ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГАЙНУТДИНОВ Р.Х., МУТЫГУЛЛИНА А.А.

ПАРАДОКСЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ: ПАРАДОКС ЗЕНОНА

Учебно-методическое пособие.

Казань 2009

Печатается по решению Редакционно-издательского совета физического факультета

УДК 530.145

Гайнутдинов Р.Х., Мутыгуллина А.А. Парадоксы квантовой механики: квантовый парадокс Зенона. Учебное пособие для магистрантов 1 года обучения физического факультета. Казань 2009, 18 с.

Рассматривается квантовый парадокс Зенона, в котором проявляются экстраординарные свойства квантовой динамики на малых временах. Основное внимание уделяется разъяснению динамических причин этого парадокса и вопросу о том, является ли он неизбежным следствием квантовой теории.

Рецензент(ы):
Нефедьев Л.А., д.ф.-м.н., зав. кафедрой общей физики Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета

Издание подготовлено при поддержке гранта Президента РФ НШ-2965.2008.2

1. Введение

Сразу после того, как были заложены основы современной квантовой механики, стало ясно, что она содержит принципиально новые, противоречащие интуиции черты, которые нашли свое выражение в парадоксах квантовой механики, таких как парадоксы Эйнштейна-Подольского-Розена, Ааронова-Бома и так называемый квантовый парадокс Зенона. Открытие этих парадоксов разделило физиков на два лагеря. Одни считали, что парадоксы свидетельствуют о неполноте и даже противоречивости квантовой механики. Например, Эйнштейн считал квантовую теорию либо ошибочной, либо в лучшем случае *«истинной наполовину»*. При этом наибольшее неприятие у Эйнштейна вызывал принцип неопределенности, согласно которому невозможно одновременно определить точно положение и скорость частицы. Широко известно его изречение *«Бог не играет в кости»*. Мысленный эксперимент Эйнштейна-Подольского-Розена (ЭПР) [1] должен был продемонстрировать возможность сколь угодно точно измерить координаты частицы и ее импульс, т.е. возможность обойти принцип неопределенности.

Другая группа физиков, наиболее ярким выразителем взглядов которой был Нильс Бор, считали квантовую неопределенность неотъемлемой чертой природы. По мнению Бора [2], предположение о том, что две частицы можно рассматривать как изолированные и независимые физические объекты только потому, что они удалились друг от друга на большее расстояние, в корне ошибочно. Две частицы в случае ЭПР всегда являются частями одной квантовой системы и, следовательно, измерение над одной из частиц меняет предсказания, которые можно сделать для всей системы, а значит и для другой частицы.

Возможность экспериментальной проверки того, какой из этих двух подходов является верным, появилось после того, как в 1966 году Джон Белл [3] показал, что для некоторых систем можно сделать определенные экспериментальные предсказания, которые в случае нарушения принципа неопределенности не подтвердились бы. В проведенных после этого экспериментах [4,5] нашли свое подтверждение предсказания квантовой механики, что означало, что Эйнштейн был неправ. Несмотря на это в настоящее время все же еще нельзя утверждать, что дан исчерпывающий ответ на аргументы ЭПР. Квантовая механика, как и любая теория, не является “истиной в последней инстанции”, и, несмотря на то, что на протяжении почти ста лет ее существования она неизменно доказывала свою предсказательную силу, у нее имеются проблемы, являющиеся более существенными, чем проблемы, связанные с ЭПР и другими квантовыми парадоксами. До сих пор, несмотря на огромные усилия, не удается решить проблему ультрафиолетовых (УФ) расходимостей в квантовой теории поля, что является следствием несовместимости принципов квантовой механики, связанных с описанием квантовой динамики, с принципом релятивистской инвариантности. Теория перенормировок не решает эту проблему. Как писал Ричард Фейнман, она позволяет лишь *«замести проблему под ковер».* Рано или поздно места под ковром может и не хватить. Это может произойти после того, как начнет выдавать экспериментальную информацию Большой адронный коллайдер. В свою очередь это может привести к необходимости создания новой квантовой теории, в которой квантовая механика, с которой мы имеем дело сегодня, будет играть ту же роль, какую в настоящее время играет классическая физика: она будет рассматриваться как приближенная теория, эффективно работающая в области ее применимости.

Для этих целей результаты исследований и дискуссий, связанных с парадоксами квантовой теории, могут оказаться чрезвычайно полезными. Кроме того, многие идеи, имеющие отношения к этим парадоксам, на сегодняшний день находят практическое приложение. Например, в настоящее время широко обсуждается использование парадокса Зенона. Здесь мы рассмотрим этот парадокс, который из-за его практических приложений все чаще называют квантовым эффектом Зенона. Важность этого парадокса также обусловлена тем, что он отражает экстраординарные свойства квантовой динамики на малых временах, которые могут иметь непосредственное отношение к проблеме ультрафиолетовых расходимостей.

В 1977 году Байдьянат Мизра и Джордж Сударшан показали [6] в рамках квантовой механики, что непрерывное наблюдение за процессом радиоактивного распада делает распад невозможным (наблюдения за системой приводят к замораживанию динамической эволюции). Это явление они назвали ***квантовым парадоксом Зенона***[1] (или квантовым эффектом Зенона) в честь древнегреческого мыслителя Зенона Эллейского. В настоящее время, после серии экспериментальных демонстраций [7-11], квантовый парадокс Зенона считается реальным явлением. Это явление интересно не только само по себе, но и с точки зрения практического применения. Ожидается, что квантовый эффект Зенона поможет подавить декогерентность в квантовых вычислениях [12,13] и позволит уменьшить дозы облучения при нейтронной томографии [14]. Однако стоит подчеркнуть, что с его помощью вряд ли удастся изменить период полураспада радиоактивных материалов, поскольку начинать «наблюдать» нестабильную систему надо сразу после ее приготовления, а не спустя какое-то время. Тем не менее, сейчас изучаются возможности наблюдения этого эффекта и в субатомном мире, например, в свойствах нейтринных осцилляций.

2. Классический парадокс Зенона

Название эффекта восходит к апориям греческого философа Зенона - представителя Элейской школы, ученика Парменида (ок. 515–450 г. до н. э.), который утверждал, что *истинная реальность должна быть вечной и неизменной, постижимой лишь разумом и логикой*. Парадокс Зенона (сформулированный в виде четырех апорий) показывает, что **движение, образец «видимого» изменения, логически невозможно**.

Движение невозможно. В частности, невозможно пересечь комнату, так как для этого нужно сначала пересечь половину комнаты, затем половину оставшегося пути, затем половину того, что осталось, затем половину оставшегося... Парадокс, в приведенной выше формулировке, называют ***дихотомией*** — от греч. *dichotomia* «разделение надвое».

В апории, известной под названием ***Ахилл и черепаха***, древнегреческий герой Ахилл собирается состязается в беге с черепахой. Если черепаха стартует немного раньше Ахилла, то ему, чтобы ее догнать, сначала нужно добежать до места ее старта. Но к тому моменту, как он

[1] Основные результаты, обеспечивающие существование квантового парадокса Зенона, впервые были теоретически получены в конце 50-х годов советским ученым Леонидом Халфиным. Мизра и Сударшан, не знавшие вначале о результатах Халфина, в последующих работах ссылались на них как на пионерские.

туда доберется, черепаха проползет некоторое расстояние, которое нужно будет преодолеть Ахиллу, прежде чем догнать черепаху. Но за это время черепаха уползет вперед еще на некоторое расстояние. А поскольку число таких отрезков бесконечно, быстроногий Ахилл никогда не догонит черепаху.

Вот еще одна апория, словами Зенона:

Если что-то движется, то оно движется либо в том месте, которое оно занимает, либо в том месте, где его нет. Однако оно не может двигаться в том месте, которое оно занимает (так как в каждый момент времени оно занимает все это место), но оно также не может двигаться и в том месте, где его нет. Следовательно, движение невозможно.

Этот парадокс называется ***стрела*** (в каждый момент времени летящая стрела занимает место, равное ей по протяженности, следовательно, она не движется).

Наконец, в четвертой апории речь идет о двух равных по длине колоннах людей, движущихся параллельно с равной скоростью в противоположных направлениях. Зенон утверждает, что время, за которое колонны пройдут друг мимо друга, составляет половину времени, нужного одному человеку, чтобы пройти мимо всей колонны.

Из этих четырех апорий первые три наиболее известны и наиболее парадоксальны. Четвертая просто связана с неправильным пониманием природы относительного движения.

Несмотря на нереальность парадокса Зенона, ведь можно экспериментально опровергнуть его, пересекая комнату, обгоняя черепаху или выпуская стрелу, логический способ опровержения был найден лишь в XVII веке только после того, как Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц изложили идею дифференциального исчисления, которое оперирует понятием предел, после того как научились обращаться с бесконечными и бесконечно малыми величинами.

Рассмотрим пример с пересечением комнаты. Действительно, в каждой точке пути надо пройти половину оставшегося пути, но только *на это понадобится в два раза меньше времени*. Чем меньший путь осталось пройти, тем меньше времени на это понадобится. Таким образом, вычисляя время, нужное для того, чтобы пересечь комнату, мы складываем бесконечное число бесконечно малых интервалов. Однако сумма всех этих интервалов не бесконечна, а равна некоторому конечному числу — и поэтому мы *можем* пересечь комнату за конечное время. Такой ход доказательства аналогичен нахождению предела в дифференциальном исчислении. В своем парадоксе Зенон ошибочно исходит из того, что, когда расстояние стремится к нулю, время остается прежним.

3. Квантовый эффект Зенона

Несмотря на то, что парадокс Зенона в классической формулировке опровергнут, он все же имеет право на существование. В квантовой физике есть так называемый *квантовый парадокс (или эффект) Зенона*. Суть этого эффекта состоит в том, что наблюдение за нестабильной частицей (то есть простая проверка — распалась частица или нет) вызывает замедление ее распада. В предельно жесткой формулировке утверждается, что непрерывное наблюдение за нестабильной частицей вообще не даст ей распасться. Рассмотрим теорию этого эффекта.

3.1. Теория эффекта Зенона

Рассмотрим частицу, находящуюся в начальный момент времени $t_0 = 0$ в состоянии $|\varphi_1\rangle$. Пусть над ней проводятся измерения с целью выяснить, распалась она или нет. Для простоты будем считать состояние $|\varphi_2\rangle$ – единственным ортогональным к $|\varphi_1\rangle$ состоянием, в которое частица перешла после распада. Измерения проводятся в моменты t_1, t_2, …, t_N с промежутком $\tau = t_i - t_{i-1} = t_N/N$, где N – количество измерений. Мы исследуем влияние этих измерений на эволюцию частицы. Устремляя $N \to \infty$, или $\tau \to 0$, можно оценить влияние непрерывного измерения на эволюцию частицы. В этом пределе должен возникать квантовый эффект Зенона.

Измерение можно описывать набором из двух проекторов: $P_1 = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|$ и $P_2 = \mathbf{1} - P_1 = |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|$. У каждого измерения есть два возможных результата, с номерами 1 и 2. Исход 1 означает, что частица не распалась, и после измерения она находится в состоянии $|\varphi_1\rangle$ (говорят, что она *редуцируется* в это состояние). Другой возможный результат измерения – 2. Это значит, что частица распалась, и после измерения она будет находиться в состоянии $|\varphi_2\rangle$. Чтобы найти вероятности обоих результатов измерения, необходимо определить состояние системы непосредственно перед измерением. Это состояние возникает в результате свободной эволюции частицы между двумя измерениями.

Итак, частица находится в состоянии $|\varphi_1\rangle$ в момент времени $t_0 = 0$ и свободно эволюционирует (в соответствии с собственными законами без каких либо измерений) в интервале времени $[t_0, t_1] = [0, \tau]$. Предположим, что динамика частицы гамильтонова и определяется уравнением Шредингера. Тогда амплитуда вероятности $A(t_1)$ того, что частица не распадется до момента времени $t_1 = \tau$ (останется в состоянии $|\varphi_1\rangle$) определяется следующим соотношением:

$$A(\tau) = \langle\varphi_1|exp(-iH\tau/\hbar)|\varphi_1\rangle,$$

где H - гамильтониан. В пределе малых τ мы можем разложить экспоненту в ряд Тейлора, ограничиваясь квадратичными по времени членами

$$exp(-iH\tau/\hbar) = 1 - \frac{iH\tau}{\hbar} - (H\tau/\hbar)^2 + O(\tau^3).$$

Тогда вероятность $P(\tau) = |A(\tau)|^2$ того, что частица не распадется до момента времени τ (или за время свободной эволюции частицы τ), при малых временах будет иметь следующее поведение:

$$P(\tau) = 1 - \frac{\Delta H^2 \tau^2}{\hbar^2} + O(\tau^3), \tag{1}$$

где ΔH является неопределенностью энергии частицы в состоянии $|\varphi_1\rangle$:

$$\Delta H = \sqrt{\langle\varphi_1|H^2|\varphi_1\rangle - \langle\varphi_1|H|\varphi_1\rangle^2}\,. \tag{2}$$

Следует здесь обратить внимание на то, что полученная зависимость от времени (в соотношении (1) нет линейных членов по τ) для вероятности

$P(\tau)$ обнаружения частицы в начальном состоянии $|\varphi_1\rangle$ при малых временах дает следующее выражение для скорости квантовых переходов

$$-dP(\tau)/d\tau = 2\Delta H^2 \tau/\hbar^2, \tag{3}$$

которое стремится к нулю при $\tau \to 0$. Это является ключевой предпосылкой для возникновения квантового эффекта Зенона.

После того как измерение окончено, частица находится (вследствие редукции) в состоянии $|\varphi_1\rangle$. Затем все повторяется точно таким же образом со свободным развитием системы в интервале времени $[t_1, t_2] = [\tau, 2\tau]$ и измерением при $t_2 = 2\tau$. Вероятность получения в момент t_2 того же результата, что и в t_1 также определяется соотношением (1), поскольку время свободной эволюции частицы равно τ. Очевидно, что все будет повторятся снова и снова. Поэтому вероятность того, что после N частых измерений частица все еще не распадется, дается следующим выражением:

$$P(t_N) = (P(\tau))^N = \left[1 - \frac{\Delta H^2 \tau^2}{\hbar^2} + O(\tau^3)\right]^N. \tag{4}$$

При достаточно частых измерениях с частотой $\nu = 1/\tau$ зависимость от времени $t = t_N$ в этом соотношении можно представить следующим образом

$$P(t) = exp(-R_\nu t), \tag{5}$$

где $R_\nu = \frac{\Delta H^2}{\nu \hbar^2}$. Как следует из этого соотношения, скорость распада состояния $|\varphi_1\rangle$ стремится к нулю в пределе $\nu \to \infty$. Эти аргументы приводят к широко распространенному мнению, что квантовый парадокс Зенона является обязательным следствием квантовой теории.

Однако, чтобы это было действительно так, $\Delta H^2 = \langle\varphi_1|H^2|\varphi_1\rangle - \langle\varphi_1|H|\varphi_1\rangle^2$ должно быть конечным. Это так в случае обычной квантовой механики, которая имеет дело с хорошо определенными на гильбертовом пространстве гамильтонианами. Но во многих интересных случаях, например, в случае релятивистского распада атомного состояния, ΔH^2 становится бесконечным. Довольно странным может показаться то, что неопределенность энергии нестабильного атомного состояния равна бесконечности в перенормируемой теории. Однако, это лишь означает, что после перенормировки динамика системы является негамильтоновой, и, как следствие, средняя энергия состояния системы $|\varphi_1\rangle$ не обязательно определяется соотношением $\Delta H^2 = \langle\varphi_1|H^2|\varphi_1\rangle - \langle\varphi_1|H|\varphi_1\rangle^2$ для любого гамильтониана. Это означает также, что в случае радиационного распада атома поведение вероятности нераспада (1) при малых временах не справедливо.

При рассмотрении таких систем вывод, приведенный выше, уже несправедлив. В этом случае необходим выход за рамки гамильтоновой динамики. Этот вопрос будет обсуждаться ниже.

3.2. Экспериментальная проверка

В 90-е годы квантовый эффект Зенона был подтвержден в целом ряде экспериментов [7-11]. Рассмотрим подробнее идею экспериментальной проверки квантового эффекта Зенона, предложенной в работе Кука [7]. В этой работе был предложен эксперимент с трехуровневой системой (ион в магнитной ловушке). Первые два уровня системы (см. Рис. 1), энергии которых E_1 и E_2, играют роль состояний, которые в предыдущем параграфе были обозначены $|\varphi_1\rangle$ и $|\varphi_2\rangle$.

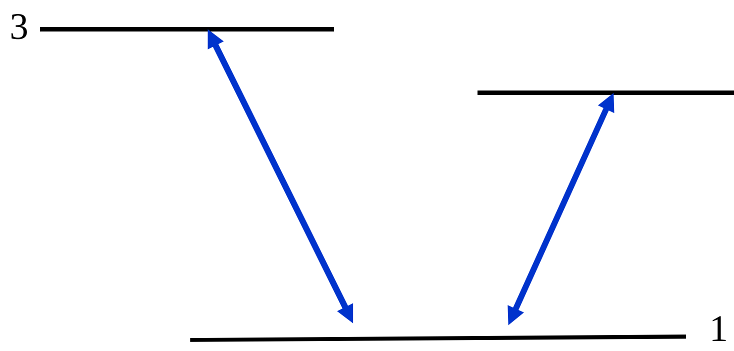

Рис. 1. Трехуровневая система для проверки квантового эффекта Зенона.

Переходы между этими уровнями могут быть индуцированы облучением резонансной частотой $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$. Уровень 3 необходим для наблюдения того, находится ли система на уровне 1 или 2. Переход с уровня 3 на уровень 1 в предложенном эксперименте разрешен, причем уровень 3 может распадаться только с переходом на уровень 1. Если направить на систему, которая до этого находилась на одном из уровней 1 или 2, короткий импульс излучения с частотой $\omega_{31} = (E_3 - E_1)/\hbar$, то наблюдение рассеяния излучения той же частоты будет означать, что система находилась на уровне с энергией E_1 (рассеяния происходит за счет индуцированного перехода $1 \to 3$ и последующего спонтанного перехода $3 \to 1$). Отсутствие рассеяния означает, что система находилась на уровне 2. Вероятность спонтанного перехода с уровня 2 на уровень 1 предполагается пренебрежимо малой.

В работе предлагалось рассматривать систему атом + резонансное лазерное излучение частоты $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$, состояние которой будет определяться когерентной суперпозицией уровней 1 и 2 типа

$$|\varphi(t)\rangle = c_1(t)|\varphi_1\rangle + c_2(t)|\varphi_2\rangle$$

с коэффициентами c_1 и c_2 такими, что вероятность перехода $1 \to 2$ в течение интервала τ

$$p(\tau) = |c_2(\tau)|^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(\Omega\tau)), \qquad (6)$$

где Ω – так называемая частота Раби, пропорциональная амплитуде резонансного излучения, действующего на систему. Таким образом, измерение, выполненное в момент $t = \tau$, даст результат 2 с вероятностью p, а результат 1 с вероятностью $q = 1 - p = |c_1(\tau)|^2$. Важным является то, что для малых времен $\tau \to 0$ вероятность перехода $1 \to 2$ квадратично зависит от времени:

$$p(\tau) \approx \frac{1}{4}\Omega^2\tau^2,$$

так что эффект Зенона действительно имеет место (при линейной маловременной асимптотике он не возникает).

В качестве измерения того, находится ли система на уровне 1 или 2, используется импульс резонансного излучения с частотой $\omega_{31} = (E_3 - E_1)/\hbar$, который действует как набор проекторов $\{P_1, P_2\}$ с редукцией в одно из состояний:

$$|\varphi(t)\rangle \to \begin{cases} |\varphi_1\rangle = P_1|\varphi(t)\rangle, \\ |\varphi_2\rangle = P_2|\varphi(t)\rangle. \end{cases}$$

Таким образом, трехуровневая система такого типа вполне подходит для экспериментальной проверки эффекта Зенона. Выгоднее всего проводить эксперимент в течение периода времени $t = \pi/\Omega$. За это время на атом воздействует резонансное лазерное излучение частоты $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$ (так называемый π-импульс), который индуцирует когерентную суперпозицию состояний 1 и 2. Наконец на такую систему за это время воздействуют n импульсов резонансного излучения с частотой $\omega_{31} = (E_3 - E_1)/\hbar$, разделенных равными промежутками времени $\tau = t/(n+1)$. Это значит, что за время t выполняется n измерений. Если $n = 0$ (никаких измерений нет), то вероятность перехода $1 \to 2$ дается уравнением (6), и в момент $t = \pi/\Omega$ система заведомо оказывается в состоянии 2. Но если $n \neq 0$, то вероятность перехода $1 \to 2$ оказывается меньше единицы, убывая с увеличением n. Для больших n эта вероятность близка к нулю, что дает эффект Зенона в чистом виде.

Эксперимент, близкий к этой схеме, был реализован группой Вайнлэнда [8]. Около 5000 ионов бериллия $^9Be^+$ хранились в магнитной ловушке. Уровнями 1 и 2 были сверхтонкие подуровни в основном $2s^2S_{1/2}$ состоянии в магнитном поле. Переход между этими уровнями находился в резонансе с радиочастотой 320.7 МГц. Уровень 3 был одним из подуровней состояния $2p^2S_{3/2}$ и распадался только на уровень 1. Переход $1 \to 3$ находился в резонансе с лазерным излучением с длиной волны 313 нм. Флуоресценция с длиной волны 313 нм от ионов детектировалась и служила сигналом, что некоторые ионы находились в состоянии 1.

Перед началом эксперимента ионы оптически закачивались в основное состояние 1[2]. Затем на $t = 256\,\text{мсек}$, что соответствует π импульсу, прилагалось поле резонансной радиочастоты $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$. Во время этого радиочастотного импульса прикладывались n коротких (по 2.4 мсек) импульсов излучения с длиной волны 313 нм, причем число их n равнялось $1, 2, 4, 8, 16, 32$ или 64. Эти импульсы были достаточно длинными, чтобы редуцировать волновые функции почти всех ионов (в одно из состояний 1 или 2), но достаточно короткими, чтобы не производить существенной оптической накачки.

---

[2] Это делалось с помощью длительного (5 сек) лазерного импульса с длиной волны 313 нм, в течение которого те ионы, которые находились на уровне 2, имели достаточно времени для распада на уровень 1 с последующими повторными индуцированными переходами на уровень 3 и спонтанным распадом снова на уровень 1. В конце концов, когда лазерное излучение выключалось, почти все ионы находились в основном состоянии 1.

Когда радиочастотный π импульс оканчивался, включалось 313 нм лазерное излучение для повторного приготовления состояния 1. Число фотонов, рассеянных за первые 100 мсек этого облучения, подсчитывалось и принималось приближенно пропорциональным числу ионов на уровне 1 к концу π импульса (отклонение от пропорциональности учитывалось с помощью калибровки).

Измеренное количество ионов на уровне 1 в момент t для каждого n сравнивалось с количеством, предсказанным теорией. Согласие было почти полным. Таким образом, теория квантового эффекта Зенона получила экспериментальное подтверждение.

3.3. *Является ли квантовый парадокс Зенона неизбежным следствием квантовой механики?*

Если внимательно просмотреть теоретический вывод квантового эффекта Зенона, нетрудно понять, что возникновение этого эффекта обусловлено двумя главными причинами: многократной редукцией состояния частицы в начальное состояние $|\varphi_1\rangle$ после каждого акта измерения, дающего отрицательный результат, и слишком малой скоростью распада (2) на его начальной стадии. Но последнее справедливо лишь для систем, динамика которых является гамильтоновой и описывается уравнением Шредингера. Как отмечалось выше, при рассмотрении некоторых проблем, например, релятивистского распада атомного состояния, необходим выход за рамки гамильтоновой динамики. Будет ли для таких систем возникать квантовый эффект Зенона? Совсем необязательно. По крайней мере, можно с уверенностью утверждать, что теоретический вывод эффекта Зенона, приведенный выше, к ним неприменим. Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо найти способ описания эволюции системы во времени совместный с общепризнанными концепциями квантовой физики в случае, когда динамика не является гамильтоновой. Мы переходим к изучению этого вопроса.

Как следует из математической теоремы Стоуна, предположение о том, что динамика квантовой системы описывается уравнением Шредингера, эквивалентно предположению о сильной непрерывности оператора эволюции, описывающего эту динамику. Вместе с тем, в работе [15] было показано, что требование сильной или слабой непрерывности оператора эволюции не имеет за собой физических предпосылок. Достаточно потребовать, чтобы матричные элементы этого оператора для физически реализуемых состояний являлись непрерывными [15]. Остановимся на этом подробнее.

Рассмотрим уравнение эволюции

$$|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle,$$

где $|\psi(t)\rangle$- вектор, описывающий состояние в момент времени t, в которое квантовая система переходит из состояния $|\psi(t_0)\rangle$ в момент времени t_0, при условии, что система не была возмущена каким-либо экспериментом; соответственно оператор $U(t,t_0)$ описывает такую эволюцию. В каноническом подходе квантовой теории постулируется, что оператор эволюции $U(t,t_0)$ должен быть унитарным

$$U^+(t,t_0)U(t,t_0) = U(t,t_0)U^+(t,t_0)=\mathbf{1},$$

с групповыми свойствами

$$U^+(t,t_1)U(t_1,t_0\ ) = U(t,t_0), \quad U(t_0,t_0) = \mathbf{1}.$$

В случае изолированных систем оператор эволюции в представлении Шредингера $U_s(t_2,t_1) \equiv exp[-iH_0t_2]U(t_2,t_1)exp[iH_0t_1]$ зависит только от разности времен $(t_2 - t_1)$, поэтому операторы $V(t) \equiv U_s(t,0)$ образуют однопараметрическую группу унитарных операторов с групповыми свойствами

$$V(t_1 + t_2) = V(t_1)V(t_2), \quad V(0) = \mathbf{1}.$$

Если предположить, что оператор эволюции является слабо непрерывным, т.е. удовлетворяет условию

$$\langle\psi_2|V(t_2)|\psi_1\rangle \xrightarrow[t_2\to t_1]{} \langle\psi_2|V(t_1)|\psi_1\rangle, \tag{7}$$

для всех векторов из гильбертова пространства состояний, то из теоремы Стоуна следует, что эта группа имеет инфинитезимальный самосопряженный генератор H:

$$V(t) = exp(-iHt), \qquad i\,\frac{d}{dt}V(t) = HV(t).$$

Идентифицируя H с полным гамильтонианом, мы получим временное уравнение Шредингера: $i\frac{d}{dt}|\psi_s(t)\rangle = H|\psi_s(t)\rangle$, где $|\psi_s(t)\rangle = V(t)|\psi_s(t=0)\rangle$. Таким образом, динамический постулат квантовой механики, который обычно формулируется как утверждение о том, что эволюция квантовой системы описывается уравнением Шредингера, эквивалентно постулату о том, что оператор эволюции является слабо непрерывным. На первый взгляд требование слабой непрерывности кажется совершенно естественным. Однако, это не так. Слабая непрерывность (7) предполагает, что для любого сколь угодно малого ε существует такой маленький интервал времени Δt, что для всех векторов из гильбертова пространства

$$|\langle\psi_2|V(t+\Delta t)|\psi_1\rangle - \langle\psi_2|V(t)|\psi_1\rangle| < \varepsilon.$$

С другой стороны в квантовой физике понятие малости кого-либо временного интервала имеет относительный характер: для любого интервала времени Δt имеются такие большие масштабы энергии, что этот интервал будет казаться сколь угодно большим. С другой стороны, гильбертово пространство состояний включает в себя векторы, описывающие состояния со сколь угодно большими энергиями, и, как следствие, для любых заданных ε и Δt найдутся векторы, для которых условие (7) будет нарушаться. Таким образом, необходимым условием для того, чтобы оператор эволюции в теории был слабо непрерывным, является то, что матричные элементы $\langle\psi_2|V(t)|\psi_1\rangle$ убывают достаточно быстро при увеличении разности энергий соответствующих состояниям $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$. Иными словами, необходимо, чтобы при описании процессов на масштабах энергии и времени, характерных для данной теории, можно ограничиться некоторым подпространством гильбертова пространства, включающим только вектора состояний с энергиями соответствующими этим масштабам. Примером такой теории является квантовая механика атомных явлений. В этой теории гамильтониан взаимодействия H_I (кулоновский потенциал) обеспечивает упомянутое выше условие: матричные элементы $\langle\psi_2|H_I\,|\psi_1\rangle$ достаточно быстро стремятся к нулю с ростом энергии соответствующей одному из состояний. Однако это не имеет место в случае квантовой электродинамики, что находит свое отражение в проблеме УФ расходимостей. Формально причиной этих расходимостей является локальность электромагнитного взаимодействия.

Поэтому казалось естественным решить проблему путем введения нелокального формфактора в гамильтониан взаимодействия. Но оказалось, что такой путь введения нелокальности в теорию приводит к нарушению релятивистской инвариантности теории. Причиной этого является то, что уравнение Шредингера является локальным во времени (гамильтониан взаимодействия описывает мгновенное взаимодействие), а в релятивистской теории локальное во времени взаимодействие должно быть локальным и в пространстве, что неизбежно приводит к УФ расходимостям. Это означает, что слабое условие непрерывности (7) для оператора эволюции не выполняется в случае квантовой электродинамики. Таким образом, постулат о слабой непрерывности оператора эволюции и, соответственно, эквивалентный ему постулат о том, что квантовая динамика описывается уравнением Шредингера, не только не выглядит обязательным с точки зрения первых принципов квантовой теории, но и является внутренне противоречивым. Вместе с тем, в работе [15] было показано, что вообще нет необходимости ограничивать себя такого рода динамическими постулатами. Оказалось [15], что если вместе с постулатами канонической теории, определяющих связь состояний и наблюдаемых с векторами и операторами в гильбертовом пространстве, использовать принцип суперпозиции амплитуд вероятности, который выражает явление квантовой интерференции и в фейнмановской формулировке квантовой теории используется как основной постулат, можно вывести динамическое уравнение, не обращаясь к каким-то другим постулатам. Выведенное таким образом обобщенное динамическое уравнение (ОДУ) [15] в случае мгновенных взаимодействий оказывается эквивалентным уравнению Шредингера и при этом позволяет обобщить квантовую динамику на случай нелокальных во времени взаимодействий. При этом оказалось, что имеется взаимно однозначное соответствие между ультрафиолетовым поведением амплитуд и характером динамики. Если это поведение является “хорошим” с точки зрения гамильтоновой динамики, то взаимодействие обязательно является мгновенным и динамика описывается уравнением Шредингера. Если же это поведение является “плохим”, т.е. приводит при использовании уравнения Шредингера к УФ расходимостям, то взаимодействие обязательно должно быть нелокальным во времени, и динамика системы описывается ОДУ с нелокальным во времени взаимодействием. Важный пример такой ситуации был приведен в работе [16], где было показано, что динамика нуклонов при низких энергиях описывается ОДУ с нелокальным во времени взаимодействием, которое в этом случае не сводится к уравнению Шредингера.

Таким образом, в общем случае динамика квантовой системы не обязательно описывается уравнением Шредингера и, следовательно, соотношение (4) нельзя рассматривать как доказательство эффекта Зенона. Более того, тот факт, что в случае радиационного распада атомного состояния величина ΔH оказывается бесконечной из-за ультрафиолетовых расходимостей, указывает на то, что динамика системы не является гамильтоновой, и как следствие, неопределенность энергии не описывается формулой (3). Вместе с тем, как мы видели, эти расходимости означают, что на самом деле динамика атомной системы, взаимодействующей с собственным полем излучения, описывается ОДУ с нелокальным оператором взаимодействия. Нелокальность взаимодействия во времени наиболее существенно влияет на характер динамики на малых временах и, как следствие, на поведение вероятности $P(t_N)$ при $N \to \infty$. Можно ожидать, что эта нелокальность будет приводить к тому, что квантовый эффект Зенона не будет иметь место. В связи с этим следует отметить результаты исследований, приведенных в работе [17], в которой рассматривался процесс радиационного распада состояния атома под воздействием частых измерений. В этой работе показано, что вплоть до интервалов времени между измерениями порядка 10^{-19} сек. измерения должны приводить к ускорению распада, т.е. должен иметь место *обращенный эффект Зенона*. Важным является то, что механизм возникновения этого эффекта по существу тот же самый, что и у нарушения слабой непрерывности оператора эволюции: при уменьшении интервала времени между измерениями увеличивается масштаб энергий процессов, происходящих в течение этих интервалов. В результате с увеличением частоты измерения вклад в процесс распада состояния будут вносить все больше и больше виртуальных состояний. Авторы статьи [17], однако, ограничили анализ процессов радиационного распада частотами измерения порядка 10^{18} сек$^{-1}$, полагая, что при больших частотах измерения должны замедлять процесс распада, как это предсказывается гамильтоновой динамикой. С другой стороны, как мы увидели, стандартные квантовомеханические аргументы неприменимы в случае, когда временные интервалы между измерениями становятся настолько малыми, что в игру вступают квантовоэлектродинамические процессы. Для того чтобы описать эти процессы, необходимы дальнейшие исследования. Но можно с определенностью утверждать, что квантовый парадокс Зенона не является неизбежным следствием квантовой теории.

Список литературы

[1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47** (1935) 777.

[2] N. Bohr, *Phys. Rev.* **48** (1935) 896.

[3] J.S. Bell, *Physics* **1** (1964) 195.

[4] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 1804.

[5] P.G. Kwiat at all., *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4337.

[6] B. Misra and E.C.G. Sundarshan, *J.Math. Phys.* **18** (1977) 756.

[7] R.J. Cook, *Phys. Scr.* **21** (1988) 49.

[8] W.M. Itano et al., *Phys. Rev. A* **41** (1990) 2295.

[9] K. Molhave and M. Drewen, *Phys. Lett. A* **268** (2000) 45.

[10] M.C. Fisher et al., *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 040402.

[11] O. Hosten et al., *Nature (London)* **439** (2006) 949.

[12] J.D. Franson et al., *Phys. Rev. A* **70** (2004) 062302.

[13] P. Facchi et al., *Phys. Rev. A* **71** (2005) 022302.

[14] P. Facchi et al., *Phys. Rev. A* **66** (2002) 012110.

[15] R.Kh. Gainutdinov, *J. Phys. A: Math.Gen*. **32** (1999) 5657.

[16] Gainutdinov, R.Kh. and Mutygullina, A.A., *Phys. Rev. C* **66**, 014006 (2002).

[17] A.G. Kofman and G. Kurizki, *Nature* **405** (2000) 546.