 \quad \forall \mathbf{H}' \in V_0^3(\Omega_\infty).$$

**3. Квадратичная задача на собственные значения в круге.** Как и в скалярном случае, введем множество

$$K := \{(\beta, p) : p > 0, \beta > (\varepsilon_+ / (\varepsilon_+ - \varepsilon_\infty))^{1/2} p\}$$

и рассмотрим задачу: найти положительные числа  $\beta, p$  и ненулевые  $H \in V^3(\Omega)$  такие, что для любого  $H' \in V^3(\Omega)$  имеет место равенство

$$(\mathcal{P}) \quad a_\Omega(p; H, H') + s_\infty(p; H, H') - \beta c_\Omega(H, H') - \beta^2 b_\Omega(H, H') = 0.$$

При каждом фиксированном  $p > 0$  эта задача является квадратичной по  $\beta$  задачей на собственные значения.

Установим “эквивалентность” задач  $(\mathcal{P}_\infty)$  и  $(\mathcal{P})$ .

**Теорема 8.40.** Пусть  $(\beta, k, H)$  — решение задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$ . Тогда тройка  $(\beta, p, H|_\Omega)$ ,  $p = (\beta^2 - k^2 \varepsilon_\infty)^{1/2}$ , — решение задачи  $(\mathcal{P})$ , причём  $(\beta, p) \in K$ . Пусть  $(\beta, p, H)$  — решение  $(\mathcal{P})$ . Тогда  $(\beta, p) \in K$ , а тройка  $(\beta, k, H_p)$ , где  $k = ((\beta^2 - p^2)/\varepsilon_\infty)^{1/2}$ ,  $H_p$  — метагармоническое продолжение  $H$ , является решением задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $(\beta, k, H)$  — решение задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$ . Положим  $p = (\beta^2 - k^2 \varepsilon_\infty)^{1/2}$ . Так как  $(\beta, k) \in \Lambda$ , то легко проверяется, что  $(\beta, p) \in K$ . Учитывая то, что  $b_{\mathbb{R}^2} = b_\Omega$ ,  $c_{\mathbb{R}^2} = c_\Omega$ , представим тождество  $(\mathcal{P}_\infty)$  в виде

$$a_\Omega(p; H, H') + a_{\Omega_\infty}(p; H, H') - \beta c_\Omega(H, H') - \beta^2 b_\Omega(H, H') = 0. \quad (8.16)$$

Выбирая здесь  $H' = 0$  в  $\bar{\Omega}$ , видим, что  $H|_{\Omega_\infty} = H_p|_{\Omega_\infty}$ . Следовательно, вектор  $H$  совпадает с  $H_p$ . Полагая в (8.16)  $H = H_p$ ,  $H' = H'_p$ , получим

$$a_\Omega(p; H, H') + a_{\Omega_\infty}(p; H_p, H'_p) - \beta c_\Omega(H, H') - \beta^2 b_\Omega(H, H') = 0$$

для  $\forall H' \in V^3(\Omega)$ . Таким образом,  $(\beta, p, H|_\Omega)$  — решение задачи  $(\mathcal{P})$ .

Обратно, пусть  $(\beta, p, H)$  — решение  $(\mathcal{P})$ ,  $H' \in V^3(\mathbb{R}^2)$ . Тогда

$$a_{\mathbb{R}^2}(p; H_p, H') - \beta c_\Omega(H, H') - \beta^2 b_\Omega(H, H') = 0, \quad (8.17)$$

так как  $a_{\Omega_\infty}(p; H_p, H'_p) = a_{\Omega_\infty}(p; H_p, H')$ . Учитывая (8.17), имеем

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{R}^2}(\beta; H_p, H') &:= a_{\mathbb{R}^2}(\beta; H_p, H') - \beta c_\Omega(H, H') - \beta^2 b_\Omega(H, H') = \\ &= a_{\mathbb{R}^2}(\beta; H_p, H') - a_{\mathbb{R}^2}(p; H_p, H') = \frac{\beta^2 - p^2}{\varepsilon_\infty} \int_{\mathbb{R}^2} H_p \cdot H' dx. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Полагая здесь  $H' = H_p$  и пользуясь (8.3), получим, что

$$\beta^2 / \varepsilon_+ < (\beta^2 - p^2) / \varepsilon_\infty.$$

Следовательно,  $\beta > (\varepsilon_+ / (\varepsilon_+ - \varepsilon_\infty))^{1/2} p$ , т. е.  $(\beta, p) \in K$ . Из (8.18) также следует, что тройка  $(\beta, k, H_p)$ , где  $k^2 = (\beta^2 - p^2) / \varepsilon_\infty$ , — решение задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$ .  $\square$

#### 4. Линейная задача на собственные значения в круге.

Задачу  $(\mathcal{P})$  с определенной по формуле (8.15) формой  $s_\infty$  будем рассматривать как квадратичную по  $\beta$  задачу на собственные значения при каждом  $p > 0$ . Вырожденность формы  $b_\Omega$  позволяет свести ее к линейной задаче<sup>1)</sup>.

Представим уравнение  $(\mathcal{P})$  в блочном виде. Далее для сокращения записей будем полагать  $V := V^1(\Omega)$ ,  $V^l := V^l(\Omega)$ , норму в  $[H^s(D)]^l$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , будем обозначать через  $\|\cdot\|_{s,D}$ ,

$$\|H\|_{s,D}^2 := \sum_{k=1}^l \|H_k\|_{s,D}^2, \quad |H|_{s,D}^2 := \sum_{k=1}^l |H_k|_{s,D}^2.$$

Введем формы<sup>2)</sup>, считая, что  $p > 0$  ( $H, H' \in V$ ,  $\mathcal{H}, \mathcal{H}' \in V^2$ ):

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}') &:= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \mathcal{H} \operatorname{rot} \mathcal{H}' + \frac{1}{\varepsilon_\infty} \operatorname{div} \mathcal{H} \operatorname{div} \mathcal{H}' + \frac{p^2}{\varepsilon_\infty} \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}' \right) dx + \\ &+ \frac{2\pi}{\varepsilon_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{K}_n(Rp) a_n(\mathcal{H}) \cdot \overline{a_n(\mathcal{H}')} + \varepsilon_\infty^{-1} I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell(p, H, H') &:= \int_{\Omega} \left( \varepsilon^{-1} \nabla H \cdot \nabla H' + p^2 \varepsilon_\infty^{-1} H H' \right) dx + \\ &+ \frac{2\pi}{\varepsilon_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{K}_n(Rp) a_n(H) \overline{a_n(H')}. \end{aligned}$$

Определим по ним операторы  $\mathcal{A}(p) : V^2 \rightarrow V^2$  и  $L(p) : V \rightarrow V$ :

$$(\mathcal{A}(p)\mathcal{H}, \mathcal{H}') := \overline{\mathfrak{a}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}')}, \quad (L(p)H, H') := \overline{\ell(p, H, H')}.$$

<sup>1)</sup>По определению имеем  $b_\Omega(H, H') = b_\Omega(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ .

<sup>2)</sup>Далее мы докажем ограниченность и положительную определенность этих форм.

Определим также линейные операторы  $\mathcal{B}_0 : V^2 \rightarrow V^2$  и  $\mathcal{C} : V^2 \rightarrow V$ :

$$(\mathcal{B}_0 \mathcal{H}, \mathcal{H}') := \int_{\Omega} \sigma \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}' dx, \quad (\mathcal{C} \mathcal{H}, H') := \int_{\Omega} \sigma \mathcal{H} \cdot \nabla H' dx.$$

Ясно, что  $\mathcal{B}_0$  и  $\mathcal{C}$  — ограниченные операторы ( $0 \leq \sigma \leq \sigma_+$  в  $\Omega$ ).

Эти определения позволяют записать уравнение  $(\mathcal{P})$  в виде

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}(p) & -\beta \mathcal{C}^* \\ -\beta \mathcal{C} & L(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{H} \\ \mathbf{H}_3 \end{pmatrix} = \beta^2 \begin{pmatrix} \mathcal{B}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{H} \\ \mathbf{H}_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\mathcal{C}^* : V \rightarrow V^2$  — оператор, сопряженный к  $\mathcal{C}$ . Исключив из этой системы  $\mathbf{H}_3$ , получим эквивалентную задачу: *при каждом  $p > 0$  найти  $(\beta, \mathbf{H}) \in \mathbb{R}_+ \times V^3 \setminus \{0\}$ ,  $\mathbf{H} = (\mathcal{H}, \mathbf{H}_3)^T$  такие, что*

$$(\mathcal{P}') : \mathcal{A}(p) \mathcal{H} = \beta^2 \mathcal{B}(p) \mathcal{H}, \quad \mathbf{H}_3 = \beta T(p) \mathcal{H}.$$

Здесь  $\mathcal{B}(p) := \mathcal{B}_0 + \mathcal{C}^* L(p)^{-1} \mathcal{C}$ ,  $T(p) = L^{-1}(p) \mathcal{C}$ . Положим

$$\mathbf{b}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}') := (\mathcal{B}(p) \mathcal{H}, \mathcal{H}').$$

При заданном  $p$  первое уравнение в  $(\mathcal{P}')$  представляет собой линейную задачу на собственные значения, на языке форм имеющую вид

$$\mathbf{a}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}') = \beta^2 \mathbf{b}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}') \quad \forall \mathcal{H}' \in V^2.$$

Из нее можно определить  $\beta$  и первые две компоненты  $\mathcal{H}$  собственной функции  $\mathbf{H}$ . Третья компонента  $\mathbf{H}_3$  после этого определяется как решение уравнения

$$\ell(p, \mathbf{H}_3, H') = \beta (\mathcal{C} \mathcal{H}, H') \quad \forall H' \in V.$$

## § 2. Существование и свойства решений

Прежде чем исследовать разрешимость задачи  $(\mathcal{P}')$  и, как следствие, задач  $(\mathcal{P})$  и  $(\mathcal{P}_{\infty})$ , установим необходимые нам в дальнейшем свойства входящих в них форм и операторов. В данном параграфе будут использованы лишь следующие свойства функций  $\varepsilon$  и  $\sigma := \varepsilon_{\infty}^{-1} - \varepsilon^{-1}$ :

$$\varepsilon_{\infty} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_+ \quad \text{в } \mathbb{R}^2; \quad \sigma|_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_i} = 0; \quad \sigma_0 \leq \sigma|_{\Omega_i} \leq \sigma_+.$$

Здесь  $\sigma_+ := \varepsilon_{\infty}^{-1} - \varepsilon_+^{-1}$ ,  $\sigma_0 > 0$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup>См. соответствующее замечание на с. 122.

**1. Свойства форм  $\mathbf{a}$  и  $\ell$ .** Введем форму  $\tilde{s}$  на  $V^3$ :

$$\tilde{s}_{\infty}(p; \mathbf{H}, \mathbf{H}') := 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{K}_n(Rp) a_n(\mathbf{H}) \cdot a_n(\mathbf{H}').$$

Поскольку

$$\tilde{s}_{\infty}(p; \mathbf{H}, \mathbf{H}') = 2\pi \sum_{k=1}^3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{K}_n(Rp) a_n(\mathbf{H}_k) \overline{a_n(\mathbf{H}'_k)},$$

то нужные нам свойства этой формы непосредственно следуют из свойств формы

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{K}_n(Rp) a_n(u) \overline{a_n(v)}, \quad u, v \in V,$$

изученной в предыдущей главе. Из лемм 7.13 (с. 164) и 7.17 (с. 170) непосредственно следуют оценки

$$0 \leq \tilde{s}_{\infty}(p; \mathbf{H}, \mathbf{H}) \leq M_s(p) \|\mathbf{H}\|_{1,\Omega}^2, \quad (8.19)$$

$$0 \leq \frac{d}{dp} \tilde{s}_{\infty}(p; \mathbf{H}, \mathbf{H}) \leq \widetilde{M}_s(p) \|\mathbf{H}\|_{1,\Omega}^2, \quad (8.20)$$

где  $M_s(p) := c_0^2(R_0) \max\{1, p^2\}$ ,  $\widetilde{M}_s \in C(\mathbb{R}_+)$ . Положим

$$\begin{aligned} a(p, \mathbf{H}, \mathbf{H}') &:= a_{\Omega}(p, \mathbf{H}, \mathbf{H}') + s_{\infty}(p, \mathbf{H}, \mathbf{H}') := \int_{\Omega} (\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathcal{H} \operatorname{rot} \mathcal{H}' + \\ &+ \varepsilon_{\infty}^{-1} \operatorname{div} \mathcal{H} \operatorname{div} \mathcal{H}' + \varepsilon^{-1} \nabla \mathbf{H}_3 \cdot \nabla \mathbf{H}'_3 + p^2 \varepsilon^{-1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}') dx + \\ &+ \frac{2\pi}{\varepsilon_{\infty}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{K}_n(Rp) a_n(\mathbf{H}) \cdot \overline{a_n(\mathbf{H}')} + \varepsilon_{\infty}^{-1} I_{\Gamma}(\mathcal{H}, \mathcal{H}'). \end{aligned}$$

**Лемма 8.26.** *Форма  $a(p, \cdot, \cdot)$  является симметричной,*

$$m_A(p) \|\mathbf{H}\|_{1,\Omega}^2 \leq a(p, \mathbf{H}, \mathbf{H}) \leq M_A(p) \|\mathbf{H}\|_{1,\Omega}^2,$$

$$\widetilde{m}_A(p) \|\mathbf{H}\|_{0,\Omega}^2 \leq \frac{d}{dp} a(p, \mathbf{H}, \mathbf{H}) \leq \widetilde{M}_A(p) \|\mathbf{H}\|_{1,\Omega}^2.$$

Здесь  $p > 0$ ,  $m_A, M_A \in C(\overline{\mathbb{R}_+})$ ,  $m_A(0) = 0$ ;  $\widetilde{m}_A, \widetilde{M}_A \in C(\mathbb{R}_+)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Симметричность формы  $a$  является очевидной. Из (8.5), определения  $H_p$  и тождества (8.11) следует, что

$$\begin{aligned} a(p, H, H) &= a_\Omega(p, H, H) + a_{\Omega_\infty}(p, H_p, H_p) = a_{\mathbb{R}^2}(p, H_p, H_p) \geq \\ &\geq \frac{1}{\varepsilon_+} \int_{\mathbb{R}^2} (|\operatorname{rot} \mathcal{H}_p|^2 + |\operatorname{div} \mathcal{H}_p|^2 + |\nabla H_{p3}|^2 + p^2 |H_p|^2) dx = \\ &= \frac{1}{\varepsilon_+} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla H_p|^2 + p^2 |H_p|^2) dx \geq m_A(p) \|H_p\|_{1, \mathbb{R}^2}^2 \geq m_A(p) \|H\|_{1, \Omega}^2. \end{aligned}$$

Здесь  $m_A(p) = \min\{1, p^2\}/\varepsilon_+$ . Также имеем

$$\begin{aligned} a(p, H, H) &\leq \varepsilon_\infty^{-1} \int_{\Omega} (|\operatorname{rot} \mathcal{H}|^2 + |\operatorname{div} \mathcal{H}|^2 + |\nabla H_3|^2 + p^2 |H|^2) dx + \\ &+ s_\infty(p; H, H) \leq \frac{\max\{2, p^2\}}{\varepsilon_\infty} \int_{\Omega} (|\nabla H|^2 + |H|^2) dx + s_\infty(p; H, H). \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка сверху  $a(p, H, H)$ , если учесть определение (8.15) и оценки (8.19) и (8.10). Из (8.20) следуют оценки производной, поскольку

$$\frac{d}{dp} a(p, H, H) = \frac{2p}{\varepsilon_\infty} \int_{\Omega} |H|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon_\infty} \frac{d}{dp} \tilde{s}_\infty(p, H, H). \quad \square$$

**Следствие 8.7.** Пусть либо  $c = \mathfrak{a}$  и  $l = 2$ , либо  $c = \ell$  и  $l = 1$ . Тогда для любого  $H \in V^l$  и  $p > 0$  справедливы оценки

$$\begin{aligned} m_A(p) \|H\|_{1, \Omega}^2 &\leq c(p, H, H) \leq M_A(p) \|H\|_{1, \Omega}^2, \\ \tilde{m}_A(p) \|H\|_{0, \Omega}^2 &\leq \frac{d}{dp} c(p, H, H) \leq \tilde{M}_A(p) \|H\|_{1, \Omega}^2, \quad p > 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что при  $H = (H, 0)$ , где  $H \in V^2$ , имеем  $\mathfrak{a}(p, H, H) = a(p, H, H)$ , а при  $H = (0, 0, H)$ ,  $H \in V$ , имеем  $\ell(p, H, H) = a(p, H, H)$ .  $\square$

Определенные нами при  $p > 0$  симметричные неотрицательные и ограниченные формы  $\mathfrak{a}$  и  $\ell$  являются непрерывными по  $p$ . Поскольку функции  $p \rightarrow \mathfrak{a}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H})$  и  $p \rightarrow \ell(p, H, H)$  возрастают по  $p$  при любых фиксированных  $\mathcal{H} \in V^2$  и  $H \in V$ , то их можно доопределить

(непрерывно) при  $p = 0$  с сохранением свойств симметричности и ограниченности (см., напр., [48, теорема 3.3, с. 561]). Полагая  $p = 0$  в определении этих форм, получим  $(\mathbb{K}_n(0) = |n|)$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}(0, \mathcal{H}, \mathcal{H}') &:= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \mathcal{H} \operatorname{rot} \mathcal{H}' + \frac{1}{\varepsilon_\infty} \operatorname{div} \mathcal{H} \operatorname{div} \mathcal{H}' \right) dx + \\ &+ \frac{2\pi}{\varepsilon_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| a_n(\mathcal{H}) \cdot \overline{a_n(\mathcal{H}')} + \varepsilon_\infty^{-1} I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}'), \quad (8.21) \end{aligned}$$

$$\ell(0, H, H') := \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \nabla H \cdot \nabla H' dx + \frac{2\pi}{\varepsilon_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| a_n(H) \overline{a_n(H')}. \quad (8.22)$$

Порождаемые этими формами операторы обозначим через  $\mathcal{A}(0)$  и  $L(0)$ . Имеем  $\|\mathcal{A}(p) - \mathcal{A}(0)\| \rightarrow 0$  и  $\|L(p) - L(0)\| \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow +0$ .

**Следствие 8.8.** Операторы  $\mathcal{A}(p)$  и  $L(p)$  являются самосопряженными, положительно определенными при каждом  $p > 0$  и неотрицательными при  $p = 0$ . Оператор-функции  $p \rightarrow \mathcal{A}(p)$  и  $p \rightarrow L(p)$  возрастают, непрерывны в нуле и дифференцируемы на  $\mathbb{R}_+$ ,

$$\ker \mathcal{A}(0) = \{\mathcal{H} : \mathcal{H} = (c_1, c_2)^T \text{ в } \Omega, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\},$$

$$\ker L(0) = \{H : H = c \text{ в } \Omega, c \in \mathbb{R}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем ядро оператора  $\mathcal{A}(0)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}(0, \mathcal{H}, \mathcal{H}) &:= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\varepsilon} |\operatorname{rot} \mathcal{H}|^2 + \frac{1}{\varepsilon_\infty} |\operatorname{div} \mathcal{H}|^2 \right) dx + \\ &+ \frac{2\pi}{\varepsilon_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| |a_n(\mathcal{H})|^2 + \varepsilon_\infty^{-1} I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}) =: \mathcal{I}_\Omega + \mathcal{I}_\Gamma. \end{aligned}$$

Ясно, что постоянные в  $\overline{\Omega}$  функции  $\mathcal{H}$  входят в ядро  $\mathcal{A}(0)$ . Далее, из леммы 8.25 следует, что  $\mathcal{I}_\Gamma \geq 0$ . Поэтому  $(\varepsilon_\infty^{-1} \geq \varepsilon^{-1} \geq \varepsilon_+^{-1})$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}(0, \mathcal{H}, \mathcal{H}) &\geq \frac{1}{\varepsilon_+} \int_{\Omega} (|\operatorname{rot} \mathcal{H}|^2 + |\operatorname{div} \mathcal{H}|^2) dx + \\ &+ \frac{2\pi}{\varepsilon_+} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| |a_n(\mathcal{H})|^2 + \varepsilon_+^{-1} I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}). \end{aligned}$$

Используя определение (8.6), получим интересующую нас оценку

$$\mathfrak{a}(0, \mathcal{H}, \mathcal{H}) \geq \frac{1}{\varepsilon_+} \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{H}|^2 dx. \quad (8.23)$$

Из нее следует, что ядро  $\mathcal{A}(0)$  не содержит других функций, кроме постоянных в  $\bar{\Omega}$ . Утверждение о ядре  $L(0)$  является очевидным.  $\square$

**2. Свойства формы  $\mathfrak{b}$  и оператора  $T$ .** Отметим, прежде всего, нужные нам свойства оператора  $T$ .

**Лемма 8.27.** *Оператор  $T(p)$  является компактным при  $p > 0$ ,*

$$|T(p)\mathcal{H}|_{1,\Omega} \leq \sigma_+ \varepsilon_+ \|\mathcal{H}\|_{0,\Omega}, \quad \|T(p)\mathcal{H}\|_{1,\Omega} \leq M_T(p) \|\mathcal{H}\|_{0,\Omega}.$$

Здесь  $M_T$  — непрерывная функция на  $\mathbb{R}_+$ ,  $\mathcal{H} \in V^2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению

$$(\mathcal{C}\mathcal{H}, H') = \int_{\Omega} \sigma \mathcal{H} \cdot \nabla H' dx, \quad \mathcal{H} \in V^2, H' \in V.$$

Поскольку  $0 \leq \sigma \leq \sigma_+$  в  $\Omega$ , то  $|(\mathcal{C}\mathcal{H}, H')| \leq \sigma_+ \|\mathcal{H}\|_{0,\Omega} |H'|_{1,\Omega}$ . Пусть

$$H = T(p)\mathcal{H} := L^{-1}(p)\mathcal{C}\mathcal{H}.$$

Тогда из определения  $L(p)$  и равенства  $(L(p)H, H) = (\mathcal{C}\mathcal{H}, H)$  имеем

$$\frac{1}{\varepsilon_+} \int_{\Omega} (|\nabla H|^2 + p^2 |H|^2) dx \leq (L(p)H, H) \leq \sigma_+ \|\mathcal{H}\|_{0,\Omega} |H|_{1,\Omega}.$$

Отсюда нетрудно вывести требуемые оценки:

$$|H|_{1,\Omega} < \sigma_+ \varepsilon_+ \|\mathcal{H}\|_{0,\Omega}, \quad p \|H\|_{0,\Omega} \leq \sigma_+ \varepsilon_+ \|\mathcal{H}\|_{0,\Omega},$$

$$\|H\|_{1,\Omega} \leq M_T(p) \|\mathcal{H}\|_{0,\Omega}, \quad M_T(p) := \sigma_+ \varepsilon_+ (1 + p^{-2})^{1/2}.$$

Из последней оценки следует компактность оператора  $T(p)$ .  $\square$

**Лемма 8.28.** *Форма  $\mathfrak{b}(p, \cdot, \cdot)$  является симметричной,*

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathfrak{b}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) &\leq M_B \|\mathcal{H}\|_{0,\Omega}^2, \\ 0 \leq -\frac{d}{dp} \mathfrak{b}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) &\leq \widetilde{M}_B(p) \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Здесь  $p > 0$ ,  $\widetilde{M}_B$  — непрерывная функция на  $\mathbb{R}_+$ ,  $\mathcal{H} \in V^2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению имеем

$$\mathfrak{b}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}') = \int_{\Omega} \sigma \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}' dx + (L^{-1}(p) \mathcal{C}\mathcal{H}, \mathcal{C}\mathcal{H}'), \quad \mathcal{H}, \mathcal{H}' \in V^2. \quad (8.25)$$

Отсюда следуют симметричность  $\mathfrak{b}$  и оценка снизу в (8.24), поскольку  $0 \leq \sigma \leq \sigma_+$  в  $\Omega$ , а  $L^{-1}(p)$  — самосопряженный и положительно определенный оператор.

Пусть  $H := T(p)\mathcal{H}$ . Используя первую оценку леммы 8.27, имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) &= \int_{\Omega} \sigma (|\mathcal{H}|^2 dx + \nabla H \cdot \mathcal{H}) dx \leq \\ &\leq \sigma_+ (\|\mathcal{H}\|_{0,\Omega}^2 + |H|_{1,\Omega} \|\mathcal{H}\|_{0,\Omega}) \leq (\sigma_+ + \sigma_+^2 \varepsilon_+) \|\mathcal{H}\|_{0,\Omega}^2 =: M_B \|\mathcal{H}\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Поскольку (см., напр., [48, с. 46])

$$\frac{d}{dp} L^{-1}(p) = -L^{-1}(p) \frac{d}{dp} L(p) L^{-1}(p), \quad (8.26)$$

то, используя следствие 8.7 и вторую оценку леммы 8.27, получим

$$\begin{aligned} 0 \leq -\frac{d}{dp} \mathfrak{b}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) &= (L^{-1}(p) \frac{d}{dp} L(p) L^{-1}(p) \mathcal{C}\mathcal{H}, \mathcal{C}\mathcal{H}) = \\ &= (\frac{d}{dp} L(p) H, H) \leq \widetilde{M}_A(p) \|H\|_{1,\Omega}^2 \leq \widetilde{M}_B(p) \|\mathcal{H}\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Здесь  $\widetilde{M}_B(p) := \widetilde{M}_A(p) M_T(p)$ .  $\square$

Симметричная и ограниченная (равномерно по  $p$ ) форма  $\mathfrak{b}(p, \cdot, \cdot)$  была определена нами при  $p > 0$ . Функция  $p \rightarrow \mathfrak{b}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H})$  является непрерывной и невозрастающей по  $p$  при фиксированном  $\mathcal{H} \in V^2$ . Поэтому ее можно доопределить (непрерывно) при  $p = 0$  (см., напр., [48, теорема 3.3, с. 561]) с сохранением свойств симметричности и ограниченности. Полагая  $p = 0$  в определении формы, получим

$$\mathfrak{b}(0, \mathcal{H}, \mathcal{H}') = \int_{\Omega} \sigma \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}' dx + (L^{-1}(0) \mathcal{C}\mathcal{H}, \mathcal{C}\mathcal{H}'), \quad \mathcal{H}, \mathcal{H}' \in V^2,$$

причем  $\|\mathcal{B}(p) - \mathcal{B}(0)\| \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow 0$ .



**Следствие 8.9.** Оператор  $\mathcal{B}(p)$  является самосопряженным, неотрицательным и компактным при каждом  $p \geq 0$ , а оператор-функция  $p \rightarrow \mathcal{B}(p)$  — невозрастающей, непрерывной в нуле и дифференцируемой на  $\mathbb{R}_+$ ,

$$\ker \mathcal{B}(p) = \ker \mathcal{B}(0) = \{\mathcal{H} \in V^2 : \mathcal{H} = 0 \text{ на } \Omega_i\}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Компактность  $\mathcal{B}(p)$  есть следствие оценки сверху в (8.24) и компактности оператора вложения  $V^2(\Omega) \subset [L_2(\Omega)]^2$ . Утверждение о ядре  $\mathbf{b}$  является очевидным, поскольку

$$\mathbf{b}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) = \int_{\Omega} \sigma (|\mathcal{H}|^2 dx + \nabla H \cdot \mathcal{H}) dx \geq \int_{\Omega} \sigma |\mathcal{H}|^2 dx,$$

где  $H = L^{-1}(p)\mathcal{C}\mathcal{H}$ , а  $\sigma = 0$  вне  $\Omega_i$ ,  $\sigma|_{\Omega_i} \geq \sigma_0 > 0$ .  $\square$

**Лемма 8.29.** Существует постоянная  $m_{AB} = m_{AB}(\Omega, \varepsilon)$  такая, что

$$\mathcal{A}(p) + \mathcal{B}(p) \geq m_{AB}I, \quad p \geq 0.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Учтем оценку (8.23). Поскольку что  $\sigma \geq \sigma_0$  в  $\Omega_i$ ,  $\sigma = 0$  вне  $\Omega_i$ , то

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) + \mathbf{b}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) &\geq \mathbf{a}(0, \mathcal{H}, \mathcal{H}) + \int_{\Omega} \sigma |\mathcal{H}|^2 dx \geq \\ &\geq \frac{1}{\varepsilon_+} \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{H}|^2 dx + \int_{\Omega_i} \sigma |\mathcal{H}|^2 dx \geq m_{AB} \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Заключительная оценка выводится так же, как и в скалярном случае (см. доказательство аналогичного утверждения леммы 7.16).  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 8.15.** Оператор  $L(0)$  имеет одномерное ядро, и на всем  $V$  оператор  $L^{-1}(0)$  не определен. В то же время оператор  $\mathcal{B}(0)$  определен в  $V^2$ , поскольку при любом  $\mathcal{H} \in V^2$  функция  $\mathcal{C}\mathcal{H}$  является ортогональной  $\ker L(0)$ . Введем в рассмотрение оператор  $L_0 : V \rightarrow V$ :

$$(L_0 H, H') = (L(0)H, H') + a_0(H) a_0(H'), \quad H, H' \in V.$$

Нетрудно проверить, что  $L_0$  — положительно определенный оператор и

$$\mathcal{C}^* L^{-1}(0) \mathcal{C} \mathcal{H} = \mathcal{C}^* L_0^{-1} \mathcal{C} \mathcal{H} \quad \forall \mathcal{H} \in V^2.$$

Поэтому можно считать, что  $\mathcal{B}(0) = \mathcal{B}_0 + \mathcal{C}^* L_0^{-1}(0) \mathcal{C}$ . Это определение будет полезно в дальнейшем при реализации приближенного метода решения задачи  $(\mathcal{P}')$ .

**3. Существование и свойства решений задачи  $(\mathcal{P})$ .** Исходная задача  $(\mathcal{P})$  в круге  $\Omega$ , квадратично зависящая от  $\beta$ , была сведена нами к задаче  $(\mathcal{P}')$ . Напомним, что она представляет собой параметрическую задачу на собственные значения

$$\mathcal{A}(p)\mathcal{H} = \beta^2 \mathcal{B}(p)\mathcal{H}, \quad \mathcal{H} \in V^2 \setminus \{0\}, \quad (8.27)$$

где  $p > 0$ , из которой определяются  $\beta$  и первые две компоненты  $\mathcal{H}$  поля  $\mathbf{H} = (\mathcal{H}, \mathbf{H}_3)$  (по ним находится  $\mathbf{H}_3 = \beta T(p)\mathcal{H}$ ).

Разрешимость задачи  $(\mathcal{P})$  следует из разрешимости задачи (8.27), которую мы рассмотрим также при  $p = 0$ . Задачи подобного вида были изучены нами в главе 6 (см. § 3, с. 141), где спектральный параметр  $\beta^2$  обозначался через  $\lambda$ . Были доказаны две теоремы (6.26 и 6.27), посвященные, соответственно, существованию решений и свойствам дисперсионных кривых. Чтобы воспользоваться этими результатами, необходимо проверить условия  $A_1$ – $A_5$ , с. 143, которым должны удовлетворять операторы  $\mathcal{A}(p)$  и  $\mathcal{B}(p)$  при  $p \geq 0$ .

**Лемма 8.30.** Оператор-функции  $\mathcal{A}(p)$  и  $\mathcal{B}(p)$  удовлетворяют условиям  $A_1$ – $A_5$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предыдущий пункт фактически был посвящен проверке этих условий. Напомним условия  $A_1$ – $A_5$ , а также укажем леммы предыдущего пункта, посвященные их проверке.

В лемме 8.28 и в следствии 8.7 было установлено, что

$$m_A(p) \leq \mathcal{A}(p) \leq M_A(p)I, \quad p \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq \mathcal{B}(p) \leq M_B I,$$

где  $m_A(0) = 0$ ,  $m_A(p) > 0$  при  $p > 0$ . Эти оценки означают, что выполнены условия  $A_1$ .

Компактность оператора  $\mathcal{B}(p)$  (ясно, что он бесконечномерный) и равенства  $\ker \mathcal{B}(p) = \ker \mathcal{B}(0)$ ,  $p \in \mathbb{R}_+$ , установлены в следствии 8.9. В следствии 8.7 было показано, что  $r_0 := \dim(\ker \mathcal{A}(0)) = 2$ . Поэтому условия  $A_2$  также выполнены.

В лемме 8.29 была установлена оценка

$$\mathcal{A}(p) + \mathcal{B}(p) \geq m_{AB}I, \quad p \geq 0,$$

означающая выполнение условия  $A_3$ .

Поскольку функция  $p \rightarrow \mathbf{a}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H})$  возрастает при любом  $\mathcal{H} \in V^2$  (следствие 8.7), а функция  $p \rightarrow \mathbf{b}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H})$  не возрастает (лемма 8.28),

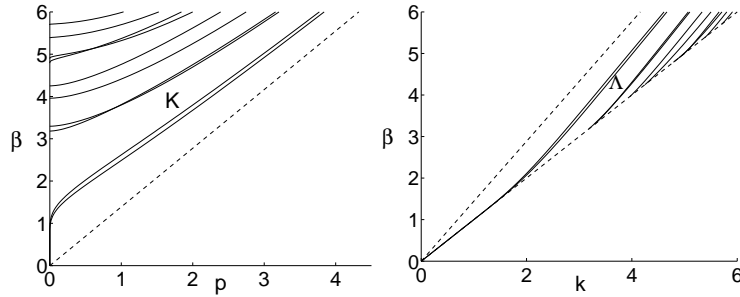


Рис. 19. Дисперсионные кривые для волновода прямоугольного поперечного сечения с размерами  $1.5 \times 1$ ,  $\varepsilon(x) = 2.08$ ,  $x \in \Omega_i$ ,  $\varepsilon_\infty = 1$ ,  $\mu_0 = 1$ .

то отношение Рэлея  $\mathbf{a}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H})/\mathbf{b}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H})$  возрастает по  $p$  на  $\tilde{V}^{(1)}$  (условие  $A_4$ ).

Оператор-функции  $\mathcal{A}(p)$  и  $\mathcal{B}(p)$  непрерывны в нуле и дифференцируемы на полуоси  $\mathbb{R}_+$ , т. е. являются локально липшиц-непрерывными на  $\mathbb{R}_+$  (следствия 8.8, 8.9). Следовательно, они принадлежат множеству  $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+, V)$  (условие  $A_5$ ).  $\square$

**Теорема 8.41.** При каждом  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$  существует счетное множество чисел  $\beta^K(p)$ ,  $K \geq 1$ , с единственной точкой накопления  $+\infty$ , квадраты которых образуют полный набор собственных чисел задачи (8.27). Соответствующие им собственные подпространства  $\mathcal{U}^K(p)$  конечномерны,  $V_{\mathcal{A}(p)+\mathcal{B}(p)}^2 = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{U}^K(p) \oplus \ker \mathcal{B}(0)$ .

Кроме того, если  $\{\beta_i(p)\}_{i=1}^{\infty}$  есть числа  $\beta^K(p)$ ,  $K = 1, 2, \dots$ , занумерованные по возрастанию с учетом кратности, то

а) функции  $p \rightarrow \beta_i(p)$  и  $p \rightarrow \beta_i^2(p) - p^2$ ,  $i \geq 1$ , являются неотрицательными, возрастающими, непрерывными в нуле и локально липшиц-непрерывными на  $\mathbb{R}_+$ ;

б)  $\beta_2(p) \searrow +0$  при  $p \rightarrow +0$ ,  $\beta_3(0) > 0$ ,  $\beta_i(p) \rightarrow \infty$  при  $i \rightarrow \infty$ ;

с)  $\beta_i(p)/p > k_0$ ,  $\lim_{p \rightarrow \infty} \beta_i(p)/p = k_0$ ,  $i \geq 1$ ,  $k_0^2 := \varepsilon_+ / (\varepsilon_+ - \varepsilon_\infty)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из теорем 6.26 и 6.27 главы 6, которыми мы можем воспользоваться благодаря предыдущей лемме, следуют

<sup>1)</sup>  $\tilde{V}$  есть ортогональное дополнение  $\ker \mathcal{B}(p)$  до пространства  $V_{\mathcal{A}(p)+\mathcal{B}(p)}^2$ .

все утверждения теоремы, кроме утверждения о неотрицательности и монотонности функций  $p \rightarrow \beta_i^2(p) - p^2$  и утверждения с).

Используем минимаксный принцип Куранта — Фишера. Имеем

$$\beta_i^2(p) = \min_{V_i \subset \tilde{V}} \max_{\mathcal{H} \in V_i \setminus 0} R(p, \mathcal{H}), \quad R(p, \mathcal{H}) := \frac{(\mathcal{A}(p)\mathcal{H}, \mathcal{H})}{(\mathcal{B}(p)\mathcal{H}, \mathcal{H})}.$$

Пусть  $\mathcal{D}(p) := \mathcal{A}(p) - p^2\mathcal{B}(p)$ . Ясно, что функция

$$p \rightarrow (\mathcal{D}(p)\mathcal{H}, \mathcal{H})/(\mathcal{B}(p)\mathcal{H}, \mathcal{H}), \quad \mathcal{H} \in V^2,$$

возрастает и при  $p = 0$  является неотрицательной. Поскольку

$$\beta_i^2(p) - p^2 = \min_{V_i \subset \tilde{V}} \max_{\mathcal{H} \in V_i \setminus 0} \frac{(\mathcal{D}(p)\mathcal{H}, \mathcal{H})}{(\mathcal{B}(p)\mathcal{H}, \mathcal{H})},$$

то отсюда следует, что функция  $p \rightarrow \beta_i^2(p) - p^2$  является неотрицательной и возрастающей.

Докажем второе утверждение в с), поскольку первое следует из принадлежности  $(\beta_i(p), p)$  множеству  $K$ . Обозначим через  $B_r$  круг малого радиуса  $r$  с центром в такой точке  $x_+ \in \overline{\Omega}_i$ , что

$$\varepsilon_+ = \varepsilon(x_+) = \max_{x \in \overline{\Omega}_i} \varepsilon(x), \quad \delta_r := \max_{x \in \overline{B}_r} (\varepsilon_+ - \varepsilon(x)),$$

и пусть  $V_r^2$  есть множество функций из  $V^2$ , равных нулю вне  $B_r$ . Отметим, что  $I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = 0$ ,  $s_\infty(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) = 0$  на  $V_r^2$ . Если  $\mathcal{H} \in V_r^2$ , то из равенства (8.6) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\varepsilon} |\operatorname{rot} \mathcal{H}|^2 + \frac{1}{\varepsilon_\infty} |\operatorname{div} \mathcal{H}|^2 + \frac{p^2}{\varepsilon_\infty} |\mathcal{H}|^2 \right) dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon_\infty} \int_{\Omega} \left( |\operatorname{rot} \mathcal{H}|^2 + |\operatorname{div} \mathcal{H}|^2 + p^2 |\mathcal{H}|^2 \right) dx = \frac{1}{\varepsilon_\infty} \int_{B_r} \left( |\nabla \mathcal{H}|^2 + p^2 |\mathcal{H}|^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Учтем, что

$$\sigma(x) = \frac{1}{\varepsilon_\infty} - \frac{1}{\varepsilon_+ - (\varepsilon_+ - \varepsilon(x))} \geq \frac{1}{\varepsilon_\infty} - \frac{1}{\varepsilon_+ - \delta_r} =: \frac{1}{\varepsilon_\infty d_r}, \quad x \in B_r,$$

$$\mathbf{b}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) \geq \int_{\Omega} \sigma |\mathcal{H}|^2 dx \geq \frac{1}{\varepsilon_\infty d_r} \int_{B_r} |\mathcal{H}|^2 dx.$$

Тогда для любого  $\mathcal{H} \in V_r^2$  справедлива оценка

$$R(p, \mathcal{H}) \leq d_r \left( \int_{B_r} |\nabla \mathcal{H}|^2 dx \right) \left( \int_{B_r} |\mathcal{H}|^2 dx \right)^{-1} + d_r p^2.$$

Обозначим через  $(\lambda_r^i, u^i)$  собственные пары оператора Лапласа в круге  $B_r$  при краевых условиях Дирихле ( $u^i$  продолжим нулем вне  $B_r$ ). Положим  $V_i := \{(H_1, 0) : H_1 \in \text{span}\{u^1, \dots, u^i\}\}$ . Поскольку  $\lambda_r^i = r^{-2}\lambda_1^i$ , то

$$\beta_i^2(p) \leq \max_{\mathcal{H} \in V_i \setminus \{0\}} R(p, \mathcal{H}) \leq \frac{\lambda_1^i d_r}{r^2} + d_r p^2.$$

Следовательно,

$$0 \leq \frac{\beta_i^2(p)}{p^2} - k_0^2 \leq \frac{\lambda_1^i d_r}{r^2 p^2} + d_r - k_0^2.$$

Переходя здесь к пределу при  $r \rightarrow 0$ ,  $p \rightarrow \infty$  так, чтобы  $pr \rightarrow \infty$ , получим требуемое утверждение, так как  $\delta_r \rightarrow 0$ ,  $d_r \rightarrow k_0^2$ .  $\square$

**Следствие 8.10.** При каждом  $p > 0$  числа  $\beta^K(p)$ ,  $K \geq 1$ , образуют полный набор собственных чисел задачи  $(\mathcal{P})$ , им соответствуют конечномерные собственные подпространства

$$\mathcal{U}^K(p) = \{(\mathcal{H}, \mathcal{H}_3) : \mathcal{H} \in \mathcal{U}^K(p), \mathcal{H}_3 = \beta^K(p)T(p)\mathcal{H}\}.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 8.16.** Аналогично скалярному случаю нетрудно доказать аналитичность семейства операторов  $\mathcal{A}(p)$  и  $L(p)$  (см. доказательство аналитичности оператор-функции  $A_1(p)$ , с. 175). Из аналитичности семейства  $L(p)$  и обратимости  $L(p)$  при  $p > 0$  нетрудно вывести, что оператор-функция  $p \rightarrow \mathcal{B}(p)$  также является аналитической на  $\mathbb{R}_+$  (см. равенство (8.26)). Учитывая неравенство  $\mathcal{A}(p) + \mathcal{B}(p) \geq m_{AB}I$  и  $\ker \mathcal{B}(p) = \ker \mathcal{B}(0)$ , аналогично скалярному случаю можно доказать, что собственные числа задачи  $(\mathcal{P})$  представляются аналитическими на  $\mathbb{R}_+$  функциями и имеет место аналог теоремы 7.33, с. 175. [48, с. 520].

### § 3. Множество решений задачи $(\mathcal{P}_\infty)$ .

Задача  $(\mathcal{P}_\infty)$  является обобщенной формулировкой задачи нахождения пар чисел  $(\beta, k) \in \Lambda$  и ненулевых векторов  $\mathbf{H} \in [H^1(\mathbb{R}^2)]^3$ , удовлетворяющих уравнению (8.1), с. 198. Между множествами решений этой задачи и задачи  $(\mathcal{P})$  имеется взаимно однозначное соответствие (см. теорему 8.40): если  $(\beta_i(p), p, \mathbf{H}_i(p))$  есть решение задачи  $(\mathcal{P})$ ,  $i \geq 1$ , то  $(\beta_i(p), k_i(p), \mathbf{H}_{ip}(p))$  — решение задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$

при  $k_i(p) = (\beta_i^2(p) - p^2)/\varepsilon_\infty^{1/2}$ , и наоборот <sup>1)</sup>. Таким образом, из теоремы 8.41, с. 215, и следствия 8.10, посвященных описанию множества решений задачи  $(\mathcal{P})$ , нетрудно получить информацию о множестве решений задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$ .

Предварительно сделаем несколько замечаний. В задаче  $(\mathcal{P}_\infty)$  будем считать волновое число  $k$  (или частоту  $\omega$ ) параметром, а неизвестными —  $(\beta, \mathbf{H})$ , и будем интересоваться их зависимостью от  $k$ . Пусть  $(\beta_i(p), \mathbf{H}_i(p))$ ,  $i \geq 1$ ,  $p \in \mathbb{R}_+$ , есть решения задачи  $(\mathcal{P})$ , обозначим  $k_i(p) = (\beta_i^2(p) - p^2)/\varepsilon_\infty^{1/2}$ . Тогда решениями задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$  являются тройки  $(\beta_i(p), k_i(p), \mathbf{H}_{ip}(p))$ ,  $i \geq 1$ ,  $p \in \mathbb{R}_+$ . В плоскости  $(k, \beta)$  функции

$$k = k_i(p), \quad \beta = \beta_i(p), \quad p \in \mathbb{R}_+, \quad i = 1, 2, \dots,$$

определяют дисперсионные кривые задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$ , параметризованные поперечным волновым числом  $p$ . Согласно утверждению а) теоремы 8.41, функции  $p \rightarrow k_i(p)$ ,  $p \rightarrow \beta_i(p)$  локально удовлетворяют условию Липшица, непрерывны в нуле и возрастают. При  $p \rightarrow 0$  имеем пределы  $k_i(p) \rightarrow k_i^0 = \beta_i^0/\varepsilon_\infty^{1/2}$ ,  $\beta_i(p) \rightarrow \beta_i^0$ . Таким образом,  $i$ -я дисперсионная кривая начинается в критической точке  $(k_i^0, \beta_i^0)$  (см. рис. 19, где представлены первые дисперсионные кривые задачи  $(\mathcal{P})$  (слева) и  $(\mathcal{P}_\infty)$  (справа) для однородного волновода прямоугольного поперечного сечения). Ясно, что дисперсионные кривые допускают параметризацию

$$\beta_i = \beta_i(k), \quad k \in (k_i^0, \infty), \quad i = 1, 2, \dots$$

Числа  $(\beta_i^0)^2$  являются решениями следующей задачи: найти пары  $(\beta^2, \mathbf{H}) \in \mathbb{R}_+ \times V^2 \setminus \{0\}$  такие, что

$$(\mathcal{P}^0) \quad \mathbf{a}(0, \mathcal{H}, \mathcal{H}') = \beta^2 \mathbf{b}(0, \mathcal{H}, \mathcal{H}') \quad \forall \mathcal{H}' \in V^2.$$

Формы этой задачи определяются равенствами (8.21), (8.22), (8.25). Задачу  $(\mathcal{P}^0)$  назовем задачей определения критических чисел. Согласно теореме 8.41

$$0 = \beta_1^0 = \beta_2^0 < \beta_3^0 \leq \beta_4^0 \leq \dots, \quad \beta_i^0 \rightarrow \infty, \quad i \rightarrow \infty.$$

Определим ступенчатую функцию

$$n(k) := \max\{i : k_i^0 < k, \quad i = 1, 2, \dots\}.$$

<sup>1)</sup>Напомним, что  $\mathbf{H}_{ip}(p)$  есть метагармоническое продолжение  $\mathbf{H}_i(p)|_\Omega$ .

Ясно, что при фиксированном  $k > 0$  значение  $n(k)$  в точности равно числу решений  $(\beta_i(k), \mathbf{H}_i(k))$  задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$ . Из приведенных выше рассуждений, теоремы 8.41 и следствия 8.10 непосредственно следует

**Теорема 8.42.** *При каждом  $k > 0$  существует конечное число собственных чисел  $\beta^K(k)$ ,  $1 \leq K \leq m(k)$ , суммарной кратности  $n(k)$ , и соответствующих им собственных подпространств  $\mathbf{U}^K(k)$  таких, что  $(\beta^K(k), k, \mathbf{H})$  есть решение задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$  при любом  $\mathbf{H} \in \mathbf{U}^K(k)$ . Кроме того, если*

$$0 < \beta_1(k) \leq \beta_2(k) \leq \dots \leq \beta_{n(k)}(k),$$

*есть нумерация чисел  $\{\beta^K(k)\}_{K=1}^{m(k)}$  с учетом кратности, то*

- a) функция  $k \rightarrow \beta_i(k)$ ,  $k \geq k_i^0$ , возрастает, непрерывна в точке  $k_i^0$  и локально липшиц-непрерывна при  $k > k_i^0$ , где  $i = 1, \dots, n(k)$ ;*
- b)  $n(k) = 2$  при  $k < k_3^0$ ,  $n(k) \geq 2$  при  $k > k_3^0$ ,  $n(k) \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ ;*
- c)  $\varepsilon_\infty^{1/2} k < \beta_i(k) < \varepsilon_+^{1/2} k$ ,  $k > k_i^0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\beta_i(k)/k) = \varepsilon_+^{1/2}$ ,  $i = 1, \dots, n(k)$ .*

При каждом  $k > 0$ , как следует из теоремы, существуют по крайней мере два решения задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$ . Число решений неограниченно возрастает с ростом  $k$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 8.17.** Обратим внимание, что качественное поведение первых двух дисперсионных кривых  $p \rightarrow \beta_1(p)$ ,  $p \rightarrow \beta_2(p)$  на левом рис. 19 отличается от других. В частности, они вогнуты и экспоненциально приближаются к оси  $\beta$  при малых  $p$ . Обоснование такого поведения такое же, как и в скалярном случае (см. замечание 7.12, с. 180). Действительно, пусть  $\mathbf{H}_1(p)$ ,  $\mathbf{H}_2(p)$  есть собственные функции, соответствующие  $\beta_1(p)$ ,  $\beta_2(p)$ . Поскольку  $\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0$ ,

$$\mathbf{H}_1(0) = (c_1(0), 0), \quad \mathbf{H}_2(0) = (0, c_2(0)) -$$

постоянные в  $\Omega$  вектор-функции, то при малых  $p$  имеем  $\mathbf{H}_1(p) = (c_1(p), 0) + \tilde{\mathbf{H}}_1(p)$  и  $\mathbf{H}_2(p) = (0, c_2(p)) + \tilde{\mathbf{H}}_2(p)$ , где  $\|\tilde{\mathbf{H}}_i(p)\|_{1,\Omega} \approx 0$ . Аналогично скалярному случаю получаем

$$\beta_i^2(p) = \frac{\mathbf{a}(p, \mathbf{H}_i(p), \mathbf{H}_i(p))}{\mathbf{b}(p, \mathbf{H}_i(p), \mathbf{H}_i(p))} \approx c \mathbb{K}_0(Rp) \approx c \ln^{-1} \left( \frac{1}{Rp} \right), \quad c := 2\pi / \int_{\Omega} (\sigma - 1) dx.$$

Таким образом, при малых  $p$  поведение функции  $p \rightarrow \beta_i(p)$ ,  $i = 1, 2$ , совпадает с поведением функции  $\mathbb{K}_0^{1/2}(Rp)$  (см. график  $\mathbb{K}_0(p)$  на левом рис. 15, с. 157).

## § 4. Дискретная задача

Для дискретизации задачи  $(\mathcal{P})$  используем метод конечных элементов с численным интегрированием. Для аппроксимации  $V_h$  пространства Соболева  $V$  используем конструкцию, описанную в скалярном случае на с. 181, а также квадратурную формулу  $S_h$  (с. 184).

Определим пространства конечных элементов — аппроксимации пространств  $V$ ,  $V^2$  и  $V^3$ , соответственно:

$$V_h, \quad V_h^2 := V_h \times V_h, \quad V_h^3 := V_h^2 \times V_h, \quad \dim V_h =: N_h.$$

Пусть  $\mathcal{H}_h := (\mathbf{H}_{1h}, \mathbf{H}_{2h}) \in V_h^2$  — аппроксимация  $\mathcal{H} \in V^2$ ,  $\mathbf{H}_h \in V_h^3$  — аппроксимация  $\mathbf{H} \in V^3$ ,

$$\mathbf{H}_{lh}(x) = \sum_{i=1}^{N_h} \mathbf{H}_{li} \varphi_i(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \mathbf{H}_{li} = \mathbf{H}_{lh}(a_i), \quad a_i \in \omega_h, \quad l = 1, 2, 3.$$

Положим  $\mathbb{H}_l = (\mathbf{H}_{l1}, \dots, \mathbf{H}_{lN_h})^T$ ;  $\mathbb{H} = (\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)^T$  — вектор узловых параметров функции  $\mathcal{H}_h$ ;  $\mathbf{H} = (\mathbb{H}, \mathbb{H}_3)^T$  — вектор узловых параметров  $\mathbf{H}_h \in V_h^3$  (будем говорить, что  $\mathbf{H}$  соответствует  $(\Leftrightarrow) \mathbf{H}_h$ ). Для  $\mathbf{H}_h \in V_h^l$  введем обозначение

$$\|\mathbf{H}_h\|_{m,h}^2 = \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^l \|\mathbf{H}_{ih}\|_{m,e}^2, \quad l \geq 1.$$

Отметим, что из (7.43), с. 185, и обратного неравенства следуют оценки

$$c^{-1} \|\mathbf{H}_h\|_{1,\Omega}^2 \leq S_h(|\nabla \mathbf{H}_h|^2 + |\mathbf{H}_h|^2) \leq c \|\mathbf{H}_h\|_{1,\Omega}^2, \quad (8.28)$$

$$\|\mathbf{H}_h\|_{m,h} \leq c h^{1-m} \|\mathbf{H}_h\|_{1,\Omega}, \quad m \geq 1, \quad (8.29)$$

где постоянная  $c$  не зависит от  $h$ . Ясно, что  $\|\mathbf{H}_h\|_{1,h} = \|\mathbf{H}_h\|_{1,\Omega}$ .

При построении дискретной задачи составляющие задачи  $(\mathcal{P})$  аппроксимируем естественным образом, за исключением формы  $I_\Gamma$ . Во-первых отметим, что след на  $\Gamma$  функции из  $V_h$  принадлежит пространству  $\mathbf{H}^1(\Gamma)$ . Поэтому  $I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$  можно вычислить по следующей формуле (см. лемму 8.24):

$$I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}') = \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial \varphi} \mathbf{H}_2' + \frac{\partial \mathbf{H}_1'}{\partial \varphi} \mathbf{H}_2 \right) \Big|_{r=R} d\varphi, \quad \mathcal{H}, \mathcal{H}' \in V_h^2.$$

Подынтегральное выражение здесь является кусочно-полиномиальной функцией степени  $2m - 1$  и точно вычисляется с помощью составной  $m$ -точечной квадратурной формулы Гаусса. Далее заметим, что

$$\varepsilon_{\infty}^{-1} = (\varepsilon_{\infty}^{-1} - \varepsilon_+^{-1}) + \varepsilon_+^{-1} =: \sigma_+ + \varepsilon_+^{-1}.$$

Используя формулу (8.12), определяющую  $I_{\Gamma}$  через коэффициенты Фурье, получим<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\infty}^{-1} I_{\Gamma}(\mathcal{H}, \mathcal{H}') &= \varepsilon_+^{-1} I_{\Gamma}(\mathcal{H}, \mathcal{H}') + \sigma_+ I_{\Gamma}(\mathcal{H}, \mathcal{H}') = \\ &= \varepsilon_+^{-1} I_{\Gamma}(\mathcal{H}, \mathcal{H}') + 2\pi i \sigma_+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n(\mathcal{H}) \times \overline{a_n(\mathcal{H}')}. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу: найти  $(\beta^h, \mathbf{H}_h) \in \mathbb{R}_+ \times V_h^3 \setminus \{0\}$  такие, что для любого  $\mathbf{H}' \in V_h^3$  имеет место равенство

$$(\mathcal{P}_h) \quad a_h(p; \mathbf{H}_h, \mathbf{H}') - \beta^h c_h(\mathbf{H}_h, \mathbf{H}') - \beta^{h2} b_{0h}(\mathbf{H}_h, \mathbf{H}') = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_h(\beta; \mathbf{H}, \mathbf{H}') &:= S_h \left( \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathcal{H} \operatorname{rot} \mathcal{H}' + \varepsilon_{\infty}^{-1} \operatorname{div} \mathcal{H} \operatorname{div} \mathcal{H}' + \right. \\ &+ \varepsilon^{-1} \nabla \mathbf{H}_3 \cdot \nabla \mathbf{H}'_3 + \beta^2 \varepsilon_{\infty}^{-1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}' \left. \right) + \frac{2\pi}{\varepsilon_{\infty}} \sum_{n=-N}^N \mathbb{K}_n(Rp) a_n(\mathbf{H}) \cdot \overline{a_n(\mathbf{H}')} + \\ &+ 2\pi i \sigma_+ \sum_{n=-N}^N n a_n(\mathcal{H}) \times \overline{a_n(\mathcal{H}')} + \varepsilon_+^{-1} I_{\Gamma}(\mathcal{H}, \mathcal{H}'), \end{aligned}$$

$$b_{0h}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') := S_h(\sigma \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}'), \quad c_h(\mathbf{H}, \mathbf{H}') := S_h(\sigma(\nabla \mathbf{H}_3 \cdot \mathcal{H}' + \mathcal{H} \cdot \nabla \mathbf{H}'_3)).$$

При фиксированном параметре  $p > 0$  задача  $(\mathcal{P}_h)$  представляет собой квадратичную относительно  $\beta^h$  алгебраическую задачу на собственные значения. Запишем ее в матричном виде. С этой целью для всех  $p \geq 0$  определим следующие матрицы через их билинейные

<sup>1)</sup>Такая аппроксимация позволит доказать знакоопределенность соответствующих дискретных форм. Далее будем считать, что  $N = N(h)$ .

формы  $(\mathbb{H} \Leftrightarrow \mathcal{H} \in V_h^2 \text{ и } \mathbb{H}_3 \Leftrightarrow \mathbf{H}_3 \in V_h)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h(p) \mathbb{H} \cdot \mathbb{H}' &:= S_h \left( \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathcal{H} \operatorname{rot} \mathcal{H}' + \varepsilon_{\infty}^{-1} \operatorname{div} \mathcal{H} \operatorname{div} \mathcal{H}' + p^2 \varepsilon_{\infty}^{-1} \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}' \right) + \\ &+ \frac{2\pi}{\varepsilon_{\infty}} \sum_{n=-N}^N \mathbb{K}_n(Rp) a_n(\mathcal{H}) \cdot \overline{a_n(\mathcal{H}')} + \\ &+ 2\pi i \sigma_+ \sum_{n=-N}^N n a_n(\mathcal{H}) \times \overline{a_n(\mathcal{H}')} + \varepsilon_+^{-1} I_{\Gamma}(\mathcal{H}, \mathcal{H}'), \\ \mathcal{B}_{0h} \mathbb{H} \cdot \mathbb{H}' &:= S_h(\sigma \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}'), \quad \mathcal{C}_h \mathbb{H} \cdot \mathbb{H}'_3 := S_h(\sigma \mathcal{H} \cdot \nabla \mathbf{H}'_3), \\ L_h(p) \mathbb{H}_3 \cdot \mathbb{H}'_3 &:= \ell_h(p, \mathbf{H}_3, \mathbf{H}'_3) := S_h \left( \varepsilon^{-1} \nabla \mathbf{H}_3 \cdot \nabla \mathbf{H}'_3 + p^2 \varepsilon_{\infty}^{-1} \mathbf{H}_3 \mathbf{H}'_3 \right) + \\ &+ \frac{2\pi}{\varepsilon_{\infty}} \sum_{n=-N}^N \mathbb{K}_n(Rp) a_n(\mathbf{H}_3) \cdot \overline{a_n(\mathbf{H}'_3)}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение  $(\mathcal{P}_h)$  запишется в виде системы<sup>1)</sup>

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_h(p) & -\beta^h \mathcal{C}_h^T \\ -\beta^h \mathcal{C}_h & L_h(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{H} \\ \mathbb{H}_3 \end{pmatrix} = \beta^{h2} \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{0h} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{H} \\ \mathbb{H}_3 \end{pmatrix}.$$

Исключая из этой системы  $\mathbb{H}_3$ , получим эквивалентную ей задачу: найти такие  $(\beta^h, \mathbf{H}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{3N_h} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbf{H} = (\mathbb{H}, \mathbb{H}_3)^T$ , что

$$(\mathcal{P}'_h) \quad \mathcal{A}_h(p) \mathbb{H} = \beta^{h2} \mathcal{B}_h(p) \mathbb{H}, \quad \mathbb{H}_3 = \beta^h L_h(p)^{-1} \mathcal{C}_h \mathbb{H},$$

где  $\mathcal{B}_h(p) = \mathcal{B}_{0h} + \mathcal{C}_h^T L_h(p)^{-1} \mathcal{C}_h$ .

Первое уравнение в  $(\mathcal{P}'_h)$  в терминах билинейных форм имеет вид

$$\mathbf{a}_h(p, \mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h) = \beta^{h2} \mathbf{b}_h(p, \mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h) \quad \forall \mathcal{H}'_h \in V_h^2, \quad (8.30)$$

где

$$\mathbf{a}_h(p, \mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h) := \mathcal{A}_h(p) \mathbb{H} \cdot \mathbb{H}', \quad \mathbf{b}_h(p, \mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h) := \mathcal{B}_h(p) \mathbb{H} \cdot \mathbb{H}'.$$

При заданном  $p > 0$  задача на собственные значения (8.30) позволяет определить  $\beta^h$  и первые две компоненты  $\mathbb{H}$  собственной функции. Третья компонента  $\mathbb{H}_3$  по ним находится явно. Далее мы рассмотрим задачу (8.30) так же при  $p = 0$  (аппроксимацию задачи  $(\mathcal{P}^0)$ , с. 218, для определения критических чисел).

<sup>1)</sup>Далее будет показано, что  $L_h(p)$  — положительно определенная матрица при любом  $p > 0$ .

**1. Свойства форм.** Задачи вида (8.30) были изучены нами в главе 6 (см. § 4, с. 148), где спектральный параметр  $\beta^{h^2}$  обозначался через  $\lambda^h$ . Воспользуемся результатами теоремы 6.29. Для этого необходимо убедиться, что семейства матрицы  $\mathcal{A}_h(p)$  и  $\mathcal{B}_h(p)$  удовлетворяют условиям  $A_1^h$ - $A_5^h$ , с. 148.

Далее буквой  $c$  будут обозначаться различные постоянные, не зависящие от параметров  $h$  и  $N$  дискретной задачи.

**Лемма 8.31.** *Семейства матриц  $\mathcal{A}_h(p)$  и  $\mathcal{B}_h(p)$ ,  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$ , удовлетворяют условиям  $A_1^h$  –  $A_5^h$ ,  $A_4^h$  –  $A_5^h$ . При достаточно малом  $h$  выполняется также условие  $A_3^h$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим условие  $A_1^h$ . Ясно, что  $(\mathcal{H} \in V_h^2)$

$$|\mathbf{a}_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H})| \leq c S_h(|\nabla \mathcal{H}|^2 + |\mathcal{H}|^2) + \\ + c \sum_{n=-N}^N (\mathbb{K}_n(Rp) + |n|) |a_n(\mathcal{H})|^2 + c |I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H})|.$$

Каждое слагаемое здесь оценивается величиной  $c \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega}^2$ . Действительно, первое слагаемое оценивается согласно (8.28), третье — согласно лемме 8.24. Далее, учитывая следствие 7.3, с. 161, а также оценки  $|n| \leq \mathbb{K}_n(Rp)$ , получим требуемую оценку второго слагаемого. Окончательно получим

$$|\mathbf{a}_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H})| \leq c \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall \mathcal{H} \in V_h^2, \quad (8.31)$$

где  $c = c(p, \varepsilon)$ , функция  $p \rightarrow c(p, \varepsilon)$  непрерывна на  $\mathbb{R}_+$ .

По определению имеем

$$\mathbf{b}_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}') := \mathcal{B}_h(p) \mathbb{H} \cdot \mathbb{H}' := S_h(\sigma \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}') + (L_h(p))^{-1} \mathcal{C}_h \mathbb{H} \cdot \mathcal{C}_h \mathbb{H}'.$$

Матрица  $L_h(p)$  положительно определена и ограничена при  $p > 0$  равномерно по  $h$  и  $N$ . Действительно, пусть  $\mathbb{H}_3 \Leftrightarrow \mathbb{H}_3 \in V_h$  и  $1_p := \min\{1, p^2\}$ . Тогда

$$L_h(p) \mathbb{H}_3 \cdot \mathbb{H}_3 \geq \varepsilon_+^{-1} 1_p S_h(|\nabla \mathbb{H}_3|^2 + |\mathbb{H}_3|^2) \geq c 1_p \|\mathbb{H}_3\|_{1,\Omega}^2.$$

Аналогично  $L_h(p) \mathbb{H}_3 \cdot \mathbb{H}_3 \leq c(\max\{1, p^2\} + 1) \|\mathbb{H}_3\|_{1,\Omega}^2$ .

Поскольку  $S_h(|\nabla \mathbb{H}_3|^2) \geq c |\mathbb{H}_3|_{1,\Omega}^2$  (см. следствие 7.5, с. 186), то

$$L_h(0) \mathbb{H}_3 \cdot \mathbb{H}_3 = S_h(\varepsilon^{-1} |\nabla \mathbb{H}_3|^2) + \frac{2\pi}{\varepsilon_\infty} \sum_{n=-N}^N |n| |a_n(\mathbb{H}_3)|^2 \geq c |\mathbb{H}_3|_{1,\Omega}^2.$$

Отсюда следует, что матрица  $L_h(0)$  имеет ядро, состоящее из векторов с равными компонентами (им соответствуют постоянные в  $\Omega$  функции). Из определения матрицы  $\mathcal{C}_h$  следует, что вектор  $\mathcal{C}_h \mathbb{H}$  ортогонален этому ядру при любом  $\mathbb{H}$ . Поэтому функция

$$p \rightarrow (L_h(p))^{-1} \mathcal{C}_h \mathbb{H} \cdot \mathcal{C}_h \mathbb{H}$$

корректно определена и неотрицательна при всех  $\mathbb{H} \in \mathbb{R}^{2N_h}$  и, как следствие, неотрицательно определена форма  $\mathbf{b}_h$  при каждом  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$ .

Оценим сверху форму  $\mathbf{b}_h$ . Положим  $\mathbb{H}_3 := (L_h(p))^{-1} \mathcal{C}_h \mathbb{H}$  и пусть  $V_h \ni \mathbb{H}_3 \Leftrightarrow \mathbb{H}_3$ ,  $\mathcal{H} \Leftrightarrow \mathbb{H}$ . Имеем

$$\varepsilon_+^{-1} S_h(|\nabla \mathbb{H}_3|^2 + p^2 |\mathbb{H}_3|^2) \leq L_h(p) \mathbb{H}_3 \cdot \mathbb{H}_3 = \mathcal{C}_h \mathbb{H} \cdot \mathbb{H}_3 = \\ = S_h(\sigma \mathcal{H} \cdot \nabla \mathbb{H}_3) \leq \sigma_+ S_h^{1/2}(|\mathcal{H}|^2) S_h^{1/2}(|\nabla \mathbb{H}_3|^2).$$

Отсюда следует, что  $S_h^{1/2}(|\nabla \mathbb{H}_3|^2) \leq \sigma_+ \varepsilon_+ S_h^{1/2}(|\mathcal{H}|^2)$ . Следовательно,

$$\mathbf{b}_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) := S_h(\sigma \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}) + \mathcal{C}_h \mathbb{H} \cdot \mathbb{H}_3 = \\ = S_h(\sigma |\mathcal{H}|^2) + S_h(\sigma \mathcal{H} \cdot \nabla \mathbb{H}_3) \leq \\ \leq \sigma_+ S_h(|\mathcal{H}|^2) + \sigma_+ S_h^{1/2}(|\nabla \mathbb{H}_3|^2) S_h^{1/2}(|\mathcal{H}|^2) \leq \\ \leq M_B S_h(|\mathcal{H}|^2) \leq M_b \|\mathcal{H}\|_{0,\Omega}^2.$$

Заключительная оценка здесь следует из теоремы 7.35, с. 185. Поэтому

$$0 \leq \mathbf{b}_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) \leq M_b \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall \mathcal{H} \in V_h^2.$$

Из этих оценок и (8.31) следует, что условия  $A_1^h$  выполнены.

Пусть теперь  $V_h \ni \mathbb{H}_3 \Leftrightarrow \mathbb{H}_3 := (L_h(p))^{-1} \mathcal{C}_h \mathbb{H}$ . Тогда

$$\mathbf{b}_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) = S_h(\sigma |\mathcal{H}|^2) + S_h(\sigma \mathcal{H} \cdot \nabla \mathbb{H}_3).$$

Как было показано выше, второе слагаемое здесь неотрицательно. Поэтому ядро  $\mathbf{b}_h$  не зависит от  $p$  и  $\ker \mathcal{B}_h(p) = \ker \mathcal{B}_h(0)$  при каждом  $p \in \mathbb{R}_+$  (условие  $A_2^h$ ). Отметим, что поскольку  $\sigma = 0$  вне  $\Omega_i$  и  $\sigma = \sigma_0 > 0$  на  $\Omega_i$ , то

$$\ker \mathbf{b}_h = \{\mathcal{H} \in V_h^2 : S_e(|\mathcal{H}|^2) = 0, \quad e \subset \Omega_i\}. \quad (8.32)$$

Покажем, что  $\mathcal{A}_h(p) + \mathcal{B}_h(p) \geq m_{ab} I_h$  при  $p \geq 0$  (условие  $A_3^h$ ) при достаточно малом  $h$ ,  $m_{ab} > 0$ . Пусть  $\mathcal{H} \in V_h^2$ . По определению

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) &:= S_h \left( \varepsilon^{-1} |\operatorname{rot} \mathcal{H}|^2 + \varepsilon_\infty^{-1} |\operatorname{div} \mathcal{H}|^2 + p^2 \varepsilon_\infty^{-1} |\mathcal{H}|^2 \right) + \\ &+ \frac{2\pi}{\varepsilon_\infty} \sum_{n=-N}^N \mathbb{K}_n(Rp) |a_n(\mathcal{H})|^2 + 2\pi i \sigma_+ \sum_{n=-N}^N n a_n(\mathcal{H}) \times \overline{a_n(\mathcal{H})} + \varepsilon_+^{-1} I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}). \end{aligned}$$

Учтем здесь, что  $\varepsilon_\infty^{-1} = \sigma_+ + \varepsilon_+^{-1}$ ,  $\mathbb{K}_n(Rp) \geq |n|$ , а также оценку леммы 8.25. Тогда нетрудно видеть, что сумма второго и третьего слагаемых неотрицательна. Учтем также, что

$$\mathbf{b}_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) \geq S_h(\sigma |\mathcal{H}|^2), \quad \varepsilon^{-1} \geq \varepsilon_+^{-1}.$$

Тогда для всех  $p \geq 0$  получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_h &:= (\mathbf{a}_h + \mathbf{b}_h)(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) \geq \varepsilon_+^{-1} S_h \left( |\operatorname{rot} \mathcal{H}|^2 + |\operatorname{div} \mathcal{H}|^2 \right) + \\ &+ S_h(\sigma |\mathcal{H}|^2) + \varepsilon_+^{-1} I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}). \end{aligned} \quad (8.33)$$

Пусть  $E_h$  означает погрешность квадратуры  $S_h$ . Из (8.33) имеем

$$\mathfrak{T}_h \geq \varepsilon_+^{-1} \left( \int_{\Omega} (|\operatorname{rot} \mathcal{H}|^2 + |\operatorname{div} \mathcal{H}|^2) dx + I_\Gamma(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \right) + \int_{\Omega} \sigma |\mathcal{H}|^2 dx - \Psi,$$

где  $\Psi := \varepsilon_+^{-1} E_h(|\operatorname{rot} \mathcal{H}|^2 + |\operatorname{div} \mathcal{H}|^2) + E_h(\sigma |\mathcal{H}|^2)$ . Величина  $\Psi$  представляет собой сумму слагаемых, оценка которых следует из леммы 7.21, с. 191. С учетом (8.29) имеем

$$|\Psi| \leq c h^{2m} \|\mathcal{H}\|_{m,h}^2 \leq c_0 h^2 \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega}^2.$$

Используя определение формы  $I_\Gamma$  (см. (8.6)), получим

$$\mathfrak{T}_h \geq \varepsilon_+^{-1} \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega}^2 + \int_{\Omega} \sigma |\mathcal{H}|^2 dx - c_0 h^2 \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega}^2.$$

Здесь сумма первых двух слагаемых оценивается снизу величиной  $c \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega}^2$  (см. аналогичную оценку снизу в (7.29) на с. 170). Поэтому  $\mathfrak{T}_h \geq (c - c_0 h^2) \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega}^2$ . Выберем  $h_0$  так, чтобы  $m_{ab} := c - c_0 h_0^2 > 0$ . Тогда получим, что искомая оценка  $\mathfrak{T}_h \geq m_{ab} \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega}^2$  справедлива для всех  $h \leq h_0$ .

Перейдем к проверке условия  $A_4^h$ . Покажем, что отношение Рэлея  $\mathbf{a}_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) / \mathbf{b}_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H})$  возрастает по  $p$  при любом  $u \in \tilde{V}_h^2$  (на ортогональном дополнении  $\ker \mathcal{B}_h(0)$  до пространства  $V_{h, \mathcal{A}_h(p) + \mathcal{B}_h(p)}$ ).

Во-первых, отметим, что при фиксированном  $\mathcal{H} \in V_h^2$  функции  $p \rightarrow \mathbf{a}_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H})$  и  $p \rightarrow \mathbf{b}_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H})$  дифференцируемы на  $\mathbb{R}_+$ . Действительно,

$$\frac{d}{dp} \mathbf{a}_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) = \frac{2p}{\varepsilon_\infty} S_h(|\mathcal{H}|^2) + \frac{2\pi}{\varepsilon_\infty} \sum_{n=-N}^N \mathbb{K}'_n(Rp) |a_n(\mathcal{H})|^2.$$

Оба слагаемых здесь являются неотрицательными и оцениваются сверху величиной  $c \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega}^2$ ,  $c = c(p)$  (см. оценки (7.44), с. 185, и (8.20), с. 208). Поэтому

$$0 \leq \frac{d}{dp} \mathbf{a}_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) \leq \widetilde{M}_a(p) \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega}^2,$$

где функция  $\widetilde{M}_a$  является локально ограниченной на  $\mathbb{R}_+$ . Отметим, что если  $\mathcal{H} \in \tilde{V}_h^2$ , то найдется такой конечный элемент  $e \subset \Omega_i$ , что  $S_e(|\mathcal{H}|^2) > 0$  (см. (8.32)). Следовательно,

$$\frac{d}{dp} \mathbf{a}_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) > 0, \quad \mathcal{H} \in \tilde{V}_h^2. \quad (8.34)$$

Аналогичным образом устанавливается дифференцируемость функции  $p \rightarrow \ell_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H})$  на  $\mathbb{R}_+$  и получаются оценки

$$0 \leq \frac{d}{dp} \ell_h(p, H, H) \leq \widetilde{M}_\ell(p) \|H\|_{1,\Omega}^2, \quad H \in V_h, \quad p > 0. \quad (8.35)$$

Пусть  $V_h \ni H \Leftrightarrow L_h^{-1}(p) \mathcal{C}_h \mathbb{H}$ ,  $\mathbb{H} \Leftrightarrow \mathcal{H} \in V_h^2$ . Поскольку

$$\frac{d}{dp} L_h^{-1}(p) = -L_h^{-1}(p) \frac{d}{dp} L_h(p) L_h^{-1}(p),$$

(см., напр., [48, с. 46]), то из (8.35) следует, что

$$0 \leq -\frac{d}{dp} \mathbf{b}_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) = \frac{d}{dp} \ell_h(p, H, H) \leq \widetilde{M}_b(p) \|H\|_{1,\Omega}^2, \quad p > 0. \quad (8.36)$$

Из (8.34) и (8.36) следует, что отношение Рэлея  $\mathbf{a}_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}) / \mathbf{b}_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H})$  возрастает по  $p$  на пространстве  $\tilde{V}_h^2$ .

Проверим, наконец, условие  $A_5^h$ . Из дифференцируемости при фиксированном  $\mathcal{H} \in V_h^2$  функций  $p \rightarrow \mathbf{a}_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H})$  и  $p \rightarrow \mathbf{b}_h(p, \mathcal{H}, \mathcal{H})$  на  $\mathbb{R}_+$  следует, что матричные функции  $\mathcal{A}_h(p)$  и  $\mathcal{B}_h(p)$  дифференцируемы по  $p$  на  $\mathbb{R}_+$  (тем более они являются локально липшиц-непрерывными на  $\mathbb{R}_+$ ). Непрерывность в нуле этих функций устанавливается так же, как и непрерывность в нуле невозмущенных форм. Отсюда следует, что матричные функции  $\mathcal{A}_h(p)$  и  $\mathcal{B}_h(p)$  принадлежат множеству  $\mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}}_+, V_h)$  (условие  $A_5^h$ ).  $\square$

Пусть  $N_h^b := \dim(\text{Im } \mathcal{B}_h(0))$ . Из предыдущей леммы 8.31 и теоремы 6.29, с. 149, непосредственно следует

**Теорема 8.43.** *При достаточно малом  $h$  и  $p \in \overline{\mathbb{R}}_+$  задача (8.30) имеет конечное число (скажем  $n_h(p)$ ) собственных чисел  $\beta^{hK}(p)$  суммарной кратности  $N_h^b$  и соответствующих им собственных подпространств  $\mathcal{U}_h^K(p)$ ,  $V_{h, \mathcal{A}_h(p) + \mathcal{B}_h(p)} = \bigoplus_{K=1}^{n_h(p)} \mathcal{U}_h^K(p) \oplus \ker \mathcal{B}_h(0)$ . Кроме того, если  $\beta_i^h(p)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_h^b$ , есть собственные числа, занумерованные с учетом кратности, то функции  $p \rightarrow \beta_i^h(p)$  являются непрерывными в нуле, локально липшиц-непрерывными на  $\mathbb{R}_+$  и возрастающими.*

**Следствие 8.11.** *При каждом  $p > 0$  числа*

$$\beta^{hK}(p), \quad K = 1, \dots, n_h(p),$$

*образуют полный набор собственных чисел задачи  $(\mathcal{P}_h)$ . Им соответствуют конечномерные собственные подпространства*

$$\mathcal{U}_h^K(p) = \{(\mathcal{H}, \mathbf{H}_3) : \mathcal{H} \in \mathcal{U}_h^K(p), \mathbf{H}_3 = \beta^{hK}(p)T_h(p)\mathcal{H}\},$$

*где функция  $H = T_h(p)\mathcal{H} \in V_h$  является решением задачи*

$$\ell_h(p, H, H') = S_h(\sigma \mathcal{H} \cdot \nabla H') \quad \forall H' \in V_h.$$

## §5. Оценки точности

Исходная задача  $(\mathcal{P})$  и приближенная задача  $(\mathcal{P}_h)$  были сведены нами к эквивалентным системам  $(\mathcal{P}')$  и  $(\mathcal{P}'_h)$  соответственно. Напомним их:

$$(\mathcal{P}') \quad \mathcal{A}(p)\mathcal{H} = \beta^2 \mathcal{B}(p)\mathcal{H}, \quad \mathbf{H}_3 = \beta T(p)\mathcal{H},$$

$$(\mathcal{P}'_h) \quad \mathcal{A}_h(p)\mathbb{H} = \beta^{h2} \mathcal{B}_h(p)\mathbb{H}, \quad \mathbb{H}_3 = \beta^h T_h(p)\mathbb{H},$$

где  $T(p) := L^{-1}(p)\mathcal{C}$ ,  $T_h(p) = L_h(p)^{-1}\mathcal{C}_h$ .

Точность определения  $\beta$  и компоненты  $\mathcal{H}$  решения  $\mathbf{H} = (\mathcal{H}, \mathbf{H}_3)$  оценивается сравнением первых уравнений в этих системах, которые в терминах билинейных форм имеют следующий вид ( $\mathcal{H}_h \Leftrightarrow \mathbb{H}$ ):

$$(\tilde{\mathcal{P}}') \quad \mathbf{a}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}') = \beta^2 \mathbf{b}(p, \mathcal{H}, \mathcal{H}') \quad \forall \mathcal{H}' \in V^2,$$

$$(\tilde{\mathcal{P}}'_h) \quad \mathbf{a}_h(p, \mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h) = \beta^{h2} \mathbf{b}_h(p, \mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h) \quad \forall \mathcal{H}'_h \in V_h^2.$$

Точность определения третьей компоненты решения  $\mathbf{H}_3$  будет следовать из близости  $\beta$  и  $\beta^h$ , а также  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{H}_h$ .

При фиксированном  $p \geq 0$  задача  $(\tilde{\mathcal{P}}'_h)$  представляет собой схему Галеркина с возмущениями для задачи  $(\tilde{\mathcal{P}}')$ <sup>1)</sup>. Это позволяет нам воспользоваться оценками теоремы 6.30, с. 150, при оценке точности метода. Отметим, что возмущения форм  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  вызваны численным интегрированием и усечением бесконечного ряда.

Пусть  $\beta_i^2(p)$  и  $\beta_i^{h2}(p)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , — упорядоченные по возрастанию с учетом кратности собственные числа задачи  $(\tilde{\mathcal{P}}')$  и  $(\tilde{\mathcal{P}}'_h)$ , соответственно,  $\mathcal{H}_i(p)$  и  $\mathcal{H}_i^h(p)$  — отвечающие им собственные функции. Пусть далее  $\beta^K(p)$  имеет кратность  $r_K = r_K(p)$ ,  $K \geq 1$ ,

$$\beta^K(p) = \beta_k(p), \quad \beta_{k-1}(p) < \beta_k(p) = \dots = \beta_{k+r_K-1}(p) < \beta_{k+r_K}(p),$$

$$\mathcal{U}^K(p) := \text{span}\{\mathcal{H}_k(p), \dots, \mathcal{H}_{k+r_K-1}(p)\},$$

$$\mathcal{U}_h^K(p) := \text{span}\{\mathcal{H}_k^h(p), \dots, \mathcal{H}_{k+r_K-1}^h(p)\}.$$

Определим для каждого  $i \geq 1$  функцию  $\mathbf{H}_{3i}(p) \in V$  как решение задачи  $L(p)\mathbf{H}_{3i}(p) = \beta_i \mathcal{C}\mathcal{H}_i(p)$  и, соответственно,  $\mathbf{H}_{3i}^h(p) \in V_h$  — как решение уравнения  $\ell_h(p, \mathbf{H}_{3i}^h(p), v) = \beta_i^h S_h(\sigma \mathcal{H}_i^h(p) \cdot \nabla v) \quad \forall v \in V_h$ . Положим  $\mathbf{H}_i(p) = (\mathcal{H}_i(p), \mathbf{H}_{3i}(p))^T$ ,  $\mathbf{H}_i^h(p) = (\mathcal{H}_i^h(p), \mathbf{H}_{3i}^h(p))^T$ ,

$$\mathcal{U}^K(p) := \text{span}\{\mathbf{H}_k(p), \dots, \mathbf{H}_{k+r_K-1}(p)\},$$

$$\mathcal{U}_h^K(p) := \text{span}\{\mathbf{H}_k^h(p), \dots, \mathbf{H}_{k+r_K-1}^h(p)\}.$$

Пары  $(\beta^K(p), \mathcal{U}^K(p))$ ,  $K \geq 1$ , являются решениями задачи  $(\tilde{\mathcal{P}}')$ , тогда как пары  $(\beta^K(p), \mathcal{U}_h^K(p))$ ,  $K \geq 1$ , являются решениями задачи  $(\mathcal{P})$ ; числа  $\beta_i^h(p)$ ,  $k \leq i \leq k+r_K-1$ , рассматриваются как аппроксимации собственного числа  $\beta^K(p)$ , а пространства  $\mathcal{U}_h^K(p)$  и  $\mathcal{U}^K(p)$  —

<sup>1)</sup>При  $p = 0$  мы определяем критические числа.



как аппроксимации собственных подпространств  $\mathcal{U}^K(p)$  и  $\mathcal{U}^K(p)$ , соответственно.

Нашей первой задачей является оценка зависимости величин

$$|\beta^K(p) - \beta_i^h(p)|, \quad k \leq i \leq k + r_K - 1,$$

и раствора  $\Theta_{V^2}(\mathcal{U}^K(p), \mathcal{U}_h^K(p))$  от параметров  $h$  и  $N$  дискретной задачи  $(\mathcal{P}_h)$  (см. теорему 6.30).

Прежде чем воспользоваться теоремой 6.30, оценим необходимые нам величины возмущений форм  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . До конца главы будем предполагать, что  $K \geq 1$  и  $p \geq 0$  являются фиксированными,  $\varepsilon|_{\Omega_i} \in W_\infty^{2m}(\Omega_i)$ , а собственные функции  $\mathbf{H} = (\mathcal{H}, \mathcal{H}_3)$  обладают следующей гладкостью:

$$\mathbf{H}|_{\Omega_i} \in [H^{m+1}(\Omega_i)]^3, \quad \mathbf{H}|_{\Omega \setminus \Omega_i} \in [H^{m+1}(\Omega \setminus \Omega_i)]^3, \quad (8.37)$$

где  $m$  то же число, что и в определении пространства  $V_h$ . Будем использовать дополнительные обозначения

$$|\mathbf{H}|_j := |\mathbf{H}|_{j, \Omega_i} + |\mathbf{H}|_{j, \Omega \setminus \Omega_i}, \quad \|\mathbf{H}\|_j := \|\mathbf{H}\|_{j, \Omega_i} + \|\mathbf{H}\|_{j, \Omega \setminus \Omega_i}, \quad j \geq 0,$$

для функций из  $\mathbf{H} \in V^l$ ,  $l = 1, 2, 3$ .

Введем также обозначение  $\mathcal{A}^l(\Omega)$  для множества функций из  $V^l(\Omega)$ , гармонических или метагармонических в  $\Omega \setminus \bar{\Omega}_i$ . Отметим, что при всех  $K$  имеют место вложения  $\mathcal{U}^K(p) \subset \mathcal{A}^2(\Omega)$ ,  $\mathcal{U}^K(p) \subset \mathcal{A}^3(\Omega)$ .

**1. Оценки возмущений формы  $\mathbf{a}$ .** Прежде всего сделаем общее замечание об оценках погрешности квадратурных формул при вычислении интегралов, которые нам встретятся далее. Примерами таких погрешностей являются функционалы

$$E_h(\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathcal{H}_h \operatorname{rot} \mathcal{H}'_h), \quad E_h(\sigma \mathcal{H}_h \cdot \mathcal{H}'_h), \quad E_h(\sigma \nabla u_h \cdot \mathcal{H}'_h), \quad \dots$$

Все эти величины представляют собой билинейные формы на  $V_h^l \times V_h^k$  при некоторых  $k, l = 1, 2$ , и распадаются на сумму слагаемых, оценка которых получена в лемме 7.21, с. 191. Суммарная оценка имеет вид

$$|E_h(\dots)| \leq c h^{2m} \|\cdot\|_{m,h} \|\cdot\|_{m,h}.$$

Из нее часто выводятся другие оценки с использованием обратного неравенства  $\|\cdot\|_{m,h} \leq c h^{1-m} \|\cdot\|$ . Далее мы будем использовать подобные оценки без дополнительных комментариев.

Обозначим через  $\mathcal{P}_h = \mathcal{P}_h(p)$  ортопроектор в  $V_{\mathcal{A}(p)+\mathcal{B}(p)}$  на  $V_h^2$ . Из эквивалентности норм в  $V_{\mathcal{A}(p)+\mathcal{B}(p)}$ <sup>1)</sup> и в  $V^2$  следует, что проектор  $\mathcal{P}_h$  ограничен в  $V^2$  и

$$\|\mathcal{H} - \mathcal{P}_h \mathcal{H}\|_{1,\Omega} \leq c \inf_{\mathcal{H}_h \in V_h^2} \|\mathcal{H} - \mathcal{H}_h\|_{1,\Omega} \quad \forall \mathcal{H} \in V^2.$$

Если  $\mathcal{H} \in \mathcal{U}^K(p)$ , то так же, как и в скалярном случае, доказывается, что

$$\|\mathcal{H} - \mathcal{P}_h \mathcal{H}\|_{1,\Omega} \leq c h^j \|\mathcal{H}\|_{j+1}, \quad \|\mathcal{P}_h \mathcal{H}\|_{j,h} \leq c \|\mathcal{H}\|_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (8.38)$$

Будем использовать сокращение

$$(\mathbf{a} - \mathbf{a}_h)(p, \mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h) := \mathbf{a}(p, \mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h) - \mathbf{a}_h(p, \mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h),$$

а также обозначение

$$E_{\mathbf{a}}(\mathcal{H}_h) := \sup_{\mathcal{H}'_h \in V_h^2, \|\mathcal{H}'_h\|_{1,\Omega}=1} |(\mathbf{a} - \mathbf{a}_h)(p, \mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h)|, \quad \mathcal{H}_h \in V_h^2.$$

Аналогично определяется  $E_{\mathbf{b}}(\mathcal{H}_h)$ . Пусть  $\mathcal{T}(p) := (\mathcal{A}(p) + \mathcal{B}(p))^{-1} \mathcal{B}(p)$ ,

$$\epsilon_{hm} := h^m + (R_0/R)^N, \quad \epsilon_{h0} := \|(I - \mathcal{P}_h)\mathcal{T}(p)\| + h^2 + (R_0/R)^N.$$

Отметим, что  $\mathcal{T}(p)$  — компактный оператор.

**Теорема 8.44.** Пусть  $p \geq 0$ ,  $\mathcal{H}_h \in V_h$ ,  $\mathcal{H} \in \mathcal{U}^K(p)$ . Тогда

$$E_{\mathbf{a}}(\mathcal{P}_h \mathcal{T}(p) \mathcal{H}_h) \leq c \epsilon_{h0} \|\mathcal{H}_h\|_{1,\Omega}, \quad (8.39)$$

$$E_{\mathbf{a}}(\mathcal{P}_h \mathcal{H}) \leq c \epsilon_{hm} \|\mathcal{H}\|_{m+1}, \quad (8.40)$$

$$|(\mathbf{a} - \mathbf{a}_h)(p, \mathcal{P}_h \mathcal{H}, \mathcal{P}_h \mathcal{H})| \leq c \epsilon_{hm}^2 \|\mathcal{H}\|_{m+1}^2. \quad (8.41)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Имеем для любых  $\mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h \in V_h^2$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} - \mathbf{a}_h)(p, \mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h) &= \frac{2\pi}{\varepsilon_\infty} \sum_{|n| > N} \mathbb{K}_n(Rp) a_n(\mathcal{H}_h) \cdot \overline{a_n(\mathcal{H}'_h)} + \\ &+ E_h(\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathcal{H}_h \operatorname{rot} \mathcal{H}'_h + \varepsilon_\infty^{-1} \operatorname{div} \mathcal{H}_h \operatorname{div} \mathcal{H}'_h + p^2 \varepsilon_\infty^{-1} \mathcal{H}_h \cdot \mathcal{H}'_h) + \\ &+ \varepsilon_\infty^{-1} I_\Gamma(\mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h) - 2\pi i \sigma_+ \sum_{n=-N}^N n a_n(\mathcal{H}_h) \times \overline{a_n(\mathcal{H}'_h)} - \varepsilon_+^{-1} I_\Gamma(\mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h). \end{aligned}$$

<sup>1)</sup>Напомним, что  $\mathcal{A}(p) + \mathcal{B}(p) \geq m_{AB} I$  при любом  $p \geq 0$ .

Последние три слагаемых в этом представлении (обозначим их через  $\mathfrak{S}_h$ ) преобразуем следующим образом. Во-первых, учтем, что  $\varepsilon_\infty^{-1} - \varepsilon_+^{-1} =: \sigma_+$  и сгруппируем слагаемые с  $I_\Gamma$ . Далее воспользуемся представлением  $I_\Gamma$  через коэффициенты Фурье (лемма 8.25). В результате получим, что

$$\mathfrak{S}_h = 2\pi i \sigma_+ \sum_{|n| > N} n a_n(\mathcal{H}_h) \times \overline{a_n(\mathcal{H}'_h)}.$$

Поскольку  $|n| \leq \mathbb{K}_n(Rp)$ , то

$$|\mathfrak{S}_h| \leq 2\pi \sigma_+ \sum_{|n| > N} \mathbb{K}_n(Rp) |a_n(\mathcal{H}_h)| |a_n(\mathcal{H}'_h)|.$$

Оценим погрешность квадратуры. В результате получим

$$\begin{aligned} \Psi_h := |(\mathbf{a} - \mathbf{a}_h)(p, \mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h)| &\leq c h^{2m} \|\mathcal{H}_h\|_{m,h} \|\mathcal{H}'_h\|_{m,h} + \\ &+ c 2\pi \sum_{|n| > N} \mathbb{K}_n(Rp) |a_n(\mathcal{H}_h)| |a_n(\mathcal{H}'_h)|. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Введем обозначение

$$S_N(\mathcal{H}) := 2\pi \sum_{|n| > N} \mathbb{K}_n(Rp) |a_n(\mathcal{H})|^2, \quad \mathcal{H} \in V^2.$$

Полностью аналогично скалярному случаю доказывается (см. лемму 7.23), что если  $\mathcal{H} \in \mathcal{A}^2(\Omega)$ , то

$$S_N(\mathcal{P}_h \mathcal{H}) \leq c (\|\mathcal{H} - \mathcal{P}_h \mathcal{H}\|_{1,\Omega}^2 + (R_0/R)^{2N} \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega}^2). \quad (8.43)$$

Для гладких  $\mathcal{H}$  первое слагаемое справа оценивается согласно (8.38). Кроме того, для любого  $\mathcal{H} \in V^2$  справедлива оценка

$$S_N(\mathcal{H}) \leq 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{K}_n(Rp) |a_n(\mathcal{H})|^2 =: |\mathcal{H}|_{1/2,\Gamma}^2 \leq c \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega}^2. \quad (8.44)$$

С учетом неравенства Коши — Буняковского из (8.42) получим, что

$$\Psi_h \leq c h^{2m} \|\mathcal{H}_h\|_{m,h} \|\mathcal{H}'_h\|_{m,h} + c S_N^{1/2}(\mathcal{H}_h) S_N^{1/2}(\mathcal{H}'_h), \quad (8.45)$$

где  $\mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h \in V_h^2$ .

Выберем здесь  $\mathcal{H}_h = \mathcal{P}_h \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H} = \mathcal{T}(p) \mathcal{H}_h$ . Нетрудно проверяется, что  $\mathcal{H} \in \mathcal{A}^2(\Omega)$ . Ясно, что  $\|\mathcal{H}\|_{1,\Omega} \leq c \|\mathcal{H}_h\|_{1,\Omega}$ . Используя обратное неравенство и оценки (8.43), (8.44), получим

$$\begin{aligned} |(\mathbf{a} - \mathbf{a}_h)(p, \mathcal{P}_h \mathcal{H}, \mathcal{H}'_h)| &\leq c h^2 \|\mathcal{P}_h \mathcal{H}\|_{1,\Omega} \|\mathcal{H}'_h\|_{1,\Omega} + c S_N^{1/2}(\mathcal{P}_h \mathcal{H}) \|\mathcal{H}'_h\|_{1,\Omega} \leq \\ &\leq c (h^2 \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega} + \epsilon_{h0} \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega}) \|\mathcal{H}'_h\|_{1,\Omega} \leq c \epsilon_{h0} \|\mathcal{H}_h\|_{1,\Omega} \|\mathcal{H}'_h\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка (8.39).

Выберем теперь в (8.45)  $\mathcal{H}_h = \mathcal{P}_h \mathcal{H}$ , считая, что  $\mathcal{H} \in \mathcal{U}_k(p)$ . Тогда

$$\begin{aligned} |(\mathbf{a} - \mathbf{a}_h)(p, \mathcal{P}_h \mathcal{H}, \mathcal{H}'_h)| &\leq c h^{m+1} \|\mathcal{P}_h \mathcal{H}\|_{m,h} \|\mathcal{H}'_h\|_{1,\Omega} + \\ &+ c S_N^{1/2}(\mathcal{P}_h \mathcal{H}) \|\mathcal{H}'_h\|_{1,\Omega} \leq c \epsilon_{hm} \|\mathcal{H}\|_{m+1} \|\mathcal{H}'_h\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Здесь мы учли оценки (8.38). Отсюда следует оценка (8.40).

Наконец, полагая в (8.45)  $\mathcal{H}_h = \mathcal{H}'_h = \mathcal{P}_h \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H} \in \mathcal{U}_k(p)$ , аналогично получим заключительную оценку (8.41).  $\square$

**2. Оценки возмущений формы  $\mathbf{b}$ .** Прежде всего запишем величину  $\mathbf{b} - \mathbf{b}_h$  в удобном для оценок виде.

Пусть  $\mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h \in V_h^2$ ,  $\mathbb{H} \Leftrightarrow \mathcal{H}_h$ ,  $\mathbb{H}' \Leftrightarrow \mathcal{H}'_h$ . Определим по ним функцию  $u := L^{-1}(p) \mathcal{C} \mathcal{H}_h$  из  $V$ , а также  $u_h \in V_h$  с узловыми параметрами  $y = (L_h(p))^{-1} \mathcal{C} \mathbb{H}$ . Аналогично по  $\mathcal{H}'_h \in V_h^2$  определим функции  $u' \in V$ ,  $u'_h \in V_h$  и  $y'$ . Отметим, что <sup>1)</sup>

$$\ell(u, v) = f(v) := \int_{\Omega} \sigma \mathcal{H}_h \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in V, \quad (8.46)$$

$$\ell_h(u_h, v_h) = f_h(v) := S_h(\sigma \mathcal{H}_h \cdot \nabla v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (8.47)$$

Здесь  $\ell_h$  есть аппроксимация функционала  $\ell$ . Напомним, что

$$\ell(u, v) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla v + \frac{p^2}{\varepsilon_\infty} uv \right) dx + \frac{2\pi}{\varepsilon_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{K}_n(Rp) a_n(u) \overline{a_n(v)},$$

$$\ell_h(u, v) = S_h \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla v + \frac{p^2}{\varepsilon_\infty} uv \right) + \frac{2\pi}{\varepsilon_\infty} \sum_{n=-N}^N \mathbb{K}_n(Rp) a_n(u) \overline{a_n(v)}.$$

<sup>1)</sup>Для сокращения вместо  $\ell(p, u, v)$  используем обозначение  $\ell(u, v)$ , вместо  $\ell_h(p, u, v)$  пишем  $\ell_h(u, v)$ .

Положим  $\Psi_h := (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)(p, \mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h)$ . Тогда получим

$$\begin{aligned}\Psi_h &= E_h(\sigma \mathcal{H}_h \cdot \mathcal{H}'_h) + (L^{-1}(p) \mathcal{C} \mathcal{H}_h, \mathcal{C} \mathcal{H}'_h) - (L_h(p))^{-1} \mathcal{C}_h \mathbb{H} \cdot \mathcal{C}_h \mathbb{H}' = \\ &= E_h(\sigma \mathcal{H}_h \cdot \mathcal{H}'_h) + (L(p)u, u') - L_h(p)y \cdot y'.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$(\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)(p, \mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h) = E_h(\sigma \mathcal{H}_h \cdot \mathcal{H}'_h) + \ell(u, u') - \ell_h(u_h, u'_h). \quad (8.48)$$

Первое слагаемое здесь оценивается сверху стандартным образом:

$$|E_h(\sigma \mathcal{H}_h \cdot \mathcal{H}'_h)| \leq c h^{2m} \|\mathcal{H}_h\|_{m,h} \|\mathcal{H}'_h\|_{m,h}.$$

Оценки требует величина  $\mathcal{L}_h := \ell(u, u') - \ell_h(u_h, u'_h)$  при том или ином выборе функций  $\mathcal{H}_h$  и  $\mathcal{H}'_h$ .

Обратимся к задачам (8.46) и (8.47). Видим, что задача (8.47) является аппроксимацией по методу конечных элементов с численным интегрированием нелокальной эллиптической краевой задачи (8.46). При  $p > 0$  формы  $\ell$  и  $\ell_h$  равномерно по  $h$  и  $N$  положительно определены и ограничены в  $V$  (см. следствие 8.7, с. 209, и лемму 8.31, с. 223, соответственно). Функционалы  $f$  и  $f_h$  также ограничены в  $V$ : ясно, что  $|f(v)| \leq \sigma_+ \|\mathcal{H}_h\|_{0,\Omega} |v|_{1,\Omega}$ ,

$$|f_h(v)| \leq \sigma_+ S_h(|\mathcal{H}_h|^2) S_h(|\nabla v_h|^2) \leq c \|\mathcal{H}_h\|_{0,\Omega} |v|_{1,\Omega}.$$

Последняя оценка следует из теоремы 7.35, с. 185, и ее следствия. Поэтому задачи (8.46) и (8.47) однозначно разрешимы при  $p > 0$  и

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq c \|\mathcal{H}_h\|_{0,\Omega}, \quad \|u_h\|_{1,\Omega} \leq c \|\mathcal{H}_h\|_{0,\Omega}. \quad (8.49)$$

При  $p = 0$  квадратичные формы  $\ell(u, u)$  и  $\ell_h(u_h, u_h)$  эквивалентны  $|u|_{1,\Omega}^2$  и  $|u_h|_{1,\Omega}^2$ , соответственно, и обе имеют общее ядро  $\ker \ell$ , состоящее из постоянных в  $\Omega$  функций. Поскольку функционалы  $f$  и  $f_h$  обращаются в нуль на таких функциях, то задачи (8.46) и (8.47) имеют единственные решения с точностью до постоянных в  $\Omega$  функций. При оценке  $\mathcal{L}_h$  эти постоянные не играют никакой роли. Поэтому далее будем считать, что при  $p = 0$  решения этих задач ищутся в фактор-пространствах  $V := V / \ker \ell$  и  $V_h := V_h / \ker \ell$ , соответственно. Поскольку полунорма  $|\cdot|_{1,\Omega}$  и норма  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$  на этих пространствах являются эквивалентными, то отсюда следует, что оценки (8.49) имеют место и при  $p = 0$ . С учетом сделанных замечаний случаи  $p = 0$

и  $p > 0$  далее рассматриваются однотипно. Отметим, что  $u'$  и  $u'_h$  оцениваются аналогично:

$$\|u'\|_{1,\Omega} \leq c \|\mathcal{H}'_h\|_{0,\Omega}, \quad \|u'_h\|_{1,\Omega} \leq c \|\mathcal{H}'_h\|_{0,\Omega}.$$

Заметим также, что  $u \in \mathcal{A}(\Omega)$ .

Пусть  $P_h$  есть ортопроектор в  $V_{L(p)}$  на  $V_h$ ,  $T(p) := L^{-1}(p)C^{-1}$ ,

$$\tilde{\epsilon}_{h0} := \|(I - P_h)\mathcal{T}(p)\| + \|(I - P_h)T(p)\| + h^2 + (R_0/R)^N.$$

Отметим, что  $T(p)$  (как и  $\mathcal{T}(p)$ ) является компактным оператором.

**Теорема 8.45.** Пусть  $\mathcal{H}_h \in V_h^2$ ,  $\mathbb{H} := (\mathcal{H}, \mathbb{H}_3) \in U^K(p)$ . Тогда

$$E_b(\mathcal{H}_h) \leq c \tilde{\epsilon}_{h0} \|\mathcal{H}_h\|_{1,\Omega}, \quad (8.50)$$

$$E_b(\mathcal{P}_h \mathcal{H}) \leq c \epsilon_{hm} \|\mathbb{H}\|_m, \quad (8.51)$$

$$|(\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)(p, \mathcal{P}_h \mathcal{H}, \mathcal{P}_h \mathcal{H})| \leq c \epsilon_{hm}^2 \|\mathbb{H}\|_m^2. \quad (8.52)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем оценку (8.50). По функциям  $\mathcal{H}_h$  и  $\mathcal{H}'_h$  из  $V_h^2$ , как и выше, определим  $u$  и  $u_h$ . Отталкиваясь от представления (8.48), оценим  $\mathcal{L}_h$ . Для этого предварительно оценим  $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$ . Пусть  $e_h := u_h - P_h u$ . Получим

$$\begin{aligned}c \|e_h\|_{1,\Omega}^2 &\leq \ell_h(e_h, e_h) = f_h(e_h) - \ell_h(P_h u, e_h) = f_h(e_h) - f(e_h) + \\ &+ \ell(P_h u, e_h) - \ell_h(P_h u, e_h) \leq -E_h(\sigma \mathcal{H}_h \cdot \nabla e_h) + E_\ell(P_h u) \|e_h\|_{1,\Omega} \leq \\ &\leq c h^{2m} \|\mathcal{H}_h\|_{m,h} \|e_h\|_{m,h} + E_\ell(P_h u) \|e_h\|_{1,\Omega} \leq \\ &\leq (c h^2 \|\mathcal{H}_h\|_{1,\Omega} + E_\ell(P_h u)) \|e_h\|_{1,\Omega}.\end{aligned}$$

Отсюда следует оценка  $\|e_h\|_{1,\Omega}$ . Теперь из неравенства треугольника  $\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \|u - P_h u\|_{1,\Omega} + \|e_h\|_{1,\Omega}$  имеем

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \|u - P_h u\|_{1,\Omega} + c h^2 \|\mathcal{H}_h\|_{1,\Omega} + E_\ell(P_h u). \quad (8.53)$$

Напомним, что

$$E_\ell(u_h) = \sup_{v_h \in V_h, \|v_h\|_{1,\Omega}=1} |(\ell - \ell_h)(u_h, v_h)|, \quad u_h \in V_h,$$

<sup>1)</sup>По определению  $u = T(p)\mathcal{H}_h$ ,  $u' = T(p)\mathcal{H}'_h$ .

и, как нетрудно видеть,

$$(\ell - \ell_h)(u_h, v_h) = E_h \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \frac{p^2}{\varepsilon_\infty} u_h v_h \right) + \\ + \frac{2\pi}{\varepsilon_\infty} \sum_{|l| > N} \mathbb{K}_{|l|}(Rp) a_l(u_h) \overline{a_l(v_h)}.$$

Аналогично скалярному случаю (см. доказательство оценки (7.57), с. 195)

$$|(\ell - \ell_h)(P_h u, v_h)| \leq c h^{2m} \|P_h u\|_{m,h} \|v_h\|_{m,h} + S_N^{1/2}(P_h u) \|v_h\|_{1,\Omega} \leq \\ \leq (c h^2 \|P_h u\|_{1,\Omega} + \|u - P_h u\|_{1,\Omega} + (R_0/R)^N \|u\|_{1,\Omega}) \|v_h\|_{1,\Omega}.$$

Отсюда следует оценка  $E_\ell(P_h u)$ . Наконец, из (8.53) получим

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq c (h^2 \|P_h u\|_{1,\Omega} + h^2 \|\mathcal{H}_h\|_{1,\Omega} + \\ + \|u - P_h u\|_{1,\Omega} + (R_0/R)^N \|u\|_{1,\Omega}).$$

Поскольку

$$\|u - P_h u\|_{1,\Omega} \leq \|(I - P_h)T(p)\| \|\mathcal{H}_h\|_{1,\Omega}, \quad \|P_h u\|_{1,\Omega} \leq c \|u\|_{1,\Omega} \leq c \|\mathcal{H}_h\|_{1,\Omega},$$

то окончательно имеем  $\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq c \tilde{\epsilon}_{h0} \|\mathcal{H}_h\|_{1,\Omega}$ .

Используем представление

$$\mathcal{L}_h := \ell(u, u') - \ell_h(u_h, u'_h) = [\ell(u - P_h u, u') - \ell_h(u_h - P_h u, u'_h)] + \\ + [\ell(u', P_h u) - \ell_h(u'_h, P_h u)] =: \Psi_1 + \Psi_2.$$

Из ограниченности форм и оценки  $e_h$  следует оценка  $\Psi_1$ :

$$|\Psi_1| \leq c (\|u - P_h u\|_{1,\Omega} + \|u_h - P_h u\|_{1,\Omega}) \|u'_h\|_{1,\Omega} \leq c \tilde{\epsilon}_{h0} \|\mathcal{H}_h\|_{1,\Omega} \|\mathcal{H}'_h\|_{1,\Omega}.$$

Из тождеств (8.46), (8.47) следует, что  $\Psi_2 = E_h(\sigma \mathcal{H}'_h \cdot \nabla P_h u)$ . Поэтому

$$|\Psi_2| \leq c h^2 \|\mathcal{H}_h\|_{1,\Omega} \|\mathcal{H}'_h\|_{1,\Omega}.$$

Окончательно имеем

$$|(\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)(p, \mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h)| \leq c h^{2m} \|\mathcal{H}_h\|_{m,h} \|\mathcal{H}'_h\|_{m,h} + |\mathcal{L}_h| \leq \\ \leq c \tilde{\epsilon}_{h0} \|\mathcal{H}_h\|_{1,\Omega} \|\mathcal{H}'_h\|_{1,\Omega}.$$

Отсюда следует искомая оценка (8.50).

Перейдем к доказательству оценки (8.51). Пусть  $\mathcal{H} \in \mathcal{U}^K(p)$ , определим  $\mathbf{u} := T(p)\mathcal{H}$ . Функция  $\mathbf{u} \in V$  есть решение задачи

$$\ell(\mathbf{u}, v) = \int_{\Omega} \sigma \mathcal{H} \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in V.$$

Отметим, что  $\mathbf{u} = \beta^{-1} \mathbf{H}_3$ , где  $\mathbf{H}_3$  — третья компонента собственной функции  $\mathbf{H} := (\mathcal{H}, \mathbf{H}_3) \in \mathbf{U}^K(p)$ . По предположению она является достаточно гладкой (см. (8.37)).

Определим теперь  $u$  и  $u_h$  по  $\mathcal{H}_h = \mathcal{P}_h \mathcal{H}$  как и ранее, сохранив определение  $u'$  и  $u'_h$  по произвольной  $\mathcal{H}'_h$ . Сравним между собой функции  $\mathbf{u}$ ,  $u$  и  $u_h$ . Имеем (см. (8.38))

$$\|\mathbf{u} - u\|_{1,\Omega} = \|T(p)(\mathcal{H} - \mathcal{P}_h \mathcal{H})\|_{1,\Omega} \leq c \|\mathcal{H} - \mathcal{P}_h \mathcal{H}\|_{1,\Omega} \leq c h^m \|\mathcal{H}\|_{m+1}.$$

Следовательно,

$$\|u - P_h u\|_{1,\Omega} \leq \|u - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{u} - P_h u\|_{1,\Omega} \leq c h^m \|\mathbf{H}\|_{m+1}.$$

Оценим  $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$ . Полагая  $e_h := u_h - P_h u$ , будем иметь

$$c \|e_h\|_{1,\Omega}^2 \leq \ell_h(e_h, e_h) = f(e_h) - \ell_h(P_h u, e_h) = E_h(\sigma \mathcal{P}_h \mathcal{H} \cdot \nabla e_h) + \\ + \ell(P_h u, e_h) - \ell_h(P_h u, e_h) \leq (c h^{m+1} \|\mathcal{P}_h \mathcal{H}\|_{m,h} + E_\ell(P_h u)) \|e_h\|_{1,\Omega}.$$

Оценка  $E_\ell(P_h u) \leq c \epsilon_{hm} \|\mathbf{u}\|_{m+1}$  доказывается так же, как и в скалярном случае (см. доказательство оценки (7.57), с. 195). Отсюда и (8.38) имеем  $\|e_h\|_{1,\Omega} \leq c \epsilon_{hm} \|\mathbf{H}\|_m$ .

Таким образом,

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \|u - P_h u\|_{1,\Omega} + \|e_h\|_{1,\Omega} \leq c \epsilon_{hm} \|\mathbf{H}\|_{m+1}, \\ \|u_h - P_h u\|_{1,\Omega} \leq \|u_h - \mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{u} - P_h u\|_{1,\Omega} \leq c \epsilon_{hm} \|\mathbf{H}\|_{m+1}.$$

Окончательно получаем, что

$$\|u_h - P_h u\|_{1,\Omega}, \quad \|\mathbf{u} - u_h\|_{1,\Omega}, \quad \|u - P_h u\|_{1,\Omega}, \quad \|\mathbf{u} - u\|_{1,\Omega} \leq \epsilon_h, \quad (8.54)$$

где  $\epsilon_h := c \epsilon_{hm} \|\mathbf{H}\|_{m+1}$ . Непосредственно проверяется, что

$$(\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)(p, \mathcal{P}_h \mathcal{H}, \mathcal{H}'_h) = E_h(\sigma \mathcal{P}_h \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}'_h) + \ell(u, u') - \ell_h(u_h, u'_h) = \\ = [E_h(\sigma \mathcal{P}_h \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}'_h) + \ell(u - P_h u, u') - \ell_h(u_h - P_h u, u'_h)] + \\ + [\ell(P_h u, u') - \ell_h(P_h u, u'_h)] =: \Psi_3 + \Psi_4. \quad (8.55)$$

Ясно, что  $\Psi_4 = E_h(\sigma \mathcal{H}'_h \cdot \nabla P_h \mathbf{u})$ . С учетом (8.54) имеем

$$\begin{aligned} |\Psi_3| &\leq c(h^{m+1} \|\mathcal{P}_h \mathcal{H}\|_{m,h} + \epsilon_h) \|\mathcal{H}'_h\|_{1,\Omega} \leq c \epsilon_{hm} \|\mathbf{H}\|_{m+1} \|\mathcal{H}'_h\|_{1,\Omega}, \\ |\Psi_4| &\leq c h^{m+1} \|P_h \mathbf{u}\|_{m,h} \|\mathcal{H}'_h\|_{1,\Omega} \leq c h^{m+1} \|\mathbf{H}\|_m \|\mathcal{H}'_h\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Из этих оценок и (8.55) вытекает вторая искомая оценка (8.51):

$$E_b(\mathcal{P}_h \mathcal{H}) \leq c \epsilon_{hm} \|\mathbf{H}\|_{m+1}.$$

Наконец, сохраняя для  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}_h$  данное выше определение, положим  $\mathcal{H}'_h = \mathcal{P}_h \mathcal{H}$ ,  $\mathbf{u}' = \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}'_h = \mathbf{u}_h$ . Будем иметь

$$\begin{aligned} (\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)(p, \mathcal{P}_h \mathcal{H}, \mathcal{P}_h \mathcal{H}) &= E_h(\sigma \mathcal{P}_h \mathcal{H} \cdot \mathcal{P}_h \mathcal{H}) + \ell(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \ell_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = \\ &= [E_h(\sigma \mathcal{P}_h \mathcal{H} \cdot \mathcal{P}_h \mathcal{H}) + \ell(\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}, \mathbf{u} - P_h \mathbf{u}) - \ell_h(\mathbf{u}_h - P_h \mathbf{u}, \mathbf{u}_h - P_h \mathbf{u})] + \\ &\quad + 2[\ell(\mathbf{u}, P_h \mathbf{u}) - \ell_h(\mathbf{u}_h, P_h \mathbf{u})] - [\ell(P_h \mathbf{u}, P_h \mathbf{u}) - \ell_h(P_h \mathbf{u}, P_h \mathbf{u})]. \end{aligned}$$

Оценивая, как и выше, слагаемые в правой части, получим заключительную оценку (8.52).  $\square$

**3. Оценки точности приближенных решений.** Используя полученные выше оценки возмущений форм  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , оценим предварительно точность определения пары  $(\beta^K(p), \mathcal{U}^K(p))$ ,  $p \geq 0$ . Положим

$$\begin{aligned} \Psi_h(\mathcal{H}_h) &:= E_b(\mathcal{H}_h) + E_b(\mathcal{P}_h \mathcal{T}(p) \mathcal{H}_h) + E_a(\mathcal{P}_h \mathcal{T}(p) \mathcal{H}_h), \\ \epsilon_h(\mathcal{H}) &:= \inf_{\mathcal{H}_h \in V_h^2} \|\mathcal{H} - \mathcal{H}_h\| + E_a(\mathcal{P}_h \mathcal{H}) + E_b(\mathcal{P}_h \mathcal{H}), \\ \Sigma_h(\mathcal{H}_h) &:= |(\mathbf{a} - \mathbf{a}_h)(p, \mathcal{H}_h, \mathcal{H}_h)| + |(\mathbf{b} - \mathbf{b}_h)(p, \mathcal{H}_h, \mathcal{H}_h)|, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{H} \in V^2$ ,  $\mathcal{H}_h \in V_h^2$ .

**Теорема 8.46.** Пусть  $p \geq 0$ ,  $\varepsilon|_{\Omega_i} \in W_\infty^{2m}(\Omega_i)$  и выполнены условия гладкости (8.37). Тогда при достаточно малых  $h$  и

$$N \geq c_0 \ln(1/h), \quad c_0 = \frac{m}{\ln(R/R_0)},$$

имеют место оценки

$$\Theta_{V^2}(\mathcal{U}^K(p), \mathcal{U}_h^K(p)) \leq c h^m, \quad |\beta^K(p) - \beta_i^h(p)| \leq c h^{2m},$$

где  $K \geq 1$ ,  $i = k, \dots, k + r_K(p) - 1$ ,  $c = c(K, p)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Как отмечалось во введении к данному параграфу, требуемые оценки точности следуют из теоремы 6.30, с. 150.

Проверим, что условия этой теоремы выполнены. Условие  $(H_1)$  означает, что

$$\inf_{\mathcal{H}_h \in V_h^2} \|\mathcal{H} - \mathcal{H}_h\| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Оно выполнено по определению пространства  $V_h^2$ . Также выполнены условия  $A_1$ – $A_5$  и  $A_1^h$ – $A_5^h$  (см. леммы 8.30 и 8.31, соответственно).

Оценим  $\Psi_h(\mathcal{H}_h)$ . В силу ограничения на число  $N$  легко видеть, что  $(R_0/R)^N \leq h^m$ . Из оценок (8.39), (8.50) и ограниченности оператора  $\mathcal{P}_h \mathcal{T}(p) : V_h^2 \rightarrow V_h^2$  следует, что

$$\begin{aligned} \Psi_h(\mathcal{H}_h) &\leq c(h^2 + \tilde{\epsilon}_{h0} + \epsilon_{h0}) \|\mathcal{H}_h\|_{1,\Omega} \leq \\ &\leq c(h + \|(I - \mathcal{P}_h)\mathcal{T}(p)\| + \|(I - P_h)\mathcal{T}(p)\|) \|\mathcal{H}_h\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

В силу условия  $(H_1)$  из компактности оператора  $\mathcal{T}(p)$  следует, что  $\|(I - \mathcal{P}_h)\mathcal{T}(p)\| \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$  (см., напр., [56, Лемма 15.4, с. 202]). Аналогично  $\|(I - P_h)\mathcal{T}(p)\| \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Поэтому

$$\sup_{\mathcal{H}_h \in V_h^2, \|\mathcal{H}_h\|_{1,\Omega}=1} \Psi_h(\mathcal{H}_h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

что означает выполнение условия  $A_6^h$ . Наконец, из оценок (8.40), (8.51) имеем

$$\epsilon_h(\mathcal{H}) \leq c h^m \|\mathbf{H}\|_{m+1}, \quad \mathbf{H} \in \mathcal{U}^K(p).$$

Поскольку  $\mathbf{H} = (\mathcal{H}, \mathbf{H}_3)$ ,  $\mathbf{H}_3 = \beta^K(p) \mathcal{T}(p) \mathcal{H}$ , а пространство  $\mathcal{U}^K(p)$  является конечномерным, то отсюда следует, что

$$\max_{\mathcal{H} \in \mathcal{U}^K(p), \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega}=1} \epsilon_h(\mathcal{H}) \leq c h^m, \quad (8.56)$$

т. е. выполнено заключительное условие теоремы. Поэтому

$$\begin{aligned} \Theta_{V^2}(\mathcal{U}^K(p), \mathcal{U}_h^K(p)) &\leq c \max_{\mathcal{H} \in \mathcal{U}^K(p), \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega}=1} \epsilon_h(\mathcal{H}), \\ |\beta^{K^2}(p) - \beta_i^{h^2}(p)| &\leq c \max_{\mathcal{H} \in \mathcal{U}^K(p), \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega}=1} (\epsilon_h^2(\mathcal{H}) + \Sigma_h(\mathcal{P}_h \mathcal{H})). \end{aligned}$$

Поскольку из (8.41), (8.51) вытекает, что  $\Sigma_h(\mathcal{P}_h \mathcal{H}) \leq c h^{2m} \|\mathbf{H}\|_{m+1}$ , то из (8.56) получим

$$\Theta_{V^2}(\mathcal{U}^K(p), \mathcal{U}_h^K(p)) \leq c h^m, \quad |\beta^{K^2}(p) - \beta_i^{h^2}(p)| \leq c h^{2m}. \quad \square$$

**Следствие 8.12.** При  $p \in \mathbb{R}_+$  справедлива оценка

$$\Theta_{V^3}(\mathcal{U}^K(p), \mathcal{U}_h^K(p)) \leq c h^m.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Элементы пространства  $\mathcal{U}^K(p)$  будем обозначать через  $\mathbf{H} := (\mathcal{H}, \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} := \beta^K T(p) \mathcal{H}$  (см. следствие 8.10), элементы пространства  $\mathcal{U}_h^K(p)$  — через  $\mathbf{H}_h := (\mathcal{H}_h, v_h)$ . По элементу  $\mathcal{H}$  определим функцию  $u_h \in V_h$  — приближение  $\mathbf{u}$  как решение конечномерной задачи  $\ell_h(u_h, v_h) = \beta^K S_h(\sigma \mathcal{P}_h \mathcal{H} \cdot \nabla v_h) \quad \forall v_h \in V_h$ . Согласно (8.54) имеем  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \leq c h^m \|\mathbf{H}\|_{m+1} =: \delta_h(\mathcal{H})$ , так как  $\epsilon_{hm} \leq c h^m$ . По определению раствора получим

$$\begin{aligned} \Theta_{V^3}^2(\mathcal{U}^K(p), \mathcal{U}_h^K(p)) &:= \sup_{\mathbf{H} \in \mathcal{U}^K(p), \|\mathbf{H}\|_{1,\Omega}=1} \inf_{\mathbf{H}_h \in \mathcal{U}_h^K(p)} \|\mathbf{H} - \mathbf{H}_h\|_{1,\Omega}^2 = \\ &= \sup_{\mathbf{H} \in \mathcal{U}^K(p), \|\mathbf{H}\|_{1,\Omega}=1} \inf_{\mathbf{H}_h \in \mathcal{U}_h^K(p)} (\|\mathcal{H} - \mathcal{H}_h\|_{1,\Omega}^2 + \|\mathbf{u} - v_h\|_{1,\Omega}^2) \leq \\ &\leq \sup_{\mathbf{H} \in \mathcal{U}^K(p), \|\mathbf{H}\|_{1,\Omega}=1} \inf_{\mathbf{H}_h \in \mathcal{U}_h^K(p)} (\|\mathcal{H} - \mathcal{H}_h\|_{1,\Omega}^2 + \|\mathbf{u} - u_h\|_{1,\Omega}^2) \leq \\ &\leq \sup_{\mathcal{H} \in \mathcal{U}^K(p), \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega} \leq 1} \inf_{\mathcal{H}_h \in \mathcal{U}_h^K(p)} (\|\mathcal{H} - \mathcal{H}_h\|_{1,\Omega}^2 + \delta_h^2(\mathcal{H})) \leq \\ &\leq \Theta_{V^2}^2(\mathcal{U}^K(p), \mathcal{U}_h^K(p)) + \sup_{\mathcal{H} \in \mathcal{U}^K(p), \|\mathcal{H}\|_{1,\Omega} \leq 1} \delta_h^2(\mathcal{H}) \leq c h^{2m}. \quad \square \end{aligned}$$

## ГЛАВА 9

### РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Эта глава посвящена описанию результатов различных вычислительных экспериментов, целью которых является практическая оценка точности предлагаемых методов. В вычислениях были использованы простейшая схема МКЭ ( $m = 1$  в определении пространства конечных элементов  $V_h$ ) и квадратурная формула с одним узлом в центре тяжести конечного элемента.

#### § 1. Некоторые аспекты программной реализации

Дискретная задача в скалярном случае формулируется следующим образом: при каждом  $p \in \mathbb{R}_+$  найти  $\beta^h \in \mathbb{R}_+$  и  $y \in \mathbb{R}^{N_h} \setminus \{0\}$  такие, что

$$A_h(p)y = \beta^{h2} B_h y, \quad (9.1)$$

где  $A_h(p) = \{a_h(p, \varphi_j, \varphi_i)\}_{i,j=1}^{N_h}$ ,  $B_h = \{b_h(\varphi_j, \varphi_i)\}_{i,j=1}^{N_h}$ , функции  $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_h}$  образуют базис Лагранжа в  $V_h$ ,

$$\begin{aligned} a_h(p, u, v) &= S_h(\nabla u \cdot \nabla v + p^2 \sigma uv) + 2\pi \sum_{n=-N}^N \mathbb{K}_n(pR) a_n(u) \overline{a_n(v)}, \\ b_h(u, v) &= S_h((\sigma - 1) uv). \end{aligned}$$

Представим матрицу  $A_h(p)$  в виде суммы матриц  $A_{0h}(p)$  и  $S_h^N(p)$ , где

$$S_h^N(p) = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^{N_h}, \quad s_{ij} = 2\pi \sum_{n=-N}^N \mathbb{K}_n(pR) a_n(\varphi_j) \overline{a_n(\varphi_i)}.$$

Отметим, что матрицы  $A_{0h}(p)$  и  $B_h$  являются обычными для метода конечных элементов. Их вычисление осуществляется известным алгоритмом сборки, который сводится к однотипным поэлементным вычислениям. Укажем способ вычисления матрицы  $S_h^N(p)$ .

Пусть в результате триангуляции области  $\Omega$  ее граница  $\Gamma$  разбита точками  $\phi_i$  на  $n_\Gamma$  равных частей длины  $h = 2\pi/n_\Gamma$ . Будем считать также, что граничные точки последовательно имеют номера от 1 до  $n_\Gamma$ , внутренние — от  $n_\Gamma + 1$  до  $N_h$ . Поскольку  $\varphi_i$  при  $n_\Gamma + 1 \leq i \leq N_h$  равны нулю на  $\Gamma$ , то матрица  $S_h^N(p)$  имеет следующий вид:

$$S_h^N(p) = \begin{bmatrix} S(p) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S(p) = \{s_{kl}\}_{k,l=1}^{n_\Gamma}.$$

По определению пространства  $V_h$  функции  $\varphi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_\Gamma$ , равны нулю на  $\Gamma$  вне отрезка  $[\phi_{k-1}, \phi_{k+1}]$  и

$$\varphi_k|_\Gamma = \begin{cases} (\varphi - \phi_{k-1})/h, & \varphi \in [\phi_{k-1}, \phi_k], \\ (\phi_{k+1} - \varphi)/h, & \varphi \in [\phi_k, \phi_{k+1}]. \end{cases}$$

Простые вычисления приводят к следующей формуле:

$$a_n(\varphi_k) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_k|_\Gamma e^{-in\varphi} d\varphi = d_n e^{-in\phi_k}, \quad d_n = \frac{h}{2\pi} \left( \frac{\sin(hn/2)}{hn/2} \right)^2.$$

Учтем, что  $a_n(\varphi_k) = \overline{a_{-n}(\varphi_k)}$ . Получим<sup>1)</sup>

$$s_{kl} = 4\pi \sum_{n=0}^N ' d_n^2 \mathbb{K}_n(pR) (\cos(n\phi_l) \cos(n\phi_k) + \sin(n\phi_l) \sin(n\phi_k)).$$

Введем в рассмотрение прямоугольные матрицы  $Q_c$  и  $Q_s$  размерности  $n_\Gamma \times (N+1)$  с элементами  $\cos(n\phi_l)$  и  $\sin(n\phi_l)$ , соответственно, а также диагональную матрицу

$$D(p) = 4\pi \text{diag}(0.5d_0^2 \mathbb{K}_0(pR), d_1^2 \mathbb{K}_1(pR), \dots, d_N^2 \mathbb{K}_N(pR)).$$

Тогда, очевидно, справедлива формула

$$S(p) = Q_c D(p) Q_c^T + Q_s D(p) Q_s^T.$$

Матрицы  $Q_c$  и  $Q_s$  вычисляются один раз, и при новом значении  $p$  необходимо вычислять только матрицу  $D(p)$ . Следовательно, для вычисления  $S(p)$  при данном  $p$  требуется порядка  $O(n_\Gamma N^2)$  арифметических операций. Выразим это число в терминах  $h$ . В силу регулярности

<sup>1)</sup>В сумме  $\sum ' a_n$  слагаемое  $a_0$  умножается на 0.5.

триангуляции  $n_\Gamma = O(h^{-1})$ ; из оценок точности метода следует, что достаточно выбрать  $N = O(\ln(1/h))$ . Таким образом, для вычисления  $S(p)$  при данном  $p$  требуется порядка  $O(h^{-1} \ln^2(1/h))$  арифметических операций, тогда как для вычисления матриц  $A_{0h}(p)$  и  $B_h$  требуется порядка  $O(h^{-2})$  операций. Эти оценки полностью переносятся и на векторный случай.

Далее мы приведем результаты расчетов конкретных волноводов, характеризующихся различной формой поперечного сечения  $\Omega_i$  и постоянной проницаемостью  $\varepsilon^1$ . Для каждого волновода мы приведем графики дисперсионных кривых, а также исследуем точность вычисления собственных чисел  $\beta$  в зависимости от расчетных параметров  $h$  и  $N$ . Мы приводим результаты вычислений, относящиеся лишь к более сложному для вычислений векторному случаю. В скалярном случае результаты расчетов оказались вполне аналогичными.

Опишем алгоритм определения дисперсионных кривых. Напомним, что исходная задача состоит в определении кривых  $\beta = \beta(k)$  и соответствующих собственных функций  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(k)$ , зависящих от волнового числа  $k$  ( $k$  пропорционально частоте электромагнитных колебаний  $\omega$ ). Предположим, что нас интересуют все дисперсионные кривые и соответствующие им собственные волны в интервале частот  $[0, \omega_0]$ , т. е. при  $k \in [0, k_0]$ . Мы знаем, что дисперсионные кривые лежат в области

$$\Lambda_0 := \{(\beta, k) : \varepsilon_\infty^{1/2} k \leq \beta \leq \varepsilon_+^{1/2} k, k \in [0, k_0]\}.$$

С использованием предлагаемого нами метода эта задача решается следующим образом. Переформулируем задачу в терминах параметров  $(\beta, p)$ , где  $p = (\beta^2 - k^2 \varepsilon_\infty)^{1/2}$ . Области  $\Lambda_0$  взаимно однозначно соответствует область  $K_0$  параметров  $(\beta, p)$ ,

$$K_0 := \{(\beta, p) : p \in [0, p_0], \gamma p \leq \beta \leq (p^2 + k_0 \varepsilon_+)^{1/2}\},$$

где  $\gamma := (\varepsilon_+ / (\varepsilon_+ - \varepsilon_\infty))^{1/2}$ ,  $p_0 := (\varepsilon_+ - \varepsilon_\infty)^{1/2} k_0$ .

На отрезке  $[0, p_0]$  введем равномерную сетку узлов и в каждой точке сетки  $p_j$  найдем все собственные числа  $\beta_i^{h2}$  дискретной задачи (9.1) (или ее аналога в векторном случае) из отрезка  $[\gamma^2 p_j^2, p_j^2 + k_0 \varepsilon_+]$  и соответствующие им собственные функции. В результате интерполяции (кусочно-линейной при  $m = 1$ ) получим приближенные дис-

<sup>1)</sup>Будем считать, что единицы измерения выбраны так, что  $\varepsilon_\infty = 1$ ,  $\mu_0 = 1$ .

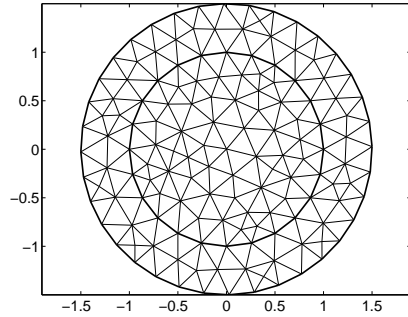


Рис. 20. Триангуляция области  $\Omega$  для кругового волновода,  $R = 1.5$ ,  $N_h = 146$ . персионные кривые  $\beta = \beta_i^h(p)$ , лежащие в области  $K_0$ . Далее положим  $k_i^{h2}(p) := (\beta_i^{h2}(p) - p^2)/\varepsilon_\infty$ . Найденные кривые

$$\beta = \beta_i^h(p), \quad k = k_i^h(p), \quad p \in [0, p_0],$$

образуют в совокупности приближения ко всем искомым дисперсионным кривым точности  $O(h^{2m})$ . Отметим, что в результате решения дискретных задач на собственные значения (мы использовали метод Ланцоша) определяются приближения лишь к сужениям собственных функций на круг  $\Omega$ . При необходимости они могут быть метагармонически продолжены вне  $\Omega$ , используя формулу

$$H_h(x) = \sum_{n=-N}^N \frac{K_n(pr)}{K_n(pR)} a_n(H_h) e^{in\varphi}, \quad x \in \Omega_\infty.$$

## § 2. Волновод кругового поперечного сечения

Рассмотрим однородный волновод с круговым поперечным сечением радиуса 1 и проницаемости  $\varepsilon = 2$ . Этот пример интересен тем, что для него известно “точное” решение задачи (трансцендентное уравнение (1.62), стр. 32, связывающее параметры  $\beta$  и  $k$ ).

Радиус  $R$  области  $\Omega$  был выбран равным 1.5. На рис. 21 изображены первые семь дисперсионных кривых  $\beta = \beta(p)$  задачи ( $\mathcal{P}$ ), вычисленные на сетке с 2493 узлами и числом Фурье-гармоник  $N = 10$ . Сплошными линиями обозначено точное решение, точками — приближенное, штриховой линией — прямая  $\beta = k_0 p$ , определяющая часть

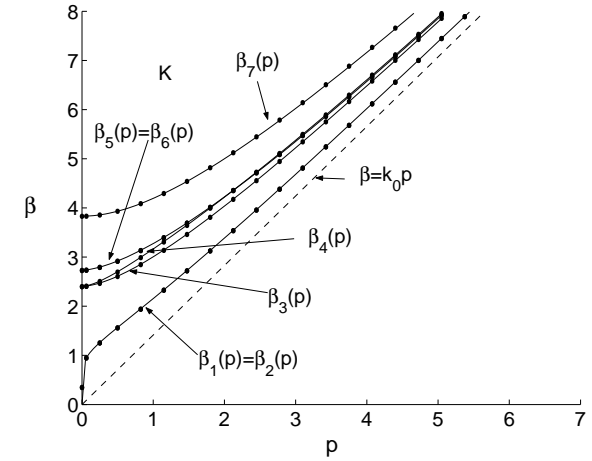


Рис. 21. Первые семь дисперсионных кривых  $\beta = \beta(p)$  для волновода кругового сечения.

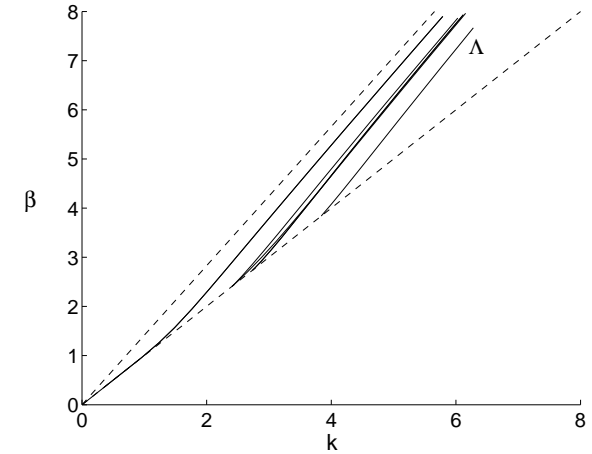


Рис. 22. Первые семь дисперсионных кривых  $\beta = \beta(k)$  для волновода кругового сечения,  $\beta_1(k) = \beta_2(k)$ ,  $\beta_5(k) = \beta_6(k)$ .



границы области  $K$ . Все дисперсионные кривые лежат выше этой прямой.

На рис. 22 сплошными линиями изображены первые семь дисперсионных кривых  $\beta = \beta(k)$  исходной задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$ . Штриховыми линиями — прямые  $\beta = k\sqrt{\varepsilon_+}$  и  $\beta = k\sqrt{\varepsilon_\infty}$ , определяющие границы области  $\Lambda$ .

Представим теперь результаты численного исследования зависимости точности метода от параметров  $N_h$  — общего числа точек сетки и  $N$  — числа Фурье-гармоник. Для фиксированного параметра  $p = 1$  разыскивались собственные значения  $\beta^h$  задачи  $(\mathcal{P}_h)$ , а затем сравнивались с точными. Результаты вычислений представлены в таблице 1 для  $\beta_4^h$ . Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать  $N = 1$  или  $N = 2$  и при этом  $|\beta_4 - \beta_4^h|/|\beta_4| \approx 0.7h^2$ .

Таблица 1. Зависимость  $e = h^{-2}|\beta_4 - \beta_4^h|/|\beta_4|$  при  $p = 1$  от  $h$  и  $N$ .

$N \setminus N_h(n_\Gamma)$	45(16)	330(52)	1125(92)	2881(152)
1	0.64	0.748	0.631	0.668
3	0.641	0.748	0.631	0.668
5	0.641	0.748	0.631	0.668
7	0.641	0.748	0.631	0.668
15	0.642	0.748	0.631	0.668

### § 3. Волновод квадратного поперечного сечения

Рассмотрим однородный волновод с поперечным сечением в виде единичного квадрата и проницаемости  $\varepsilon = 2.08$ , для которого известны результаты физических экспериментов [35]. Круг  $\Omega$  расположим так, чтобы центр круга совпадал с центром квадрата  $\Omega_i$ , радиус  $R$  круга выберем равным 1.5. Пример триангуляции области  $\Omega$  приведен на рис. 23.

На рис. 24 сплошными линиями показаны первые четыре дисперсионные кривые  $\beta = \beta(p)$  задачи  $(\mathcal{P})$ , построенные на сетке с общим числом узлов  $N_h = 2500$  и вычисленные при количестве Фурье-гармоник  $N = 10$ . Нижняя кривая является кратной  $\beta_1(p) = \beta_2(p)$ , две другие пересекаются. Экспериментальные данные обозначены точками. График показывает хорошее соответствие между полученными приближенными решениями и экспериментальными данными. На рис. 25

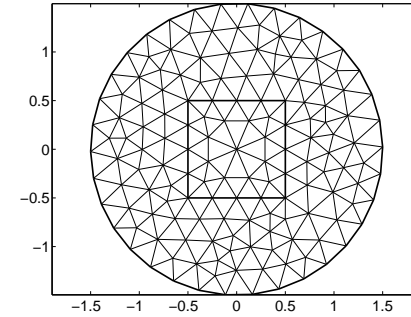


Рис. 23. Триангуляция области для волновода квадратного поперечного сечения,  $R = 1.5$ ,  $N_h = 151$ .

изображены соответствующие им дисперсионные кривые  $\beta = \beta(k)$  задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$ .

Представим теперь результаты численного исследования зависимости точности метода от параметров  $N_h$  и  $N$  при  $p = 1$ . В отличие от волновода кругового поперечного сечения в данном случае не известно точное решение. Поэтому за “точное решение задачи” принималось приближенное решение, полученное на сетке с числом узлов  $N_h = 6000$  ( $n_\Gamma = 212$ ). Результаты вычислений представлены в таблице 2 для третьего собственного значения  $\beta_3$ . Из этой таблицы можно заключить, что достаточно выбрать  $N$ , равное 3, и при этом  $|\beta_4 - \beta_4^h|/|\beta_4| \approx 1.6h^2$ .

Таблица 2. Зависимость  $e = h^{-2}|\beta_3 - \beta_3^h|/|\beta_3|$  при  $p = 1$  от  $h$  и  $N$ .

$N \setminus N_h(n_\Gamma)$	31(16)	341(50)	1012(92)
1	2.26	1.6	1.61
3	2.27	1.61	1.64
5	2.27	1.61	1.64
7	2.27	1.61	1.64
15	2.27	1.61	1.64

### § 4. Волновод прямоугольного поперечного сечения

Приведем еще один пример волновода, для которого известны экспериментальные данные [35]. Рассмотрим однородный волновод,

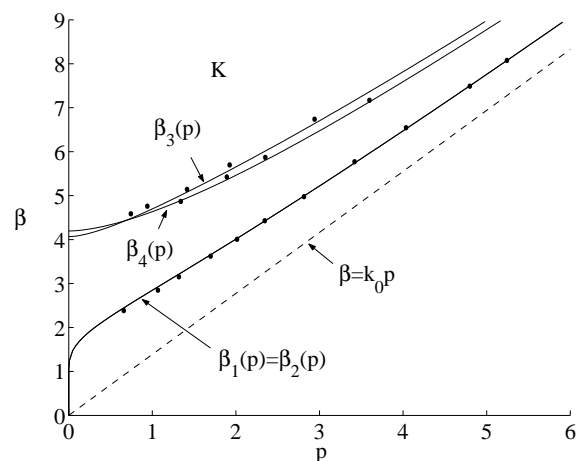


Рис. 24. Первые четыре дисперсионные кривые  $\beta = \beta(p)$  для волновода квадратного сечения.

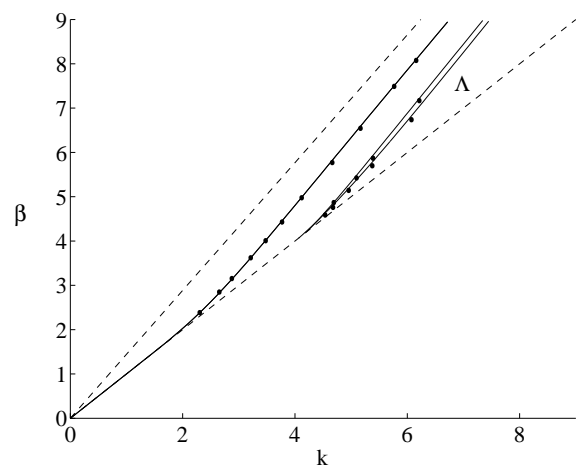


Рис. 25. Первые четыре дисперсионные кривые  $\beta = \beta(k)$  для волновода квадратного сечения,  $\beta_1(k) = \beta_2(k)$ .

поперечное сечение которого представляет собой прямоугольник размером  $1.5 \times 1$  с  $\varepsilon = 2.08$ . Круг  $\Omega$  расположим так, чтобы центр круга совпадал с центром прямоугольника  $\Omega_i$ , радиус  $R$  круга выберем равным 1.5. Пример триангуляции области  $\Omega$  приведен на рис. 26.

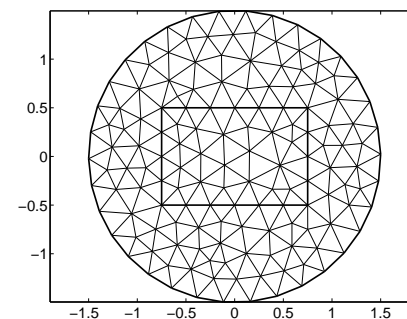


Рис. 26. Триангуляция области для волновода прямоугольного сечения,  $R = 1.5$ ,  $N_h = 148$ .

На рис. 27 сплошными линиями показаны первые четыре дисперсионные кривые  $\beta = \beta(p)$  задачи  $(P)$  для прямоугольного волновода, построенные на сетке с общим числом узлов  $N_h = 2179$  и вычисленные при количестве Фурье-гармоник  $N = 10$ . Экспериментальные данные обозначены точками. График показывает хорошее соответствие между полученными приближенными решениями и экспериментальными данными. На рис. 28 изображены соответствующие им дисперсионные кривые  $\beta = \beta(k)$  задачи  $(P_\infty)$ .

Таблица 3. Зависимость  $e = h^{-2}|\beta_3 - \beta_3^h|/|\beta_3|$  при  $p = 1$  от  $h$  и  $N$ .

$N$	$N_h(n_\Gamma)$	40(17)	304(50)	1016(92)
1		1.36	0.987	0.327
3		1.39	1.19	1.04
5		1.39	1.19	1.05
7		1.39	1.19	1.05
15		1.39	1.19	1.05

Представим теперь результаты численного исследования зависимости точности метода от параметров  $N_h$  и  $N$ . Так как в данном случае точное решение не известно, то схема исследования такая же, как

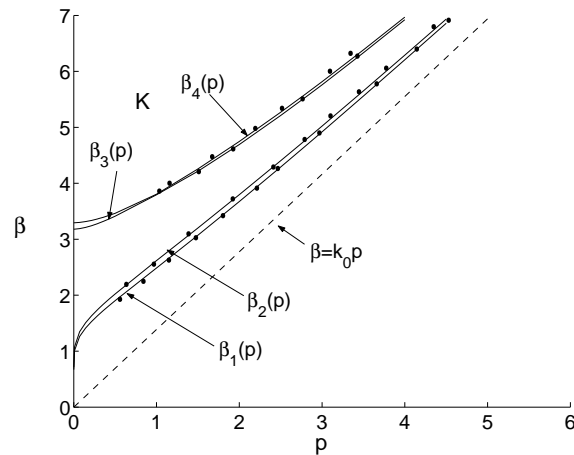


Рис. 27. Первые четыре дисперсионные кривые для волновода прямоугольного сечения.

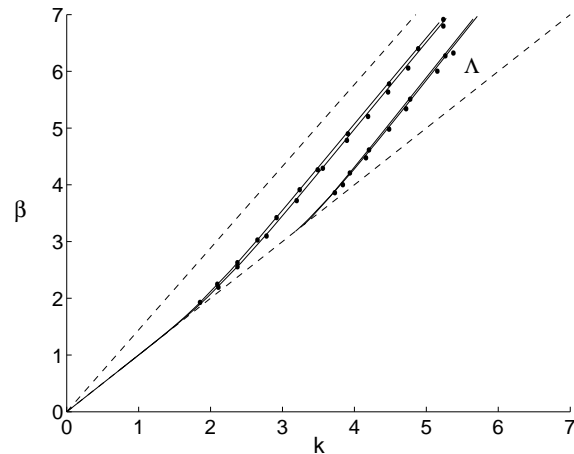


Рис. 28. Первые четыре дисперсионные кривые для волновода прямоугольного сечения.

в случае волновода квадратного сечения: за “точное решение задачи” принималось приближенное решение, полученное на сетке с общим числом узлов  $N_h = 6015$  ( $n_\Gamma = 212$ ). Результаты вычислений представлены в таблице 3 для третьего собственного значения  $\beta_3$ . Из этой таблицы можно заключить, что достаточно выбрать число Фурье-гармоник  $N = 5$ , и при этом  $|\beta_3 - \beta_3^h|/|\beta_3| \approx 1.1h^2$ .

### § 5. Волновод с поперечным сечением из трех кругов

Рассмотрим однородный волновод, состоящий из трех касающихся друг друга кругов радиуса 0.4. В этом случае не известны ни точное решение, ни экспериментальные данные. Радиус  $R$  круга  $\Omega$  был выбран равным 1.5, центр области  $\Omega_i$  совпадает с центром  $\Omega$ ,  $\varepsilon = 2$ . Грубая триангуляция области приведена на рис. 29. На рис. 30 изображены первые шесть дисперсионных кривых  $\beta = \beta(p)$  задачи  $(\mathcal{P})$ , вычисленные на сетке с общим числом узлов  $N_h = 2226$  при количестве Фурье-гармоник  $N = 10$ . Первая и пятая кривые, изображенные на рисунке, являются кратными:  $\beta_1(p) = \beta_2(p)$ ,  $\beta_5(p) = \beta_6(p)$ . На рис. 31 изображены дисперсионные кривые  $\beta = \beta(k)$  задачи  $(\mathcal{P}_\infty)$ .

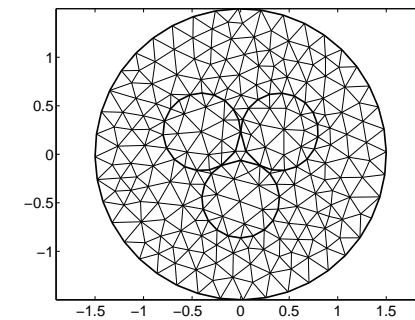


Рис. 29. Триангуляция области поперечного сечения волновода, состоящего из трех касающихся друг друга кругов радиуса 0.4,  $R = 1.5$ ,  $N_h = 243$ .

Представим результаты численного исследования зависимости точности метода от параметров  $N_h$  и  $N$ . Так как и в этом случае точное решение не известно, то за “точное решение задачи” принималось ее приближенное решение, полученное на сетке с числом

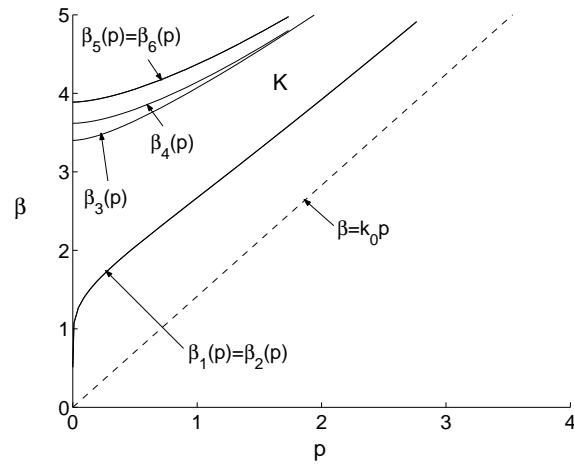


Рис. 30. Первые шесть дисперсионных кривых для волновода с поперечным сечением, состоящим из трех касающихся друг друга кругов.

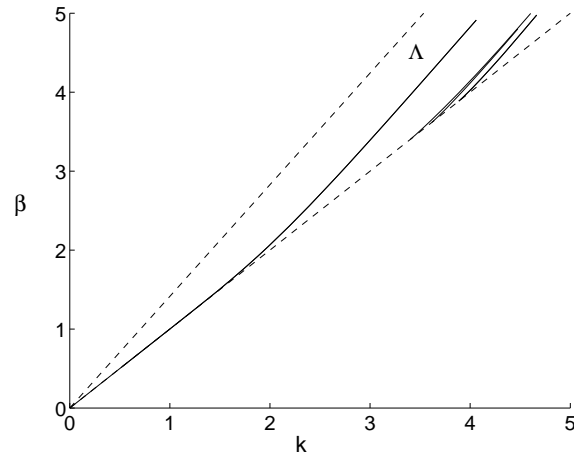


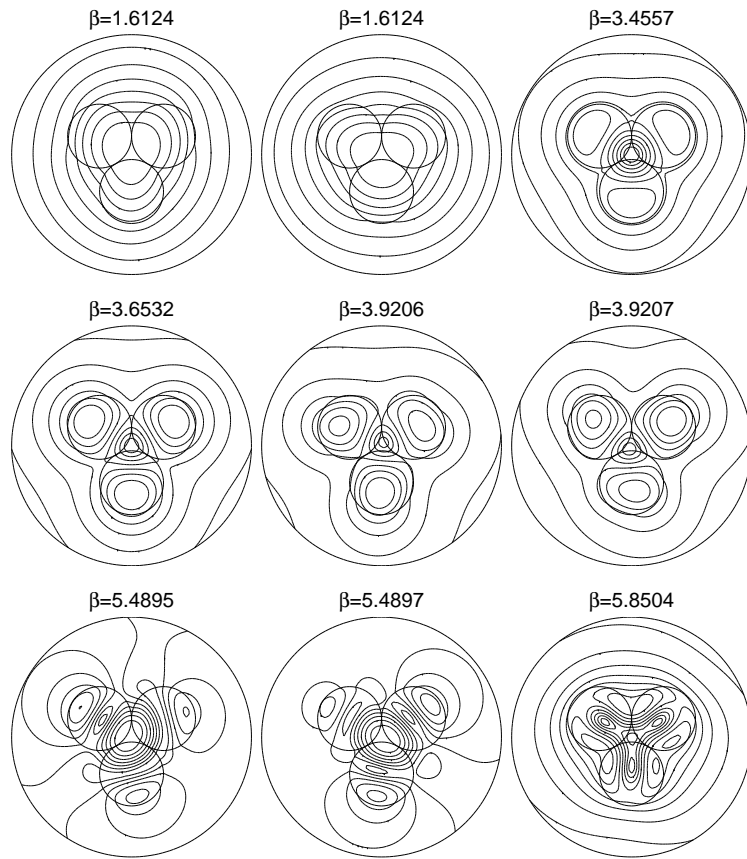
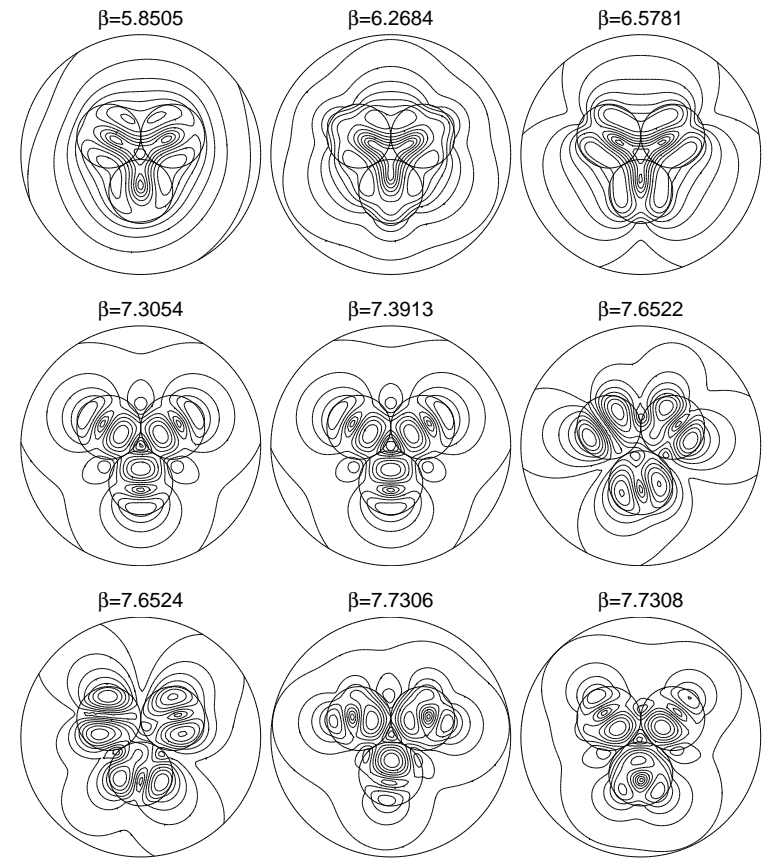
Рис. 31. Первые шесть дисперсионных кривых для волновода с поперечным сечением, состоящим из трех касающихся друг друга кругов.

узлов  $N_h = 6006$  ( $n_\Gamma = 216$ ). Результаты вычислений представлены в таблице 4 для четвертого собственного значения  $\beta_4$ . Из этой таблицы можно заключить, что достаточно выбрать число Фурье-гармоник  $N = 5$ , и при этом  $|\beta_4 - \beta_4^h|/|\beta_4| \approx 1.6h^2$ .

Таблица 4. Зависимость  $e = h^{-2}|\beta_4 - \beta_4^h|/|\beta_4|$  при  $p = 1$  от  $h$  и  $N$ .

$N$	$N_h(n_\Gamma)$	78(16)	335(50)	1093(90)
1		0.5	23.3	92.5
3		0.619	1.67	1.56
5		0.62	1.67	1.57
7		0.62	1.67	1.57
15		0.62	1.67	1.57

На рис. 32, 33 представлены изолинии модуля собственных функций ( $|H| = (H \cdot H)^{1/2}$ ), соответствующих различным собственным числам  $\beta$  при значении параметра  $p = 0.2$ .

Рис. 32. Изолинии  $|H|$ ,  $N_h = 5032$ ,  $N = 10$ ,  $p = 0.2$ .Рис. 33. Изолинии  $|H|$ ,  $N_h = 5032$ ,  $N = 10$ ,  $p = 0.2$ .

## Литература

1. *Абрамовиц Е., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Мир, 1968. — 344 с.
2. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
3. *Ватсон Дж. Н.* Теория бесселевых функций. — М.: ИИЛ, 1949.
4. *Вайникко Г.М., Карма О.О.* О сходимости приближенных методов решения линейных и нелинейных операторных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1974. — Т. 14, № 4. — С. 828–837.
5. *Вайникко Г.М., Карма О.О.* О скорости сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1974. — Т. 14, № 6. — С. 1393–1408.
6. *Веселов Г.И., Раевский С.Б.* О спектре комплексных волн круглого диэлектрического волновода // Радиотехника. — 1983. — № 2. — С. 55–58.
7. *Векуа И.Н.* О метагармонических функциях // Труды Тбилисского матем. ин-та. — 1943. — Т. 12. — С. 105–174.
8. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. — 527 с.
9. *Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н. и др.* Собственные волны диэлектрических волноводов сложного сечения // Радиотехника и электроника. — 1979. — Т. 24, № 7. — С. 1245–1263.
10. *Габдулхаев Б.Г.* Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. — Казань: Изд-во КГУ, 1994. — 288 с.
11. *Габдулхаев Б.Г.* Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы. — Казань: Изд-во КГУ, 1995. — 231 с.
12. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов // Успехи матем. наук. — 1957. — Т. 12, Вып. 2. — С. 44–118.
13. *Даутов Р.З., Карчевский Е.М.* Об одной спектральной задаче теории диэлектрических волноводов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1999. — Т. 39, № 8. — С. 1293–1299.
14. *Даутов Р.З., Карчевский Е.М.* Существование и свойства решений спектральной задачи теории диэлектрических волноводов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2000. — Т. 40, № 8. — С. 1250–1263.
15. *Даутов Р.З., Карчевский Е.М.* О решении векторной задачи о собственных волнах цилиндрических волноводов на основе нелокального краевого условия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2002. — Т. 42, № 7. — С. 1051–1066.
16. *Даутов Р.З., Карчевский Е.М.* Об одной спектральной задаче для оператора Гельмгольца на плоскости // Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач: материалы Всероссийского семинара. — Казань: Изд-во Казанского матем. общества, 1998. — С. 19–20.
17. *Даутов Р.З., Карчевский Е.М.* Приближенный метод решения спектральной задачи для оператора Гельмгольца на плоскости // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: материалы Всероссийской школы-конференции, посв. 130-летию со дня рождения Д.Ф. Егорова. — Казань: Изд-во Казанского матем. общества, 1999. — С. 77–79.
18. *Даутов Р.З., Карчевский Е.М.* Исследование и приближенный метод решения спектральной задачи для оператора Гельмгольца на плоскости // Современные проблемы матем. моделирования: труды VIII Всероссийской школы-семинара. — Ростов-н/Д: Изд-во РГУ, 1999. — С. 53–64.

19. Даутов Р.З., Карчевский Е.М. Об одном методе решения эллиптических задач в неограниченных областях // Математическое моделирование и проблемы экологической безопасности: труды Всероссийской конференции. — Ростов-н/Д: Изд-во РГУ, 2000. — С. 72–84.
20. Даутов Р.З., Карчевский Е.М. Вопросы существования и численные методы в спектральной теории слабонаправляющих диэлектрических волноводов // Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах: труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: НИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2000. — С. 55–78.
21. Даутов Р.З., Карчевский Е.М., Корнилов Г.П. Векторная задача о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов // Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах: труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: Изд-во Казанского матем. общества, 2002. — С. 4–40.
22. Даутов Р.З., Карчевский Е.М., Корнилов Г.П. Численный метод поиска дисперсионных кривых и собственных волн оптических волноводов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2005. — № 12. — С. 2203–2218.
23. Даутов Р.З., Карчевский М.М. Введение в теорию метода конечных элементов. — Казань: Казан. гос. ун-т, 2004. — 239 с.
24. Даутов Р.З., Корнилов Г.П. Метод нахождения дисперсионных кривых для скалярной задачи теории диэлектрических волноводов // Исследования по прикладной математике и информатике: Сб. научных статей. — Казань: Казан. гос. ун-т, 2003. — Вып. 24. — С. 51–57.
25. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — 166 с.
26. Дробница В.В., Цецохо В.А. Метод расчета плоского электромагнитного поля в среде со слоем переменной толщины // Математические проблемы геофизики. — Новосибирск: Взд-во ВЦ СО АН СССР, 1971. — Вып. 2. — С. 251–284.

27. Дьяконов Е. Г. Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач. — М.: Наука, 1989. — 271 с.
28. Дьяконов Е. Г. Усиленные пространства Соболева и некоторые новые типы эллиптических краевых задач // Дифф. уравнения. — 1997. — Т. 33, № 4. — С. 532–539.
29. Захаров Е.В., Икрамов Х.Д., Сивов А.Н. Метод расчета собственных волн диэлектрических волноводов произвольного сечения // Вычислительные методы и программирование. — М.: Изд-во МГУ, 1980. — Вып. 32. — С. 71–85.
30. Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Численный анализ дифракции радиоволн. — М.: Радио и связь, 1982. — 184 с.
31. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. — М.: Высшая школа, 1991. — 224 с.
32. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции). — М.: ИПРЖР, 1996. — 176 с.
33. Ильинский А.С., Шестопалов Ю.В. Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 184 с.
34. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. — М.: Физматгиз, 1959. — 864 с.
35. Карпенко В.А., Столяров Ю.Д., Холмогеев В.Ф. Теоретические и экспериментальные исследования прямоугольного диэлектрического волновода // Радиотехника и электроника. — 1980. — Т. 25, № 1. — С. 51–57.
36. Карчевский Е.М. Исследование спектра собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов с малым скачком показателя преломления // Исследования по прикладной математике: сб. науч. ст. — Казань: Изд-во Казанского матем. общества, 1997. — Вып. 22. — С. 47–51.

37. Карчевский Е.М. Об определении постоянных распространения собственных волн диэлектрических волноводов методами теории потенциала // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1998. — Т. 38, № 1. — С. 132–136.
38. Карчевский Е.М. К исследованию спектра собственных волн диэлектрических волноводов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1999. — Т. 39, № 9. — С. 1558–1563.
39. Карчевский Е.М. Исследование численного метода решения спектральной задачи теории диэлектрических волноводов // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 1. — С. 10–17.
40. Карчевский Е.М. Исследование спектра собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов с произвольным контуром поперечного сечения // Исследования по прикладной математике: сб. науч. ст. — Казань: Унипресс, 1999. — Вып. 21. — С. 132–140.
41. Карчевский Е.М. Исследование задачи о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 7. — С. 998–999.
42. Карчевский Е.М. Применение методов теории сингулярных интегральных операторов в задаче о собственных волнах волновода с размытой границей // Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах: труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: Изд-во Казанского матем. общества, 2002. — С. 64–78.
43. Карчевский Е.М., Носич А.И., Соловьев С.И. Собственные моды диэлектрических волноводов с размытой границей // Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах: труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: НИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2000. — С. 79–114.
44. Карчевский Е.М., Соловьев С.И. Исследование спектральной задачи для оператора Гельмгольца на плоскости // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 4. — С. 563–565.

45. Карчевский Е.М., Соловьев С.И. Существование собственных значений спектральной задачи теории диэлектрических волноводов // Известия вузов. Математика. — 2003. — № 3. — С. 78–80.
46. Карчевский Е.М., Трифонов Е.В. Математическое моделирование распространения волн в цилиндрическом диэлектрическом волноводе // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: материалы Всероссийской школы-конференции, посвященной 130-летию со дня рождения Д.Ф. Егорова. — Казань: Изд-во Казанского матем. общества, 1999. — С. 112–113.
47. Карчевский Е.М., Трифонов Е.В. Об определении комплексных постоянных распространения цилиндрических диэлектрических волноводов методами теории потенциала // Итерационные методы решения линейных и нелинейных сеточных задач: труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: Унипресс, 1999. — Т. 2. — С. 245–250.
48. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972. — 740 с.
49. Каценеленбаум Б.З. О распространении электромагнитных волн вдоль бесконечных диэлектрических цилиндров при низких частотах // Докл. АН СССР. — 1947. — Т. 58, № 7. — С. 1317–1320.
50. Каценеленбаум Б.З. Симметричное и не симметричное возбуждение бесконечного диэлектрического цилиндра // Журнал технической физики. — 1949. — Т. 19, № 10. — С. 1168–1181.
51. Клеев А.И., Маненков А.Б. Расчет диэлектрических волноводов методом коллокации // Изв. вузов. Радиофизика. — 1988. — Т. 31, № 1. — С. 93–99.
52. Клеев А.И., Маненков А.Б., Рожнев А.Г. Численные методы расчета диэлектрических волноводов (волоконных световодов). Частные методы (обзор) // Радиотехн. и электроника. — 1993. — Т. 38, № 5. — С. 769–788.
53. Клеев А.И., Маненков А.Б., Рожнев А.Г. Численные методы расчета диэлектрических волноводов (волоконных световодов). Универсальные методики (обзор) // Радиотехн. и электроника. — 1993. — Т. 38, № 11. — С. 1938–1968.



54. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. — М.: Мир, 1987. — 312 с.
55. Корнеев В.Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. — Л.: Изд-во Ленин. ун-та, 1977. — 206 с.
56. Красносельский М. А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 455 с.
57. Купрадзе В.Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. — 280 с.
58. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973. — 576 с.
59. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 414 с.
60. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971. — 371 с.
61. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн. — М.: Янус, 1995. — 519 с.
62. Малов А.В., Солодухов В.В., Чурилин А.А. Расчет собственных волн диэлектрических волноводов произвольного поперечного сечения методом интегральных уравнений // Антенны. — М.: Радио и связь, 1984. — Вып. 31. — С. 189–195.
63. Михлин С.Г. Проблема минимума квадратичного функционала. — М.: Гостехтеориздат, 1952. — 216 с.
64. Муравей Л.А. Аналитическое продолжение по параметру функций Грина внешних краевых задач для двумерного уравнения Гельмгольца // Матем. сборник. — 1978. — Т. 105, № 1. — С. 63–108.
65. Мухомелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Физматгиз, 1962. — 600 с.

66. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Основы теории специальных функций. — М.: Наука, 1974. — 303 с.
67. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Наука, 1978. — 543 с.
68. Плещинский Н.Б. Модели и методы волноводной электродинамики: Учеб. пособие. — Казань: Казан. гос. ун-т, 2008. — 104 с.
69. Поединчук А.Е., Тучкин Ю.А., Шестопалов В.П. О регуляризации спектральных задач волнового рассеяния на незамкнутых экранах // Доклады АН СССР. — 1987. — Т. 295, № 6. — С. 1358–1362.
70. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979. — 587 с.
71. Самохин А.Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. — М.: Радио связь, 1998. — 160 с.
72. Свешников А.Г. Принцип предельного поглощения для волновода // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 80, № 3. — С. 345–347.
73. Свешников А.Г. Дифракция на ограниченном теле // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 184, № 1. — С. 71–74.
74. Смагин С.И. Метод потенциалов в трехмерной задаче дифракции электромагнитных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1990. — Т. 29, № 1. — С. 82–92.
75. Снайдер А., Лав. Дж. Теория оптических волноводов. — М.: Радио и связь, 1987. — 656 с.
76. Соловьев С.И. Погрешность метода Бубнова — Галеркина с возмущениями для симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением спектрального параметра // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1992. — Т. 32, № 5. — С. 675–691.
77. Соловьев С.И. Аппроксимация симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра // Изв. вузов. Математика. — 1993. — № 10. — С. 60–68.

78. Соловьев С.И. Оценки погрешности метода конечных элементов для симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра // Изв. вузов. Математика. — 1994. — № 9. — С. 70–77.
79. Сухинин С.В. О дискретности собственных частот открытых акустических резонаторов // Неклассические задачи упругости и пластичности. — Новосибирск, 1981. — Вып. 49. — С. 157–163.
80. Съярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980. — 512 с.
81. Темам Р. Математические задачи теории пластичности. — М.: Наука, 1991. — 288 с.
82. Тиммербаев М.Р. Пространства с нормой графика и усиленные пространства Соболева. i // Изв. вузов. Математика. — 2003. — № 5. — С. 55–65.
83. Тиммербаев М.Р. Пространства с нормой графика и усиленные пространства Соболева. ii // Изв. вузов. Математика. — 2003. — № 9. — С. 46–53.
84. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — 739 с.
85. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980. — 664 с.
86. Цецохо В.А. Задача об излучении электромагнитных волн в слоистой среде с осевой симметрией // Вычислительные системы. — Новосибирск, 1964. — Вып. 12. — С. 52–78.
87. Шестопалов В.П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур. — Киев: Наукова думка, 1987. — 288 с.
88. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1968. — 344 с.
89. Яровой А.Г. Применение метода поверхностных потенциалов в задаче дифракции электромагнитных волн на проницаемом цилиндре в плоскостной среде // Математическое моделирование. — 1995. — Т. 7, № 2. — С. 3–16.

90. Adams R.A. Sobolev spaces. — New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975. — 269 p.
91. Babushka I., Osborn J. Finite element Galerkin approximation of the eigenvalues and eigenvectors of selfadjoint problems // Math. Comp. — 1989. — V. 52. — P. 275–297.
92. Bagby J.S., Nyquist D.P., Drachman B.C. Integral formulation for analysis of integrated dielectric waveguides // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. — 1985. — MTT-29. — P. 906–915.
93. Bagby J.S., Nyquist D.P. Dyadic Green's functions for integrated electronic and optical circuits // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. — 1987. — MTT-35 — P. 206–210.
94. Bamberger A., Bonnet A.-S. Mathematical analysis of the guided modes of an optical fiber // SIAM J. Math. Analysis. — 1990. — V. 21, № 6. — P. 1487–1510.
95. Banerjee U., Osborn J.E. Estimation of the effect of numerical integration in finite element eigenvalue approximation // Numer. Math. — 1990. — V. 56. — P. 735–762.
96. Bastiaansen H.J.M., Baken N.H.G., Blok H. Domain-integral analysis of channel waveguides in anisotropic multi-layered media // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. — 1992. — V. 40. — P. 1918–1926.
97. Ben-Porat G., Givoli D. Solution of unbounded domain problems using elliptic artificial boundaries // Comm. Num. Meth. in Eng. — 1995. — V. 11. — P. 735–741.
98. Bonnet A., Djellouli R. Calcul des modes guide d'une fibre optique // Rapport Interne du CMAP № 182. — Palaiseau, France: Ecole Polytechnique, 1988.
99. Bonnet-Ben Dhia A.S., Caloz G., Mahe F. Guided modes of integrated optical guides. A mathematical study // IMA J. Appl. Math. — 1998. — V. 60. — P. 225–261.
100. Bonnet-Ben Dhia A.S., Caloz G., Dauge M., Mahe F. Study at high frequencies of a stratified waveguide // IMA J. Appl. Math. — 2001. — V. 66. — P. 231–257.

101. *Bonnet-Ben Dhia A.S., Joli P.* Mathematical analysis of guided water waves // SIAM J. Appl. Math. — 1993. — V. 53. — № 6. — P. 1507–1550.
102. *Bonnet-Ben Dhia A.S., Joly P.* Mathematical analysis and numerical approximation of optical waveguides // Mathematical Modelling in Optical Science. Frontiers. Appl. Math. — 2001. — V. 22. — SIAM Philadelphia. PA. — P. 273–324.
103. *Bonnet-Ben Dhia A.S., Joly P.* Computation of the modes of dielectric waveguides by finite elements coupled with an integral representation // Numerical Methods in Engineering. — 1992. — P. 73–77.
104. *Bossavit A.* Solving Maxwell's equations in a closed cavity and the questions of spurious modes // IEEE Trans. Magnetics. — 1990. — V. 26, № 2. — P. 702–705.
105. *Bramble J., Hilbert S.* Bounds for the class of linear functionals with applications to Hermite interpolation // Numer. Math. — 1971. — V. 16, № 4. — P. 362–369.
106. *Bramble J., Osborn J.* Rates of the convergence estimates for nonselfadjoint eigenvalue approximations // Math. Comp. — 1973. — V. 27, № 123. — P. 525–549.
107. *Brenner S.C., Scott L.R.* The Mathematical Theory of Finite Element Methods. — New York: Springer-Verlag, 1994. — 294 p.
108. *Chatelin F.* Spectral Approximation of Linear Operators. — New York: Academic Press, 1983.
109. *Collin R.E.* Field Theory of Guided Waves. — New York: IEEE Press, 1991. — 578 p.
110. *Colton D., Kress R.* Time harmonic electromagnetic waves in an inhomogeneous medium // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. — 1990. — V. 116A. — P. 279–293.
111. *Dautov R., Karchevskii E.* Simulation of weakly guiding optical fibers by finite element method with exact boundary condition // International Conference on Transparent Optical Networks; Krakov, Poland, 2001: Proceedings. — Krakov, 2001. — P. 206–210.

112. *Descloux J., Nassif N., Rappaz J.* On spectral approximation. Part 1. The problem of convergence // R.A.I.R.O. Numer. Anal. — 1978. — V. 12. — P. 97–112.
113. *Descloux J., Nassif N., Rappaz J.* On spectral approximation. Part 2. Error estimates for the Galerkin method // R.A.I.R.O. Numer. Anal. — 1978. — V. 12. — P. 113–119.
114. *Eyges L., Gianino P., Wintersteiner P.* Modes of dielectric waveguides of arbitrary cross sectional shape // J. Opt. Soc. Am. — 1979. — V. 69, № 9. — P. 1226–1235.
115. *Givoli D., Keller J.B.* Exact non-reflecting boundary conditions // J. Comput. Phys. — 1989. — V. 82. — P. 172–192.
116. *Givoli D.* Nonreflecting boundary conditions (review article) // J. Comput. Phys. — 1991. — V. 94. — P. 1–29.
117. *Goell J.E.* A circular-harmonic computer analysis of rectangular dielectric waveguides // Bell Sys. Tech. J. — 1969. — V. 48. — P. 2133–2160.
118. *Goolin A.V., Kartyshov S.V.* Numerical study of stability and nonlinear eigenvalue problems // Surv. Math. Ind. — 1993. — V. 3. — P. 29–48.
119. *Hanson G.W., Nosich A.I., Kartchevski E.M.* Green's function expansions in dyadic root functions for shielded layered waveguide problems obtained via residue theory // J. Electromag. Waves Applicat. — 2003. — V. 17, № 5. — P. 759–761.
120. *Harrington R.F.* Time-Harmonic Electromagnetic Fields. — McGraw-Hill, 1961. — 328 p.
121. *Hörmander L.* Linear Partial Differential Operators. — Berlin: Springer-Verlag, 1976. — 379 p.
122. *Hunspenger R.G.* Integrated optics: theory and technology // Optical Sciences 33. — New York: Springer-Verlag, 1991. — 426 p.
123. *Jablonski T.F.* Complex modes in open lossless dielectric waveguides // J. Opt. Soc. Am. A. — 1994. — V. 11, № 4. — P. 1272–1282.

124. *Jablonski T.F., Sowinski M.J.* Analysis of dielectric guiding structures by the iterative eigenfunction expansion method // IEEE Trans. Microwave Theory Techniques. — 1989. — MTT-37. — P. 63–70.
125. *Joly P., Poirier C.* Mathematical analysis of electromagnetic open waveguides // Mathematical Modelling and Numerical Analysis. — 1995. — V. 29, № 5. — P. 505–575.
126. *Joly P., Poirier C.* A numerical method for the computation of electromagnetic modes in optical fibres // Math. Meth. Appl. Sci. — 1999. — V. 22. — P. 389–447.
127. *Karimov I.P., Koch T.L.* Optical Fiber Telecommunications III. — New York: Academic Press, 1997. — 437 p.
128. *Karchevskii E.M.* Study of spectrum of guided waves of dielectric fibres // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory; Kharkov, Ukraine, June 2–5, 1998: Proceedings. — Kharkov, 1998. — P. 787–789.
129. *Karchevskii E.M.* Surface and leaky guided waves on dielectric fibres of arbitrary cross-section // Progress in Electromagnetics Research Symposium, Nantes, France, July 13–17, 1998: Proceedings. — Nantes, 1998. — P. 325.
130. *Karchevskii E.M.* Universal algorithm for the accurate computation of the modal characteristics of arbitrary-shape optical fibers // International Conference on Transparent Optical Networks; Kielce, Poland, June 9–11, 1999: Proceedings. — Kielce, 1999. — P. 201–204.
131. *Karchevskii E.M.* Universal algorithm for solution of eigenvalue problems of the theory of electromagnetic waves // XXVI General Assembly International Union of Radio Science; Toronto, Ontario, Canada, August 13–21, 1999: Proceedings. — Ontario, 1999. — P. 41.
132. *Karchevskii E.M.* Mathematical analysis and numerical modeling of the guided modes of the step-index optical fibers // The Fifth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation; Santiago de Compostela, Spain, July 10–14, 2000: Proceedings. — SIAM Proc. in Applied Mathematics, 2000. — V. 102. — P. 414–419.

133. *Karchevskii E., Dautov R.* Mathematical analysis and numerical simulation of the guided modes of the weakly guiding optical fibers // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory; Kharkov, Ukraine, September 12–15, 2000: Proceedings. — Kharkov, 2000. — P. 396.
134. *Karchevskii Y., Trifonov E.* Computing complex propagation constants of dielectric waveguides // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory; Kharkov, Ukraine, September 12–15, 2000: Proceedings. — Kharkov, 2000. — P. 536–537.
135. *Kartchevski E.* Convergence of the Galerkin method for numerical calculation of the guided modes of an integrated optical guide // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory; Dnepropetrovsk, Ukraine, September 14–17, 2004: Proceedings. — Dnepropetrovsk, 2004. — P. 263–265.
136. *Kartchevski E.M., Hanson G.* Mathematical analysis of the guided modes of an integrated optical guide // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory; Kiev, Ukraine, September 10–13, 2002: Proceedings. — Kiev, 2002. — P. 230–232.
137. *Kartchevski E.M., Hanson G.* Mathematical analysis of the guided modes of integrated optical guides // The Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation; Jyväskylä, Finland, June 30 — July 4, 2003: Proceedings. — Jyväskylä, 2003. — P. 445–450.
138. *Kartchevski E.M., Nosich A.I., Hanson G.W.* Mathematical analysis of the generalized natural modes of an inhomogeneous optical fiber // SIAM J. Appl. Math. — 2005. — V. 65, № 6. — P. 2033–2048.
139. *Keuster E.F., Pate R.C.* Fundamental mode propagation on dielectric fibres of arbitrary cross-section // IEE PROC-H. 1980. — V. 126, № 1. — P. 41–47.
140. *Kress R.* Linear integral equations. — New York: Springer-Verlag, 1999. — 365 p.
141. *Kolk E.W., Baken N.H.G., Blok H.* Domain integral equation analysis of integrated optical channel and ridge waveguides in

- stratified media // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. — 1990. — V. 38. — P. 78–85.
142. Kornilov G.P., Dautov R.Z., Karchevskii E.M. A new method for the computation of eigenmodes in dielectric waveguides // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory; Dnepropetrovsk, Ukraine, September 14–17, 2004: Proceedings. — Dnepropetrovsk, 2004. — P. 266–268.
  143. Lebaud M.P. Error estimates in an isoparametric finite element eigenvalue problem // Math. Comp. — 1994. — V. 63, № 207. — P. 19–40.
  144. Marcuse D. Theory of Dielectric Optical Waveguides. — New York: Academic Press, 1974. — 576 p.
  145. Mikhlin S.G., Prössdorf S. Singular Integral Operators. — Berlin: Springer-Verlag, 1986. — 528 p.
  146. Müller C. Grundprobleme der Mathematischen Theorie Elektromagnetischer Schwingungen. — Berlin: Springer, 1957. — 345 p.
  147. Nosich A.I. On correct formulation and general properties of wave scattering by discontinuities in open waveguides // Proc. of Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET 90). — Gurfuz, 1990. — P. 100–112.
  148. Nosich A.I. Radiation conditions, limiting absorption principle, and general relations in open waveguide scattering // J. Electromag. Waves Applicat. — 1994. — V. 8, № 3. — P. 329–353.
  149. Neumaier A. Residual inverse iteration for the nonlinear eigenvalue problem // SIAM J. Numer. Anal. — 1985. — V. 22, № 5. — P. 914–923.
  150. Osborn J.E. Spectral approximations for compact operators // Math. Comp. — 1975. — V. 29, № 131. — P. 712–725.
  151. Pedreira D.G., Joly P. A method for computing guided waves in integrated optics. Part I. Mathematical analysis // SIAM J. Numer. Analysis. — 2001. — V. 39. — P. 596–623.

152. Reichardt H. Ausstrahlungsbedingungen für die Wellengleichung // Abh. Mathem. Seminar Univ. Hamburg. — 1960. — V. 24. — P. 41–53.
153. Shestopalov Yu.V., Smirnov Yu.G., Chernokozhin E.V. Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics. — VSP, 2000. — 117 p.
154. Splunter J.M., Blok H., Baken N.H.G., Dane M.F. Computational analysis of propagation properties of integrated-optical waveguides using a domain integral equation // Proc. URSI Int. Symp. on EM Theory. — Budapest, 1986. — P. 321–323.
155. Steinberg S. Meromorphic families of compact operators // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1968. — V. 31, № 5. — P. 372–379.
156. Urbach H.P. Analysis of the domain integral operator for anisotropic dielectric waveguides // SIAM J. Math. Anal. — 1996. — V. 27. — P. 204–220.
157. Vainikko G. Über die Konvergenz und Divergenz von Näherungsmethoden bei Eigenwertproblemen // Math. Nachr. — 1977. — V. 78. — P. 145–164.
158. Vanmaele M., Zenishek A. The combined effect of numerical integration and approximation of the boundary in the finite element method for eigenvalue problems // Numer. Math. — 1995. — V. 71. — P. 253–273.
159. Zlamal M. Curved elements in finite element method. I. // SIAM J. Numer. Anal. — 1973. — V. 10, № 1. — P. 229–240.
160. Zlamal M. Curved elements in finite element method. II. // SIAM J. Numer. Anal. — 1974. — V. 11, № 2. — P. 347–362.

152. Reichardt H. Ausstrahlungsbedingungen für die Wellengleichung // Abh. Mathem. Seminar Univ. Hamburg. — 1960. — V. 24. — P. 41–53.
153. Shestopalov Yu. V., Smirnov Yu. G., Chernokozhin E. V. Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics. — VSP, 2000. — 117 p.
154. Spünster J. M., Blok H., Baken N. H. G., Dane M. F. Computational analysis of propagation properties of integrated-optical waveguides using a domain integral equation // Proc. URSI Int. Symp. on EM Theory. — Budapest, 1986. — P. 321–323.
155. Steinberg S. Meromorphic families of compact operators // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1968. — V. 31, № 5. — P. 372–379.
156. Urbach H. P. Analysis of the domain integral operator for anisotropic dielectric waveguides // SIAM J. Math. Anal. — 1996. — V. 27. — P. 204–220.
157. Vainikko G. Über die Konvergenz und Divergenz von Näherungsmethoden bei Eigenwertproblemen // Math. Nachr. — 1977. — V. 78. — P. 145–164.
158. Vanmaele M., Zenishek A. The combined effect of numerical integration and approximation of the boundary in the finite element method for eigenvalue problems // Numer. Math. — 1995. — V. 71. — P. 253–273.
159. Zlamal M. Curved elements in finite element method. I. // SIAM J. Numer. Anal. — 1973. — V. 10, № 1. — P. 229–240.
160. Zlamal M. Curved elements in finite element method. II. // SIAM J. Numer. Anal. — 1974. — V. 11, № 2. — P. 347–362.

ДАУТОВ Рафаил Замилович  
КАРЧЕВСКИЙ Евгений Михайлович

# МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ТОЧНЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ТЕОРИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

Подписано в печать 27.04.09.

Бумага офсетная. Печать ризографическая.

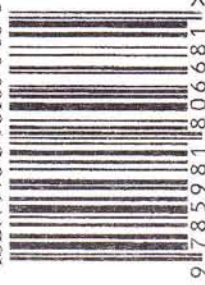
Формат 60х84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 15,75.  
Уч.-изд. л. 16,64. Тираж 100 экз. Заказ 53/1

Казанский государственный университет

Отпечатано с готового оригинала-макета  
в типографии Издательства  
Казанского государственного университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нухина, 1/37  
тел. 231-53-59, 292-65-60

ISBN 978-5-98180-668-1



9 785981 180681 >