

МАТРОИДНЫЙ ВАРИАНТ ФОРМУЛЫ МАТИЯСЕВИЧА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Э. Ю. Лернер

Основная цель доклада — дать простой вывод формулы, выражающей характеристический многочлен произвольного матроида через линейную комбинацию характеристических многочленов двойственных матроидов и рассмотреть ее приложения. В 1977 году Ю.В. Матиясевич предложил формулу, выражающую хроматический полином произвольного графа как линейную комбинацию потоковых многочленов подграфов исходного графа. Мы докажем, что это представление является частным случаем (легко доказываемого) представления характеристического полинома произвольного матроида в виде линейной комбинации характеристических полиномов двойственных матроидов. В качестве приложений мы рассматриваем явное выражение для потокового многочлена полного графа и формулу для характеристического полинома матроида, двойственного к матроиду проективной геометрии над конечным полем.

Напомним, что *матроидом* $M = (E, r)$ называется множество E (мы будем рассматривать случай только конечных множеств) с функцией $r \equiv r_M$, определенной на всех подмножествах 2^E множества E и принимающей неотрицательные целые значения $\mathbb{N}_0$, обладающей свойствами:

- (1) Если $A \subseteq E$, то $0 \leq r(A) \leq |A|$.
- (2) Если $A \subseteq B \subseteq E$, то $r(A) \leq r(B)$.
- (3) Если $A \subseteq E$ и $B \subseteq E$, то $r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B)$.

Двойственный матроид $M^* = (E, r^*)$ к матроиду $M = (E, r)$ задается ранговой функцией r^* , заданной соотношением: $r^*(A) = r(E - A) + |A| - r(E)$ для любого $A \subseteq E$. Пусть $C \subseteq E$ и $B = E - C$. *Сужением* матроида $M = (E, r)$ посредством C называется матроид $M/C = (B, r_B)$ где $r_{M/C}(A) = r_M(C \cup A) - r_M(C)$ для любого $A \subseteq B$. *Характеристический многочлен* χ_M матроида $M = (E, r)$ определяется как

$$\chi_M(x) = \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} x^{r(E) - r(A)}.$$

Теорема 1. *Имеет место формула*

$$(1) \quad \chi_{M^*}(x) = \frac{(-1)^{|E|}}{x^{r(E)}} \sum_{A \subseteq E} (1 - x)^{|A|} \chi_{M/A}(x).$$

Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф с множеством вершин V и множеством ребер E и $x \in \mathbb{N}$. Количество правильных раскрасок вершин графа в x цветов определяет *хроматический многочлен* графа $P_G(q)$. Многочлен $P_G(x)$ делится на $x^{c(G)}$, где $c(G)$ — количество компонент связности графа G . Его нормированная версия $P'_G(x) = P_G(x)/x^{c(G)}$ совпадает с характеристическим многочленом так называемого графического матроида. Характеристический многочлен двойственного матроида M_G^* есть так называемый *потоковый многочлен* F_G .

В качестве частного случая формула (1) (точнее, небольшая ее модификация) содержит формулу Матиясевича, выражающую хроматический многочлен графа через линейную комбинацию потоковых многочленов подграфов. Другой случай формулы (1) позволяет выразить потоковый многочлен графа через линейную комбинацию хроматических многочленов фактор-графов. Последнее выражение дает возможность вычислить потоковый многочлен полных графов для размерностей недоступных при традиционном подходе.

Разбиением λ натурального числа n называется его представление в виде суммы натуральных слагаемых, при этом две суммы, отличающиеся порядком слагаемых считаются одинаковыми. Для общего количества разбиений $p(n)$ имеется знаменитая формула, установленная Харди и Рамануджаном (уточненная Радемахером). Асимптотика для $p(n)$ субэкспоненциальна и $p(50)$, в частности, это лишь 204 226. В то же время подсчет на компьютере $F_{K_n}(x)$ при $n = 50$ стандартными (неспецифицированными для полных графов) способами невозможен, поскольку время вычисления растет быстрее чем $\exp(n)$. Мы сведем подсчет $F_{K_n}(x)$ к суммированию $p(n)$ слагаемых и решим задачу подсчета $F_{K_n}(x)$ для $n \sim 50$.

Напомним теперь, что элементы множества E матроида $PG(n-1, q)$ определяются как все точки *проективного пространства размерности $n-1$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$* . Ранг подмножества A множества E определяется как размерность линейного пространства порожденного A . Легко проверить, что $|E| = \frac{q^n - 1}{q - 1} = \binom{n}{1}_q$, где q -биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}_q$, $n, k \in \mathbb{N}_0$, определяется по формуле

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \cdots (q - 1)}.$$

Применение Теоремы 1 в этом случае позволяет получить следующий результат.

Теорема 2. *Характеристический многочлен матроида, двойственного к $PG(n-1, q)$, может быть найден по формуле*

$$\chi_{PG(n-1, q)^*}(x) = \frac{(-1)^{\frac{q^n - 1}{q - 1}}}{x^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q (1 - x)^{\frac{q^k - 1}{q - 1}} \prod_{i=0}^{n-k-1} (x - q^i).$$

Старшие его коэффициенты так же как и в случае $F_{K_n}(x)$ совпадают (с точностью до альтернирующих знаков) с началом строки треугольника Паскаля. Например, для матроида, двойственного матроиду Фано $F_7 = PG(2, 2)$, имеем

$$\chi_{F_7^*}(x) = \mathbf{1} x^4 - \mathbf{7} x^3 + \mathbf{21} x^2 - 28x + 13.$$

Более подробный вариант со всеми доказательствами и с обсуждением связи с полиномом Татта представлен в препринте [1].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект N 24-21-00158).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Lerner, E. Yu.* Matroid variant of Matiyasevich formula and its application. arXiv:2404.09347, DOI: 10.48550/arXiv.2404.09347 (2024).

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, КАЗАНЬ, РОССИЯ
Email address: `eduard.lerner@gmail.com`