И.С.Григорьева

Математика и жизнь, или парадоксы моделирования

Математика – точная наука. Но значит ли это, что все, что говорится на языке математики и логики – верно? Ведь одно дело правильно доказать теорему, а другое – применить математическую теорию для описания действительности.

Математики испокон века очень следят за строгостью и доказательностью своих утверждений. Именно поэтому люди верят тем высказываниям и исследованиям, которые используют математический аппарат.

За сто семьдесят шесть лет Нижняя Миссисипи стала короче на двести сорок две мили. В среднем это составляет чуть больше, чем миля с третью за год. Отсюда следует, […] что в нижнесилурийском периоде (он закончился как раз миллион лет назад, в ноябре юбилей) длина Нижней Миссисипи превышала один миллион триста тысяч миль. Точно так же отсюда следует, что через семьсот сорок два года длина Нижней Миссисипи будет равна одной миле с четвертью. Каир и Новый Орлеан сольются и будут процветать, управляемые одним мэром и одной компанией муниципальных советников. В науке действительно есть что-то захватывающее, такие далеко идущие и всеобъемлющие гипотезы способна она строить на основании скудных фактических данных.

Марк Твен, «Жизнь на Миссисипи»

Конечно, это рассуждение рассчитано на улыбку. Каждый понимает, что выводы, сделанные автором, абсолютно нереалистичны. Понятна и причина ошибки: ниоткуда не следует, что скорость изменения длины постоянна в течение такого большого промежутка времени.

Однако сплошь и рядом ошибки в «математических» или «логических» рассуждениях совсем незаметны и хорошо маскируются под истину. Вот вам примеры.

Нестандартные текстовые задачи

Текстовая задача – это пример простейшей математической модели, с которым мы знакомимся в школе. Как правило, для их решения не нужны серьезные математические методы. Тем не менее, подобные задания вызывают большие затруднения у многих учеников. Их сложность именно в том, чтобы подобрать правильный метод к конкретной задаче. К сожалению, некоторые ученики предпочитают «метод тыка», применяя ту или иную «формулу», которая кажется им подходящей.

– Анна Петровна! Я достала прекрасное лекарство.
– От чего?
– Не знаю, но, говорят, очень помогает!

Задача 1 (старинная). Два одноногих человека купили пару ботинок за 25 руб. Когда хозяин узнал, что покупатели – инвалиды, он велел приказчику вернуть им 5 руб., но тот отдал каждому по рублю, а 3 руб. оставил себе. Проведем подсчет: сначала каждый инвалид заплатил по 12,5 руб., а в итоге – по 11,5. Вместе они истратили 23 руб., плюс 3 руб., оставшиеся у приказчика, всего – 26 руб. Откуда взялся лишний рубль?

Решение. Сами вычисления проведены правильно. Значит, ошибка в том, что мы произвели *не те* вычисления. Действительно, что за сумма 26 руб.? По условию 25 руб. – это деньги, потраченные покупателями (на первом этапе покупки), 23 руб. – сумма, которую они потратили окончательно. Их должен получить хозяин магазина. Ну а 3 руб. – деньги, которые получил приказчик, по сути, *укравший* их. Значит, это деньги «с минусом».

Итак, правильное вычисление будет иметь такой вид: 23 руб. – 3 руб. = 20 руб. – сумма, полученная от инвалидов хозяином магазина. Она совпадает с 25 руб. – 5 руб. – той же суммой, рассчитанной с точки зрения хозяина. Значит, хозяин в этой ситуации не пострадал, деньги были украдены у покупателей.

В этой задаче действия с числами были математически правильными, но бессмысленными, так как они не соответствуют связям реальных величин.

Петя прыгал по лестнице через 1 ступеньку и сломал ногу. Сколько ног он сломает, если будет прыгать через 3 ступеньки?

Задача 2. На складе лежит 400 кг огурцов, которые на 99% состоят из воды. Через некоторое время огурцы подсохли, и теперь вода составляет только 98% их веса. Сколько стали весить эти огурцы?

Решение. Как решают эту задачу многие школьники? Они говорят: раз величина уменьшилась на один процент, вычтем этот процент из 400 кг. Получим 400 – 4 = 396 (кг). Но ведь «процент», «доля» – величины относительные. Всегда надо учитывать от чего они берутся.

Для правильного решения задачи надо не искать подходящую формулу, а разобраться в самом условии.

В этой задаче присутствуют две ситуации: до усыхания и после. Что их связывает? Количество огурцов изменилось и количество воды тоже. Неизменным осталось только сухое вещество огурцов. Вот для него и можно выводить соотношения. Имеем: вначале сухое вещество составляло 1% и весило 4 кг. После усыхания те же 4 кг составляют уже 2% от всей массы. Значит, эта масса равна 4кг : 2% = 200 кг. Результат, конечно, поразительный, но верный!

Задача 3. Стадо из 10 коров может пастись на лугу 60 дней, пока не съест всю траву. Если бы в стаде было 15 коров, они бы могли пастись на этом лугу 20 дней. На сколько дней хватило бы этого луга, если бы в стаде было 20 коров?

Решение. На первый взгляд задача кажется очень простой: раз коров стало в 2 раза больше, то травы хватит на 60/2 = 30 дней. Непонятно только, зачем нам второе условие. Попробуем, однако, решить задачу исходя из него. 15 коров за 20 дней съедят 15·20 = 300 «корово-дней». Значит, 20 коровам этой травы хватит на 300/20 = 15 дней. Ответ получился совершенно другим. Что же это значит? Что два условия задачи противоречат друг другу?

Действительно, судя по первому условию, на лугу было не 300, а 10·60 = 600 «корово-дней» травы. Откуда же взялись лишние 300 единиц? Заметим, что первое стадо паслось 60 дней, т.е. на 40 дней больше, чем второе. Можно предположить, что за это время трава просто … отросла!

Итак, в задаче есть «подвох»: не сказано явно, что трава на лугу растет. Но ведь это мы знаем и так. Решим теперь задачу с учетом этого факта.

Можно, конечно, ввести две неизвестные (число коров и скорость роста) и составить уравнения. Заметим, однако, что одну из величин мы уже почти вычислили. Действительно, «лишние» 300 единиц травы отросли за 40 дней, значит, в день отрастает 300/40 = 7,5 единиц. За 60 дней отросло 60·7,5 = 450 единиц. Значит, вначале на лугу было 600 – 450 = 150 «корово-дней» корма.

Стадо из 20 коров за x дней съест $20x$ единиц травы, а возможности луга за это время составляют $150 + 7{,}5x$ единиц. Решая соответствующее уравнение, получаем, что $x = 12$ (дней).

Математика в литературе

В художественной литературе встречаются эпизоды, которые можно проверить математическим или логическим рассуждением.

Задача 4. В романе В.Корчагина «Тайна реки злых духов» героям надо обследовать реку (на лодках) вниз и вверх по течению от места стоянки. Они разделились на две группы и решают, кто куда пойдет. Молодой парень говорит: «Конечно, все хотят идти вниз по реке, это же гораздо легче». Прав ли он?

Решение. Не прав. Ведь каждой группе придется возвращаться на место стоянки, т.е. пройти путь и вниз, и вверх по реке. Но зато люди, которые сначала пошли вверх, более трудный участок пути пройдут со свежими силами, а когда устанут, смогут легко вернуться назад. В романе так и вышло. Группа легкомысленного героя, спустившись вниз, попала в бурю и потеряла все продукты. В результате трудный путь назад им пришлось проделать еще и голодными!

Кстати, в школьных текстовых задачах «эффектом усталости» пренебрегают: не только поезда и машины, но и люди ходят в них с постоянной скоростью.

Иногда авторская идея требует не арифметической, а логической проверки:

Задача 5. В одном фантастическом рассказе описывалось «прекрасное будущее». К этому времени, по мысли автора, будут решены многие проблемы большого города, в частности, жилищная и транспортная. Жилья будет много и человек сможет, даже переезжая в другую местность, сразу найти квартиру по своему вкусу. Кроме того, все будут жить рядом с работой. Это значительно уменьшит передвижения в часы пик и разгрузит улицы от транспорта. Как вам кажется, это реалистичный прогноз?

Решение. Конечно, такая идиллия вызывает мало веры. Экономика должна быть весьма эффективной, чтобы создать такое богатство, а государство – сильным, чтобы не дать полученным средствам сконцентрироваться в руках немногих богатых и влиятельных людей. Однако чисто логически мы не можем доказать, что такое общество не может быть построено.

Больший интерес вызывает структура личных отношений в таком обществе. Сохранится ли в нем такое понятие, как семья? Если да, то смогут ли все члены семьи жить вместе?

По мысли автора все члены семьи работают вблизи своего дома. Но тогда им придется работать обязательно поблизости друг от друга! Это возможно в следующих случаях:

а) Члены одной семьи выбирают работу согласовано. Если один перевелся на новую работу на другой конец города, то и другие должны переехать вместе с ним и поменять место работы.

б) Человек выбирает семью после того, как выберет работу. В этом случае, поменяв работу, придется менять и супруга, находя его поблизости от жилья!

в) В семье работает только один человек.

Конечно, все эти варианты не исключены и в нынешней, далекой от совершенства жизни. Однако они воспринимаются как зло (быть может, иногда и необходимое). Автор же делает их правилом. Считать ли такое будущее прекрасным – вопрос по крайней мере спорный!

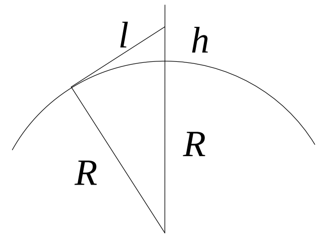
В предыдущих примерах авторы не говорили специально о математических проблемах. Однако некоторые литераторы делают это, хотя и не всегда удачно. Причем ошибки в рассуждениях допускают и талантливые авторы.

Вот что писал Н.В.Гоголь в своей статье «Об архитектуре нынешнего времени».

> Башни огромные, колоссальные необходимы в городе, не говоря уже о важности их назначения для христианских церквей. Кроме того, что они составляют вид и украшение, они нужны для сообщения городу резких примет, чтобы служить маяком, указывавшим бы путь всякому, не допуская сбиться с пути. Они еще более нужны в столицах для наблюдения над окрестностями. У нас обыкновенно ограничиваются высотою, дающею возможность обглядеть один только город. Между тем как для столицы необходимо видеть по крайней мере на полтораста верст во все стороны и для этого, может быть, один только или два этажа лишних — и всё изменяется. Объем кругозора по мере возвышения распространяется необыкновенною прогрессией. Столица получает существенную выгоду, обозревая провинции и заранее предвидя всё; здание, сделавшись немного выше обыкновенного, уже приобретает величие; художник выигрывает, будучи более настроен колоссальностию здания к вдохновению и сильнее чувствуя в себе напряжение.

Чисто архитектурная и художественная сторона этого предложения не вызывает возражений. Но вот математическая ее составляющая …

Задача 6. Подсчитайте высоту башни с обзором в 150 верст (160 км).



Решение. Если обзор не закрыт предметами и неровностями ландшафта, то расстояние до горизонта определяется закруглением Земли. На рисунке через R обозначен радиус Земли, а через h – искомая высота. По теореме Пифагора получаем $R^2 + l^2 = (R + h)^2$, откуда следует, что $l^2 = 2Rh + h^2$. Это уравнение можно решить относительно h как квадратное, но полученную функцию трудно исследовать.

Найдем приближенное решение. Заметим, что R примерно равно 6400 км, так что h мало по сравнению с R. Значит, слагаемое h^2 мало по сравнению с первым слагаемым и его можно отбросить. Получаем, что l примерно равно $\sqrt{2Rh}$. Это значит, что радиус обзора растет с ростом высоты довольно медленно: вряд ли эту функцию можно назвать «необыкновенною прогрессией». В частности, подставляя в соотношение $l = 160$ и $R = 6400$, получим, что $h \approx \frac{l^2}{2R} = 2$ км. Такой башни не построили и в наше время!

Еще пример: рассуждения Эдгара А. По из рассказа «Тайна Мари Роже»:

> Обычного читателя почти невозможно убедить, что при игре в кости двукратное выпадение шестерки делает почти невероятным выпадение ее в третий раз и дает все основания поставить против этого любую сумму. Заурядный интеллект не может этого воспринять, он не может усмотреть, каким образом два броска, принадлежащие уже прошлому, могут повлиять на бросок, существующий еще пока только в будущем. Возможность выпадения шестерки кажется точно такой же, как и в любом случае – то есть зависящей только от того, как именно будет брошена кость. И это представляется настолько очевидным, что всякое возражение обычно встречается насмешливой улыбкой, а отнюдь не выслушивается с почтительным вниманием. Суть скрытой тут ошибки – грубейшей ошибки – я не могу объяснить в пределах места, предоставленного мне здесь, а людям, искушенным в философии, никакого объяснения и не потребуется. Тут достаточно будет сказать, что она принадлежит к бесконечному ряду ошибок, которые возникают на пути Разума из-за его склонности искать истины в частностях.

Это рассуждение, конечно, совершенно неверно. Игральная кость действительно не обладает никакой памятью, и вероятность выпадения того или иного числа очков не зависит от предыдущих бросков. Тем не менее, совет автора кажется правдоподобным: трудно представить себе, что шестерка будет выпадать подряд при нескольких бросках.

В этом заключается один из парадоксов теории вероятностей. Как известно, понятие «вероятность» возникло как абстрактный аналог понятия «частота». Мы ожидаем, что при бросании кости *в среднем* шестерка будет выпадать в 1/6 доле случаев. Однако это верно только при очень большом числе бросков. Пусть, например, мы сделали 6000 бросков, причем каждая цифра выпала примерно по 1000 раз. Если после этого выпадет серия из 10 шестерок, количество шестерок изменится только на 1%. При еще большем числе бросаний такая серия практически не будет влиять на подсчет частоты.

Почему же интуитивно кажется, что третья шестерка подряд – маловероятное событие? Потому что здесь решается совсем другая задача: оценить вероятность цепочки (6; 6; 6). Она равна $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$, т.е. примерно полпроцента (кстати, не так уж и мало!).

Заметим, что вероятность любой другой тройки цифр точно такая же. То есть вероятность получить набор (6; 6; 1) так же мала. Однако вряд ли автор «поставит любую сумму против» выпадения единички после двух шестерок!

Эдгар По путает две вероятности: абсолютную и условную. Хотя вероятность трех шестерок подряд действительно мала, но *при условии*, что две шестерки *уже выпали*, она существенно возрастает и становится равной 1/6.

В связи с этой задачей можно задаться еще и таким вопросом: а какова вообще длина цепочки повторяющихся цифр при бросании кости? Разумеется, эта величина переменная и можно найти только ее среднее значение.

Задача 7. Будем бросать игральную кость и записывать выпавшие очки. Полученную последовательность разобьем на отрезки одинаковых цифр и подсчитаем длины таких цепочек. Как часто будут встречаться цепочки той или иной длины?

Решение. Как может получиться, например, цепочка длиной 3? После первой выпавшей цифры (назовем ее a) должна два раза выпасть цифра a, а потом – не a. Вероятность этого события равна $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{216}$. Ясно, что и для произвольной длины цепочки n вероятность равна $\frac{5}{6^{n-1}}$. Приближенные значения вероятностей приведены в таблице:

n	1	2	3	4	5	6
p	0,8333	0,1389	0,0231	0,0039	0,0006	0,0001

Итак, «тройки» будут занимать примерно 2,3% от всех цепочек, что совсем не так уж мало. Вероятность того, что подряд выпадут не менее 3 одинаковых цифр, равна $1 - \frac{5}{6} - \frac{5}{36} = \frac{1}{36}$.

Кстати, если вместо игральной кости взять монетку и подбрасывать ее, то цепочки будут длиннее. Действительно, было бы неестественно, если бы орлы и решки строго чередовались! Ясно, что они достаточно часто будут повторяться и по 2, и по 3 раза. Средняя длина цепочки из орлов или решек равна 2.

В рассуждениях Э. По меня удивили две вещи. Во-первых, что он отстаивает неверное суждение, ссылаясь на некоторые туманные философские идеи. А во-вторых, то, что *верное* рассуждение он приписывает «обычному читателю». Между тем опыт показывает, что непрофессионалы часто рассуждают именно как Э. По и не верят, что после двух выпавших шестерок может появиться еще и третья. Как говорит народная мудрость «снаряд в одну воронку второй раз не падает».

– И, главное, не бойтесь вы этой статистики! В среднем не раскрывается один парашют из тысячи, а вас тут всего-то двести человек.

Предоставляю читателю самому судить, не было ли высказывание великого писателя (кстати, серьезно интересовавшегося математикой) просто шуткой, мистификацией.

Математика на каждый день

Предыдущие примеры были, так сказать «литературными», умозрительными. Однако псевдоматематические и псевдологические рассуждения используются и в реальной жизни, причем иногда целенаправленно.

Самый очевидный пример – реклама. «Наше средство в 5 раз безопасней». «Батарейки работают до 10 раз дольше обычных», «Цвет лица улучшается на 75%». А еще лучше сказать «на 67,5%». Хотя результат и похуже, зато какая точность! Создается впечатление, что цифры взяты не «с потолка», а получены в результате кропотливого научного исследования.

Но при внимательном взгляде на подобные высказывания видна их несостоятельность. Какие батарейки считать «обычными»? И что значит «безопасней во столько-то раз»? В каких таких единицах измеряется безопасность? А цвет лица? Мы уже говорили об этом феномене в статье [1].

А ведь подобные высказывания имеют большое психологическое воздействие! Оно основано на уважении к науке, и особенно той, что использует Число, измерение. Получается, что математики своей добросовестностью работают на руку недобросовестным деятелям рекламы!

Вернемся теперь от рекламы к повседневным заботам.

Задача 8. В магазине есть крупные яйца (высотой 5 см) и более мелкие (высотой 4 см). Крупные яйца стоят 35 руб. за десяток. По какой цене вы согласитесь купить мелкие?

Решение. Обычно в магазинах мелкие яйца дешевле на несколько рублей. Например, вам могут предложить их по 27 руб./десяток, что меньше, чем $35 \cdot \frac{4}{5} = 28$. Увидев разницу в цене, многие склонны купить дешевый товар. Однако давайте посчитаем. Маленькое яйцо подобно большому, т.е. оно составляет от большего 4/5 по ширине, по длине и по высоте. Значит, его объем составляет $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{64}{125}$ от большого, что примерно равно ½. Итак, мелкие яйца такого размера должны стоить почти в 2 раза дешевле, т.е. около 18 руб./десяток.

Эта картина типична для всех штучных товаров: даже хорошо оценивая линейные размеры объектов, человек часто не может сравнить на глаз их объемы. Поэтому на мелкие экземпляры продавцы запрашивают повышенную цену.

Задача 9. Муж и жена просматривали книгу по домоводству. Они заинтересовались тремя способами экономии денег в семейном бюджете. Первый давал 10% экономии, второй – 15% и третий – 25%. Жена предложила воспользоваться всеми тремя способами и таким образом уменьшить расходы вдвое. На что муж ответил, что экономия будет меньше. Кто из них прав?

Решение. В книге, где приведена эта задача, говорится, что прав муж. Рассуждение такое: самая большая экономия произойдет, если мы сможем применить все три способа. Далее решается обычная задача «на проценты». А именно, вычисляется доля расходов, оставшихся после применения каждого метода экономии: первый метод оставляет 90% = 0,9 от первоначальных расходов, второй – 85% = 0,85 и третий – 75% = 0,75. Перемножая эти числа, получаем общую долю расходов: 0,9·0,85·0,75 = 0,57375 > 57%. Итак, экономия в этом случае составляет менее 43%.

Однако решение таких прикладных задач очень сильно зависит от того, как мы понимаем условие. В данном случае информация очень скудная, так что остается много вопросов. Во-первых, неясно, насколько независимы предложенные методы и можно ли их применить одновременно. Непонятно также, как именно рассчитывались проценты в книге, от какой исходной величины, ведь хозяйство у всех семей разное. Можно предположить поэтому, что имелась в виду средняя семья с обычной структурой расходов. Но тогда после применения одного из методов семья уже перестанет быть «типичной», а, следовательно, и процент экономии изменяется, причем может и повысится.

Приведем пример. Пусть один из методов позволяет сократить расходы на питание, второй – на одежду, а третий – на уход за квартирой. Тогда, применив все три метода, мы получим действительно суммарную экономию (50%), как и говорила жена. Получается, что при таком подсчете экономия становится больше максимальной, как это может быть? Дело в том, что после применения первого метода расходы семьи уже уменьшились, а экономия, даваемая вторым методом (в рублях) осталась той же. Поэтому *процент* экономии возрастет по сравнению с обычной, «неэкономной» семьей.

Этот пример показателен для всех прикладных задач. При их решении всегда возникает конфликт между сложностью реальной проблемы и вынужденной простотой методов решения.

В результате автор задачи и решающий могут понимать ее совершенно по-разному. Со мной тоже случился такой казус: в книге [2] я прочитала задачу, которую почему-то никак не могла решить. Вот она.

Задача 10. Нам нужно сварить два яйца, одно всмятку (за 1 мин), другое в мешочек (за 3 мин). Как это сделать, пользуясь песочными часами на 3 и 5 минут? Вода в кастрюльке закипает за 3 мин.

Решение. Ставим воду на огонь и запускаем 5-минутные часы. Когда вода закипит, бросаем в нее одно яйцо. Запускаем 3-минутные часы. Когда пересыплется песок в первых часах, кладем в воду второе яйцо. К моменту, когда закончится песок и в 3-минутных часах, оба яйца готовы.

Когда я прочитала решение, я поняла, почему я до него не додумалась. Я никогда не бросаю яйцо в кипящую воду, ведь оно может лопнуть! Наверное, все дело в том, что автор книги – мужчина ☺. Вот если бы в задаче «варили» что-нибудь другое, хотя бы картошку, решение было бы правильным. Или можно заменить варку окраской: красят яйца вареными и кипяток им не повредит.

Задача 11. Какая игрушка дешевле – китайский пистолетик за 50 руб. или конструктор за 1000 рублей?

Решение. Ответ зависит от того, для чего вы его приобретаете. Если вы идете в гости к ребенку и хотите принести гостинец, можно обойтись пистолетом. Но если вы родитель и озабочены тем, чтобы у ребенка было занятие – надо учесть и другие факторы.

Например, пистолетом можно играть только одним способом, а из конструктора собирать разные объекты. Дешевая игрушка «проживет» от силы неделю, а конструктор из хорошей пластмассы – годами. Обе причины позволяют использовать конструктор гораздо дольше. Предположим, что его хватит на 2 года, т.е. на 104 недели. Тогда в расчете на неделю он будет стоить 9 руб. 60 коп., что гораздо выгоднее дешевой игрушки.

Задача 12. Для полоскания выстиранного белья у нас есть 10 л воды. Как лучше ее использовать: полоскать один раз всей водой или два раза, используя по 5 л каждый раз?

Решение. В чем смысл полоскания? В том, чтобы вымыть из белья остатки грязной мыльной воды. Возьмем за единицу измерения «емкость» белья. Это то количество жидкости, которое останется в белье после выжимания. Используем для полоскания k единиц чистой воды. В процессе полоскания жидкости смешаются, и мы получим $k + 1$ единицу смеси. В ней грязная вода составляет долю $\frac{1}{k+1}$. После выжимания в белье снова останется 1 единица жидкости, причем грязная вода составит $\frac{1}{k+1}$ единиц. Значит, количество грязной воды при таком полоскании уменьшится в $k + 1$ раз.

За два полоскания мы уменьшим долю грязной воды в $(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1$ раза. Если же сразу использовать всю чистую воду, количество грязной уменьшится в $2k + 1$ раз, что меньше предыдущего результата.

Итак, лучше имеющуюся воду разделить на части. Но на сколько? Повторяя наше рассуждение, получим, что вместо двух полосканий по 5 л лучше взять 4 по 2,5 л, еще лучше – 8 по 1,25 л и т.д. Получается, что самое лучшее полоскание – когда вода капается пипеткой и выжимается после каждой капли. Предложение явно абсурдное!

В чем же наша ошибка? Ведь вычисления мы сделали верно. Если решение верное, а ответ неправильный – значит, мы решали *не ту задачу*. Действительно, в наших вычислениях мы предполагали, что две жидкости – чистая и грязная – смешиваются равномерно. Так и будет, если мы будем перемешивать их в пустой емкости. Ясно, однако, что капля чистой воды не может проникнуть во все части ткани (например, из-за поверхностного натяжения, из-за конечного размера атомов и т.п.). Поэтому она сможет растворить только маленькую часть грязной воды. Наше рассуждение теряет силу, как только воды становится слишком мало.

Можно сказать, что мы экстраполировали (продолжили) наш метод слишком далеко, на неподходящие значения параметров.

По идее наилучшей «порцией» воды при ограниченном ее количестве будет такая, которая сможет полностью смочить всю стираемую вещь. Боюсь, однако, что точное вычисление этого количества не под силу домашней хозяйке!

Задача 13. Пусть у нас есть ограниченное количество чистой воды. Можем ли мы, деля ее на части, сколь угодно улучшить чистоту полоскаемой вещи? «Эффектом малой дозы» пренебрегите.

Р е ш е н и е. Нет, не можем даже при неограниченном делении. Пусть, например, у нас есть p единиц воды (за единицу мы снова берем «емкость белья», т.е. количество воды, которое из него нельзя изгнать выжиманием). При однократном полоскании мы уменьшим количество грязной воды в $a_1 = 1 + p$ раз. При двух полосканиях на каждое придется $\frac{p}{2}$ единиц воды, так что «коэффициент улучшения» станет равным $a_2 = \left(1 + \frac{p}{2}\right)^2$. Аналогично, для n полосканий получаем коэффициент $a_n = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$.

Эта последовательность изучается методами математического анализа. Однако *предположение* о ее поведении мы можем сделать и на элементарном уровне. Рассчитаем значения a_n для некоторых n и p.

$p = 1$.

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a_n	2	2,25	2,37	2,44	2,49	2,52	2,55	2,57	2,58	2,59	2,6	2,61	2,62	2,63	2,63	2,64	2,64	2,65	2,65	2,65

$p = 10$.

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a_n	11	36	81	150	243	359	498	656	832	1024	1227	1441	1664	1893	2126	2364	2603	2844	3084	3325

Для $p = 1$ рост a_n довольно быстро замедляется, так что при n порядка 20 изменения идут уже в 3 знаке после запятой (четвертой значащей цифре). Можно предположить, что эта последовательность чисел приближается к какому-то конечному значению. И это действительно так: пределом данной последовательности будет число е $\approx 2{,}718$. Итак, исследование стирки привело нас к знаменитому числу Эйлера!

Во втором случае, для $p = 10$, такого замедления не заметно. Может, в этом случае a_n стремится к бесконечности? Нет, это не так. Сделаем следующее преобразование: $a_n = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}}\right)^p = \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right)^p$, где через k обозначено число $\frac{n}{p}$. Оно стремится к бесконечности вместе с n. Величина, стоящая внутри внешних скобок, – это a_k для $p = 1$, она стремится к е. Значит[1], a_n стремится к e^{p} – числу большому, но конечному.

Задача 14. Сейчас 3 часа дня и я сажусь дописывать статью. Для того чтобы ее закончить, мне нужно 3 часа. Примерно один раз в полчаса мне звонят по телефону, причем каждый разговор занимает 5 минут. Когда я закончу написание статьи?

Р е ш е н и е. На первый взгляд кажется, что время работы увеличится на 30-35 минут, так как за 3 часа произойдет 6 телефонных разговоров (и еще седьмой в дополнительные полчаса). Однако каждый, кому приходилось делать умственную работу, знает, что человеку необходимо собраться с мыслями, настроиться после того, как его отвлекут. Предположим, что у меня такая настройка занимает 10 минут. Тогда каждый телефонный звонок прервет мою работу на 15 минут!

[1] Конечно, все это надо строго обосновать, что и делается в любом учебнике по математическому анализу.

Значит, из каждого получаса останется только 15 минут чистого рабочего времени. Поэтому написание статьи потребует не трех, а шести часов.

А за это время много чего может произойти: придется готовить ужин, общаться с родными, спать, наконец. В результате работу придется перенести на другой день!

Вывод: начиная делать домашнее задание, отключайте свои телефоны.☺

Упражнения

1. Сколько кубических ярдов грунта надо вырыть из траншеи глубиной 12 ярдов, шириной 20 футов и длиной 600 футов?

2. Пусть толщина страницы составляет 0,05 мм, а толщина обложки – 1 мм. В первом томе 320 страниц, а во втором – 400. Жучок прогрыз две книги от первой страницы первого тома до последней страницы второго. Какое расстояние он при этом прополз?

3. Если заменить буквы их номерами в алфавите, то окажется, что поезд идет по маршруту 211221 – 21221. Какие это города?

4. Поезд проходит мимо наблюдателя за 20 сек., а по мосту длиной 200 м – за 40 сек. Какова длина поезда?

5. В сборнике задач для поступающих в вузы [3] есть задача №13.370. Вот ее содержание:

«На расстоянии 199,5 м от окна будки параллельно плоскости окна проходит горизонтальный железнодорожный путь. Обходчик, находясь в будке на расстоянии 0,5 м от окна, видит в течение 20 сек как проходит весь поезд (от локомотива до последнего вагона). Длина поезда 100 м и идет он с постоянной скоростью. Вычислите скорость поезда».

Корректно ли поставлена эта задача? Исправьте ее и решите.

6. В викторине «Слабое звено» был задан такой вопрос: «Кто доказал, что параллельные прямые могут и пересекаться?» Правильно ли поставлен вопрос?

7. У велосипедистов есть шутка: «Велосипедисту дорога всегда в гору, а ветер в лицо». Найдите математическое «обоснование» этого наблюдения.

8. Как вы думаете, почему Гоголь решил, что величина обзора растет с ростом высоты здания очень быстро?

9. Короткая заметка в журнале "Знание – сила":

Западники предпочитают НТВ

В телеаудитории канала "Санкт-Петербург" примерно равное число тех, кто ориентируется на традиционные русские ценности, и тех, кто считает допустимой и приверженность западным ценностям, среди почитателей независимого телевидения – полуторакратный перевес "западников".

Отражает ли заглавие заметки ее смысл?

10. Диалог в страховой компании:

– Вы в своем уме? Застраховали человека, которому 102 года?

– Но по статистике в этой возрастной категории смертельные случаи встречаются крайне редко!

Найдите ошибку в рассуждениях второго собеседника.

11. Моющее средство рекламируют как универсальное. Является ли это его достоинством?

12. Наше исследование показывает, что много «мелких» полосканий белья выгоднее, чем одно «крупное». Почему же и хозяйки, и производители стиральных машин ограничиваются двумя-тремя?

Решения упражнений

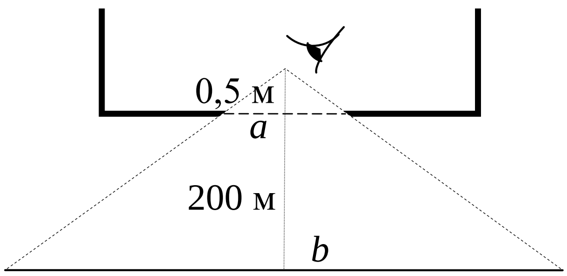
1. Ноль. Зачем вынимать землю из уже существующей канавы? ☺

2. Ответ зависит от того, как расположены книги на полке. Если они расставлены, как это обычно бывает, слева направо, то жучок прогрыз только две обложки, т. е. 2 мм. Кстати, если бы жучок действительно прогрыз страницы книги, то при подсчете надо было бы учесть некоторую вольность нашего языка. Когда мы говорим о *толщине страницы* книги, то на самом деле имеем в виду *толщину листа*, т. к. страница – это только поверхность листа и толщины не имеет. Ну, а листов у книги в 2 раза меньше, чем страниц.

3. БАКУ – УФА.

4. Поставим наблюдателя в конце моста. Как поезд может пройти по мосту? Сначала по мосту проходит голова поезда, а потом весь поезд проходит мимо наблюдателя. Значит, голова поезда проходит весь мост за 40 – 20 = 20 сек. Но ровно столько же времени уходит на то, чтобы вся длина поезда прошла мимо наблюдателя. Значит, эта длина также составляет 200 м.

5. Почему обходчик видит поезд ограниченное время? Потому, что обзор для него частично закрыт стеной. Но тогда решение зависит от ширины окна. На рисунке проведены два луча зрения через крайние точки оконного проема. Получаем два подобных треугольника с высотами 0,5 м и 200 м и основаниями a (ширина окна) и b.



Вычислим последнюю величину. Как и в предыдущей задаче, b складывается из длины поезда и расстояния, пройденного головой поезда за 20 сек. Значит, $b = 100 + 20 \cdot v$, где скорость поезда v выражена в м/сек.

В силу подобия треугольников, $b : a = 200$ м : 0,5 м = 400. Тогда $v = (b - 100)/20 = (400a - 100)/20 = 20\,a - 5$ (м/сек). В частности, при естественном предположении $a = 1$ м, получаем, что скорость поезда равна 15 м/сек или 54 км/ч. Именно такая величина приведена в ответе к этой задаче.

6. Нет, неправильно. Параллельные прямые не пересекаются *по определению*, так что никакой математик не заставит их это сделать. Конечно, авторы вопроса имели в виду Н.И.Лобачевского. Он, однако, доказал совсем другое: что непараллельные прямые могут не пересекаться (если параллельными считать прямые, каждая точка которых находится на одном и том же расстоянии от другой прямой).

7. Конечно, в полном объеме такое утверждение не докажешь. Однако можно показать, что при некоторых естественных предположениях плохие условия поездки будут наблюдаться чаще, чем хорошие.

Действительно, пусть велосипедист проходит один и тот же путь в двух направлениях: «туда» и «обратно». Каждый наклонный участок он пройдет дважды, причем в противоположных направлениях. Но «под горку» он проедет его быстрее, чем «в гору». Значит, время, когда велосипедисту надо подниматься в гору, больше того времени, когда он спускается с горы.

Пусть, например, путь состоит из 40 км в гору (скорость 10 км/ч) и 50 км под гору (скорость 15 км/ч). Если пройти его туда и обратно, то путь под гору займет 6 ч, а в гору – 9 ч. Разница вполне заметна!

То же верно и для ветра: если он дует с постоянной силой, то мешает велосипедисту в течение большего промежутка времени, чем помогает.

8. Конечно, «влезть в голову» Гоголю мы не можем, но можно привести два соображения. Во-первых, при небольших (по сравнению с R) значениях h величина l действительно растет очень быстро. График функции $\sqrt{2Rh}$ при малых h расположен почти вертикально. Когда Гоголь говорит о «необыкновенной прогрессии» он, вероятно, имеет в виду геометрическую прогрессию. Ее значения растут чем дальше, тем быстрее. Однако для радикала это неверно: с ростом h его рост замедляется.

Вторая возможная причина – «обман зрения». Если расстояния в 100-200 м можно представить себе непосредственно, то величина 150 верст выходит за пределы нашего зрительного опыта. Поэтому и оценки для такого расстояния делать трудно.

9. Не отражает. Хотя в процентном отношении "западников" больше среди зрителей НТВ, но по количеству их может оказаться гораздо больше у "Санкт-Петербурга".

Примером могут служить следующие условные данные:

	«Почвенники»	«Западники»
«Санкт–Петербург»	1 000 000	1 000 000
НТВ	100 000	150 000
Всего	1 100 000	1 150 000

Более точным было бы название "НТВ предпочитает западников", но ведь предпочтение может быть и не взаимным!

Кстати, вполне возможно, что заглавие заметки соответствует истине. Но в задаче спрашивалось только, соответствует ли оно самой заметке.

10. Второй собеседник неправильно понимает слово «редко». Конечно, 102-летние люди встречаются весьма редко. Но *для целей страхования* надо знать, как часто они умирают. Поэтому число смертных случаев надо сравнивать не с числом всех людей (как это делает работник), а с числом живущих 102-летних людей. В последнем понимании смертность будет весьма высокой. Как мы видим, выбор способа вычисления определяется поставленной задачей.

В терминах теории вероятностей можно сказать, что страховое общество интересует *условная вероятность* смерти, при условии, что человек уже дожил до 102 лет. Она не совпадает с безусловной (среди всех людей).

11. Скорее всего, нет. Рассмотрим отдельные, не универсальные средства. Каждое из них имеет свою цену. Например, средство для мытья пола – a руб., средство для чистки посуды – b руб., средство для стирки – c руб., причем $a < b < c$. Если наше универсальное средство хорошо подходит для стирки, оно должно стоить примерно c руб., но это значит, что мы будем мыть пол и чистить посуду слишком дорогим средством. Если же универсальное средство дешевле c руб., то оно будет плохо стирать.

В этом решении мы предполагаем, что цены на отдельные виды средств установились на наиболее низком возможном уровне в соответствии с их качеством.

12. По многим причинам. Во-первых, слишком уменьшать дозу чистой воды нельзя, как мы уже говорили в тексте статьи. Во-вторых, обычно при стирке нет жесткого дефицита воды. Можно, конечно, при 10 единицах воды сделать 10 полосканий по 1 единице и получить очищение в 1024 раза. Однако, 3 полоскания по 10 единиц дадут результат $(1 + 10)^3 = 1331$, что лучше и требует меньше времени.

С другой стороны, одного полоскания маловато. Например, результат 1331 при трех полосканиях достигается с помощью $3 \cdot 10 = 30$ единиц воды. В то же время одно полоскание с тем же эффектом потребует уже 1330 единиц!

Вторая причина: «чистая» вода, которую мы используем, не является дистиллированной. После некоторого количества полосканий количество загрязнений в белье практически стабилизируется на уровне загрязненности «чистой» воды.

Третья причина: в быту нам совсем не требуется «дистиллировать» белье. Гомеопатические дозы грязи (и моющих средств), которые дает многократное полоскание, важны разве что для людей с жестокой аллергией.

Литература

1. *Григорьева И.С.* Измеряем и усредняем // Математика для школьников. – 2010, – № 1. – С. 52-64.

2. *Шарыгин И.Ф.* Уроки дедушки Гаврилы, или Развивающие каникулы. М.: Дрофа, 2003.

3. *Сканави М.И.* Сборник задач по математике. М.: Высшая школа, 1972.