Тронин Сергей Николаевич, *к.ф.-м.н, доцент, г.Казань*
Казанский государственный университет имени В.И.Ульянова-Ленина

Наблюдаемое и ненаблюдаемое в математике-2

В работе [1] была предпринята попытка описать один общий принцип, который может быть использован, в частности, для разработки вопросов, связанных с существованием математических объектов. Напомним его вкратце. Исходными понятиями являются Наблюдение (понимаемое весьма широко), Наблюдатель и Система. Следует уточнить сказанное в [1], введя понятие Инструмента (или Средства) Наблюдения, находящегося в определенных отношениях с Наблюдателем. Постулируется утверждение, названное в [1] "Обобщенным принципом Бора" (ОПБ). Оно состоит из следующих двух пунктов:

1) У любой Наблюдаемой Системы имеется невидимая (недоступная, запретная, непостигаемая, недоказуемая) для Наблюдателя часть (зависящая, разумеется, от Инструмена Наблюдения).

2) Если Наблюдение (в частности, постижение, воздействие) охватывает достаточно большую часть Системы, то ее онтологический статус (статус не вообще, а для того или иного Наблюдателя) необратимо меняется.

Если теперь связать существование с наблюдаемостью, и принять ОПБ, то оказывается, что неполная ненаблюдаемость является критически значимой для существования объекта.

Следует отметить, что утверждения, весьма близкие по сути к ОПБ, можно найти в самых разнообразных источниках. Вот одно из них [2, с.205]: «То, что полностью контролируемо, никогда не бывает вполне реальным. То, что реально, никогда не бывает вполне контролируемым». Авторы [2] утверждают, что эта идея (хотя и не сама формулировка) принадлежит В.В.Набокову, но тут же оговариваются: «там, где дело касается физики, наши ожидания, очевидно, совершенно иные». Думается, однако, что и случае физики не все так однозначно.

Действие ОПБ можно усмотреть, например, в концепции бесконечных множеств, предложенной в книге [3]. Исходным пунктом является утверждение о принципиальной невозможности наблюдать (контролировать) сразу все подмножества любого конечного множества. Ненаблюдаемые подклассы конечных подмножеств уже нельзя считать конечными совокупностями, ибо конечное мыслится наблюдаемым. Однако если мы переходим на традиционную точку зрения, и все подмножества наблюдаемы (и сами являются конечными множествами), то от концепции, предложенной в [3], по сути, ничего не остается.

В нестандартном (инфинитезимальном) анализе [4] стандартные элементы множества можно считать его наблюдаемой частью. Полностью наблюдаемыми являются лишь конечные множества. Бесконечно большие и бесконечно малые величины оказываются при таком подходе (т.е. при таком выборе Инструмента Наблюдения) ненаблюдаемыми, что не мешает им быть вполне реальными.

Аналогичным образом можно и в традиционной теории множеств рассматривать как полностью наблюдаемые только конечные множества. При этом в любом множестве ни одно подмножество не является полностью ненаблюдаемым. Хорошо известно, что попытки устранить из математики не полностью наблюдаемые (т.е. актуально бесконечные) множества неуклонно приводили к разрушению самой ценной части математического знания, причем именно той части, которая находит наибольшие применения за пределами чистой математики.

Понятно, что сама традиционная теория множеств является, по сути, метатеорией, т.е. Инструментом Наблюдения за другими теориями. В частности, и за теорией топосов [5]: трудно пока представить, как можно совсем обойтись при изложении теории топосов без теоретико-множественного языка (хотя принципиальная возможность как будто бы имеется).

Хочется отметить наличие существенных аналогий между ситуацией, связанной с открытием неевклидовых геометрий, и ситуацией, сложившейся в связи с исследованиями в области теории топосов. Почти сто лет теоретико-множественная математика (математика в топосе множеств) была фактически «всей математикой». Но в начале 1980-х годов стало ясно, что подобных «математик» (и соответствующих им топосов) необозримо много, и что теоретико-категорный язык теории топосов позволяет достаточно свободно обращаться с такими «математиками» как с рядовыми единичными объектами. Первоначально топосы обнаружились как бы внутри классической теоретико-множественной математики (поскольку и теория категорий тогда еще воспринималась как ее внутренняя составная часть). Коллективный Наблюдатель (Гротендик, Ловер, Тирни и другие) с помощью соответствующего Инструмента глубоко проник в Наблюдаемую Систему (теоретико-множественную математику), и обнаружил нечто, в конце концов вышедшее далеко за рамки этой Системы. В результате онтологический статус теории множеств стал существенно иным, чем прежде (по крайней мере, для людей, знакомых с сутью дела), что и утверждается в ОПБ.

Аналогичным образом можно описать ситуацию с неевклидовыми геометриями. Их реальность стала очевидной после того, как были найдены соответствующие реализации (модели) внутри евклидовой геометрии, и это повлекло многочисленные и хорошо известные не только математические, но и мировоззренческие последствия. Весь этот процесс также вписывается в рамки того, что утверждается в ОПБ.

В заключение еще несколько общих соображений. Мы рассматриваем ситуации, когда Наблюдение меняет восприятие сущности рассматриваемого объекта. Исследование в конечном итоге (и в определенном смысле) может уничтожить сам объект исследования, аналогично тому, как неосторожное обращение с непроявленной фотопленкой пленку эту засвечивает. Можно привести массу подобных примеров, и не только в математике. Поскольку интерес исследователя есть важнейший признак существования объекта исследования, то уничтожаться может в каких-то случаях (а в конечном счете очень часто) именно этот интерес. Интересующие нас объекты лишь частично (и в очень небольшой степени) видимы над Горизонтом Наблюдателя (каким бы Инструментом тот ни пользовался), и превращаются во что-то смутное при попытках вытащить их целиком, и втиснуть в рамки традиционного философского языка. Этот феномен естественнее всего обсуждать в сравнении с другими подобными явлениями (а может быть, и в более широком контексте, чем контекст философии математики). Возможно, что здесь могут пригодиться некоторые идеи В.В.Налимова (см., например, [8]).

Литература

1. Тронин С.Н. Наблюдаемое и ненаблюдаемое в математике // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Международной научной конференции 15-16 июня 2007 г. М., Изд. Савин С.А., 2007. С. 72-74.
2. Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. Изд. 6-е. М., 2005.
3. Вопенка П. Математика в альтернативной теории множеств. М., 1983.
4. Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Нестандартгые методы анализа. Новосибирск, 1990.
5. Mac Lane S., Moerdijk I. Sheaves in Geometry and Logic. Springer-Verlag New York Inc., 1992.
6. Налимов В.В. Разбрасываю мысли. В пути и на перепутье. М., 2000.