

Датуеву 2.10.



ВЕСТНИК

**КАЗАНСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
ИМ. А.Н. ТУПОЛЕВА**

2007

4

УДК 533.9.011(031)

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПОТЕНЦИАЛА И КОНЦЕНТРАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЫЛЕВОЙ ПЛАЗМЕ

© 2007 г. Г.Ю. Даутов, докт. техн. наук, Ш.Р. Сабитов, канд. техн. наук, И.И. Файрушин, студент

КГТУ им. А.Н. Туполева, Казань

Получено аналитическое решение уравнения Пуассона – Больцмана для пылевой плазмы. Найдены формулы для распределений потенциала и концентрации электронов. Рассчитаны зависимости распределения концентрации электронов от температуры, радиуса твердых частиц и расстояния между ними.

Пылевая плазма представляет собой ионизованный газ, содержащий частицы конденсированного вещества. Пыль и пылевая плазма широко распространены в космосе. Они присутствуют в планетных кольцах, хвостах комет, в межпланетных и межзвездных облаках. Пылевая плазма обнаружена вблизи искусственных спутников Земли и космических аппаратов, в термоядерных установках с магнитным удержанием [1]. В технологических процессах нанесения пленок на поверхности деталей в поток нагретого газа специально вводятся порошки различных материалов и в результате возникает пылевая плазма. Такая плазма возникает и в двигателях летательных аппаратов, генераторах дуговой плазмы и тлеющем разряде [2, 3]. Явления вблизи поверхности электропроводного тела играют важную роль также в ряде физических процессов и технике.

Основной проблемой теории пылевой плазмы является определение распределений потенциала и концентрации электронов. В работе [4] рассматривалась термоэмиссионная ионизация в дисперсных плазменных системах; в статье [5] получены формулы для распределений потенциала и концентраций электронов у поверхности твердого тела при отсутствии термической ионизации газа; в исследовании [6] найдены распределения концентраций электронов и ионов с учетом ионизации газа у поверхности твердого тела. Однако наиболее интересный случай, когда эмиссия электронов происходит из множества мелких частиц, до сих пор остается мало исследованным. В статье [7] получена формула для распределения потенциала в пылевой плазме в виде ряда, коэффициенты которого определяются из рекуррентных формул. Однако в этой работе не учитываются распределение потенциала и свойства электронного газа внутри твердых частиц. В данной работе получены точные формулы для распределений потенциала и концентрации электронов в пылевой плазме с учетом процессов внутри твердых частиц.

Рассмотрим распределения потенциала и концентрации электронов в пылевой плазме. Будем считать, что расстояние между двумя соседними твердыми частицами $2l$, радиус твердой частицы R , ее электронный газ в зоне проводимости является невыро-

жденным, концентрации электронов и ионов соответственно равны n_e и n_i . Теорема Гаусса для области $0 \leq r \leq R$ записывается в виде

$$\oint_S \epsilon \epsilon_0 E_n dS = \iiint_V (n_i - n_e) q dV, \quad (1)$$

где ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость среды; ϵ_0 – электрическая постоянная; E_n – проекция напряженности электрического поля на внешнюю нормаль поверхности S ; V – объем внутри S ; q – абсолютное значение заряда электрона. В случае сферически симметричной задачи из уравнения (1) для потенциала электрического поля ϕ получается формула

$$r^2 (n_i - n_e) q = -\epsilon \epsilon_0 \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right). \quad (2)$$

Из распределения Больцмана для электронов

$$n_e = n_{e0} e^{\frac{q\phi}{kT}} \quad (3)$$

и (2) следует уравнение Пуассона – Больцмана

$$\frac{\epsilon \epsilon_0}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = \left(n_{e0} e^{\frac{q\phi}{kT}} - n_i \right) q. \quad (4)$$

Здесь k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура. Введением безразмерных величин

$$\frac{r}{R} = x, \quad \frac{q\phi}{kT} = \phi_1, \quad \frac{n_i}{n_{e0}} = \bar{n}_i$$

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\phi_1}{dx} \right) - a^2 (e^{\phi_1} - \bar{n}_i) = 0; \quad a^2 = \frac{q^2 R^2 n_{e0}}{kT \epsilon \epsilon_0}. \quad (5)$$

Рассмотрим случай, когда $|\phi_1| \ll 1$. Разложим величину e^{ϕ_1} в ряд и ограничимся первыми двумя членами

$$e^{\phi_1} = 1 + \phi_1.$$

С учетом этого из выражения (5) получим

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\phi_1}{dx} \right) = a^2 (1 + \phi_1 - \bar{n}_i).$$

Если ввести функции $xu = W$; $1 + \phi_1 - \bar{n}_i = y$, это уравнение приводится к виду

$$\frac{d^2W}{dx^2} - a^2W = 0. \quad (6)$$

Общим решением этого уравнения является

$$W = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}.$$

Отсюда находим

$$\phi_1(x) = \bar{n}_i - 1 + \frac{C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}}{x}. \quad (7)$$

Выберем C_1 и C_2 с учетом условия

$$\phi_1(0) = 0. \quad (8)$$

Из уравнения (7) видно, что величина $\phi_1(0)$ будет ограниченной только тогда, когда функция

$$y(x) = \frac{C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}}{x}$$

в точке $x = 0$ будет представлять неопределенность вида $0/0$.

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} = C_1 + C_2 = 0; \quad C_1 = -C_2.$$

Найдем значение $\phi_1(x)$ при $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \phi_1(x) &= \bar{n}_i - 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{C_1 (e^{ax} - e^{-ax})}{x} = \\ &= -\bar{n}_i - 1 + \frac{C_1 (a+a)}{1} = \bar{n}_i - 1 + 2C_1 a. \end{aligned}$$

Отсюда и из условия (8) находим

$$\bar{n}_i = 1 - 2C_1 a. \quad (9)$$

Таким образом,

$$\phi_1(x) = C_1 \left(\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{x} - 2a \right). \quad (10)$$

Введем величину $\lambda = l/R$, где $2l$ - расстояние между двумя соседними частицами. В области $1 \leq x \leq \lambda$ ионы отсутствуют: $\bar{n}_i = 0$.

Тогда формула (7) для случая $1 \leq x \leq \lambda$ имеет вид:

$$\phi_2(x) = -1 + \frac{D_1 e^{ax} + D_2 e^{-ax}}{x}. \quad (11)$$

Отсюда следует

$$\phi_2'(x) = \frac{(D_1 a e^{ax} - D_2 a e^{-ax})x - (D_1 e^{ax} + D_2 e^{-ax})}{x^2}. \quad (12)$$

Одним из граничных условий для $\phi_2(x)$ является

$$\phi_2'(\lambda) = 0. \quad (13)$$

Из формул (12) и (13) находим

$$\phi_2'(\lambda) = \frac{(D_1 a e^{a\lambda} - D_2 a e^{-a\lambda})\lambda - (D_1 e^{a\lambda} + D_2 e^{-a\lambda})}{\lambda^2}; \quad (14)$$

$$D_2 = D_1 \frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} e^{2a\lambda}.$$

Таким образом, распределение безразмерного потенциала в этой области описывается формулой

$$\phi_2(x) = -1 + D_1 \frac{e^{ax} + \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{a(2\lambda - x)}}{x}. \quad (15)$$

При $x = 1$ должны выполняться граничные условия:

$$\phi_1(1) = \phi_2(1); \quad \phi_1'(1) = \phi_2'(1). \quad (16)$$

Из формул (10) и (15) находим

$$\phi_1(1) = C_1 (e^a - e^{-a} - 2a);$$

$$\phi_2(1) = -1 + D_1 \left(e^a + \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{a(2\lambda - 1)} \right);$$

$$\phi_1'(1) = C_1 [e^a (a-1) + e^{-a} (a+1)]; \quad (17)$$

$$\phi_2'(1) = D_1 \left(e^a (a-1) - \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{a(2\lambda - 1)} (a+1) \right);$$

$$C_1 = \frac{D_1 \left(e^a (a-1) - \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{a(2\lambda - 1)} (a+1) \right)}{[e^a (a-1) + e^{-a} (a+1)]};$$

$$D_1 = \frac{e^a (a-1) + e^{-a} (a+1)}{2a \left(e^a (a-1) - (a+1) \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{a(2\lambda - 1)} + 1 + \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{2a\lambda} \right)}; \quad (18)$$

$$C_1 = \frac{e^a (a-1) - \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{a(2\lambda - 1)} (a+1)}{2a \left(e^a (a-1) - (a+1) \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{a(2\lambda - 1)} + 1 + \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{2a\lambda} \right)}. \quad (19)$$

Используя выражение (3), записываем формулу для распределения концентрации электронов

$$n_e = n_{e0} \exp \left[C_1 \left(\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{x} - 2a \right) \right], \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (20)$$

$$n_e = n_{e0} \exp \left[-1 + D_1 \frac{e^{ax} + \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{a(2\lambda - x)}}{x} \right], \quad 1 \leq x \leq \lambda, \quad (21)$$

где D_1 и C_1 определяются из выражений (18) и (19) соответственно.

(13) Из приведенных формул видно, что распределения безразмерных концентраций электронов и потенциала являются функциями безразмерных величин a, λ, x , т.е.:

$$(14) \quad \phi_1 = f_1(a, \lambda, x); \quad \phi_2 = f_2(a, \lambda, x); \quad (22)$$

$$\bar{n}_e = \frac{n_e}{n_{e0}} = f_3(a, \lambda, x).$$

Таким образом, величины

$$(15) \quad a = Rq \sqrt{\frac{n_{e0}}{kT\epsilon_0 \epsilon}}; \quad \lambda = \frac{l}{R} \quad (23)$$

являются критериями подобия для данной задачи. Следовательно, при $a = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$ обобщенные распределения $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\bar{n}_e(x)$ совпадают.

Рассчитаем количество электронов, вышедших за пределы частицы. Запишем теорему Гаусса для частицы с радиусом R

$$E4\pi R^2 = \frac{N_e q}{\epsilon_0 \epsilon},$$

где N_e – количество электронов.

Отсюда получим

$$(17) \quad N_e = \frac{4\pi R \epsilon_0 k T}{q^2} \phi_1'(1), \quad (24)$$

где $\phi_1'(1)$ определяется по формуле (17). Из формул (17) и (19) находим

$$(18) \quad \phi_1'(1) = \frac{\left[e^a(a-1) - \left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1} \right) e^{a(2\lambda-1)}(a+1) \right] \left[e^a(a-1) + e^{-a}(a+1) \right]}{2a \left[e^a(a-1) - (a+1) \left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1} \right) e^{a(2\lambda-1)} + 1 + \left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1} \right) e^{2a\lambda} \right]}. \quad (25)$$

Как видно из рис. 1, a внутри частицы с ростом r потенциал сначала уменьшается очень медленно. Затем при приближении к поверхности частицы он уменьшается очень быстро. Это объясняется возникновением очень большого градиента концентрации электронов вблизи поверхности. Соответственно возникает большая напряженность электрического поля. Из выражения (25) и выражения для безразмерного потенциала находим

$$\phi = \frac{\phi_1 k T}{q}; \quad E = -\frac{d\phi}{dr} = -\frac{k T}{q R} \phi_1'(x); \quad (26)$$

$$(19) \quad E(R) = \frac{k T}{q R} \frac{\left[e^a(a-1) - \left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1} \right) e^{a(2\lambda-1)}(a+1) \right] \left[e^a(a-1) + e^{-a}(a+1) \right]}{2a \left[e^a(a-1) - (a+1) \left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1} \right) e^{a(2\lambda-1)} + 1 + \left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1} \right) e^{2a\lambda} \right]}.$$

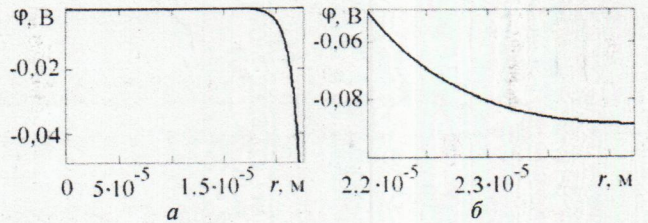


Рис. 1. Распределение потенциала при $T=1000$ К, $R=20 \cdot 10^{-6}$ м, $n_{e0}=10^{18}$ м $^{-3}$, $\lambda=1,1$: a – внутри частицы; b – за пределами частицы

Расчет по этой формуле при $T=1000$ К, $R=20 \cdot 10^{-6}$ м, $n_{e0}=10^{18}$ м $^{-3}$, $\lambda=1,1$ дает $E(R)=1,646 \cdot 10^4$ В/м. В области $R \leq r \leq l$ с ростом r сначала ϕ уменьшается очень быстро, затем очень медленно уменьшается до значения $\phi(l)$.

Поскольку потенциал и концентрация электронов непосредственно связаны формулой Больцмана (3), с ростом r в области $r \approx R$ величина n_e резко уменьшается. С удалением от частицы скорость изменения n_e уменьшается и в точке $r=l$ выполняется условие

$$\frac{dn_e}{dr} = 0.$$

Сравнение графиков рис. 2, a показывает, что при более высоких температурах с ростом r внутри частицы концентрация электронов уменьшается быстрее. Однако концентрация электронов вне частицы с повышением температуры растет, что видно из сравнения графиков рис. 2, b , которые показывают, что основная часть заряда находится у поверхности частицы, т.е. пылевая частица окружена довольно плотным электронным облаком.

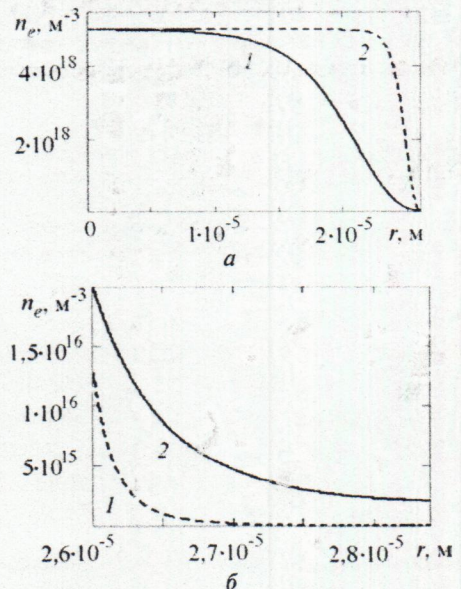


Рис. 2. Распределение концентрации электронов при $R=20 \cdot 10^{-6}$ м, $n_{e0}=10^{18}$ м $^{-3}$, $\lambda=1,1$ (кривые 1, 2 соответствуют $T=1000$ К; $T=2000$ К): a – внутри частицы; b – за пределами частицы

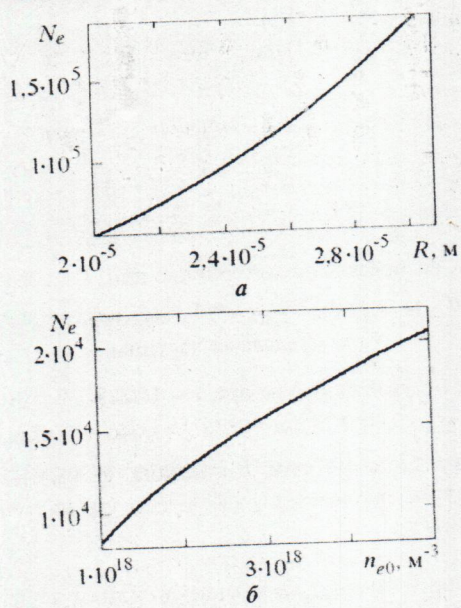


Рис. 3. Зависимость количества электронов, вышедших за пределы частицы: а – от радиуса частицы при $T=1000$ К, $n_{e0}=10^{18}$ м⁻³; б – от начальной концентрации электронов при $R=20 \cdot 10^{-6}$ м, $T=1000$ К.

Как и следовало ожидать, N_e с ростом R , n_{e0} и T увеличивается. Из рис. 3 видно, что при указанных параметрах частица испускает порядка $10^4 - 10^5$ электронов. Это говорит о высокой эффективности

использования твердых частиц с целью повышения электропроводности плазмы при низких температурах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фортков В.Е., Храпак А.Г., Якубов И.Т. Физика неидеальной плазмы: Учебное пособие. М.: Физматлит, 2004. 528 с.
2. Донской А.В., Клубникин В.С. Электроплазменные процессы и установки в машиностроении / Л.: Машиностроение, 1979. 221 с.
3. Гречихин Л.И., Пушкин Н.М. Влияние сажевых частиц на термодинамическое состояние газов при различных температурах / Изв. вузов. Авиационная техника. 1983. № 1. С. 84 – 88.
4. Мусин А.К. Термоэмиссионная ионизация в дисперсных плазменных системах. Алма-Ата, 1970. С. 3 – 7.
5. Даутов Г. Ю., Даутова Д.И., Сабитов Ш.Р., Султанов В.В. Распределение концентрации электронов и потенциала у поверхности проводника / Казань: Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 1999. № 2. С. 57 – 61.
6. Dautov G.Y., Dautov I.G., Aslan O. Potential distribution near the surface of a solid body in dusty plasma. Contributed Papers // XII International Conference on the Methods of Aerophysical Research, Novosibirsk, Russia. 28 June – 3 July 2004. Part III. P. 45 – 49.
7. D'yachkov L.G. Electrostatic interaction of charged dust grains in a thermal plasma // Contributed Papers of IV International Conference «Plasma Physics and Plasma Technology». Minsk, Belarus. September 15 – 19, 2003. P. 845 – 848.

Поступила в редколлегию 19.12.06

STUDIES OF DISTRIBUTIONS OF POTENTIAL AND CONCENTRATIONS OF ELECTRONES IN DUST PLASMA

G.Yu. Dautov, Sh.R. Sabitov, and I.I. Fairushin

In this paper, we present the analytical solution of Poisson-Boltzmann equation for dust plasma and some formulas of distributions of electrons' potential and their concentrations. Also given are the dependences of electrons concentration distributions on temperature, radius of solid particles, and distance between them.

Син
троско
техниче
ском
раторн
венног
лись р
ден в
которь
с соста
Со
куляр
го от
рубин
водки

Обозн
Обозн
Обозн