Казанский федеральный университет

Е.М. Карчевский, И.Л. Александрова

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

Учебное пособие для практических занятий

Казань
2024

Оглавление

Глава 1. Комплексные числа и многочлены

1.1 Комплексные числа, алгебраические операции над комплексными числами (занятие 1)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.[1]

Видео https://disk.yandex.ru/i/CVqV2UkwcM_Psg

Презентация https://disk.yandex.ru/i/9n_ktMMpgCfsSQ

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 1, §1

Мнимой единицей называется число i такое, что $i^2 = -1$.

Пусть x, y — вещественные числа. Число $z = x + iy$ называется *комплексным числом*. Число x называется *действительной частью* комплексного числа, y — *мнимой частью*.

Обозначим $x = \mathrm{Re} z$, $y = \mathrm{Im} z$. Тогда $z = \mathrm{Re} z + i \mathrm{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ *равны* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, т. е.

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2.$$

Число $0 + i0$ называется *нулем* и обозначается символом 0.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. *Суммой* комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

а их *разностью* — число

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Произведение комплексных чисел z_1 и z_2 есть комплексное число

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Правило *деления* комплексных чисел определяется формулой

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

[1] Все материалы курса https://disk.yandex.ru/d/X873mjn97T3SDA

Число $\overline{z} = x - iy$ называется *сопряженным* к числу $z = x + iy$. Заметим, что

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2.$$

Формула деления комплексных чисел получается, если умножить числитель и знаменатель на число, сопряженное к знаменателю.

Упражнение 1. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел $z_1 = 2 + i$ и $z_2 = 1 - i$.

Решение. Проведем вычисления по описанным выше правилам:

$$\begin{aligned}
&z = z_1 + z_2 = 2 + i + 1 - i = 3,\\
&z = z_1 - z_2 = 2 + i - (1 - i) = 1 + 2i,\\
&z = z_1 z_2 = (2 + i)(1 - i) = 2 - 2i + i - i^2 = 3 - i,\\
&z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{(2 + i)(1 + i)}{1^2 + 1^2} = \frac{2 - 1 + i(1 + 2)}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Упражнение 2. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, z_1/z_2, $\overline{z}_1$, $\overline{z_2}$, если

$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = 2 - i.$$

Ответ. $z_1 + z_2 = 4 + 2i$, $z_1 - z_2 = 4i$, $z_1 z_2 = 7 + 4i$, $z_1/z_2 = 1/5 + 8/5i$, $\overline{z}_1 = 2 - 3i$, $\overline{z}_2 = 2 + i$.

Упражнение 3. Найти такие вещественные числа x, y, что

$$(2 - i)x + (3 + 2i)y = 3 + 2i.$$

Решение. Раскроем скобки и приведем левую часть уравнения к виду $a + ib$, где a и b — вещественные числа, получим

$$(2x + 3y) + i(-x + 2y) = 3 + 2i.$$

Приравняем действительные и мнимые части чисел, стоящих в правой и левой частях этого равенства. Получим систему из двух уравнений с вещественными коэффициентами относительно двух вещественных неизвестных:

$$\begin{aligned}
2x + 3y &= 3,\\
-x + 2y &= 2.
\end{aligned}$$

Решим ее и найдем $x = 0$, $y = 1$.

Упражнение 4. Найти вещественные числа x, y из уравнения

$$(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i.$$

Ответ. $x = -4/11$, $y = 5/11$.

Упражнение 5. Решить следующую систему двух уравнений с комплексными коэффициентами относительно комплексных неизвестных z_1 и z_2:

$$\begin{aligned} (3-i)z_1 + (4+2i)z_2 &= 2+6i, \\ (4+2i)z_1 - (2+3i)z_2 &= 5+4i. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Решение. Вариант 1. Запишем систему (1.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 &= b_1, \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 &= b_2. \end{aligned}$$

Коэффициенты левой и правой частей этой системы равны

$$\begin{aligned} a_{11} = 3-i, \quad a_{12} = 4+2i, \quad b_1 = 2+6i, \\ a_{21} = 4+2i, \quad a_{22} = -2-3i, \quad b_2 = 5+4i. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Систему уравнений (1.1) решим методом исключения неизвестных. Сначала разделим коэффициенты обеих частей первого уравнения на a_{11} и посмотрим, чему они стали равны,

$$\tilde{a}_{11} = \frac{a_{11}}{a_{11}} = 1, \quad \tilde{a}_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{4+2i}{3-i} = 1+i, \quad \tilde{b}_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{2+6i}{3-i} = 2i.$$

В результате, первое уравнение системы стало выглядеть следующим образом:

$$z_1 + (1+i)z_2 = 2i. \tag{1.3}$$

Наша ближайшая цель — исключить из второго уравнения системы (1.1) неизвестную z_1. Для этого умножим коэффициенты уравнения (1.3) на a_{21} и посмотрим, чему они стали равны,

$$\tilde{\tilde{a}}_{11} = \tilde{a}_{11}a_{21} = 1 \cdot (4+2i) = 4+2i,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{a}}_{12} = \tilde{a}_{12}a_{21} = (1+i)(4+2i) = 2+6i, \\ \tilde{\tilde{b}}_1 = \tilde{b}_1 a_{21} = 2i(4+2i) = -4+8i. \end{aligned}$$

Запишем первое уравнение системы с этими коэффициентами:

$$(4+2i)z_1 + (2+6i)z_2 = -4+8i. \tag{1.4}$$

Для нас важно, что коэффициенты при неизвестной z_1 в первом и втором уравнениях системы стали равными. Вычтем из второго уравнения системы уравнений (1.1) преобразованное таким образом уравнение (1.4). Посмотрим, чему теперь равны коэффициенты второго уравнения,

$$\tilde{a}_{21} = a_{21} - \tilde{\tilde{a}}_{11} = (4+2i) - (4+2i) = 0,$$

$$\tilde{a}_{22} = a_{22} - \tilde{\tilde{a}}_{12} = (-2-3i) - (2+6i) = -4-9i,$$
$$\tilde{b}_2 = b_2 - \tilde{\tilde{b}}_1 = (5+4i) - (-4+8i) = 9-4i.$$

Важно, что коэффициент при первой неизвестной стал равным нулю, а само второе уравнение системы теперь выглядит так:

$$-(4+9i)z_2 = 9-4i.$$

Решим его и найдем

$$z_2 = \frac{\tilde{b}_2}{\tilde{a}_{22}} = \frac{9-4i}{-4-9i} = i.$$

Подставим теперь найденное $z_2 = i$ в первое уравнение системы вида (1.3) и вычислим

$$z_1 = \tilde{b}_1 - \tilde{a}_{12} z_2 = 2i - (1+i)i = 1+i.$$

Ответ: $z_1 = 1+i$, $z_2 = i$.

Замечание. Решение этой задачи, потребовало довольно объемных вычислений. Их удобно провести на компьютере. Например, можно использовать библиотеку символьных вычислений `sympy` языка программирования `Python`. Покажем, как это сделать: https://colab.research.google.com/drive/1Cv7LNSSwOcsqmcinL-ouh1OYna-_POpV?usp=sharing

Вариант 2 решения упражнения 5. Пусть

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2.$$

Вычислим вещественные и мнимые части от левых и правых частей обоих уравнений системы (1.1):

$$\mathrm{Re}((3-i)(x_1+iy_1) + (4+2i)(x_2+iy_2)) = 3x_1 + 4x_2 + y_1 - 2y_2,$$

$$\mathrm{Re}((4+2i)(x_1+iy_1)-(2+3i)(x_2+iy_2)) = 4x_1-2x_2-2y_1+3y_2,$$
$$\mathrm{Im}((3-i)(x_1+iy_1)+(4+2i)(x_2+iy_2)) = -x_1+2x_2+3y_1+4y_2,$$
$$\mathrm{Im}((4+2i)(x_1+iy_1)-(2+3i)(x_2+iy_2)) = 2x_1-3x_2+4y_1-2y_2,$$
$$\mathrm{Re}(2+6i) = 2,$$
$$\mathrm{Re}(5+4i) = 5,$$
$$\mathrm{Im}(2+6i) = 6,$$
$$\mathrm{Im}(5+4i) = 4.$$

Приравняем вещественные и мнимые части левых и правых частей системы уравнений (1.1). Получим систему четырех уравнений с вещественными коэффициентами относительно четырех вещественных неизвестных x_1, x_2, y_1, y_2:

$$\begin{aligned}&3x_1+4x_2+y_1-2y_2=2,\\&4x_1-2x_2-2y_1+3y_2=5,\\&-x_1+2x_2+3y_1+4y_2=6,\\&2x_1-3x_2+4y_1-2y_2=4.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Решим эту систему уравнений методом последовательного исключения неизвестных, подобно тому, как мы это сделали в ходе первого способа решения задачи. С одной стороны, вычисления будут проще, так как все числа вещественные. С другой стороны, неизвестных и уравнений теперь четыре. Запишем вычисленные значения для четырех вещественных неизвестных

$$x_1=1, \quad x_2=0, \quad y_1=1, \quad y_2=1$$

системы (1.5). Составим из вещественных и мнимых частей выражения для искомых комплексных переменных.

Ответ: $z_1 = x_1+iy_1 = 1+i$, $z_2 = x_2+iy_2 = i$.

Замечание. Этот способ решения задачи тоже потребовал достаточно объемных вычислений. Покажем, как их можно провести, программируя в `Python`: https://colab.research.google.com/drive/1FNmCF9ErF3l_pnGbDFxDJ5ZP11h3Gdrv?usp=sharing

Упражнение 6. Решить следующую систему уравнений относительно комплексных чисел z_1 и z_2:

$$\begin{aligned}&(2+i)z_1+(2-i)z_2=6,\\&(3+2i)z_1+(3-2i)z_2=8.\end{aligned}$$

Ответ. $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 2 - i$.

Упражнение 7. Найти вещественные числа x, y, u, v, являющиеся решениями следующей системы уравнений с комплексными коэффициентами:

$$(1+i)x + (1+2i)y + (1+3i)u + (1+4i)v = 1+5i,$$
$$(3-i)x + (4-2i)y + (1+i)u + 4iv = 2-i.$$

Ответ. $x = -2$, $y = 3/2$, $u = 2$, $v = -1/2$.

1.2 Операции с комплексными числами в тригонометрической форме (занятие 2)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.
Видео:
https://disk.yandex.ru/i/FfIFMt3cKSI1Uw
https://disk.yandex.ru/i/ejqqViU-13M5lQ
https://disk.yandex.ru/i/Cmv14UwGwzdr1A
Презентации:
https://disk.yandex.ru/i/CCoY4pg1BJhOuA
https://disk.yandex.ru/i/E6AK6_AiJh1BXw
https://disk.yandex.ru/i/m5Sxbzjcdu3Vqg
Учебник:
https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 1, §2-4

Вещественное неотрицательное число

$$\rho = |z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$. Здесь i — мнимая единица, $x = \operatorname{Re} z$ — действительная часть, $y = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть комплексного числа z, $\overline{z} = x - iy$ — число, сопряженное к z.

Введем на плоскости декартову систему координат $(x{,}y)$ и поставим в соответствие каждому комплексному числу $z = x+iy$ точку с координатами $(x{,}y)$ (см. рис. 1.1). При этом модуль комплексного числа, очевидно, — это расстояние от точки $(x{,}y)$ до начала координат.

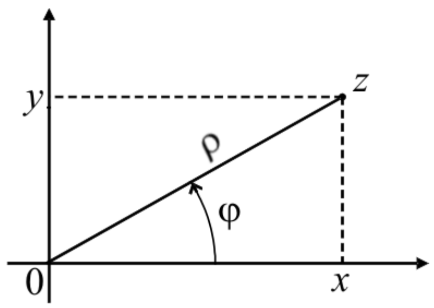

Рисунок 1.1 — Геометрическая интерпретация комплексного числа.

Форму записи $z = x + iy$ комплексного числа принято называть *алгебраической*. Вместе с тем, любое комплексное число $z = x + iy$ можно записать в *тригонометрической форме*

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где ρ — *модуль* комплексного числа, φ — *аргумент* комплексного числа. Угол φ отсчитывается от положительного направления оси x против часовой стрелки (см. рис. 1.1) и изменяется от 0 до 2π. Тогда

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

Представим операции умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в тригонометрической форме. Пусть

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$$\begin{gathered} z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)), \\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)), \\ z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \end{gathered} \tag{1.6}$$

Формулу (1.6) называют *формулой Муавра.*

Корнями степени n из числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ являются числа

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k), \quad \varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{1.7}$$

Таким образом, у любого комплексного числа n разных корней степени n.

Упражнение 1. Представить комплексное число $z = 1 + i$ в тригонометрической форме.

Решение. Пусть $z = 1+i$. Тогда $x = 1$, $y = 1$. Найдем модуль этого числа:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}.$$

Заметим, что

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

значит аргумент $\varphi = \pi/4$, т. е. число z лежит в первой четверти (см. рисунок 1.2). Таким образом, тригонометрическое представление числа z будет

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Покажем, как найти модуль и аргумент этого числа, используя библиотеку символьных вычислений `sympy` языка программирования `Python`: https://colab.research.google.com/drive/1_gp16-ha8WsxL5t-sUtvEstHbMzqA8Hw?usp=sharing

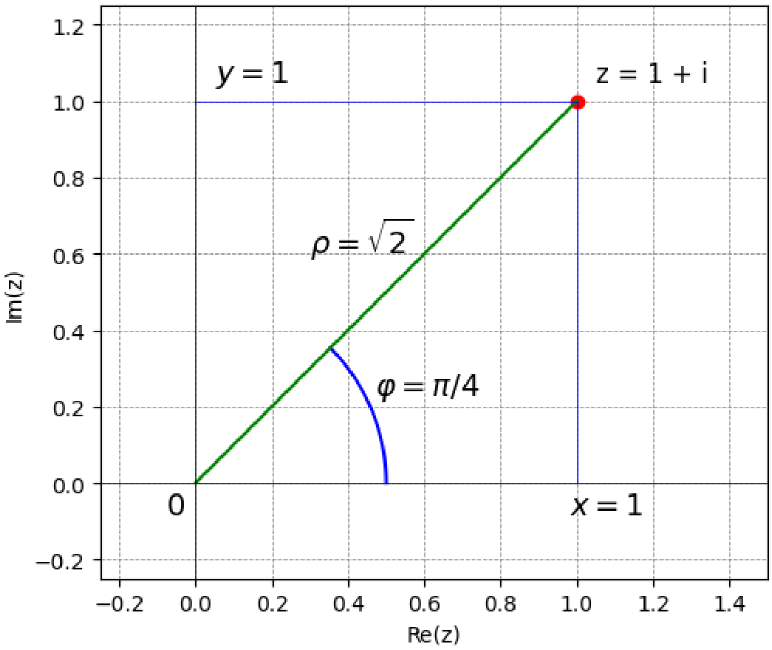

Рисунок 1.2 — Комплексное число $z = 1 + i$.

Покажем, как нарисовать это число на комплексной плоскости (см. рис. 1.2), программируя в `Python`: https://colab.research.google.com/drive/1OE7AuE8ZplDi_K98V_CvC_I_vuvfENN3?usp=sharing

Упражнение 2. Представить комплексное число $z = -1 - i$ в тригонометрической форме.

Решение. Пусть $z = -1 - i$. Тогда $x = -1$, $y = -1$. Модуль этого числа

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}.$$

Найдем аргумент. Заметим, что

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

тогда аргумент $\varphi = 5\pi/4$, т. е. комплексное число лежит в третьей четверти (сделайте рисунок!). Таким образом, тригонометрическое представление числа $z = -1 - i$ будет

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

Найдем модуль и аргумент этого числа в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1vH9g8DqXdFsCFsIyodgVJ7bfEFv1WyQe?usp=sharing

Упражнение 3. Представить в тригонометрической форме следующие числа. На рисунках показать, где они находятся на комплексной плоскости.

$a)$ i,

$b)$ -1,

$c)$ $-i$,

$d)$ $-1 + i$,

$e)$ $1 - i$,

$f)$ $-1 + i\sqrt{3}$,

$g)$ $-1 - i\sqrt{3}$.

$h)$ $1 + i\sqrt{3}$.

Ответ.

$a)$ $\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$,

$b)$ $\cos\pi + i\sin\pi$,

$c)$ $\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}$,

$d)$ $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$,

$e)$ $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$,

$f)$ $2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$,

$g)$ $2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

$h)$ $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Упражнение 4. Описать множество точек, изображающих числа z, удовлетворяющих неравенствам. Сделать рисунки на комплексной плоскости.

$a)$ $|z| < 2$,

$b)$ $|z - i| \leqslant 1$,

$c)$ $|z - 1 - i| < 1$.

Ответ. $a)$ Внутренность круга радиуса 2 с центром в начале координат,

$b)$ внутренность и граница круга радиуса 1 с центром в точке (0,1),

c) внутренность круга радиуса 1 с центром в точке (1,1).

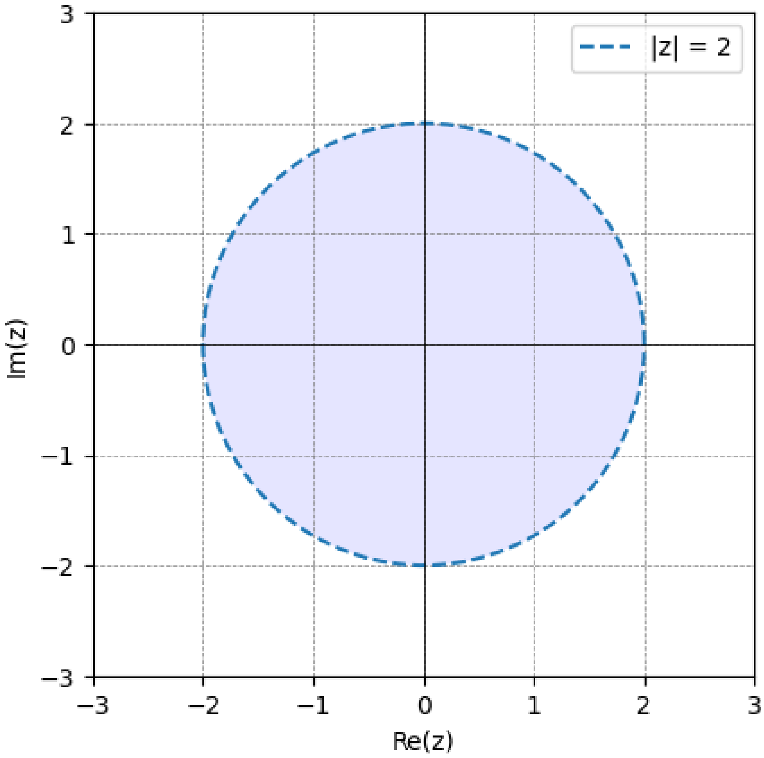

Рисунок 1.3 — Множество точек z, удовлетворяющее неравенству $|z| < 2$.

Покажем, как выполнить упражнение 4 a) (см. рис. 1.3), программируя в Python: https://colab.research.google.com/drive/1_1PMahowdx4N_SzTJaYQPYqp2pizET4C?usp=sharing

Упражнение 5. Найти $\min |2i - z|$, считая $|z| \leqslant 1$, и точку z_m, в которой этот минимум достигается.

Решение. Сделаем рисунок. Изобразим множество точек z на плоскости, удовлетворяющих условию $|z| \leqslant 1$. Это единичный круг с центром в начале координат вместе со своей границей. Нам нужно найти точку, принадлежащую этому множеству, расположенную ближе всего к точке $2i$, и расстояние от найденной точки до $2i$. Ясно, что это точка i а расстояние от нее до $2i$ равно 1.

Ответ. $\min\limits_{|z|\leqslant 1} |2i - z| = 1$. Минимум достигается в точке $z_m = i$.

Упражнение 6. Проверить, что

a) $\overline{\overline{z}} = z$,

b) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$,

c) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$,

d) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$,

e) $z - \overline{z} = i2\operatorname{Im} z$.

Указание. Покажем, например, что $\overline{\overline{z}} = z$. Действительно,

$$\overline{\overline{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z.$$

Остальные равенства проверьте аналогично.

Упражнение 7. Пусть a, b, x, y — вещественные числа. Приведите выражение $\dfrac{a+bi}{a-bi}$ к виду $x + iy$.

Ответ. $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + i\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$. Указание. Умножьте числитель и знаменатель на число сопряженное со знаменателем.

Упражнение 8. Доказать, что

$$(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}\right).$$

Решение. Представим единицу в тригонометрической форме. Сгруппируем отдельно вещественные, отдельно мнимые числа в скобках. Применим формулы для суммы косинусов и суммы синусов. Вынесем общий множитель за скобку. Затем используем формулу Муавра (1.6). В результате получим следующую цепочку равенств:

$$(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (\cos 0 + i\sin 0 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n =$$

$$= \left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}\right).$$

Упражнение 9. Вычислить $(1+i)^{25}$.

Решение. Представим число $z = 1 + i$ в тригонометрической форме:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Воспользуемся формулой Муавра (1.6), получим

$$(1+i)^{25} = z^{25} = \sqrt{2}^{25}\left(\cos\frac{25\pi}{4} + i\sin\frac{25\pi}{4}\right).$$

Упростим получившиеся выражение:

$$(1+i)^{25} = 2^{12}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2^{12}\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = 2^{12} + 2^{12}i.$$

Ответ. $(1+i)^{25} = 2^{12} + 2^{12}i$.

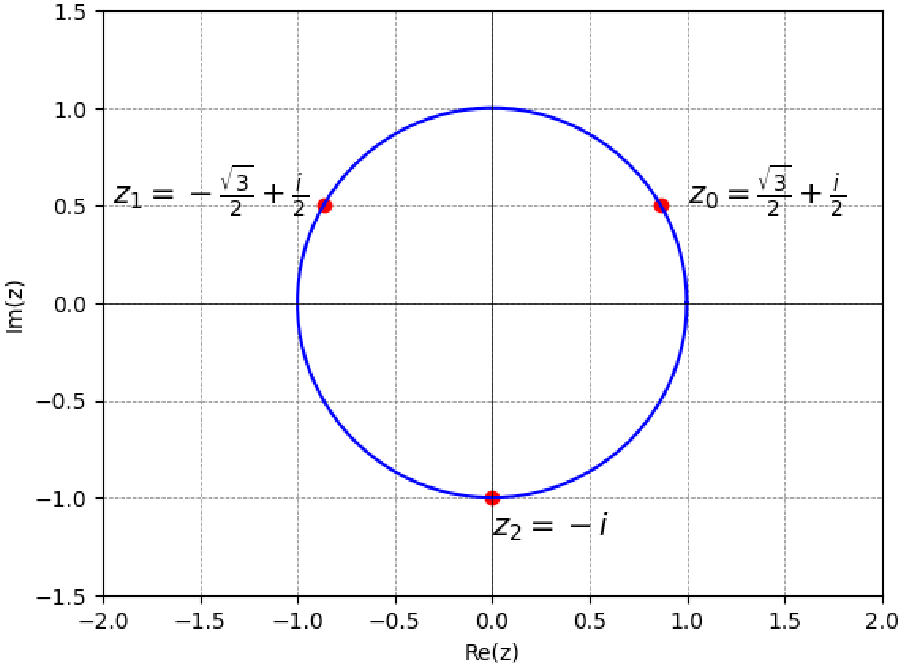

Рисунок 1.4 — Корни третьей степени из мнимой единицы.

Теперь вычислим $(1+i)^{25}$ в sympy: https://colab.research.google.com/drive/1Nam2Ecqnp9-6HgBPPBaBBcIO8XgW_dG0?usp=sharing

Упражнение 10. Вычислить $\sqrt[3]{i}$ и сделать рисунок.

Решение. Представим $z = i$ в тригонометрической форме

$$z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

По формуле извлечения корня (1.7) имеем

$$z_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Выпишем все корни (см. рисунок 1.4).

При $k = 0$ имеем $z_0 = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$.

При $k = 1$ имеем $z_1 = \cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$.

При $k = 2$ имеем $z_2 = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2} = -i$.

Теперь покажем, как вычислить $\sqrt[3]{i}$ в sympy: https://colab.research.google.com/drive/1tJYNgFpu4ZBoQjzYPnLoe_SOWwd756n0?usp=sharing

Сделаем рисунок корней третьей степени из мнимой единицы (см. рис. 1.4), программируя в `Python`: https://colab.research.google.com/drive/171c-wCwuhGvrt8iqXwPiudcJCg-D0XDp?usp=sharing

Упражнение 11. Вычислить выражение $\dfrac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$.

Ответ. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(2\varphi-\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\varphi-\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$.

Упражнение 12. Вычислить $(1+i)^6$.

Ответ. $-2^3 i$.

Упражнение 13. Извлечь корни *a*) $\sqrt[4]{-1}$, *b*) $\sqrt[n]{1}$, *c*) $\sqrt[3]{1}$, *d*) $\sqrt[2]{1}$.

Ответ. *a*) $(1+i)/\sqrt{2}$, $(1-i)/\sqrt{2}$, $(-1+i)/\sqrt{2}$, $(-1-i)/\sqrt{2}$;

b) $\cos\dfrac{2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{2\pi k}{n}$, $k=0,1,\ldots,n-1$;

c) 1, $-\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

d) ± 1.

Упражнение 14. Вычислить выражение $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Ответ. $2^9(1-i\sqrt{3})$.

Упражнение 15. Вычислить $\left(1/2-i\sqrt{3}/2\right)^5$.

Ответ. $1/2+i\sqrt{3}/2$.

Упражнение 16. Вычислить $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

Ответ. $\dfrac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\dfrac{24k+19}{72}\pi+i\sin\dfrac{24k+19}{72}\pi\right)$, $k=0,1,2,3,4,5$.

Упражнение 17. Извлечь корень $\sqrt[5]{2+3i}$.

Ответ. $\sqrt[10]{13}\left(\cos\dfrac{\arctan\frac{3}{2}+2\pi k}{5}+i\sin\dfrac{\arctan\frac{3}{2}+2\pi k}{5}\right)$, $k=0,1,2,3,4$.

Упражнение 18. Извлечь корень шестой степени из единицы.

Ответ. ± 1, $\pm\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1.3 Многочлены (занятие 3)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.
Видео:
https://disk.yandex.ru/i/oPmGFBS3T5hKVQ
https://disk.yandex.ru/i/VofFYA39VdCXbQ
https://disk.yandex.ru/i/mG-5Cy-JEsA69A
Презентации:
https://disk.yandex.ru/i/qHH3CnazlBV3CA
https://disk.yandex.ru/i/VKFsulbD-KjD4w
https://disk.yandex.ru/i/bHyP-TtVAQuPwA
Учебник:
https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 2, §1-3

Многочленом называется функция вида

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0, \tag{1.8}$$

где a_0, a_1, ..., a_n — фиксированные комплексные числа, *коэффициенты* многочлена, $n \geqslant 0$ — *степень* многочлена.

Число α называется *корнем* многочлена, если $P_n(\alpha) = 0$.

Число α называется корнем *кратности* $k \geqslant 1$ многочлена P_n, если $P_n(z)$ делится на $(z-\alpha)^k$ без остатка,

$$P_n(z) = (z-\alpha)^k q_{n-k}(z),$$

а частное $q_{n-k}(z)$ не делится на $(z-\alpha)$, т. е. α не является корнем многочлена $q_{n-k}(z)$. Если кратность корня равна единице, то корень называют *простым*.

Всякий многочлен степени $n \geqslant 1$ имеет ровно n корней с учетом их кратности, и справедливо следующее разложение многочлена на множители:

$$P_n(z) = (z-\alpha_1)^{k_1}(z-\alpha_2)^{k_2} \cdots (z-\alpha_m)^{k_m},$$

где

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n.$$

Для того чтобы найти все корни многочлена степени n (такого, что явной формулы нет) без использования компьютера, нужно сначала догадаться, какое число может быть корнем. Затем надо убедиться, что данное число α действительно является корнем, и разделить многочлен на $z-\alpha$. Эти действия следует повторить для частного, и так до тех пор, пока не будут найдены все n корней с учетом их кратности.

Упражнение 1. Получить список чисел, подозрительных на то, что они могут быть корнями многочлена

$$P_5(z) = z^5 - 5z^4 + 7z^3 - 2z^2 + 4z - 8. \tag{1.9}$$

Решение. Согласно теореме Вьета, для корней α_1, α_2, …, α_n приведенного многочлена (все коэффициенты исходного многочлена (1.8) делятся на его старший коэффициент a_n),

$$\widetilde{P}_n(z) = z^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}z^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{a_n}z + \frac{a_0}{a_n},$$

справедливо равенство

$$\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

Поэтому начать поиск его корней можно среди чисел вида $\dfrac{s}{t}$, где s — делители a_0, а t — делители a_n.

Выпишем делители свободного члена a_0 многочлена (1.9): $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$. Делители его старшего коэффициента a_n равны ±1. Поэтому числами, подозрительными на то, что они могут быть корнями этого многочлена, являются числа $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$.

Упражнение 2. Убедиться в том, что среди чисел $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$, действительно, есть корень α многочлена (1.9), разделить исходный многочлен на $z-\alpha$ и получить частное.

Решение. По теореме о делении многочленов, для многочленов $P_n(z)$ и $Q_1(z) = z - \alpha$ существуют такие многочлены $q_{n-1}(z)$ и r_0, что

$$P_n(z) = (z-\alpha)q_{n-1}(z) + r_0.$$

Пусть

$$q_{n-1}(z) = c_{n-1}z^{n-1} + c_{n-2}z^{n-2} + \ldots + c_0.$$

Коэффициенты частного $q_{n-1}(z)$ и остаток $r_0(z)$ можно найти по *схеме Горнера*:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
α	$c_{n-1} = a_n$	$c_{n-2} = a_{n-1} + \alpha c_{n-1}$	$c_{n-3} = a_{n-2} + \alpha c_{n-2}$	$\dots$	$c_0 = a_1 + \alpha c_1$	$r_0 = a_0 + \alpha c_0$

Если остаток $r_0 = 0$, то число α — корень исходного многочлена $P_n(z)$.

Установим, есть ли среди чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ корни многочлена $P_5(z)$, определенного равенством (1.9). Воспользуемся схемой Горнера:

	$a_5 = 1$	$a_4 = -5$	$a_3 = 7$	$a_2 = -2$	$a_1 = 4$	$a_0 = -8$
α	$c_4 = a_5$	$c_3 = a_4 + \alpha c_4$	$c_2 = a_3 + \alpha c_3$	$c_1 = a_2 + \alpha c_2$	$c_0 = a_1 + \alpha c_1$	$r_0 = a_0 + \alpha c_0$
1	1	$-5 + 1 = -4$	$7 - 4 = 3$	$-2 + 3 = 1$	$4 + 1 = 5$	$-8 + 5 = -3$
-1	1	$-5 - 1 = -6$	$7 + 6 = 13$	$-2 - 13 = -15$	$4 + 15 = 19$	$-8 - 19 = -27$
2	1	$-5 + 2 = -3$	$7 - 6 = 1$	$-2 + 2 = 0$	$4 + 0 = 4$	$-8 + 8 = 0$

Из таблицы видно, что $\alpha = 2$ есть корень многочлена $P_5(z)$. Соответствующее частное есть $q_4(z) = z^4 - 3z^3 + z^2 + 4$, и справедливо разложение

$$P_5(z) = (z - 2)(z^4 - 3z^3 + z^2 + 4). \tag{1.10}$$

Замечание. Разделить многочлен $P_5(z)$, определенный в (1.9), на многочлен $z - 2$, вычислить частное и остаток можно программируя в `sympy`. Решение этой задачи можно посмотреть по ссылке https://colab.research.google.com/drive/1zxADCu0GMCcRV8xtKMoWvE2i4DGlqYD3?usp=sharing

Упражнение 3. Выяснить, какую кратность имеет корень $\alpha = 2$ многочлена $P_5(z)$, определенного в (1.9).

Решение. Для того чтобы узнать кратность корня α с помощью схемы Горнера, надо делить исходный полином на $z - \alpha$ до тех пор, пока частное не перестанет него делиться.

Мы уже установили разложение (1.10). Теперь будем искать корни частного от деления многочлена $P_5(z)$ на $z-2$, т. е. многочлена $q_4(z) = z^4-3z^3+z^2+4$. Проверим, есть ли среди них число 2.

	$a_4 = 1$	$a_3 = -3$	$a_2 = 1$	$a_1 = 0$
α	$c_3 = a_4$	$c_2 = a_3 + \alpha c_3$	$c_1 = a_1 + \alpha c_1$	$c_0 = a_1 + \alpha c_1$
2	1	$-3+2=-1$	$1-2=-1$	$0-2=-2$

$a_0 = 4$
$r_0 = a_0 + \alpha c_0$
$4-4=0$

Мы убедились, что число $\alpha = 2$ — корень многочлена $q_4(z)$, следовательно, $q_4(z) = (z-2)(z^3-z^2-z-2)$. Продолжим поиск корней. Будем искать корни многочлена $q_3(z) = z^3-z^2-z-2$. Установим, есть ли среди них число 2.

	$a_3 = 1$	$a_2 = -1$	$a_1 = -1$	$a_0 = -2$
α	$c_2 = a_3$	$c_1 = a_2 + \alpha c_2$	$c_0 = a_1 + \alpha c_1$	$r_0 = a_0 + \alpha c_1$
2	1	$-1+2=1$	$-1+2=1$	$-2+2=0$

Итак, число $\alpha = 2$ является также корнем многочлена $q_3(z)$, следовательно, $q_3(z) = (z-2)(z^2+z+1)$. Ясно, что у многочлена z^2+z+1 вещественных корней нет. Таким образом, многочлен $P_5(z)$ имеет корень $\alpha = 2$ кратности три.

Упражнение 4. Разложить многочлен $P_n(z)$, определенный равенством (1.9), на множители.

Решение. Мы только что установили, что этот многочлен можно представить в виде

$$P_5(z) = (z-2)^3(z^2+z+1).$$

Для того, чтобы найти оставшиеся два корня многочлена $P_5(z)$, необходимо решить квадратное уравнение

$$z^2+z+1=0.$$

Решения этого уравнения — комплексные числа

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Действительно, мы знаем, что числа

$$\alpha_1 = p + i\sqrt{q - p^2}, \quad \alpha_2 = p - i\sqrt{q - p^2}.$$

являются корнями квадратного уравнения, записанного в виде

$$z^2 - 2pz + q = 0.$$

Занумеруем все корни многочлена $P_5(z)$ с учетом их кратности:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha_{3,4,5} = 2.$$

Многочлен $P_5(z)$ можно представить теперь в виде

$$P_5(z) = (z-2)^3 \left(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Замечание. Вычислить все корни и их кратности для многочлена $P_5(z)$, определенного в (1.9), можно программируя в `sympy`. Решение этой задачи можно посмотреть по ссылке https://colab.research.google.com/drive/1HN1VnXX5aWOJ4pCqB-XIN22Nh3VGd-Hs?usp=sharing

Упражнение 5. Разложить многочлен $P_5(z)$, определенный равенством (1.9), на неприводимые вещественные множители.

Решение. У многочлена с вещественными коэффициентами комплексные корни всегда представляют собой пары комплексно сопряженных чисел, α и $\overline{\alpha}$, для которых справедливо равенство

$$(z - \alpha)(z - \overline{\alpha}) = z^2 + (-2\operatorname{Re}\alpha)z + |\alpha|^2.$$

В рассматриваемом примере $\alpha_2 = \overline{\alpha}_1$, кроме того,

$$(z - \alpha_1)(z - \overline{\alpha}_1) = z^2 + z + 1,$$

т. е. при вещественных z полином $P_5(z)$ допускает представление в виде произведения трех линейных и одного квадратичного вещественных сомножителей, а именно, $P_5(z) = (z-2)^3(z^2 + z + 1)$.

Покажем, как это упражнение можно выполнить в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/16kDVCbQNOhshPaqXr-fqGyw73JvapAHw?usp=sharing

Упражнение 6. Найти корни многочлена $z^4 + 13z^2 + 36$.

Ответ. $\alpha_{1,2} = \pm 2i$, $\alpha_{3,4} = \pm 3i$.

Упражнение 7. Найти корни многочлена $z^5 + 7z^4 + 16z^3 + 8z^2 - 16z - 16$.

Ответ. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_{2,3,4,5} = -2$.

Упражнение 8. Разложить на неприводимые вещественные множители многочлен $z^6 - 6z^4 - 4z^3 + 9z^2 + 12z + 4$.

Ответ. $(z + 1)^4(z - 2)^2$.

Упражнение 9. Разложить на неприводимые вещественные множители многочлен $z^4 + 4$.

Ответ. $(z^2 + 2z + 2)(z^2 - 2z + 2)$.

Упражнение 10. Разложить на неприводимые вещественные множители многочлен $z^5 - 10z^3 - 20z^2 - 15z - 4$.

Ответ. $(z + 1)^4(z - 4)$.

Упражнение 11. Разложить на неприводимые вещественные множители многочлен $z^6 + 27$.

Ответ. $(z^2 + 3)(z^2 + 3z + 3)(z^2 - 3z + 3)$.

Упражнение 12. Разложить на неприводимые вещественные множители многочлен $z^6 - 15z^4 + 8z^3 + 51z^2 - 72z + 27$.

Ответ. $(z - 1)^3(z + 3)^2(z - 3)$.

Глава 2. Определители второго и третьего порядков

2.1 Решение систем двух и трех уравнений (занятие 4)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.
Видео:
https://disk.yandex.ru/i/KQmkjMQK8PWkuQ
https://disk.yandex.ru/i/cs7Usp0mHvvQZg
Презентации:
https://disk.yandex.ru/i/Q0ScqpOWqswMNQ
https://disk.yandex.ru/i/atcziXdi8eifIQ
Учебник:
https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 3, §1, 2

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 — заданные, вообще говоря, комплексные числа, x_1 и x_2 требуется найти. Таблицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

называют *матрицей второго порядка.* Величину

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2.3}$$

называют *определителем* матрицы A. Для определителя используют также следующие обозначения:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Если $\Delta \neq 0$, то x_1 и x_2 можно найти по *формулам Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{2.4}$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Эти формулы не имеют смысла, когда определитель равен нулю,

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0,$$

или

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}},$$

т. е. строки определителя $|A|$ пропорциональны. Если при этом и

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_{12}}{a_{22}}, \tag{2.5}$$

то первое и второе уравнения системы (2.1), фактически, совпадают, и она имеет бесконечное множество решений. Если $|A| = 0$, но

$$\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}, \tag{2.6}$$

то первое и второе уравнения системы (2.1) противоречивы, система *несовместна*, не имеет ни одного решения.

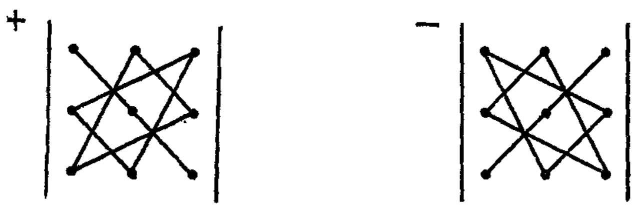

Рисунок 2.1 — Правило расстановки знаков в определителе третьего порядка

Обратимся к системе трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Из ее коэффициентов можно составить *матрицу третьего порядка*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы вычисляется по формуле

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (2.8)$$

Для запоминания знаков, с которыми слагаемые входят в эту сумму, полезно использовать схему, представленную на рисунке 2.1. Если $\Delta \neq 0$, то единственное решение системы (2.7) можно найти по *формулам Крамера*:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1,2,3, \quad (2.9)$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Упражнение 1. Вычислить определители второго порядка, используя формулу (2.3):

$a)$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; $b)$ $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$; $c)$ $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$;

$d)$ $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; $e)$ $\begin{vmatrix} \cos\varphi + i\sin\varphi & 1 \\ 1 & \cos\varphi - i\sin\varphi \end{vmatrix}$;

$f)$ $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$; $g)$ $\begin{vmatrix} \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{2t}{1+t^2} & -\dfrac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

Ответ. $a)$ -2; $b)$ -1; $c)$ $-2b^3$; $d)$ $\sin(\alpha-\beta)$; $e)$ 0; $f)$ -1; $g)$ -1.

Покажем, как вычислить определитель $g)$, программируя в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1RoaP2Z5VI1-J6p_MKXqmXKaFcC27EyP5?usp=sharing

Упражнение 2. Вычислить определители второго порядка, используя формулу (2.3):

$a)$ $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$; $b)$ $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$; $c)$ $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; $d)$ $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix}$;

$e)$ $\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix}$, где $\varepsilon = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$.

Ответ. *a*) 0; *b*) 0; *c*) 1; *d*) $1/\cos^2\alpha$; *e*) $1/2 + i\sqrt{3}/2$.

Упражнение 3. Выяснить, совместна ли система, если да, имеет ли она одно, или бесконечно много решений. Если решение существует и единственно, найти его по формулам Крамера (2.4):

a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5,\\ 3x_1 + 4x_2 &= 6, \end{aligned}$ *b*) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3,\\ 2x_1 + 4x_2 &= 6, \end{aligned}$ *c*) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2,\\ 2x_1 + 4x_2 &= 6. \end{aligned}$

Решение.

a) Определитель матрицы системы

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5,\\ 3x_1 + 4x_2 &= 6 \end{aligned}$$

равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2.$$

Система имеет единственное решение. Вычислим его по формулам (2.4):

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2\\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{20 - 12}{-2} = -4, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5\\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{6 - 15}{-2} = \frac{9}{2}.$$

b) Определитель матрицы системы

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3,\\ 2x_1 + 4x_2 &= 6 \end{aligned}$$

равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2\\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

При этом

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4}.$$

Уравнения системы, фактически, совпадают. Система имеет бесчисленное множество решений.

c) Система

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{gathered}$$

не имеет решений, так как ее определитель равен нулю, но

$$\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

Упражнение 4. Найти решение по формулам Крамера (2.4):

a) $\begin{aligned} 5x_1 - 7x_2 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 &= 0; \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha &= \cos\beta, \\ x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha &= \sin\beta, \end{aligned}$ где $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k = 0, 1, 2, \dots$.

Ответ. *a)* $x_1 = \dfrac{2}{3}, y = \dfrac{1}{3}$; *b)* $x_1 = \cos(\beta - \alpha), y = \sin(\beta - \alpha)$.

Упражнение 5. Найти решение по формулам Крамера (2.4):

a) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 4, \\ 4x_1 - 5x_2 &= 10; \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} 4x_1 + 7x_2 + 13 &= 0, \\ 5x_1 + 8x_2 + 14 &= 0. \end{aligned}$

Ответ. *a)* $x_1 = 5,\ y = 2$; *b)* $x_1 = 2, y = -3$.

Упражнение 6. Исследовать, при каких a система уравнений

$$\begin{aligned} ax_1 + 4x_2 &= 2, \\ 9x_1 + ax_2 &= 3 \end{aligned}$$

имеет единственное решение, бесконечно много решений, ни одного решения.

Решение. Определим матрицу A и вектор правой части b этой системы:

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 \\ 9 & a \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель $\det(A) = a^2 - 36$. Найдем те значения a, при которых определитель равен нулю. Ясно, что это $a = \pm 6$. Значит, при $a \neq \pm 6$ исходная система имеет единственное решение. Заменим в матрице A значение параметра a числом 6. Затем припишем справа от полученной матрицы A столбец правой части b, получим

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Строки этой, так называемой, *расширенной матрицы* пропорциональны. А именно, вторая строка в полтора раза больше первой. Значит условие (2.5) выполняется, и исходная система при $a = 6$ имеет бесконечное число решений. Теперь заменим в матрице A значение параметра a числом -6. Снова построим расширенную матрицу:

$$(A,b) = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 2 \\ 9 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь строки расширенной матрицы не пропорциональны. Значит выполняется условие (2.6), и решений при $a = -6$ у исходной системы нет.

Покажем, как выполнить это упражнение, программируя в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/11SDXDtij57rmsC_QPHYvI4Q4dgmGuTGE?usp=sharing

Упражнение 7. Вычислить определитель третьего порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Решение. Применим формулу (2.8), получим

$$\Delta = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 4 \cdot 2 \cdot 9 - 1 \cdot 8 \cdot 6 =$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 225 - 225 = 0.$$

Проверим ответ в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1UW3VV5CFeLHRLpXU2LwAXgbl1Yky5j6y?usp=sharing

Упражнение 8. Вычислить определители третьего порядка:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix};$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ответ. $a)$ -5; $b)$ 1; $c)$ -2.

Покажем, как определитель *b*) вычислить в sympy: https://colab.research.google.com/drive/1yAltJAlon2WT2KlZ6ficvZg8BwVjU0Qf?usp=sharing

Упражнение 9. Вычислить определители третьего порядка:

$$a)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix};\quad b)\ \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix};\quad c)\ \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix};$$

$$d)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega^2 \end{vmatrix},\quad \text{где } \omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Ответ. *a*) -3; *b*) 100; *c*) $\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)$, *d*) 0.

Упражнение 10. При каком условии справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}?$$

Ответ. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Упражнение 11. Найти решение по формулам Крамера (2.9):

$$a)\ \begin{aligned} 2x_1+3x_2+5x_3 &= 10, \\ 3x_1+7x_2+4x_3 &= 3, \\ x_1+2x_2+2x_3 &= 3. \end{aligned}\qquad b)\ \begin{aligned} 4x_1-3x_2+2x_3+4 &= 0, \\ 6x_1-2x_2+3x_3+1 &= 0, \\ 5x_1-3x_2+2x_3+3 &= 0. \end{aligned}$$

Ответ. *a*) $x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = 2$; *b*) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$.

Упражнение 12. Найти решение по формулам Крамера (2.9):

$$a)\ \begin{aligned} 5x_1-6x_2+4x_3 &= 3, \\ 3x_1-3x_2+2x_3 &= 2, \\ 4x_1-5x_2+2x_3 &= 1. \end{aligned}\qquad b)\ \begin{aligned} 5x_1+2x_2+3x_3+2 &= 0, \\ 2x_1-2x_2+5x_3 &= 0, \\ 3x_1+4x_2+2x_3+10 &= 0. \end{aligned}$$

Ответ. *a*) $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; *b*) $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = -2$.

2.2 Свойства определителей третьего порядка (занятие 5)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.

Видео: https://disk.yandex.ru/i/9ag38-vpQK46Vw

Презентация: https://disk.yandex.ru/i/V0aFlkqeXS9nqQ

Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 3, §3

Приведем свойства определителей третьего порядка.

1. Матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется *транспонированной* по отношению к исходной матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определитель не меняется при транспонировании матрицы, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Все дальнейшие свойства определителей формулируются в терминах их строк. По свойству 1 они будут справедливы для столбцов.

2. Если все элементы какой-либо строки равны нулю, то определитель тоже равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Если элементы некоторой строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель представляется в виде суммы двух определителей, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1+3 & 2+3 & 3+3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Общий множитель элементов любой строки можно вынести за знак определителя, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

4. Если две любые строки определителя совпадают, то он равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Если в определителе поменять местами две любые строки, то знак его изменится на противоположный, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

6. Если к элементам одной строки определителя прибавить соответствующие элементы любой другой строки, предварительно умноженные на некоторое число, определитель не изменится:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7+1(-6) & 8+1(-6) & 9+1(-6) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Говорят, что строки определителя *линейно зависимы*, если существуют числа α, β, γ, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha a_{1j} + \beta a_{2j} + \gamma a_{3j} = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Например, для строк определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ справедливы равенства

$$(-1)\cdot 1 + 2\cdot 4 + (-1)\cdot 7 = 0,$$

$$(-1)\cdot 2 + 2\cdot 5 + (-1)\cdot 8 = 0,$$

$$(-1)\cdot 3 + 2\cdot 6 + (-1)\cdot 9 = 0.$$

Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда его строки (столбцы) линейно зависимы.

8. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} определителя $|A|$ называют определитель второго порядка, получающийся из $|A|$ вычеркиванием i-той строки и j-того столбца. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Справедлива формула *разложения определителя по строке*,

$$\begin{gathered} |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = \\ = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + a_{i3}(-1)^{i+3}M_{i3}, \quad i = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Здесь i — номер строки, по которой раскладывается определитель. Имеет место и формула *разложения определителя по столбцу*,

$$\begin{gathered} |A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} = \\ = a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j}M_{2j} + a_{3j}(-1)^{3+j}M_{3j}, \quad j = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Здесь j — номер столбца.

Упражнение 1. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix},$$

разложив его по первой строке.

Решение. Положим $i = 1$ и воспользуемся формулой (2.10), получим

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-3) = 0.$$

Покажем, как те же вычисления провести, программируя в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1ONjsDAmNhmR5yc4bMR-Ww3_Hoy6kUTzu?usp=sharing

Упражнение 2. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix},$$

разложив его по первому столбцу.

Указание. Положите $j = 1$ и проведите вычисления с помощью формулы (2.11).

Упражнение 3. Вычислить следующие определители, используя свойства определителей третьего порядка:

$$a)\ \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}; \quad b)\ \begin{vmatrix} x & x' & ax+bx' \\ y & y' & ay+by' \\ z & z' & az+bz' \end{vmatrix};$$

$$c)\ \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}; \quad d)\ \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}, \quad \text{где } \varepsilon \text{ — отличное от 1 значение } \sqrt[3]{1};$$

$$e)\ \begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1-b_1i & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2-b_2i & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3-b_3i & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ответ. $a)$ 0; $b)$ 0; $c)$ 0; $d)$ 0; $e)$ $-2i\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Упражнение 4. Вычислить следующие определители, используя свойства определителей третьего порядка:

$$a)\ \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}; \quad b)\ \begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3b_3 \end{vmatrix};$$

$$c)\ \begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x+a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y+b^{-y})^2 & (b^y+b^{-y})^2 & 1 \\ (a^z+a^{-z})^2 & (a^z+a^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix}; \quad d)\ \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}.$$

Ответ. $a)$ 0; $b)$ 0; $c)$ 0; $d)$ 0.

Упражнение 5. Доказать тождества, не вычисляя определители:

$$a)\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$b)\ \begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$c)\quad \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b);$$

$$d)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b);$$

$$e)\quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b);$$

$$f)\quad \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Указание. f) К третьему столбцу определителя, стоящего в левой части равенства, прибавить второй, умноженный на $a+b+c$, и вычесть первый, умноженный на $ab+bc+ca$.

Упражнение 6. Доказать тождества, не вычисляя определители:

$$a)\quad \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$b)\quad \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$c)\quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b);$$

$$d)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b);$$

$$e)\quad \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Указание. e) Использовать тождество d).

Глава 3. Введение в аналитическую геометрию

3.1 Векторы, алгебраические операции над векторами (занятие 6)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.

Видео: https://disk.yandex.ru/i/sU7LiBUG5XwdGg

Презентация: https://disk.yandex.ru/i/nFIW8PXe2xBORw

Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 4, §1

В этом параграфе и до конца главы все числа — вещественные. Рассматривается трехмерное евклидово пространство. Вводится *декартова система координат*. Это означает следующее. Фиксируется некоторая точка пространства (в дальнейшем она всегда будет обозначатся символом 0 (ноль)) и называется *началом системы координат*. Задаются три попарно ортогональные прямые, проходящие через точку 0. Задается единица длины и направление отсчета от точки 0 на каждой прямой.

Положение точек на этих прямых будем определять вещественными числами x_1, x_2, x_3 (т. е. будем интерпретировать эти прямые как вещественные оси). Будем называть их в дальнейшем *осями координат*. Понятно, что теперь положение каждой точки в пространстве взаимно однозначно определяется заданием трех чисел x_1, x_2, x_3, называемых *координатами точки*

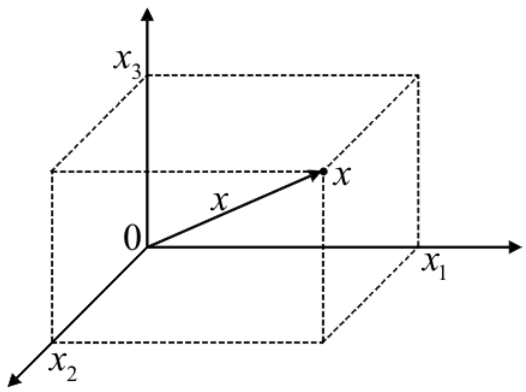

Рисунок 3.1 — Декартовы координаты точки $x = (x_1,x_2,x_3)$ и вектор x в пространстве.

Векторами называются направленные отрезки. Векторы, имеющие равные длины и одинаковые направления, считаются *равными*. С каждой точкой x

трехмерного евклидова пространства с декартовой системой координат взаимно однозначно связан вектор, соединяющий ее с началом координат (см. рис. 3.1). Концом этого вектора считается точка x. Координаты точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ будем называть *декартовыми координатами вектора* x. *Модуль* (длину) вектора обозначим $|x|$. Для любого вектора x

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Заметим, что только один вектор имеет длину нуль — это нулевой вектор, конец которого совпадает с началом координат.

Над векторами определены следующие алгебраические операции.

1. *Умножение вектора на число.* Вектор y называется произведением вещественного числа α и вектора x (пишется $y = \alpha x$), если $|y| = |\alpha||x|$, а направление y совпадает с направлением вектора x при положительном α и противоположно направлению x при отрицательном α.

2. *Сложение векторов.* Вектор z называется суммой векторов x и y (пишется $z = x + y$), если он образует диагональ параллелограмма построенного на векторах x, y. Тоже самое правило сложения векторов можно описать иначе: от конца вектора x откладывается вектор y, вектор z замыкает треугольник.

Вектор z называется *разностью* векторов x и y, если $x = z + y$. Понятно, что $z = x + (-1)y = x + (-y)$. Операция сложения векторов является коммутативной, т. е.

$$x + y = y + x,$$

и ассоциативной, т. е.

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

Справедливы свойства *дистрибутивности*, связывающие операции сложения векторов и умножения вектора на число:

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$
$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

Векторы x, y, z *линейно зависимы*, если существуют такие числа α, β, γ, среди которых хотя бы одно не нуль, что

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Векторы, лежащие на одной прямой, называют *коллинеарными.* Для любого вещественного числа α и вектора x, справедливо утверждение: $y = \alpha x$ и x коллинеарны. Наоборот, если векторы x, y коллинеарны, и хотя бы один из них не нуль (например, x), то найдется такое число α, что $y = \alpha x$.

Будем говорить, что векторы *компланарны*, если они лежат в одной плоскости. Фиксируем произвольным образом три некомпланарных вектора. Обозначим их через e^1, e^2, e^3. Любой вектор x можно представить в виде

$$x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3.$$

Будем писать также $x = (x_1,x_2,x_3)$. Говорят, что векторы e^1, e^2, e^3 образуют *базис* пространства. Числа x_1, x_2, x_3 называют *координатами вектора* в этом базисе.

Базис, составленный из трех попарно ортогональных векторов единичной длины, лежащих на осях координат, называют *декартовым базисом.* Его обозначают через i^1, i^2, i^3 (нумерация совпадает с нумерацией осей координат). Координаты вектора в этом базисе есть его декартовы координаты. Ясно, что декартовы координаты векторов декартова базиса следующие:

$$i^1 = (1,0,0), \quad i^2 = (0,1,0), \quad i^3 = (0,0,1).$$

При умножении вектора на число координаты вектора умножаются на это же число, при сложении векторов их компоненты складываются, и, вообще,

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3).$$

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов x, y и z является равенство нулю определителя, составленного из их координат относительно любого базиса:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.1}$$

Следовательно, если этот определитель не равен нулю, векторы x, y и z образуют базис.

Упражнение 1. Найти длину вектора $x = (3, 4, 5)$, заданного своими декартовыми координатами.

Решение. $|x| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Упражнение 2. Найти вектор y, равный произведению числа 5 на вектор $x = (3, -4{,}5)$.

Решение. $y = 5(3, -4{,}5) = (15, -20{,}25)$.

Упражнение 3. Найти вектор $u = 2x + 3y - z$, где

$$x = (1{,}2{,}3), \quad y = (2, -2{,}0), \quad z = (0{,}1, -1).$$

Решение.

$$u = 2(1{,}2{,}3) + 3(2, -2{,}0) + (-1)(0{,}1, -1) =$$

$$= (2{,}4{,}6) + (6, -6{,}0) + (0, -1{,}1) = (8, -3{,}7).$$

Упражнение 4. Найти вектор $x - 3y + 5z$, если:
$a)$ $x = (2{,}4{,}9)$, $y = (2{,}4{,}9)$, $z = (2{,}4{,}9)$;
$b)$ $x = (-3{,}7{,}9)$, $y = (2, -1, -3)$, $z = (1{,}4, -7)$.

Ответ. $a)$ $(6{,}12{,}27)$, $b)$ $(-4{,}30, -17)$.

Упражнение 5. Найти вектор $2(x - 3y) + 5(y - z)$, если:
$a)$ $x = (-3{,}3{,}2)$, $y = (12, -11, -8)$, $z = (6, -5, -4)$;
$b)$ $x = (-1{,}4, -2)$, $y = (2, -2{,}2)$, $z = (3, -6{,}4)$.

Ответ. $a)$ $(-48{,}42{,}32)$, $b)$ $(-19{,}40, -26)$.

Упражнение 6. Вычислить периметр треугольника с вершинами в точках $a = (8{,}0{,}7)$, $b = (10{,}2{,}8)$, $c = (10, -2{,}8)$.

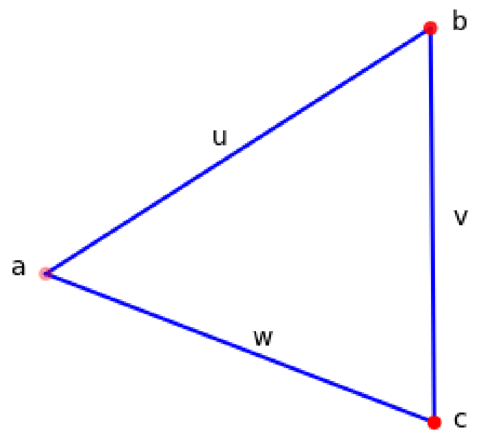

Рисунок 3.2 — К упражнению 6: треугольник с вершинами a, b, c.

Указание. Найдем координаты векторов, образующих стороны треугольника: $u = b - a = (2{,}2{,}1)$, $v = c - b = (0,-4{,}0)$, $w = a - c = (-2{,}2,-1)$. Теперь можно вычислить длины этих векторов (см. рис. 3.2). Периметр должен получиться равным 10.

Покажем, как сделать рисунок 3.2 в `Python`: https://colab.research.google.com/drive/1q6m1p2zs9Ny0iV9FyBsjsH4kCJDfL2GS?usp=sharing

Упражнение 7. Проверить, что векторы

$$e^1 = (1{,}2{,}3), \quad e^2 = (1{,}1{,}1), \quad e^3 = (1{,}0{,}1)$$

образуют базис. Найти координаты вектора $x = (4{,}8{,}10)$ в этом базисе.

Решение. Составим из координат векторов e^1, e^2, e^3 столбцы определителя и вычислим его:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Определитель не равен нулю, следовательно, векторы e^1, e^2, e^3 образуют базис. Найдем координаты вектора x в этом базисе. Иными словами, необходимо найти такие числа x_1, x_2, x_3, что справедливо разложение

$$x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3 = x.$$

Запишем это равенство в координатной форме, получим систему трех линейных уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, x_3:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 4, \\ 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 &= 8, \\ 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 10. \end{aligned}$$

Решение этой системы можно найти, например, по формулам Крамера,

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1.$$

Теперь ясно, что

$$(4{,}8{,}10) = 3(1{,}2{,}3) + 2(1{,}1{,}1) - 1(1{,}0{,}1),$$

и числа $(3, 2, -1)$ — координаты вектора x в базисе e^1, e^2, e^3.

Покажем, как решить эту задачу в sympy: https://colab.research.google.com/drive/1EhXYi1dfGf_GrfQrvZfDHfiS8YP45lxq?usp=sharing

Упражнение 8. Проверить что векторы

$$x = (4{,}1,-1), \quad y = (1{,}2,-5), \quad z = (-1{,}1{,}1)$$

образуют базис. Найти координаты векторов

$$m = (4{,}4,-5), \quad l = (2{,}4,-10), \quad k = (0{,}3,-4)$$

в этом базисе.

Ответ. Векторы образуют базис, так как определитель, составленный из их координат, не равен нулю. Координаты векторов m, l, k в этом базисе, соответственно, $(1,1,1)$, $(0,2,0)$, и $(0,1,1)$.

Упражнение 9. Найти координаты векторов l, m в базисе e^1, e^2, e^3:
a) $e^1 = (3{,}0{,}5)$, $e^2 = (2{,}2{,}0)$, $e^3 = (1{,}7{,}2)$, $l = (-5,-1{,}0)$, $m = (6{,}0{,}4)$;
b) $e^1 = (4,-1{,}4)$, $e^2 = (1,-1,-3)$, $e^3 = (0{,}9{,}0)$, $l = (0{,}9{,}4)$, $m = (1{,}0{,}2)$.

Ответ.
a) $(-2/9, -22/9, 5/9)$, $(1, 7/4, -1/2)$,
b) $(1/4, -1, 11/12)$, $(5/16, -1/4, 1/144)$.

Упражнение 10. Даны четыре вектора

$$x = (4{,}1,-1), \quad y = (3,-1{,}0), \quad z = (-1{,}1{,}1), \quad k = (-1{,}3{,}4).$$

Найти такие числа α, β, γ, что $\alpha x + \beta y + \gamma z + k = 0$.

Указание. $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\gamma = -4$. Составьте и решите соответствующую систему линейных алгебраических уравнений.

Упражнение 11. Пусть дано некоторое число $a \neq 0$. Проверить, образуют ли базис векторы e^1, e^2, e^3:
a) $e^1 = (0{,}0{,}a)$, $e^2 = (0{,}a{,}a)$, $e^3 = (a{,}a{,}a)$;
b) $e^1 = (2a{,}0,-8a)$, $e^2 = (0{,}a{,}0)$, $e^3 = (-a{,}0{,}4a)$.

Указание. *a*) Да, так как векторы некомпланарны (используйте критерий компланарности векторов (3.1)). *b*) Нет.

Упражнение 12. Какие из следующих векторов коллинеарны, одинаково направлены, параллельны координатным осям, параллельны координатным

плоскостям:
a) $a^1 = (2{,}4, -6)$, $a^2 = (-1, -2{,}3)$, $a^3 = (4{,}8, -12)$;
b) $a^4 = (6{,}0{,}0)$, $a^5 = (0, -5{,}0)$, $a^6 = (0{,}0{,}2)$;
c) $a^7 = (0{,}1{,}3)$, $a^8 = (2{,}0, -1)$, $a^9 = (3, -4{,}0)$?

Решение. *a*) Так как координаты векторов a^1 и a^2 пропорциональны, то эти векторы коллинеарны. Поскольку $a^2 = -\dfrac{1}{2}a^1$, то векторы a^1 и a^2 противоположно направлены. Векторы a^1 и a^3 также коллинеарны. Векторы a^1 и a^3 одного направления, так как $a^3 = 2a^1$.

b) Сравнивая координаты векторов a^4, a^5, a^6 с координатами векторов i^1, i^2 и i^3, заключаем, что вектор a^4 параллелен оси x_1, вектор a^5 параллелен оси x_2, а вектор a^6 — оси x_3.

c) Поскольку у вектора a^7 координата $x_1 = 0$, т. е. его проекция на ось x_1 равна нулю, то вектор a^7 перпендикулярен оси x_1 и, следовательно, параллелен плоскости x_2x_3. Аналогичным образом заключаем, что вектор a^8 параллелен плоскости x_1x_3, а вектор a^9 — плоскости x_1x_2.

Замечание. Из решения данной задачи можно сделать следующие выводы. 1. Если одна из координат вектора равна нулю, то вектор ортогонален соответствующей координатной оси. 2. Если вектор имеет только одну отличную от нуля координату, то он параллелен соответствующей координатной оси.

Упражнение 13. Доказать, что для произвольных векторов x, y, z и любых чисел α, β, γ векторы $u = \alpha x - \beta y$, $v = \gamma y - \alpha z$, $w = \beta z - \gamma x$ линейно зависимы.

Указание. По определению, векторы u, v, w линейно зависимы, если существуют такие числа a, b, c, среди которых хотя бы одно не нуль, что

$$au + bv + cw = 0.$$

Догадайтесь, чему равны a, b и c? Учтите при этом, что если $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то векторы $u = v = w = 0$ и, следовательно, линейно зависимы.

Упражнение 14. При каких условиях векторы $p+q$ и $p-q$ коллинеарны?

Указание. Коллинеарными называются векторы, лежащие на одной прямой. Сделайте рисунок. Покажите, что векторы $p + q$ и $p - q$ коллинеарны тогда и только тогда, когда p и q коллинеарны.

Упражнение 15. Дан треугольник, построенный на векторах p и q. Выразить все медианы треугольника через векторы p и q.

Указание. Медианы равны $\frac{1}{2}(p+q)$, $\frac{1}{2}q-p$, $\frac{1}{2}p-q$. Надо достроить треугольник до параллелограмма и найти медиану треугольника как половину диагонали параллелограмма.

Упражнение 16. Построить на произвольных ненулевых векторах x и y параллелограмм и проверить тождества:
$a)$ $(x+y)+(x-y)=2x$;
$b)$ $\dfrac{x-y}{2}+y = \dfrac{x+y}{2}$.

Указание. Сделать рисунок: построить параллелограмм на векторах x и y и добавить все необходимые векторы.

Упражнение 17. Построить на произвольных ненулевых векторах x и y параллелограмм и проверить тождества:
$a)$ $(x+y)-(x-y)=2y$;
$b)$ $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2} = \dfrac{x+y}{2}$.

Указание. Сделать рисунок: построить параллелограмм на векторах x и y и добавить все необходимые векторы.

Упражнение 18. Сформулируйте условие, при котором справедливо утверждение $|a+b| = |a-b|$.

Указание. Векторы a и b должны быть перпендикулярны. Действительно, построим параллелограмм на векторах a и b. Тогда векторы $a+b$ и $a-b$ это диагонали параллелограмма, а по условию задачи, их длины равны.

Упражнение 19. Какими должны обладать векторы x и y, чтобы имело место соотношение $|x+y| = |x|-|y|$?

Ответ. Векторы x и y коллинеарны, имеют противоположные направления, кроме того, $|x| \geqslant |y|$.

Упражнение 20. Какими должны обладать векторы a и b, чтобы имело место соотношение $\dfrac{a}{|a|} = \dfrac{b}{|b|}$?

Ответ. Векторы a и b имеют одинаковое направление, так как равны единичные векторы их направлений.

Упражнение 21. a) Единичный вектор a образует равные тупые углы с векторами i^1, i^2, i^3 декартова базиса. Найти координаты вектора a. b) Единичный вектор a образует с вектором i^1 угол 30^0, а с ортами i^2 и i^3 — равные острые углы. Вычислить сумму координат вектора a.

Указание. a) $a = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. b) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})/2$. Координаты вектора a можно представить в виде $a = |a|(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β, γ — углы между вектором a и векторами i^1, i^2, i^3 соответственно. Вычислим длину вектора a: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Отсюда, пользуясь условием задачи, получим ответ.

3.2 Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов (занятие 7)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.

Видео:

https://disk.yandex.ru/i/f9E9U-7rVRWTkw

https://disk.yandex.ru/i/fUwiIAazDrV4EA

https://disk.yandex.ru/i/P4hl_gmFlDqFiw

Презентации:

https://disk.yandex.ru/i/8FrOGOVvFv24xQ

https://disk.yandex.ru/i/xLEsf6pyu6ge-Q

https://disk.yandex.ru/i/VPOTJBWpBZrgPQ

Учебник:

https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 4, §2-4

Скалярным произведением векторов x и y называется число

$$(x,y) = |x||y|\cos(x,y). \tag{3.2}$$

При этом вычисляется косинус того угла между векторами x и y, который не превосходит π.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1. $(x,y) = (y,x)$ для любых векторов x, y — *симметрия*,
2. $(\alpha x,y) = \alpha(y,x)$ для любых векторов x, y и для любого вещественного числа α — *однородность*,
3. $(x+y,z) = (x,z)+(y,z)$ для любых векторов x, y, z — *аддитивность*,
4. $(x,x) = |x|^2 \geqslant 0$ для любого вектора x, и если $(x,x) = 0$, то $x = 0$ — *положительная определенность*.

Из свойств 2), 3) вытекает, что

$$(\alpha x + \beta y,z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$$

для любых векторов x, y, z и для любых вещественных чисел α, β. Это свойство называют свойством *линейности* скалярного произведения векторов по первому аргументу.

Для любых x, y справедливо *неравенство Коши*

$$|(x,y)| \leqslant |x||y|,$$

и *неравенство треугольника*

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Через декартовы координаты векторов $x = (x_1,x_2,x_3)$ и $y = (y_1,y_2,y_3)$ скалярное произведение вычисляется по формуле

$$(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \tag{3.3}$$

Косинус угла между этими векторами можно найти по формуле

$$\cos(x,y) = \frac{(x,y)}{|x||y|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}. \tag{3.4}$$

Необходимым и достаточным условием ортогональности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения.

Введем понятие ориентации тройки некомпланарных векторов. Векторы x, y, z имеют *правую ориентацию* (говорят: *правая тройка*), если с конца z кратчайший поворот от x к y совершается против часовой стрелки. В ином случае, тройка — *левая*. Легко заметить, что если два первых вектора поменять местами, то ориентация изменится на противоположную. Всюду в этом параграфе будем предполагать, что базис пространства имеет левую ориентацию.

Векторным произведением x и y (пишется $[x,y]$) называется вектор z, удовлетворяющий следующим условиям.

1. $|z| = |x||y|\sin(x,y)$. Угол выбирается так же, как и при скалярном произведении. При этом $|z|$ — площадь параллелограмма построенного на векторах x, y.
2. Вектор z ортогонален каждому из векторов x и y.
3. Тройка векторов x, y, z ориентирована так же, как базис пространства (левая тройка).

Свойства векторного произведения:

1. $[x,y] = -[y,x]$ для любых векторов x, y — *антисимметричность*,
2. $[\alpha x,y] = \alpha[y,x]$ для любых векторов x, y и вещественного числа α — *однородность по первому аргументу*,

3. $[x+y,z]=[x,z]+[y,z]$ для любых векторов x, y — *аддитивность по первому аргументу.*

Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов x и y является равенство нулю их векторного произведения:

$$[x,y]=0. \tag{3.5}$$

Если векторы x и y ортогональны, то $|[x,y]|=|x||y|$.

Векторное произведение через декартовы координаты векторов

$$x=(x_1,x_2,x_3), \quad y=(y_1,y_2,y_3)$$

вычисляется по формуле

$$[x,y]=\begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \tag{3.6}$$

где i^1, i^2, i^3 — векторы декартова базиса. Символ определителя в правой части равенства надо понимать в том смысле, что следует провести вычисления, формально разлагая определитель по первой строке, и получить линейную комбинацию векторов i^1, i^2, i^3.

Смешанным произведением трех векторов x, y и z называется число

$$(x,y,z)=([x,y],z). \tag{3.7}$$

Предварительно вычисляется векторное произведение, затем — скалярное. Модуль этого числа — объем параллелепипеда построенного на векторах x, y, z. Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов есть равенство нулю смешанного произведения этих векторов.

При перестановке любых двух сомножителей в смешанном произведении абсолютная величина его не меняется, а знак меняется на противоположный, например, $(x,y,z)=-(y,x,z)=-(x,z,y)$. Справедливо равенство

$$([x,y],z)=(x,[y,z]).$$

Через декартовы координаты смешанное произведение можно выразить следующим образом:

$$(x,y,z)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{3.8}$$

Упражнение 1. Найти скалярное произведение векторов

$$x = (1{,}3{,}5), \quad y = (6{,}4{,}2),$$

их длины, а также косинус угла между ними.

Решение. Вычислим скалярное произведение по формуле (3.3):

$$(x{,}y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 28.$$

Далее,

$$|x| = \sqrt{(x{,}x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{35},$$

$$|y| = \sqrt{(y{,}y)} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}.$$

Косинус угла между векторами найдем по формуле (3.4):

$$\cos(x{,}y) = \frac{(x{,}y)}{|x||y|} = \frac{28}{\sqrt{35}(2\sqrt{14})} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Покажем, как эти вычисления провести в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1ojNTWGsOA2sfVrPdmOLE8EQSR1QOPiFV?usp=sharing

Упражнение 2. Вычислить скалярные произведения векторов i^1, i^2, i^3.

Решение. Подставим вместо координат векторов x и y в формулу (3.3) координаты тех векторов, которые требуется умножить, получим

$$\begin{array}{lll}
(i^1, i^1) = 1; & (i^1, i^2) = 0; & (i^1, i^3) = 0; \\
(i^2, i^1) = 0; & (i^2, i^2) = 1; & (i^2, i^3) = 0; \\
(i^3, i^1) = 0; & (i^3, i^2) = 0; & (i^3, i^3) = 1.
\end{array}$$

Упражнение 3. Даны декартовы координаты двух векторов:

$$a = (1, -2{,}4), \quad b = (3{,}1, -5).$$

Найти вектор x, зная, что он перпендикулярен оси x_2 и удовлетворяет следующим условиям: $(x, a) = -3$, $(x, b) = 8$.

Указание. Так как $x = (x_1{,}x_2{,}x_3)$ перпендикулярен оси x_2, то $x_2 = 0$. Из двух условий $(x{,}a) = -3$ и $(x{,}b) = 8$, используя формулу (3.3), найти остальные координаты вектора x. Должно получиться $x = (1, 0, -1)$.

Упражнение 4. *a*) Пусть a и b — единичные векторы и $|a-b| = \sqrt{3}$. Найти скалярное произведение векторов $(3a-4b, a+b)$.
b) Пусть $|a| = 2$, $|b| = \sqrt{3}$, $|a+b| = 3$. Найти скалярное произведение векторов $(a+2b, a-b)$.

Указание. *a*) Воспользоваться соотношением

$$|a-b|^2 = (a-b, a-b) = |a|^2 - 2(a,b) + |b|^2 = 3,$$

откуда найти $(a,b) = -1/2$, используя то, что по условию задачи $|a| = |b| = 1$. Затем упростить искомое скалярное произведение $(3a-4b, a+b)$ и получить ответ: $-1/2$. *b*) -4.

Упражнение 5. Найти длину вектора $a = 3m - 4n$, зная, что m и n — взаимно перпендикулярные единичные векторы.

Решение. По условию задачи $(m,n) = 0$, $(m,m) = 1$, $(n,n) = 1$. Значит,

$$|a| = \sqrt{(a,a)} = \sqrt{(3m-4n, 3m-4n)} =$$

$$= \sqrt{9(m,m) - 24(m,n) + 16(n,n)} = \sqrt{9+16} = 5.$$

Упражнение 6. Вычислить скалярное произведение (a,b), если

$$a = 3p - 2q, \quad b = p + 4q,$$

где p и q — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Ответ. $(a,b) = -5$.

Упражнение 7. Пусть x, y, z — взаимно перпендикулярные векторы. Вычислить длину вектора $p = \alpha x + \beta y + \gamma z$.

Ответ. $|p| = \sqrt{\alpha^2|x|^2 + \beta^2|y|^2 + \gamma^2|z|^2}$.

Упражнение 8. Покажите, что векторы $p = x(y,z) - y(x,z)$ и z перпендикулярны для любых x, y, z.

Указание. Вычислить скалярное произведение векторов p и z, убедиться, что оно равно нулю.

Упражнение 9. Пусть вектор x коллинеарен вектору $a = (1,2,-3)$. Найти его координаты, если известно, что $(x,a) = 28$.

Указание. $x = (2{,}4, -6)$. Так как векторы x и $(1{,}2, -3)$ коллинеарны, то координаты этих векторов пропорциональны:

$$x = \lambda(1{,}2, -3),$$

где λ — произвольное ненулевое вещественное число. Найти λ, вычислив скалярное произведение векторов $(x{,}a)$.

Упражнение 10. Пусть x, y, z — ортогональные векторы единичной длины. Даны векторы $p = 3x + y - 5z$ и $q = x - 4y - 5z$. Вычислить $(p{,}q)$.

Ответ. $(p{,}q) = 24$.

Упражнение 11. Пусть p и q — единичные взаимно перпендикулярные векторы. Вычислить угол между векторами $x = 3p + 2q$ и $y = p + 5q$.

Ответ. $\cos(x{,}y) = 1/\sqrt{2}$.

Упражнение 12. Даны декартовы координаты двух векторов:

$$x = (3{,}0{,}0), \quad y = (0{,}1{,}2).$$

Найти их векторное произведение.

Решение. Векторное произведение $[x{,}y]$ вычислим по формуле (3.6):

$$[x{,}y] = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = i^1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - i^2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + i^3 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 0i^1 - 6i^2 + 3i^3 = (0, -6{,}3).$$

Покажем, как эти вычисления провести в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/11ieh96HdqlicTKQMPJl4Ay1W-B8J9UPP?usp=sharing

Упражнение 13. Вычислить векторные произведения векторов i^1, i^2, i^3.

Решение. Подставим вместо координат векторов x и y в формулу (3.6) координаты тех векторов, которые требуется умножить. Разложим определитель по первой строке, получим:

$$\begin{array}{lll} [i^1, i^1] = 0; & [i^1, i^2] = i^3; & [i^1, i^3] = -i^2; \\ [i^2, i^1] = -i^3; & [i^2, i^2] = 0; & [i^2, i^3] = i^1; \\ [i^3, i^1] = i^2; & [i^3, i^2] = -i^1; & [i^3, i^3] = 0. \end{array}$$

Упражнение 14. Найти векторное произведение векторов a, b:
$a)$ $a = 2i^1 - 3i^2 + 5i^3$, $b = 4i^1 + 2i^2 - 6i^3$,
$b)$ $a = i^1 - 3i^2 + 2i^3$, $b = 6i^1 + 5i^2 - 4i^3$.

Ответ. $a)$ $8i^1 + 32i^2 + 16i^3$; $b)$ $2i^1 + 16i^2 + 23i^3$.

Упражнение 15. Треугольник abc задан декартовыми координатами вершин $a = (4,-14,8)$, $b = (2,-18,12)$, $c = (12,-8,12)$. Найти площадь треугольника и длину высоты, опущенной из вершины c на противоположную сторону.

Указание. Вычислить координаты векторов $a - c$ и $b - c$, а затем — их векторное произведение. Теперь можно найти площадь треугольника, как половину площади параллелограмма, построенного на векторах $a - c$ и $b - c$, по формуле $S = \dfrac{1}{2}|[a - c, b - c]| = 30$, и высоту треугольника: $\dfrac{2S}{|b - a|} = 10$.

Покажем, как эти вычисления провести в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1iJD5RpbQeti4Hqepg3I4oulieSyQNv3D?usp=sharing

Упражнение 16. Пусть x и y — неколлинеарные векторы. При каком значении вещественного числа α векторы $p = \alpha x + 5y$ и $q = 3x - y$ будут коллинеарны?

Указание. $\alpha = -15$. Воспользуйтесь критерием коллинеарности (3.5).

Упражнение 17. Пусть x и y — два неколлинеарных вектора. Проверить, что $[(x + y),(x - y)] = 2[y,x]$ и дать геометрическое толкование полученному результату.

Ответ. Площадь параллелограмма, построенного на диагоналях исходного параллелограмма, вдвое больше площади исходного параллелограмма.

Упражнение 18. Пусть x, y, z — левый ортонормированный базис. Разложить по этим векторам вектор $p = [3x + y - 2z, x - y + 5z]$.

Ответ. $p = 3x - 17y - 4z$.

Упражнение 19. Даны декартовы координаты двух векторов:

$$a = (-4, -8, 8), \quad b = (4, 3, 2).$$

Найти их векторное произведение, синус угла между ними, площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

Ответ. $[a, b] = -40i^1 + 40i^2 + 20i^3,\ S = 60,\ \sin(a, b) = \dfrac{5}{\sqrt{29}}.$

Упражнение 20. Даны декартовы координаты трех векторов:

$$x = (3{,}0{,}0), \quad y = (0{,}1{,}2), \quad z = (1{,}0{,}1).$$

Найти их смешанное произведение.

Решение можно получить двумя способами. Первый способ. Воспользуемся определением (3.7). Векторное произведение $[x,y]$ мы уже вычислили в упражнении 12 по формуле (3.6):

$$k = [x,y] = (0, -6{,}3).$$

Теперь сосчитаем скалярное произведение векторов k и z:

$$(k,z) = 0 \cdot 1 + (-6) \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3.$$

Второй способ. Сразу получим смешанное произведение по формуле (3.8):

$$(x,y,z) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Упражнение 21. Проверить, компланарны ли следующие векторы:
a) $p = a - 2b + c,\ q = 3a + b - 2c,\ r = 7a + 14b - 13c$, где a, b, c — единичные взаимно перпендикулярные векторы;
b) $a = (2{,}3, -1),\ b = (1, -1{,}3),\ c = (1{,}9, -11)$,
c) $p = 2a + b - 3c,\ q = a - 4b + c,\ r = 3a - 2b + 2c$, где a, b, c — единичные взаимно перпендикулярные векторы;
d) $a = (3, -2{,}1),\ b = (2{,}1{,}2),\ c = (3, -1, -2)$.

Указание. Вычислить смешанное произведение каждой их этих троек векторов по формуле (3.8). В задачах *a)* и *c)* этой формулой тоже можно пользоваться, так как a, b, c — единичные взаимно перпендикулярные векторы. Далее следует воспользоваться критерием: векторы компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Ответ. *a)* Векторы компланарны. *b)* Векторы компланарны. *c)* Векторы некомпланарны. *d)* Векторы некомпланарны.

Упражнение 22. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $a = p - 3q + r$, $b = 2p + q - 3r$ и $c = p + 2q + r$, где p, q и r — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Указание. Модуль смешанного произведения $|(a,b,c)|$ равен объему параллелепипеда построенного на векторах a, b, c, так как p, q, r — единичные взаимно перпендикулярные векторы. Должно получиться 25.

Упражнение 23. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $a = 3m + 5n$, $b = m - 2n$ и $c = 2m + 7n$, где $|m| = 1/2$, $|n| = 3$, угол между векторами m и n равен $3\pi/4$.

Решение. Объем равен нулю. Из разложения векторов a, b и c видно, что они компланарны.

Упражнение 24. Проверить, лежат ли точки a, b, c, d в одной плоскости:
$a)$ $a = (5, -1, -1)$, $b = (4,2,2)$, $c = (5,3,1)$, $d = (8,0,-5)$;
$b)$ $a = (3, -4,1)$, $b = (2, -3,7)$, $c = (1, -4,3)$, $d = (4, -3,5)$.

Указание. Вычислить координаты векторов $b - a$, $c - a$ и $d - a$, а затем вычислить их смешанное произведение. Если смешанное произведение равно нулю, то точки лежат в одной плоскости.

Ответ. $a)$ Да, эти точки лежат в одной плоскости. $b)$ Да, эти точки лежат в одной плоскости.

3.3 Различные формы уравнения прямой на плоскости (занятие 8)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.

Видео: https://disk.yandex.ru/i/SzJ7IBczURV0hg

Презентация: https://disk.yandex.ru/i/jmK3_g91pt1NRg

Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 4, §6

Прямая l, проходящая на плоскости через точку $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ параллельно вектору $e = (e_1,e_2)$, задается уравнением (см. рис. 3.3)

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty. \tag{3.9}$$

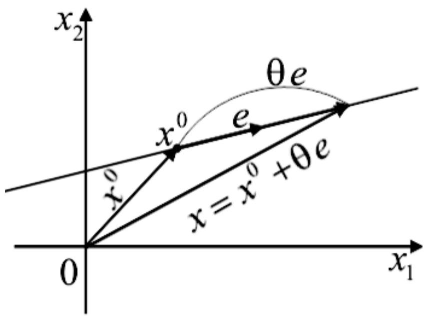

Рисунок 3.3 — К уравнению прямой, проходящей через точку x_0 параллельно вектору e.

Уравнение прямой можно записать также в одной из форм:

$$(x_2 - x_2^0) = k(x_1 - x_1^0), \tag{3.10}$$

$$ax_1 + bx_2 + c = 0, \tag{3.11}$$

$$x_2 = kx_1 + b, \tag{3.12}$$

где k — тангенс угла наклона прямой к оси x_1.

Угол φ между двумя прямыми, заданными уравнениями вида (3.10) или (3.12), определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{3.13}$$

Если $k_1 = k_2$, то прямые параллельны, если $k_1 k_2 + 1 = 0$, то прямые перпендикулярны.

Пусть даны две прямые l_1 и l_2, определяемые уравнениями

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

не равен нулю, то система уравнений (3.14) имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

при любых b_1, b_2. Точка $x = (x_1, x_2)$ — точка пересечения прямых l_1 и l_2. Здесь

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Если определитель Δ равен нулю, но определитель Δ_1, а следовательно, и определитель Δ_2 отличны от нуля, то система (3.14) не имеет решений, т. е. прямые l_1, l_2 параллельны.

Если все три определителя Δ, Δ_1, Δ_2 — нули, то система (3.14) имеет бесконечное множество решений, т. е. прямые l_1, l_2 совпадают.

Упражнение 1. Исследовать взаимное расположение двух прямых

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 - 7x_2 = 7. \end{aligned}$$

Найти точку их пересечения и построить график.

Решение. Вычислим определитель матрицы этой системы уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -20.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данные две прямые пересекаются (см. рис. 3.4). Найдем точку x^0 пересечения этих прямых. Для этого вычислим определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -7 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 20.$$

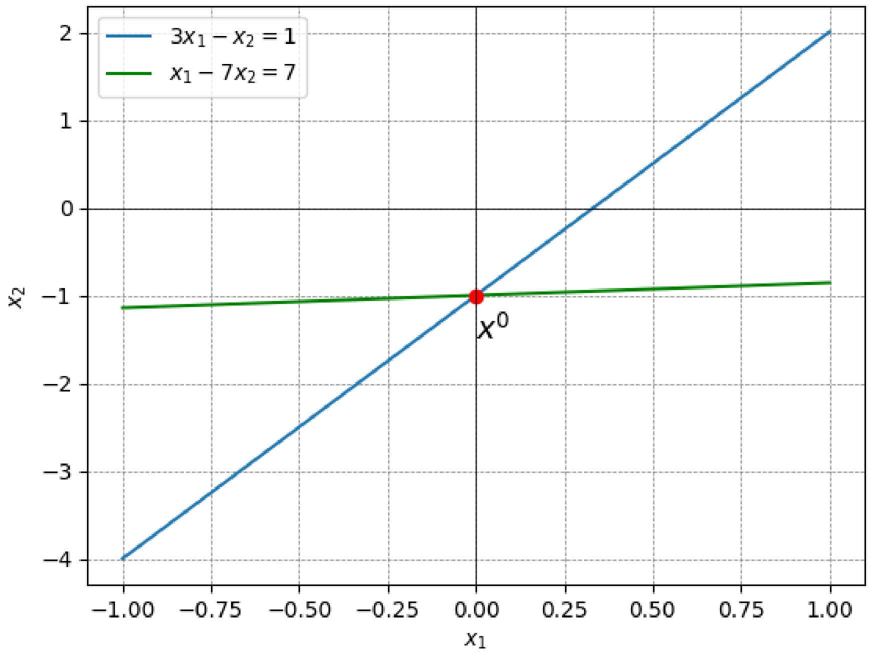

Рисунок 3.4 — К упражнению 1: точка пересечение прямых $3x_1 - x_2 = 1$, и $x_1 - 7x_2 = 7$.

Вычислим координаты точки пересечения:

$$x_1^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0, \quad x_2^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1.$$

Покажем, как построить график 3.4 в `Python`: https://colab.research.google.com/drive/1Lk4oTiDjzReqkyrlawMbCd7cRl_72zw8?usp=sharing

Упражнение 2. Показать, что прямая, проходящая через точки

$$x^1 = (x_1^1, x_2^1), \quad x^2 = (x_1^2, x_2^2),$$

задается уравнением

$$\frac{x_1 - x_1^1}{x_1^2 - x_1^1} = \frac{x_2 - x_2^1}{x_2^2 - x_2^1}, \tag{3.15}$$

а тангенс угла наклона данной прямой вычисляется по формуле

$$k = \frac{x_2^2 - x_2^1}{x_1^2 - x_1^1}.$$

Указание. Записать уравнение прямой, проходящей через точку x^1 в форме (3.10). Подставить в это уравнение координаты точки x^2 и вычислить угловой коэффициент k. Подставить значение k в исходное уравнение прямой.

Упражнение 3. Какую ординату имеет точка x^0, лежащая на одной прямой с точками $x^1 = (-8, -6)$ и $x^2 = (-3, -1)$ и имеющая абсциссу $x^0_1 = 5$? Сделайте рисунок.

Решение. Запишем уравнение прямой, проходящей через точки x^1 и x^2, воспользовавшись формулой (3.15). Получим

$$\frac{x_1 + 8}{-3 + 8} = \frac{x_2 + 6}{-1 + 6}.$$

Подставим координаты точки x^0 в получившееся уравнение прямой:

$$\frac{5 + 8}{-3 + 8} = \frac{x^0_2 + 6}{-1 + 6}.$$

Отсюда найдем вторую координату точки x^0. Получается $x^0_2 = 7$.

Упражнение 4. Найти угловой коэффициент прямой и отрезок, отсекаемый ею на оси ординат, зная, что прямая проходит через точки $x^1 = (2, -8)$ и $x^2 = (-1{,}7)$. Сделать рисунок.

Указание. Воспользоваться уравнением (3.15) прямой, проходящей через две точки, и привести его к виду $x_2 = kx_1 + b$. Должно получиться $x_2 = -5x_1 + 2$.

Ответ. $k = -5$, $b = 2$.

Упражнение 5. Найти угол между двумя прямыми, сделать рисунок,

$$x_2 = 3x_1,$$
$$x_2 = -2x_1 + 5.$$

Указание. Воспользоваться формулой (3.13). Должно получиться $\pi/4$.

Упражнение 6. Написать уравнение прямой, которая проходит через начало координат и удовлетворяет следующему условию, сделать рисунок:
a) параллельна прямой $x_2 = 4x_1 - 3$.
b) перпендикулярна прямой $x_2 = 1/2x_1 + 1$.

Ответ. a) $x_2 = 4x_1$; b) $x_2 = -2x_1$.

Упражнение 7. Написать уравнение прямой, по которой должна двигаться точка, начальное положение которой определено координатами (3,8), чтобы кратчайшим путем дойти до прямой $x_2 = 1/2x_1 - 1$? В какой точке она достигнет этой прямой и как велик будет пройденный путь? Сделать рисунок.

Ответ. $x_2 = -2x_1 + 14$, $x^0 = (6{,}2)$, $s = 3\sqrt{5}$.

Упражнение 8. Даны вершины треугольника

$$x^1 = (3{,}1), \quad x^2 = (3, -1), \quad x^3 = (0{,}4).$$

Написать уравнения прямых, проходящих через каждую из них параллельно противоположной стороне. Сделать рисунок.

Ответ. $x_1 = 0$, $x_2 = -5/3x_1 + 6$, $x_2 = -x_1 + 2$.

Упражнение 9. Проверить, лежат ли на одной прямой точки (1,3), (5,7) и (10,12). Сделать рисунок.

Ответ. Точки лежат на одной прямой.

Упражнение 10. Сила P приложена к началу координат, и составляющие ее по осям соответственно равны 5 и -2. Найти уравнение прямой, по которой направлена сила. Сделать рисунок.

Ответ. $x_2 = -2/5x_1$.

Упражнение 11. Определить угловой коэффициент и отрезок, отсекаемый на оси ординат прямой, данной следующим уравнением, сделать рисунок:
$a)$ $2x_1 - x_2 + 3 = 0$,
$b)$ $5x_1 + 2x_2 - 8 = 0$,
$c)$ $3x_1 + 8x_2 + 16 = 0$.

Ответ. $a)$ $k = 2, b = 3$; $b)$ $k = -5/2, b = 4$; $c)$ $k = -3/8, b = -2$.

Упражнение 12. Вычислить угол между двумя следующими прямыми, сделать рисунок:

$$x_2 = 4x_1 - 7,$$
$$x_2 = -1/4x_1 + 2.$$

Ответ. $\pi/2$.

Упражнение 13. Написать уравнение прямой, которая проходит через начало координат и удовлетворяет следующему условию, сделать рисунок:
$a)$ образует угол $\dfrac{\pi}{4}$ с прямой $x_2 = 2x_1 + 5$,
$b)$ наклонена под углом $\dfrac{\pi}{3}$ к прямой $x_2 = x_1 - 1$.

Ответ. $a)$ $x_2 = -3x_1$ или $x_2 = 1/3x_1$;

$b)$ $x_2 = -(2 - \sqrt{3})x_1$ или $x_2 = -(2 + \sqrt{3})x_1$.

Упражнение 14. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(2, -1)$ и составляющей с осью x_1 угол, вдвое больший угла, составляемого с той же осью прямой $x_2 = \dfrac{x_1}{\sqrt{3}} + \dfrac{4}{3}$. Сделать рисунок.

Ответ. $x_2 = 1/\sqrt{3}x_1 - 1 - 2\sqrt{3}$.

Упражнение 15. Даны вершины треугольника: $x^1 = (4{,}6)$, $x^2 = (-4{,}0)$ и $x^3 = (-1, -4)$. Составить уравнения прямых, на которых лежат его стороны. Сделать рисунок.

Ответ. $3x_1 - 4x_2 + 12 = 0$, $4x_1 + 3x_2 + 16 = 0$, $2x_1 - x_2 - 2 = 0$.

3.4 Нормальная форма уравнения прямой (занятие 9)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.

Видео: https://disk.yandex.ru/i/SzJ7IBczURV0hg

Презентация: https://disk.yandex.ru/i/jmK3_g91pt1NRg

Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 4, §6

Один из способов описания прямой следующий: это множество всех векторов, ортогональных данному вектору p (прямая, проходящая через начало координат), сдвинутое параллельно p на расстояние d от начала координат (см. рис. 3.5), т. е. для точек прямой выполнено уравнение

$$(x, p) - d = 0, \tag{3.16}$$

где $p = (p_1, p_2)$ — заданный вектор единичной длины, d — проекция x на направление p. Знак d показывает, в какую сторону (по отношению к p) выполняется сдвиг (см. рис. 3.5). Уравнение (3.16) называют *нормальной формой* уравнения прямой. Напомним, что

$$(x, p) = p_1 x_1 + p_2 x_2.$$

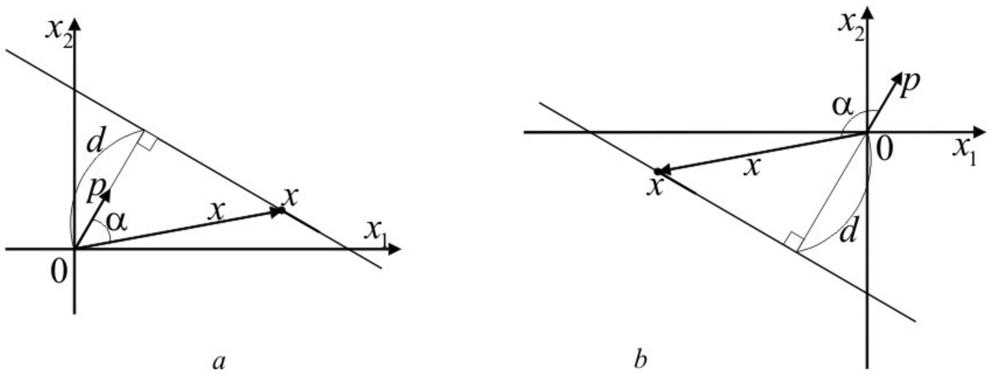

Рисунок 3.5 — К нормальному уравнению прямой: $d > 0$, угол α между векторами p и x острый (a); $d < 0$, угол α между векторами p и x тупой (b).

Из уравнения прямой в общем виде $ax_1 + bx_2 + c = 0$ получим нормальную форму уравнения прямой. Для этого вычислим модуль вектора с координатами a и b: $\sqrt{a^2 + b^2}$. Разделим на это число обе части общего уравнения прямой и положим

$$p_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad p_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad d = -\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Теперь можно записать уравнение прямой в форме (3.16). Поскольку $p_1^2+p_2^2 = 1$, то полученная форма записи уравнения прямой будет нормальной.

Пусть дана точка $x^0 = (x_1^0,x_2^0)$. Расстояние от точки до прямой, заданной уравнением (3.16), вычисляется по формуле

$$|\delta| = |(x^0,p) - d|. \tag{3.17}$$

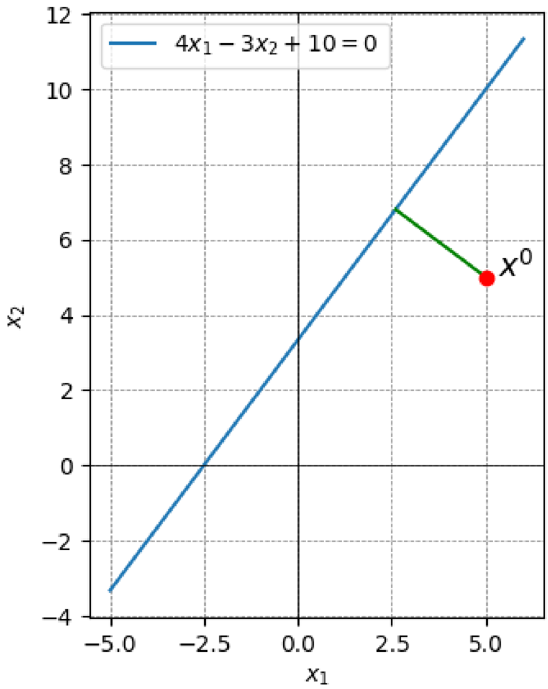

Рисунок 3.6 — К упражнению 1: расстояние от точки $x^0 = (5,5)$ до прямой $4x_1 - 3x_2 + 10 = 0$.

Упражнение 1. Найти расстояние от точки $x^0 = (5,5)$ до следующей прямой (см. рисунок 3.6):

$$4x_1 - 3x_2 + 10 = 0.$$

Решение. Перейдем к нормальной форме уравнения прямой. Разделим обе части общего уравнения прямой на

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Теперь вычислим координаты вектора p и величину d сдвига прямой от начала координат:

$$p_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{4}{5}, \quad p_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{3}{5}, \quad d = -\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{10}{5}.$$

Таким образом, получили нормальную форму уравнения этой прямой:

$$\frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2 + 2 = 0.$$

Расстояние до прямой от точки x^0 вычисляется по формуле (3.17):

$$|\delta| = \left|\frac{4}{5}x_1^0 - \frac{3}{5}x_2^0 + 2\right| = \left|\frac{4 \cdot 5}{5} - \frac{3 \cdot 5}{5}x_2 + 2\right| = 3.$$

Покажем, как сделать рисунок 3.6, программируя в Python: https://colab.research.google.com/drive/10hcWidSxEg2VD17SMLnq1afrNsZvPnbH?usp=sharing

Упражнение 2. Привести к нормальной форме следующее уравнение, сделать рисунок: $5x_1 + 12x_2 - 39 = 0$.

Ответ. $5/13x_1 + 12/13x_2 - 3 = 0$.

Упражнение 3. Привести к нормальной форме следующее уравнение, сделать рисунок: $6x_1 + 8x_2 - 15 = 0$.

Ответ. $3/5x_1 + 4/5x_2 - 3/2 = 0$.

Упражнение 4. Найти расстояние до прямой $9x_1 - 12x_2 + 10 = 0$ от начала координат, сделать рисунок.

Ответ. $2/3$.

Упражнение 5. Проверить, что прямые

$$2x_1 + \sqrt{5}x_2 - 15 = 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{11}x_1 - 5x_2 + 30 = 0$$

касаются одного и того же круга с центром в начале координат, и вычислить радиус этого круга (см. рисунок 3.7).

Указание. Приведите уравнения прямых к нормальной форме и убедитесь, что расстояние от начала координат до каждой прямой равно пяти. Все касательные отстоят от центра круга на расстоянии, равном радиусу, и проходят перпендикулярно радиусу. Данные прямые касаются круга с центром в начале координат, т. к. они должны находиться на одинаковом расстоянии от начала координат. Радиус этого круга равен пяти.

Покажем, как построить рисунок 3.7 в Python: https://colab.research.google.com/drive/1iWlsuJaD6RFNzifKPpylgkO40xsbvZJb?usp=drive_link

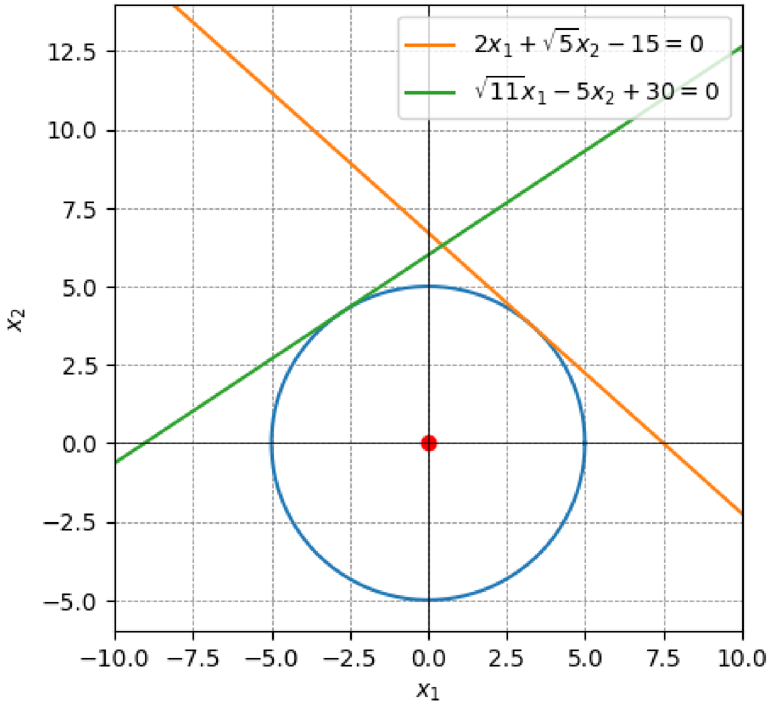

Рисунок 3.7 — К упр. 5: прямые $2x_1 + \sqrt{5}x_2 - 15 = 0$ и $\sqrt{11}x_1 - 5x_2 + 30 = 0$, касающиеся окружности с центром в начале координат.

Упражнение 6. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного на прямую $12x_1 - 5x_2 - 27 = 0$ из точки $x^0 = (4, -1)$. Сделать рисунок.

Ответ. 2.

Упражнение 7. Написать уравнения прямых (в нормальной форме), на которых лежат стороны квадрата, диагонали которого лежат на осях координат. Длина стороны квадрата равна a.

Указание. Сделайте рисунок и найдите координаты векторов p для каждой из сторон квадрата. Расстояние d для всех сторон будет одним и тем же. Вычислите его. Искомые уравнения имеют вид $\pm 1/\sqrt{2}\,x_1 \pm 1/\sqrt{2}\,x_2 - a/2 = 0$.

Упражнение 8. Из начала координат в первой и третьей четвертях провести прямую, проходящую на расстоянии трех от точки $x^0 = (2\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$. Сделать рисунок.

Указание. Воспользуйтесь формулой (3.17) для вычисления расстояния от точки до прямой, заданной уравнением в нормальной форме. Получится следующее уравнение для p_1 и p_2: $|2\sqrt{2}p_1 + 5\sqrt{2}p_2| = 3$. Еще одно уравнение для p_1 и p_2 есть $p_1^2 + p_2^2 = 1$.

Ответ. $x_1 = x_2$.

Упражнение 9. Через точку $x^0 = (5{,}0)$ провести касательные к окружности $x_1^2 + x_2^2 = 9$. Сделать рисунок.

Решение. Центр окружности совпадает с началом координат (см. рис. 3.8), а ее радиус $r = 3$. Следовательно, искомая касательная находится от начала координат на расстоянии $d = 3$. Будем искать нормальное уравнение этой прямой. Параметр d уже известен, и уравнение имеет вид $x_1 p_1 + x_2 p_2 - 3 = 0$. Вектор $p = (p_1{,}p_2)$ определяем из того условия, что $p_1^2 + p_2^2 = 1$, и из условия, что прямая проходит через точку $x^0 = (5{,}0)$, и, следовательно, координаты точки удовлетворяют уравнению прямой. Подставляя эти координаты, получим $5p_1 - 3 = 0$, откуда $p_1 = 3/5$. Тогда

$$p_2 = \pm\sqrt{1 - p_1^2} = \pm\sqrt{1 - (3/5)^2} = \pm 4/5.$$

Таким образом, задача имеет два решения:

$$3/5x_1 + 4/5x_2 - 3 = 0, \quad 3/5x_1 - 4/5x_2 - 3 = 0.$$

Действительно, из одной точки можно провести две касательные к окружности.

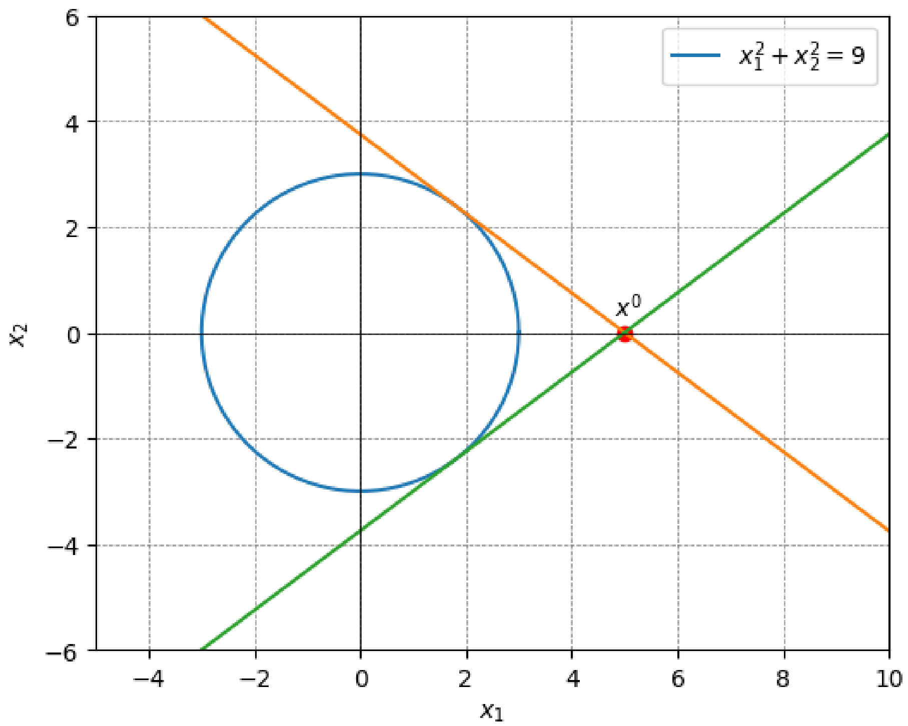

Рисунок 3.8 — К упражнению 9: касательные к окружности $x_1^2 + x_2^2 = 9$, проходящие через точку $x^0 = (5{,}0)$.

Покажем, как построить рисунок 3.8 в `Python`: https://colab.research.google.com/drive/1YKF-V2ag3vtEyIDjMlC3L99byUhV5uNH?usp=drive_link

Упражнение 10. Диагонали ромба, длиной в 30 и 16 единиц, лежат на осях координат. Вычислить расстояние между параллельными сторонами этого ромба. Сделать рисунок.

Указание. Нарисуйте ромб. Искомое расстояние s равно удвоенному расстоянию от начала координат до одной из его сторон. Напишите уравнение прямой, которой принадлежит эта сторона, и приведите его к нормальной форме. Должно получиться $s = \dfrac{15 \cdot 16}{17}$.

Упражнение 11. Дана прямая $12x_1 + 5x_2 - 52 = 0$. Найти уравнение прямой, параллельной данной и отстоящей от нее на расстоянии $s = 2$. Сделать рисунок.

Указание. Нарисуйте исходную прямую, ясно что параллельно ей можно провести две прямые на расстоянии s от нее. Приведите уравнение прямой к нормальной форме. Найдите расстояние d от начала координат до этой прямой и вектор p. У искомых прямых вектор p будет тем же самым, так как все три прямые параллельны друг другу. Расстояния от начала координат до искомых прямых найдите, зная d и s. Нарисуйте эти прямые.

Ответ. $12x_1 + 5x_2 - 26 = 0$, $12x_1 + 5x_2 - 78 = 0$.

Упражнение 12. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны равнобочной трапеции, зная, что ее основания, соответственно, равны 10 и 6, а боковые стороны образуют с большим основанием угол в $\alpha = \pi/3$. Большее основание и ось симметрии трапеции лежат на осях координат. Сделать рисунок.

Указание. Пусть большее основание лежит на оси x_1. Тогда меньшее основание лежит на прямой, параллельной ей. Найдем высоту трапеции d. Для этого построим прямоугольный треугольник с углом α и противолежащим катетом d. Длину прилежащего катета найдем, зная основания трапеции. Итак, высота трапеции $d = 2\sqrt{3}$. Теперь мы можем написать уравнение прямой, на которой лежит малое основание, найти координаты всех вершин трапеции и нарисовать ее. Уравнения прямых для боковых сторон построим, используя формулу (3.15) для прямой, проходящей через две точки.

Ответ. $x_2 = 0$, $x_2 = 2\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}x_1 + 5\sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}x_1 + 5\sqrt{3}$.

3.5 Различные формы уравнения плоскости (занятие 10)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.

Видео: https://disk.yandex.ru/i/-NCn5ei75H_yTA

Презентация: https://disk.yandex.ru/i/FN2T5qfhy0UP_w

Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 4, §8

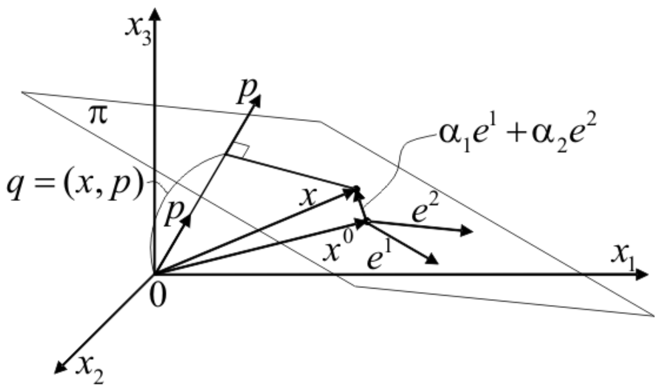

Рисунок 3.9 — К уравнению плоскости, проходящей через точку x^0, натянутой на векторы e^1 и e^2; а также к нормальному уравнению плоскости $(x,p) - q = 0$.

Плоскость π, которая проходит через точку x^0 и натянута на два неколлинеарных вектора e^1 и e^2, задается уравнением (см. рис. 3.9)

$$x = x^0 + \alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2, \quad -\infty < \alpha_1, \alpha_2 < \infty. \tag{3.18}$$

Учитывая, что векторы $x - x^0$, e^1 и e^2 являются компланарными, уравнение плоскости можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & e_1^1 & e_1^2 \\ x_2 - x_2^0 & e_2^1 & e_2^2 \\ x_3 - x_3^0 & e_3^1 & e_3^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.19}$$

Раскроем определитель (например, по первому столбцу) в левой части этого равенства и получим уравнение плоскости π в форме

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0. \tag{3.20}$$

Здесь числа a, b, c, d выражаются через координаты векторов e^1, e^2, x^0. Вектор $n = (a,b,c)$ является *нормальным* к данной плоскости. Уравнение вида (3.20) называют *общим уравнением плоскости.*

Уравнение плоскости, ортогональной вектору p единичной длины и отстоящей от начала координат на расстояние q, имеет вид (см. рис. 3.9)

$$(x,p) - q = 0. \tag{3.21}$$

Знак q определяет направление сдвига плоскости по отношению к направлению вектора p. Уравнение (3.21) называют *нормальным уравнением плоскости*.

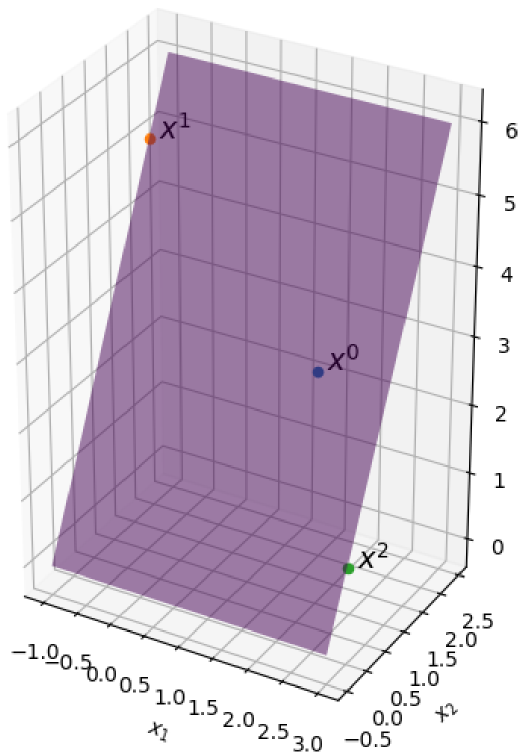

Рисунок 3.10 — К упражнению 1: плоскость, проходящая через три точки $x^0 = (2,1,3)$, $x^1 = (-1,2,5)$, $x^2 = (3,0,1)$.

Упражнение 1. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через три данные точки: $x^0 = (2,1,3)$, $x^1 = (-1,2,5)$, $x^2 = (3,0,1)$.

Указание. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки x^0, x^1 и x^2 можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & x_1^1 - x_1^0 & x_1^2 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 & x_2^1 - x_2^0 & x_2^2 - x_2^0 \\ x_3 - x_3^0 & x_3^1 - x_3^0 & x_3^2 - x_3^0 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.22}$$

Проведите вычисления по формуле (3.22). Должно получиться следующее уравнение: $2x_2 - x_3 + 1 = 0$. Проверьте, что точки x^0, x^1 и x^2 действительно удовлетворяют ему (см. рис. 3.10).

Покажем, как сделать рисунок 3.10, программируя в `Python`: https://colab.research.google.com/drive/1lkPY0T0j76hBWYYeLrV5rT0pho2uzEPm?usp=sharing

Упражнение 2. Найти расстояние от точки $x^0 = (2,4,-3)$ до плоскости

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0. \tag{3.23}$$

Решение. Сначала запишем уравнение (3.23) в нормальной форме. Для того, чтобы привести общее уравнение плоскости (3.20) к уравнению в нормальной форме (3.21), нужно поделить обе части общего уравнения на $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Тогда p и q запишутся в виде

$$p = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c), \quad q = -\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,.$$

В этом случае длина вектора p будет равна единице.

Поделим уравнение (3.23) на $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$. Получим это уравнение в нормальной форме:

$$\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 - 1 = 0.$$

Расстояние от точки x^0 до плоскости, заданной уравнением в нормальной форме (3.21), вычисляется по формуле

$$|\delta| = |(x^0,p) - q|.$$

Здесь δ — отклонение точки от плоскости. Знак δ показывает, по какую сторону от плоскости расположена точка x^0. Говорят, что точка x^0 находится в *положительном полупространстве* относительно плоскости, если $\delta > 0$. Для точек, расположенных по другую сторону от плоскости (в *отрицательном полупространстве*), справедливо неравенство $\delta < 0$.

Вычислим расстояние от точки $x^0 = (2,4,-3)$ до плоскости (3.23):

$$|\delta| = \left|\frac{2}{3}x_1^0 - \frac{1}{3}x_2^0 + \frac{2}{3}x_3^0 - 1\right| = \left|\frac{2\cdot 2}{3} - \frac{1\cdot 4}{3} - \frac{2\cdot 3}{3} - 1\right| = 3.$$

Упражнение 3. Найти расстояние от точки $x^0 = (3,1,-1)$ до плоскости

$$22x_1 + 4x_2 - 20x_3 - 45 = 0.$$

Ответ. $|\delta| = 3/2$.

Упражнение 4. Даны две точки $x^1 = (1{,}3, -2)$ и $x^2 = (7, -4{,}4)$. Через точку x^2 провести плоскость, перпендикулярную вектору $x^2 - x^1$. Записать общее уравнение этой плоскости.

Указание. Сначала запишите нормальное уравнение плоскости. Для этого вычислите вектор $p = (x^2 - x^1)/|x^2 - x^1|$. Затем, используя то, что точка x^2 принадлежит плоскости, найдите q. Общее уравнение этой плоскости должно получиться таким: $6x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 94 = 0$.

Упражнение 5. Через точку $x^0 = (7, -5{,}1)$ провести плоскость, которая отсекает на осях координат положительные и равные между собою отрезки. Записать общее уравнение этой плоскости.

Указание. Сначала найдите нормальное уравнение плоскости. Для этого вычислите вектор p. Раз плоскость отсекает на осях координат положительные и равные между собою отрезки, координаты этого вектора должны быть положительными и равными друг другу. Кроме того длина этого вектора равна единице. После того, как вектор p найден, используя то, что точка x^0 принадлежит плоскости, найдите q. Общее уравнение этой плоскости должно получиться таким: $x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$.

Упражнение 6. Найти точку x^0, симметричную с началом координат относительно плоскости $6x_1 + 2x_2 - 9x_3 + 121 = 0$.

Указание. Привести уравнение плоскости к нормальному виду. Учесть, что если $q < 0$, то плоскость сдвигается от начала координат в направлении противоположном относительно вектора p. По условию задачи искомый вектор x^0 должен быть направлен противоположно вектору p и $|x^0| = 2|q|$ (см. рис. 3.11). Должно получиться $x^0 = (-12, -4{,}18)$.

Покажем, как сделать рисунок 3.11, программируя в `Python`: `https://colab.research.google.com/drive/1Y9pv7S7FknIaZyW35b2z0s14B-eMx_uV?usp=sharing`

Упражнение 7. Найти плоскость, зная, что точка $x^0 = (3, -6{,}2)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного на эту плоскость из начала координат.

Ответ. $3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 49 = 0$.

Упражнение 8. Найти расстояние от точки $x^0 = (4{,}3, -2)$ до плоскости

$$3x_1 - x_2 + 5x_3 + 1 = 0.$$

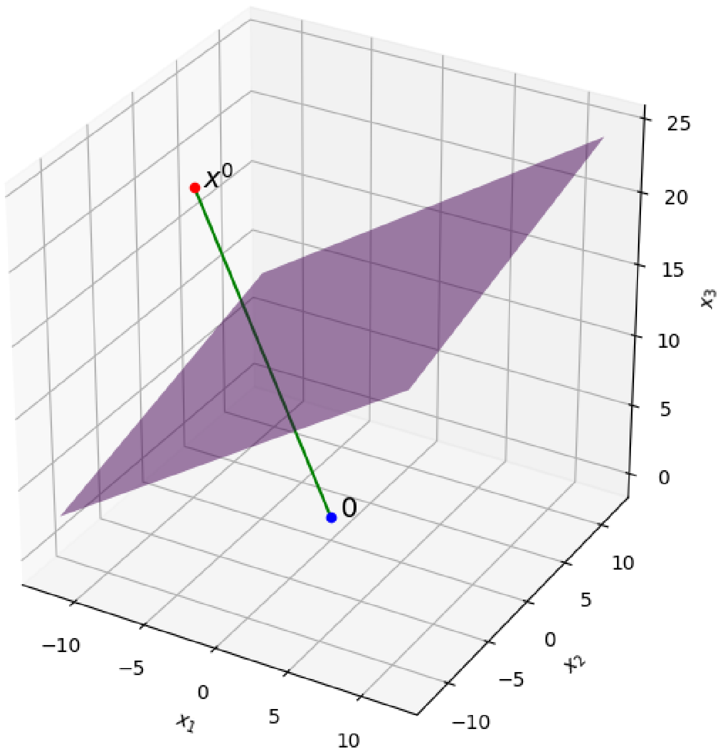

Рисунок 3.11 — К упражнению 6: точка x^0, симметричная с началом координат относительно плоскости $6x_1 + 2x_2 - 9x_3 + 121 = 0$.

Ответ. $|\delta| = 0$.

Упражнение 9. Указать особенности в расположении в трехмерном евклидовом пространстве следующих плоскостей:

$a)$ $2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0$;

$b)$ $3x_1 - 5x_3 + 1 = 0$;

$c)$ $9x_2 - 2 = 0$.

Решение. $a)$ Плоскость проходит через начало координат, так как эта точка удовлетворяет данному уравнению.

$b)$ Нормальный вектор этой плоскости имеет отличными от нуля первую и третью координату. Вторая его координата равна нулю. Он перпендикулярен данной плоскости, а сам лежит в плоскости x_1x_3. Поэтому данная плоскость перпендикулярна плоскости x_1x_3, параллельна оси x_2.

$c)$ У нормального вектора данной плоскости не равна нулю только вторая координата, остальные — нулевые. Поэтому этот вектор перпендикулярен плоскости x_1x_3. Исходная плоскость ортогональна ему, поэтому она параллельна плоскости x_1x_3.

Упражнение 10. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через три данные точки: $x^0 = (1, -1{,}3)$, $x^1 = (2{,}3{,}4)$, $x^2 = (-1{,}1{,}2)$.

Ответ. $6x_1 + x_2 - 10x_3 + 25 = 0$.

Упражнение 11. Вычислить координаты точек пересечения с осями координат плоскости $2x_1 - 3x_2 - x_3 + 12 = 0$.

Указание. Для того чтобы найти координату α точки пересечения плоскости с осью x_1, надо в уравнении плоскости положить равными нулю переменные x_2 и x_3.

Ответ. $\alpha = -6$, $\beta = 4$, $\gamma = 12$.

Упражнение 12. Написать уравнение плоскости, которая параллельна плоскости x_1x_3 и проходит через точку $(2, -5{,}3)$.

Ответ. $x_2 + 5 = 0$.

3.6 Уравнения прямой в пространстве (занятие 11)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.

Видео: https://disk.yandex.ru/i/Yn03AJCHt4UTrw

Презентация: https://disk.yandex.ru/i/1-Eao_cKB5HwUA

Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 4, §9

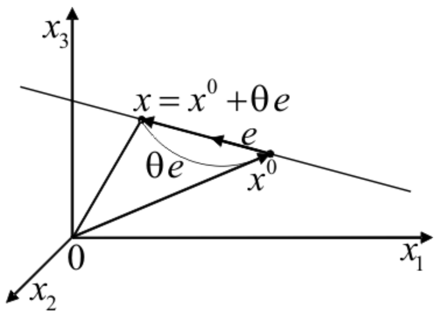

Рисунок 3.12 — Прямая в пространстве.

Уравнение прямой, проходящей через точку x^0 параллельно вектору e, имеет вид (см. рис. 3.12)

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty. \tag{3.24}$$

Запишем это уравнение в координатной форме и исключим параметр θ, получим *канонические уравнения прямой*:

$$\frac{x_1 - x_1^0}{e_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{e_2} = \frac{x_3 - x_3^0}{e_3}. \tag{3.25}$$

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки x^1 и x^2, можно записать в векторной форме

$$x = x^1 + \theta(x^2 - x^1), \quad -\infty < \theta < \infty, \tag{3.26}$$

и в координатной форме

$$\frac{x_1 - x_1^1}{x_1^2 - x_1^1} = \frac{x_2 - x_2^1}{x_2^2 - x_2^1} = \frac{x_3 - x_3^1}{x_3^2 - x_3^1}. \tag{3.27}$$

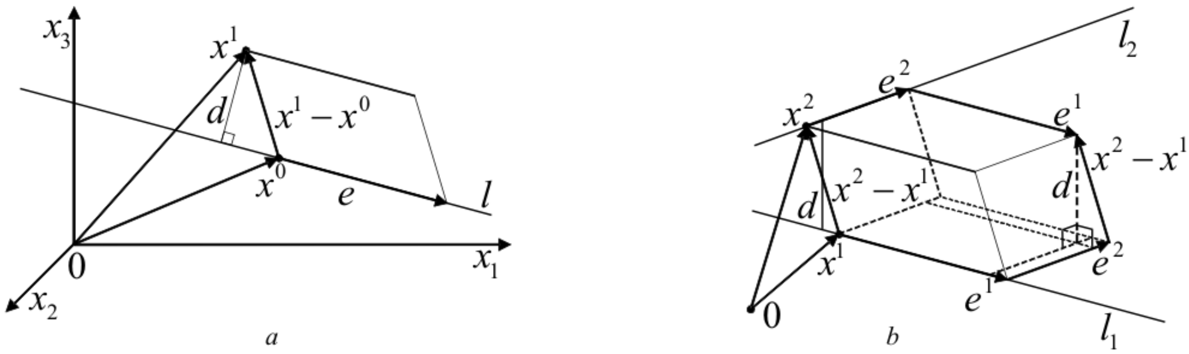

Рисунок 3.13 — К вычислению расстояния от точки до прямой (a) и между прямыми (b).

Расстояние d от прямой l, проходящей через точку x^0 параллельно вектору e, до точки x^1 вычисляется по формуле (см. рис. 3.13, a)

$$d = \frac{|[e,x^1 - x^0]|}{|e|}.$$

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями

$$x = x^1 + \theta e^1, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

$$x = x^2 + \theta e^2, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Формула, по которой можно вычислить расстояние d между прямыми l_1 и l_2, имеет следующий вид (см. рис. 3.13, b):

$$d = \frac{|(e^1,e^2,x^2 - x^1)|}{|[e^1,e^2]|}. \tag{3.28}$$

Упражнение 1. Найти канонические уравнения прямой l, по которой пересекаются плоскости (см. рис. 3.14)

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 8 = 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Решение. Если даны две непараллельные и несовпадающие плоскости

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0, \end{aligned} \tag{3.30}$$

то прямую можно определить как единственную линию их пересечения. Для того, чтобы преобразовать уравнения прямой (3.30) к каноническим уравнениям (3.25), нужно найти точку x^0, через которую проходит прямая и ее

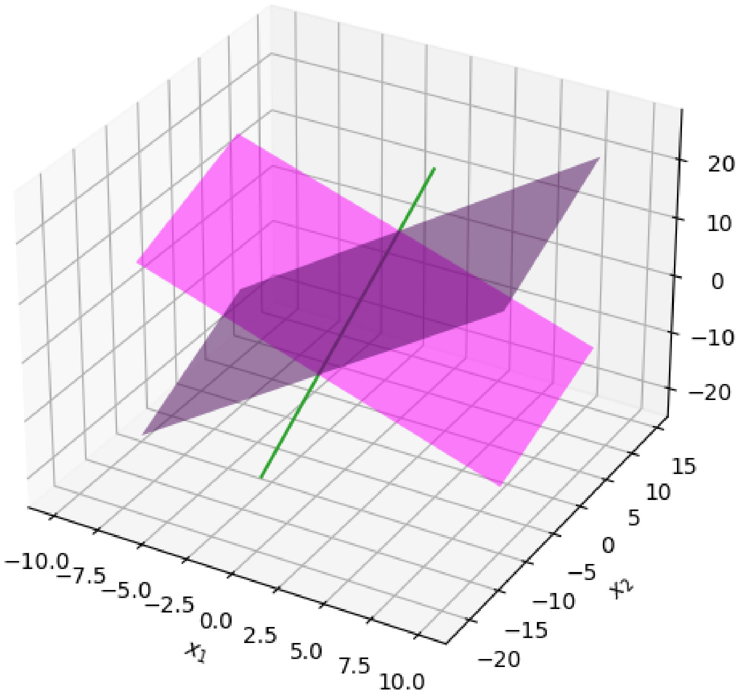

Рисунок 3.14 — К упражнению 1: прямая, по которой пересекаются плоскости $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0$ и $6x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 8 = 0$.

направляющий вектор e. В качестве точки x^0 можно взять любую точку, координаты которой удовлетворяют уравнениям (3.30). Направляющий вектор прямой будет перпендикулярен нормальным векторам плоскостей $n^1 = (a_1,b_1,c_1)$ и $n^2 = (a_2,b_2,c_2)$, поэтому его можно задать как их векторное произведение

$$e = [(a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2)]. \tag{3.31}$$

Найдем точку x^0, принадлежащую прямой l. Например, можно найти точку, в которой искомая прямая пересекает плоскость x_1x_2. С этой целью положим $x_3 = 0$. Подставим $x_3 = 0$ в систему (3.29) и найдем остальные координаты точки x^0. Получили систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$2x_1 - x_2 - 3 = 0,$$

$$6x_1 + 2x_2 + 8 = 0.$$

Решение этой системы: $x_1 = -1/5$, $x_2 = -17/5$, т. е. точка

$$x^0 = (-1/5, -17/5, 0)$$

принадлежит прямой l. Направляющий вектор e прямой l определим по формуле (3.31):

$$e = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -i^1 + 18i^2 + 10i^3, \tag{3.32}$$

или $e = (-1{,}18{,}10)$. Запишем канонические уравнения прямой:

$$\frac{x_1 + 1/5}{-1} = \frac{x_2 + 17/5}{18} = \frac{x_3}{10}.$$

Покажем, как сделать рисунок 3.14, программируя в `Python`: `https://colab.research.google.com/drive/1sRYDyjRsVGnf5agH7aJIzHl7O_f1Lb-d?usp=sharing`

Упражнение 2. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 9 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3 = 0. \end{cases}$$

Указание. При составлении уравнений воспользоваться точкой

$$x^0 = (0{,}0, -3).$$

Ответ. $\dfrac{x_1}{9} = \dfrac{x_2}{5} = \dfrac{x_3 + 3}{1}$.

Упражнение 3. Из точки $x^0 = (3, -2{,}4)$ опустить перпендикуляр на плоскость $5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 1 = 0$.

Указание. Запишите координаты вектора $n = (a{,}b{,}c)$, нормального к плоскости. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку x^0 параллельно вектору n.

Ответ. $\dfrac{x_1 - 3}{5} = \dfrac{x_2 + 2}{3} = \dfrac{x_3 - 4}{-7}$.

Упражнение 4. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $x^1 = (3{,}1 - 2)$ и через прямую

$$\frac{x_1 - 4}{5} = \frac{x_2 + 3}{2} = \frac{x_3}{1}.$$

Указание. Напишите уравнение плоскости (3.19), проходящей через точку x^0, натянутой на векторы e^1 и e^2. Заданное в формулировке упражнения

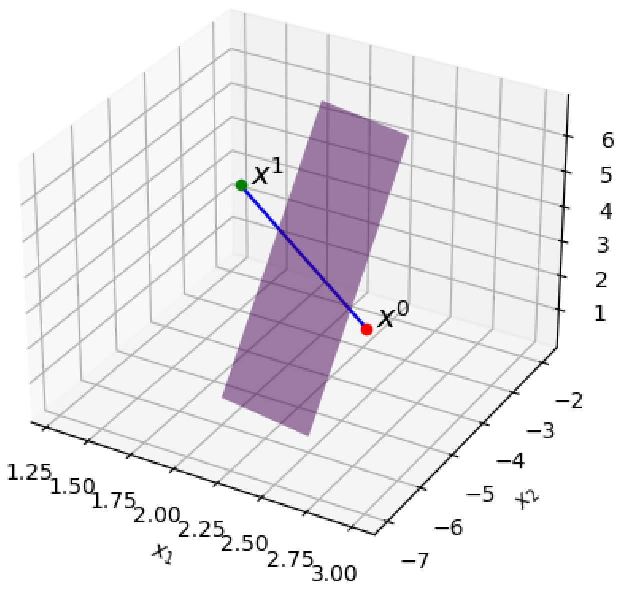

Рисунок 3.15 — К упражнению 5: зеркальное изображение точки $x^0 = (3, -7{,}5)$ относительно плоскости $2x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 42 = 0$.

уравнение прямой определяет точку x^0 и вектор e^1. Вектор e^2 может быть найден в виде $e^2 = x^1 - x^0$, где x^1 есть заданная точка.

Ответ. $8x_1 - 9x_2 - 22x_3 - 59 = 0$.

Упражнение 5. Положение зеркала определяется уравнением

$$2x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 42 = 0.$$

С какой точкой должно совпадать зеркальное изображение точки

$$x^0 = (3, -7{,}5)?$$

Указание. Приведите уравнение плоскости к нормальному виду, найдите вектор p и вычислите расстояние от точки x^0 до плоскости. По условию задачи это расстояние должно быть в два раза меньше расстояния от точки x^0 до искомой точки x^1. Как должен быть направлен вектор $x^0 - x^1$ относительно вектора p? Смотрите рисунок 3.15. Итак, $x^0 - x^1 = 6p$.

Ответ. $x^1 = (9/7, -13/7{,}17/7)$.

Покажем, как сделать рисунок 3.15, программируя в `Python`: `https://colab.research.google.com/drive/1i5uJgBHLCwrwyBtRhKfXyCVyeid2_ZJc?usp=sharing`

Упражнение 6. Определить косинус угла между двумя прямыми

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 6x_3 - 2 = 0, \\ x_2 - 3x_3 + 2 = 0. \end{cases}$$

Указание. Углы между прямыми и плоскостями вычисляются как углы между соответствующими направляющими (для прямых) и нормальными векторами (для плоскостей). Например, косинус угла φ между двумя прямыми с направляющими векторами e^1 и e^2 можно найти по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(e^1,e^2)}{|e^1||e^2|}.$$

Ответ. $\cos\varphi = 98/195$.

Упражнение 7. При каком значении коэффициента α плоскость

$$\alpha x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 1 = 0$$

будет параллельна прямой $\dfrac{x_1 - 1}{4} = \dfrac{x_2 + 2}{3} = \dfrac{x_3}{1}$?

Указание. Условия ортогональности и параллельности прямых и плоскостей записываются через условия ортогональности и параллельности соответствующих направляющих векторов e и нормальных векторов n. Так, если прямая и плоскость ортогональны, то векторы e и n коллинеарны; условие параллельности прямой и плоскости следующее:

$$(e,n) = 0.$$

Ответ. $\alpha = -1$.

Упражнение 8. Проверить, лежит ли прямая $\dfrac{x_1 - 1}{2} = \dfrac{x_2 + 3}{-1} = \dfrac{x_3 + 2}{5}$ на плоскости $4x_1 + 3x_2 - x_3 + 3 = 0$.

Указание. Прямая лежит на плоскости. Для того, чтобы убедиться в этом, надо проверить, что направляющий вектор e прямой ортогонален нормальному вектору n плоскости. Затем проверить, что точка, принадлежащая прямой, принадлежит и плоскости.

Упражнение 9. Проверить, что прямые $\frac{x_1-3}{5}=\frac{x_2+1}{2}=\frac{x_3-2}{4}$ и $\frac{x_1-8}{3}=\frac{x_2-1}{1}=\frac{x_3-6}{-2}$ пересекаются, и написать уравнение плоскости, проходящей через них.

Указание. Вычислите расстояние между прямыми по формуле (3.28) и убедитесь, что оно равно нулю. Напишите уравнение плоскости (3.19), проходящей через заданную точку и натянутой на два неколлинеарных вектора. Должно получиться уравнение $8x_1-22x_2+x_3-48=0$.

Упражнение 10. Можно ли через прямую $\frac{x_1-7}{4}=\frac{x_2-5}{3}=\frac{x_3-1}{6}$ провести плоскость параллельно плоскости $2x_1+x_2-7x_3+1=0$?

Указание. Вычислите скалярное произведение направляющего вектора прямой и нормального вектора плоскости. Оно не равно нулю. Следовательно, данная прямая пересекает плоскость, а потому и всякая плоскость, проходящая через нее, пересечет данную плоскость.

Ответ. Нельзя.

Упражнение 11. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку $x^0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$.

Ответ. $\frac{x_1}{x_1^0}=\frac{x_2}{x_2^0}=\frac{x_3}{x_3^0}$.

Упражнение 12. Проверить, лежит ли прямая $\frac{x_1-1}{4}=\frac{x_2}{7}=\frac{x_3-2}{3}$ на плоскости $5x_1-8x_2-2x_3-1=0$.

Ответ. Прямая не лежит на плоскости.

Упражнение 13. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $x^0=(2,3,1)$ на прямую $\frac{x_1+1}{2}=\frac{x_2}{-1}=\frac{x_3-2}{3}$.

Решение. В формулировке задачи дана прямая l_1, проходящая через точку $x^1=(-1,0,2)$ в направлении вектора $e^1=(2,-1,3)$. Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $x^0=(2,3,1)$ перпендикулярно l_1, имеют вид

$$\frac{x_1-2}{e_1}=\frac{x_2-3}{e_2}=\frac{x_3-1}{e_3}.$$

Необходимо найти координаты направляющего вектора $e=(e_1,e_2,e_3)$ этой прямой. Сначала найдем плоскость π, в которой лежит искомый перпендикуляр.

Построим уравнение плоскости π, проходящей через точку x^0 и натянутой на векторы e^1 и $e^2 = x^0 - x^1 = (3{,}3, -1)$:

$$\begin{vmatrix} x_1 - 2 & 2 & 3 \\ x_2 - 3 & -1 & 3 \\ x_3 - 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим этот определитель и получим общее уравнение плоскости π:

$$-8x_1 + 11x_2 + 9x_3 - 58 = 0.$$

Вектор e должен быть ортогонален нормальному к этой плоскости вектору $n = (-8{,}11{,}9)$:

$$(e,n) = -8e_1 + 11e_2 + 9e_3 = 0.$$

Кроме того, вектор e должен быть ортогонален направляющему вектору e^1 прямой l_1:

$$(e,e^1) = 2e_1 - e_2 + 3e_1 = 0.$$

Итак, получили два уравнения для определения трех неизвестных. Ясно, что искомый вектор определяется с точностью до множителя, поэтому мы можем зафиксировать любую его координату. Положим, например, $e_3 = -1$ и найдем $e_1 = e_2 = 3$.

Ответ. $\dfrac{x_1 - 2}{3} = \dfrac{x_2 - 3}{3} = \dfrac{x_3 - 1}{-1}$.

Упражнение 14. Вычислить направляющие косинусы прямой

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 21 = 0, \\ x_1 - x_3 + 3 = 0. \end{cases}$$

Указание. *Направляющие косинусы вектора* — это косинусы углов, которые вектор образует с положительными направлениями осей координат. Если длина вектора равна единице, направляющие косинусы вектора совпадают с его декартовыми координатами. *Направляющие косинусы прямой* вычисляются по формуле $\dfrac{e}{|e|}$.

Ответ. $\dfrac{e}{|e|} = \left(\dfrac{6}{11}, \dfrac{7}{11}, \dfrac{6}{11}\right)$.

Упражнение 15. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную прямой $\dfrac{x_1+2}{4} = \dfrac{x_2-3}{5} = \dfrac{x_3-1}{-2}$.

Ответ. $4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0$.

Упражнение 16. Через прямую $\dfrac{x_1-2}{5} = \dfrac{x_2-3}{1} = \dfrac{x_3+1}{2}$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 7 = 0$.

Решение. По условию задачи должны быть компланарны следующие векторы: $x - x^0$, где x — произвольная точка искомой плоскости π, $x^0 = (2,3,-1)$ — точка, через которую проходит заданная прямая l; $e = (5,1,2)$ — направляющий вектор прямой l; $n = (1,4,-3)$ — вектор, нормальный к заданной плоскости. Условие компланарности этих трех векторов определяет уравнение плоскости π:

$$\begin{vmatrix} x_1-2 & 5 & 1 \\ x_2-3 & 1 & 4 \\ x_3+1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим этот определитель и получим общее уравнение плоскости π.

Ответ. $11x_1 - 17x_2 - 19x_3 + 10 = 0$.

Упражнение 17. Найти расстояние между двумя прямыми:

$$\frac{x_1-9}{4} = \frac{x_2+2}{-3} = \frac{x_3}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x_1}{-2} = \frac{x_2+7}{9} = \frac{x_3-2}{2}.$$

Указание. Используйте формулу (3.28).

Ответ. $d = 7$.

Глава 4. Системы линейных уравнений, матрицы, определители

4.1 Перестановки, определители (занятие 12)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.
Видео:
https://disk.yandex.ru/i/kcGpQtstXzNhyQ
https://disk.yandex.ru/i/gq6WzXm70_ykyg
https://disk.yandex.ru/i/LNTh7_yilIisng
Презентации:
https://disk.yandex.ru/i/c-ORHqpnzolEzQ
https://disk.yandex.ru/i/sul2FjY6eNZeQQ
https://disk.yandex.ru/i/LKOHGMGPJL08Gw
Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 5, §1-3

Рассмотрим множество n целых чисел:

$$M_n = \{1,2,3,\ldots,n\}.$$

Эти числа можно располагать в различном порядке. Каждое такое расположение называют *перестановкой*.

Будем говорить, что числа n_i, n_j, где $i < j$, в перестановке

$$n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_n$$

образуют *инверсию*, если $n_i > n_j$. Количество всех инверсий данной перестановки будем обозначать через

$$\sigma(n_1,n_2,\ldots,n_n)$$

и называть *сигнатурой* перестановки.

Перестановка называется *четной*, если ее сигнатура четное число. В противном случае перестановка называется *нечетной*.

Квадратной матрицей порядка n называется таблица, состоящая из n строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Здесь a_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots, n$, — числа, вообще говоря, комплексные.

Определителем матрицы A называется число

$$|A| = \sum_{n_1 n_2 \dots n_n} (-1)^{\sigma(n_1, n_2, \dots, n_n)} a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n}. \tag{4.2}$$

Поясним, что определителем матрицы порядка n является сумма $n!$ слагаемых, составленная следующим образом: слагаемыми служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца, причем слагаемое берется со знаком плюс, если перестановка $n_1, n_2, \dots, n_n$ четная, и со знаком минус — в противном случае.

Для определителей произвольного порядка справедливы все свойства, которые мы уже установили для определителей третьего порядка (см. §2.2). В частности, *минором* M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из определителя n-го порядка вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца. *Алгебраическое дополнение* A_{ij} элемента a_{ij} определяется равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{4.3}$$

Для любого определителя $|\mathrm{A}|$ выполняются формулы разложения определителя по строке или по столбцу:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = |A|\delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

$$a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \dots + a_{ni}A_{nk} = |A|\delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

где δ_{ik} — символ Кронекера.

Упражнение 1. Вычислить сигнатуру перестановки

1,9,6,3,2,5,4,7,8.

Решение. Для того, чтобы определить сигнатуру, сосчитаем количество инверсий, которое образует каждое число в перестановке:

число 1 меньше всех и не имеет инверсий;
число 2 не образует инверсий;
число 3 стоит раньше 2 и, следовательно, образует 1 инверсию;
число 4 не образует инверсий;
число 5 стоит раньше числа 4 и образует 1 инверсию;
число 6 — 4 инверсии (так как стоит раньше чисел 3,2,5,4);
число 7 не имеет инверсий;
число 8 не образует инверсий;
число 9 имеет 7 инверсий, так как стоит раньше чисел 6,3,2,5,4,7,8.
Итак, сигнатура исходной перестановки равна

$$\sigma = 1 + 1 + 4 + 7 = 13.$$

Покажем, как выполнить это упражнение в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1mi88rzZMABeqgFHCQz9XgFPnYxD6Vrmu?usp=sharing

Упражнение 2. Вычислить сигнатуры перестановок:
a) 6,3,1,2,5,4;
b) 7,5,6,4,1,3,2.

Ответ. *a*) 8. *b*) 18.

Упражнение 3. Найти сигнатуру перестановки

$$1,3,5,7,\ldots,2n-1,2,4,6,8,\ldots,2n.$$

Решение. Аналогично решению предыдущих примеров, вычислим количество инверсий, которое образует каждый символ исходной перестановки:
число 1 не образует инверсий;
число 3 стоит раньше 2 и, следовательно, образует 1 инверсию;
число 5 стоит раньше 2 и 4, поэтому образует 2 инверсии;
число 7 стоит раньше 2, 4, 6 и образует 3 инверсии и т. д.

Наконец, число $2n-1$ стоит раньше чисел $2,4,6,8,\ldots,2n-2$, следовательно, образует $n-1$ инверсию. Остальные числа перестановки входят в инверсии, которые нами были уже подсчитаны. Таким образом, сигнатура исходной перестановки равна

$$\sigma = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Упражнение 4. Вычислить сигнатуры перестановок:
a) 1,3,4,7,8,2,6,9,5;
b) 2,1,7,9,8,6,3,5,4;
c) $2,4,6,\dots,2n,1,3,5,\dots,2n-1$.

Ответ. *a*) 10. *b*) 18. *c*) $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Упражнение 5. Выяснить, какие из следующих произведений входят в выражения определителей соответствующих порядков и с каким знаком: 1) $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$; 2) $a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$.

Решение.

1) Первые индексы у множителей данного произведения стоят в порядке возрастания, как в определении определителя (4.2). Из вторых индексов этого произведения составим перестановку 3,2,1,6,5,4. Данная перестановка является четной, так как ее сигнатура σ равна 6. Таким образом, произведение

$$a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$$

входит в определитель шестого порядка со знаком плюс.

2) Перепишем исходное произведение таким образом, чтобы первые индексы были в порядке возрастания:

$$a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62} = a_{17}a_{21}a_{34}a_{46}a_{54}a_{62}a_{73}.$$

Множество, составленное из вторых индексов построенного произведения 7,1,4,6,4,2,3, не является перестановкой чисел от одного до семи, поэтому исходное произведение

$$a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$$

не является членом определителя.

Упражнение 6. Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:
a) $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$;
b) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$;
c) $a_{12}a_{23}\dots a_{n-1,n}a_{n1}$.

Ответ. *a*) Входит со знаком минус. *b*) Не является членом определителя. *c*) Входит со знаком $(-1)^{n-1}$.

Упражнение 7. Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

a) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$;

b) $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}\ldots a_{2n-1,2n}a_{2n,2n-1}$;

c) $a_{12}a_{23}a_{34}\ldots a_{n-1,n}a_{kk}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Ответ. *a*) Входит со знаком плюс. *b*) Входит со знаком $(-1)^n$. *c*) Не является членом определителя.

Упражнение 8. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 30 & -10 & 120 & 80 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix}.$$

Решение. Из первой строки вынесем множитель 10, а затем будем последовательно умножать полученную строку на 3, 1, 2 и складывать соответственно со второй, третьей и четвертой строками:

$$\Delta = 10 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$= 10 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ -5+9 & 0 & -34+36 & -23+24 \\ 1+3 & 0 & 3+12 & -7+8 \\ -9+6 & 0 & 8+24 & -15+16 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

Разложим последний определитель по элементам второго столбца:

$$\Delta = 10 \cdot (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или подобным же приемом свести к вычислению одного определителя второго порядка. Действительно, вычитая из второй и третьей строк данного определителя первую строку, имеем

$$\Delta = 10 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = 10 \cdot 7 \cdot 13 = 910.$$

Покажем, как выполнить это упражнение в sympy: https://colab.research.google.com/drive/1KzKK4KxPiyWLT4h120USzL55UCYmgK5S?usp=sharing

Упражнение 9. Разлагая по третьей строке, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ответ. $8a + 15b + 12c - 19d$.

Покажем, как получить тот же ответ в sympy: https://colab.research.google.com/drive/1nFNhNcYZokmndNhy-XPQ_Hwoi1zjRgiz?usp=sharing

Упражнение 10. Вычислить определители четвертого порядка:

$$a) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad b) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix},$$

$$c) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}, \qquad d) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ответ. $a)$ -3, $b)$ 54, $c)$ 18, $d)$ 4.

Упражнение 11. Вычислить определители пятого порядка:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & -4 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \qquad b) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & -4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & 1 & -4 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ответ. $a)$ -24, $b)$ -60.

Упражнение 12. Разлагая по 2-му столбцу, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

Ответ. $2a - 8b + c + 5d$.

Упражнение 13. Вычислить определители 4-го порядка:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \qquad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$c) \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}, \qquad d) \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

Ответ. $a)$ 16, $b)$ 160, $c)$ 18, $d)$ 17.

Упражнение 14. Вычислить определители 5-го порядка:

$$a) \begin{vmatrix} -4 & 0 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \qquad b) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -4 & -4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

$$c) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 1 & 3 & 3 \\ -4 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \qquad d) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ответ. $a)$ 192, $b)$ 220, $c)$ -98, $d)$ -34.

4.2 Вычисление определителей произвольного порядка (занятие 13)

Если времени не хватает, этот параграф можно пропустить.

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.

Видео: https://disk.yandex.ru/i/bvUq2cp2q_EUQw

Презентации: https://disk.yandex.ru/i/hXA3xVqKZb_MdA

Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 5, §4

Определитель, у которого все элементы, находящиеся выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называется *определителем треугольного вида*. Он равен произведению элементов стоящих на главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ & \dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots\dots\dots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}. \tag{4.4}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ & & \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \tag{4.5}$$

$$= (-1)^{n(n-1)/2} a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n1}.$$

В этом несложно убедиться, заметив, что

$$\sigma(n, n-1, \dots, 2, 1) = (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Определителем Вандермонда n-го порядка называется определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j). \tag{4.6}$$

Упражнение 1. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots} \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Приведем определитель Δ к треугольному виду (4.4). Для этого достаточно ко всем строкам определителя прибавить первую строку. Таким образом получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!.$$

Упражнение 2. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

Решение. Выполним следующие операции. Сначала из n-го столбца вычтем $(n-1)$-ый. Затем из $(n-1)$-го столбца вычтем $(n-2)$-ой и так далее. В итоге, используя формулу (4.5) получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots} \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} n.$$

Упражнение 3. Вычислить определитель n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots} \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Заметим, что сумма всех элементов любой строки (или столбца) данного определителя равна $2n+1$. Поэтому, если прибавить к первой строке все остальные строки определителя, то можно вынести общий множитель за скобку. В результате получим

$$\Delta = (2n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots} \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

Вычтем первую строку, умноженную на 2, из всех остальных строк определителя, получим определитель треугольного вида (4.4):

$$\Delta = (2n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (2n+1).$$

Упражнение 4. Вычислить определители[1] методом приведения их к треугольному виду:

$$a)\ \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix},$$

[1] Всюду, где по виду определителя нельзя узнать его порядок, предполагается, что он равен n.

$$b)\quad \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1+b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2+b_2 & a_2 & a_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_n+b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix},$$

$$c)\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix},$$

$$d)\quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix},$$

$$e)\quad \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots} \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix},$$

$$f)\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Указания.

a) $x_1 \cdot (x_2 - a_{12}) \cdot (x_3 - a_{23}) \cdot \ldots \cdot (x_n - a_{n-1,n})$. Вычесть соседние строки, начиная с последней, т. е. из n строки вычесть $(n-1)$, затем из $(n-1)$ строки вычесть $(n-2)$ и т. д.

b) $(-1)^{n(n+1)/2} b_1 b_2 \ldots b_n$. Первую строку умножить на a_1 и вычесть из второй строки, затем первую строку умножить на a_2 и вычесть из третьей строки и т. д.

c) $x_1x_2\ldots x_n\cdot\left(\dfrac{a_1}{x_1}+\dfrac{a_2}{x_2}+\ldots+\dfrac{a_n}{x_n}\right)$. 1) Из первого столбца вынести множитель x_1, из второго столбца вынести множитель x_2 и т. д. 2) Все полученные столбцы прибавить к первому. 3) Разложить по первому столбцу.

d) $(-1)^{(n^2-n+2)/2}\cdot 2(n-2)!$. 1) Вычесть вторую строку из всех строк определителя, которые стоят ниже. 2) Первую строку умножить на 2 и вычесть из второй строки.

e) $(-1)^{n-1}\cdot n!$. Вычесть n-ю строку из остальных строк определителя.

f) $(-1)^{n-1}\cdot(n-1)$. 1) Все столбцы прибавить к первому. 2) Вынести общий множитель в первом столбце. 3) Вычесть первый столбец из остальных столбцов определителя.

Упражнение 5. Вычислить следующие определители, используя определитель Вандермонда:

$$a)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \ldots & 3^n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \ldots & (n+1)^n \end{vmatrix},$$

$$b)\quad \begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cos^2\varphi_1 & \ldots & \cos^{n-1}\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cos^2\varphi_2 & \ldots & \cos^{n-1}\varphi_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & \cos\varphi_n & \cos^2\varphi_n & \ldots & \cos^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}.$$

Ответ. *a*) $1!2!3!\ldots n!$, *b*) $2^{n(n-1)/2}\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}\sin\dfrac{\varphi_i+\varphi_j}{2}\sin\dfrac{\varphi_i-\varphi_j}{2}$.

Упражнение 6. Вычислить следующие определители методом приведения их к треугольному виду:

$$a)\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \ldots & n-1 & n \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix},$$

$$b)\quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \ldots & a_n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n+b_n \end{vmatrix},$$

$$c)\quad \begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \ldots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1-n \end{vmatrix},$$

$$d)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \ldots & -n & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & -n & \ldots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$e)\quad \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & n & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & n & \ldots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n \end{vmatrix},$$

$$f)\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \ldots & x & x \\ 1 & x & 0 & \ldots & x & x \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & x & x & \ldots & 0 & x \\ 1 & x & x & \ldots & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Указания.

$a)$ $(n-1)!$ Первый столбец умножить на 2 и вычесть из второго столбца, затем первый столбец умножить на 3 и вычесть из третьего столбца и т. д.

$b)$ $b_1 b_2 \ldots b_n$. Первый столбец умножить на a_1 и вычесть из второго столбца, затем первый столбец умножить на a_2 и вычесть из третьего столбца и т. д.

$c)$ 0. Все столбцы прибавить к первому столбцу определителя.

$d)$ $(-1)^{n(n+1)/2} \cdot (n+1)^{n-1}$. 1) Все столбцы прибавить к первому. 2) Первый столбец прибавить к остальным столбцам определителя.

e) $(2n-1)\cdot(n-1)^{n-1}$. 1) Все столбцы прибавить к первому. 2) Вынести общий множитель в первом столбце. 3) Вычесть первый столбец из остальных столбцов определителя.

f) $(-1)^{n-1}\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}$. 1) Вычесть последние строки, начиная с последней строки. 2) Разложить по первому столбцу. 3) Все столбцы прибавить к первому столбцу определителя. 4) Разложить по первому столбцу определителя.

Упражнение 7. Вычислить следующий определитель, используя определитель Вандермонда:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin\varphi_1 & \sin^2\varphi_1 & \dots & \sin^{n-1}\varphi_1 \\ 1 & \sin\varphi_2 & \sin^2\varphi_2 & \dots & \sin^{n-1}\varphi_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & \sin\varphi_n & \sin^2\varphi_n & \dots & \sin^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}.$$

Ответ. $2^{n(n-1)/2}\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}\cos\dfrac{\varphi_i+\varphi_j}{2}\sin\dfrac{\varphi_i-\varphi_j}{2}$.

4.3 Матрицы (занятие 14)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.
Видео:
https://disk.yandex.ru/i/Mya_kZI5AdCrzg
https://disk.yandex.ru/i/UchgMzl7UeTy2A
Презентации:
https://disk.yandex.ru/i/KWGWJjbNqqQCBw
https://disk.yandex.ru/i/pTUh2GmCBE7NWg
Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 5, §6, 7

Прямоугольная таблица чисел (в общем случае комплексных)

$$a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

состоящая из m строк и n столбцов, называется *прямоугольной матрицей* $A(m, n)$ размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Отметим некоторые частные случаи. При $m = n$ получаем *квадратную матрицу порядка* n. Если $m = 1$, а n произвольно, получаем *матрицу-строку* (или, просто, *строку*)

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Говорят, что эта строка имеет *длину* n. Если $n = 1$, а m произвольно, получаем *матрицу-столбец* (или, просто, *столбец*)

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Говорят, что этот столбец имеет *длину* m. Столбцы и строки часто называют *векторами*.

Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы — нули. Нулевая матрица обозначается символом 0. *Единичной матрицей* порядка n называется квадратная матрица

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Суммой матриц $A(m{,}n)$ и $B(m{,}n)$ называется матрица

$$C = A + B$$

того же размера, что и матрицы A и B, каждый элемент которой есть сумма соответствующих элементов исходных матриц:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Произведением матрицы $A(m{,}n)$ *на число* α называется матрица

$$B = \alpha A$$

того же размера, что и матрица A, с элементами

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Произведение строки x *и столбца* y одинаковой длины n есть число

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Произведением матриц $A(m{,}n)$ *и* $B(n{,}p)$ называется такая матрица

$$C(m{,}p) = A(m{,}n)B(n{,}p),$$

что

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \tag{4.7}$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, p$. Поясним, что элемент c_{ij} есть результат умножения i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B. Произведение матриц определено, только если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Свойства операции умножения матриц:

1) $(AB)C = A(BC)$ (ассоциативность);

2) $(A + B)C = AC + BC$ (дистрибутивность);

3) $A(B + C) = AB + AC$ (дистрибутивность);

Отметим, что $AB \neq BA$, т. е. коммутативность в общем случае не имеет места. Матрицы A и B, для которых $AB = BA$, называются *перестановочными матрицами*.

Матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

называется матрицей, *транспонированной* по отношению к А. Поясним, что матрицы A и A^T состоят из одних и тех же элементов. Первая строка матрицы A^T составлена из элементов первого столбца матрицы A, вторая строка — из элементов второго столбца матрицы A и т. д.

Обратной матрицей к квадратной матрице A называется такая матрица (обозначается A^{-1}), что $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. Если обратная матрица существует, то она единственная.

Присоединенной матрицей к квадратной матрице A называется матрица $\widetilde{A}$, полученная транспонированием из матрицы, составленной из алгебраических дополнений A_{ij} (см. (4.3)) матрицы A. Если квадратная матрица A *невырождена* (т. е. $|A| \neq 0$), то

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}. \tag{4.8}$$

Матричные уравнения с неизвестной матрицей X записываются следующим образом:

$$AX = B, \tag{4.9}$$

$$XA = B, \tag{4.10}$$

$$AXC = B. \tag{4.11}$$

В этих уравнениях A, B, C, X — матрицы таких размеров, что все используемые операции умножения корректны и с обеих сторон от знаков равенства находятся матрицы соответствующих размеров. Если в уравнениях (4.9), (4.10) матрица невырожденная, то их решения записываются следующим образом:

$$X = A^{-1}B, \tag{4.12}$$

$$X = BA^{-1}. \tag{4.13}$$

Если в уравнении (4.11) матрицы A и C невырождены, то его решение записывается так:

$$X = A^{-1}BC^{-1}. \tag{4.14}$$

Упражнение 1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Найти линейную комбинацию $4A - 5B - \alpha I$.

Решение.

$$4A - 5B - \alpha I =$$

$$= 4\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} - \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7-\alpha & -9 & -10 \\ 22 & 11-\alpha & -23 \\ -12 & -6 & 40-\alpha \end{pmatrix}.$$

Упражнение 2. Найти линейные комбинации матриц:

$a)\quad A - \alpha I, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & -7 & -8 \end{pmatrix},$

$b)\quad 4A - 7B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & -5 \\ -8 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$

Ответ.

$a)$ $\begin{pmatrix} 1-\alpha & 2 & -3 \\ 4 & -\alpha & 5 \\ 6 & -7 & -8-\alpha \end{pmatrix}$,

$b)$ $\begin{pmatrix} 4 & -22 & -29 & 47 \\ 64 & -7 & -33 & 4 \\ -8 & -18 & 14 & -19 \end{pmatrix}$.

Упражнение 3. Пусть

$$x = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Найти произведение xy.

Решение.

$$xy = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 + (-2) \cdot 6 + 3 \cdot 7 + (-4) \cdot 8 = -18.$$

Упражнение 4. Найти произведения матриц AB и BA (если они существуют) и проверить, являются ли матрицы перестановочными:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, поэтому можно вычислить произведение AB этих матриц:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 2(-2) + 3 \cdot 8 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + 7(-1) & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 1(-1) & 1 \cdot 5 + 0(-2) + 8(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Произведение BA не определено, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A. Эти матрицы не являются перестановочными.

Покажем, как выполнить это упражнение в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1Qo93V6nfp0TMrWZ6Imvj490AyU0L1tgb?usp=sharing

Упражнение 5. Найти произведения матриц AB и BA (если они существуют) и проверить являются ли матрицы перестановочными:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 & 8 \\ -9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -9 \\ 8 & 7 & -6 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$b)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ.

$$a)\ AB = \begin{pmatrix} -10 & -26 & 30 & -26 \\ 46 & 44 & -6 & 112 \\ 70 & -44 & -38 & -20 \\ 6 & 72 & -30 & -8 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} -8 & -30 & 72 & 6 \\ -20 & -38 & -44 & 70 \\ 112 & -6 & 44 & 46 \\ -26 & 30 & -26 & -10 \end{pmatrix}.$$

Матрицы не перестановочные, так как $AB \neq AB$.

$b)$ Произведение матриц $AB = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, произведение BA не определено. Матрицы A и B не перестановочные.

Упражнение 6. Найти произведения матриц AB и BA (если они существуют) и проверить являются ли матрицы перестановочными:

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ.

$a)$ $AB = \begin{pmatrix} -14 & 11 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 14 & 2 & -2 \\ -9 & -15 & 3 \\ 17 & 23 & -5 \end{pmatrix}$, матрицы не перестановочные, так как $AB \neq AB$.

$b)$ $AB = BA = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Матрицы перестановочные.

Упражнение 7. Доказать, что для любого целого $n \geqslant 1$ справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}.$$

Решение. Используем метод математической индукции. Для $n = 1$ это равенство очевидно имеет место. Пусть $n = 2$, тогда

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha \\ -2\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

По предположению индукции

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\alpha & \sin(n-1)\alpha \\ -\sin(n-1)\alpha & \cos(n-1)\alpha \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\alpha & \sin(n-1)\alpha \\ -\sin(n-1)\alpha & \cos(n-1)\alpha \end{pmatrix}.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Покажем, как выполнить это упражнение в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1_xJ7VWXNe4y8DYi_vh_wSIucL4eiVuO_?usp=sharing

Упражнение 8. Найти матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

Указание. $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Используйте метод математической индукции.

Упражнение 9. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Сначала найдем $|A|$ — определитель матрицы A:

$$|A| = 1\cdot 5\cdot 0 + 2\cdot 6\cdot 7 + 4\cdot 8\cdot 3 - 7\cdot 5\cdot 3 - 4\cdot 2\cdot 0 - 8\cdot 6\cdot 1 =$$

$$= 84 + 96 - 105 - 48 = 27.$$

Теперь, используя формулу (4.3), найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Запишем присоединенную матрицу:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A^{-1}A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Покажем, как выполнить это упражнение в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1KyYSTcldATcbljn5Fsh2L_FUB92g1l4Q?usp=sharing

Упражнение 10. Найти обратную матрицу, вычислив присоединенную:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},\ c)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $a)$ $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & -2 & -3 \\ -6 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b)$ обратной матрицы не существует, $c)$ $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix}$.

Упражнение 11. Найти обратную матрицу, вычислив присоединенную:

$$a)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ b)\ \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix},\ c)\ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $a)$ $\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $b)$ $\dfrac{1}{41}\begin{pmatrix} 11 & 6 & -4 \\ -5 & 1 & 13 \\ 14 & -11 & -20 \end{pmatrix}$,

$c)$ $\dfrac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}$.

Упражнение 12. Решить матричные уравнения:

$a)$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$b)$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Указание. $a)$ $X = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, воспользуйтесь формулой (4.12).

$b)$ $X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, воспользуйтесь формулой (4.14).

Упражнение 13. Решить матричные уравнения:

$a)$ $X\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$,

$b)$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. $a)$ $X = \begin{pmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -17 & 13 & -10 \\ -8 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, $b)$ $X = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & -7 \\ 4 & -2 & -7 \end{pmatrix}$.

Упражнение 14. Может ли при умножении ненулевых матриц получиться нулевая матрица?

Решение. Да, например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Действительно, однородная система линейных уравнений с вырожденной матрицей имеет нетривиальные решения. Тогда в качестве первой матрицы в произведении можно взять любую вырожденную матрицу. В качестве второй матрицы в произведении можно взять матрицу, столбцы которой составлены из этих нетривиальных решений.

4.4 Метод Гаусса решения систем уравнений (занятие 15)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.

Видео: https://disk.yandex.ru/i/SmuoG9vsU8R92A

Презентации: https://disk.yandex.ru/i/emIS99iDZW5NCg

Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 5, §8

Рассмотрим крамеровскую (с квадратной невырожденной матрицей) систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

есть заданная матрица, $b = (b_1,b_2,..,b_n)^T$ — заданный столбец правой части, вектор $x = (x_1,x_2,...,x_n)^T$ надо найти. Эту систему можно решить методом Гаусса. Он состоит из двух последовательных этапов: прямого и обратного хода.

Опишем прямой ход.

1. Элемент, стоящий в первой строке матрицы на главной диагонали, обозначен символом a_{11}.

1.1. Пусть $a_{11} \neq 0$. Разделим первую строку матрицы A на a_{11}. Из всех остальных строк вычтем первую строку матрицы A, умноженную на соответствующие элементы первого столбца так, чтобы в первом столбце во всех строках, начиная со второй, получились нули. Те же действия произведем с вектором b.

1.2. Пусть $a_{11} = 0$. Найдем в первом столбце матрицы элемент отличный от нуля (допустим, это элемент a_{j1}, его называют *ведущим элементом*). Поменяем в матрице A 1-ую и j-ую строки местами. Поменяем в столбце b 1-й и j-й элемент местами. Выполним пункт 1.1.

2. Обозначим элемент, стоящий во второй строке на главной диагонали матрицы, полученной на предыдущем шаге, символом a'_{22}.

2.1. Если $a'_{22} \neq 0$, его можно выбрать в качестве ведущего. Разделим на него вторую строку матрицы и вычтем из всех строк начиная с третьей вторую строку, умноженную на соответствующие элементы второго столбца так, чтобы во втором столбце во всех строках, начиная с третьей, были нули. Те же действия произведем с вектором b.

2.2. Если $a'_{22} = 0$, найдем ниже во втором столбце матрицы ведущий элемент отличный от нуля и поменяем две соответствующие строки матрицы и два соответствующих элемента вектора правой части местами. Выполним пункт 2.1.

3. Аналогичные действия повторим для остальных строк.

Замечание. Если не заботиться об ошибках округления, на каждом шаге прямого хода метода Гаусса в качестве ведущего элемента можно выбирать любой ненулевой элемент, в реальных вычислениях на компьютере выбирают максимальный по модулю элемент столбца.

Таким образом, мы приведем матрицу к треугольному виду. Получится следующая система уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a'_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \dots \\ b'_n \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Опишем обратный ход метода Гаусса. Решить систему (4.16) существенно проще, чем исходную с матрицей (4.15). Последовательно, начиная с последнего уравнения, будем находить неизвестные. Из последнего уравнения заключаем $x_n = b'_n$. Подставим это значение в предыдущее уравнение и найдем x_{n-1}. Продолжая этот процесс, найдем все остальные неизвестные.

Упражнение 1. Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 10, \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3. \end{array}$$

Решение. Запишем матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ данной системы и вектор правой части $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Выполним прямой ход метода Гаусса. Имеем $a_{11} = 2$. Разделим на 2 первую строку матрицы. Обнулим элементы первого столбца, расположенные во второй и третьей строке. Для этого из второй строки матрицы вычтем первую, умноженную на 3, из третьей строки матрицы вычтем первую. Те же действия производим со столбцом b. После выполненных действий получим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 5/2 & -7/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ и вектор правой части $\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Удобно записывать преобразование над строками матрицы и вектором правой части в следующем виде:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 5/2 & 5 \\ 0 & 5/2 & -7/2 & -12 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 5/2 & 5 \\ 0 & 1 & -7/5 & -24/5 \\ 0 & 0 & 1/5 & 2/5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 5/2 & 5 \\ 0 & 1 & -7/5 & -24/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Выполним обратный ход.

Из последнего уравнения получим $x_3 = 2$.

Из второго уравнения найдем $x_2 = -24/5 + (7/5) \cdot 2 = -2$.

Из первого уравнения найдем $x_1 = 5 - (5/2) \cdot 2 - (3/2) \cdot (-2) = 3$.

Ответ. $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.

Покажем, как выполнить это упражнение в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1bCxSfa0s7iIDe9rzY5x8vtj522NmPDtE?usp=sharing

Упражнение 2. Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & & & & & = & 2, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & = & 0. \end{array}$$

Решение. Матрица этой системы уравнений $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, ее правая часть $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Выполним прямой ход метода Гаусса. Элемент матрицы $a_{11} = 1$. Обнулим элементы первого столбца, расположенные во второй, третьей и четвертой строке. Для этого из второй строки вычтем первую, умноженную на 2; из третьей и четвертой строки вычтем первую строку. Те же действия производим со столбцом b. После выполненных действий получим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ и правую часть $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. В полученной матрице элемент $a'_{22} = 0$. Найдем во втором столбце этой матрицы элемент отличный от нуля. Это элемент a'_{32}, поэтому поменяем местами вторую и третью строку в матрице и столбце b. Получим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Теперь вычтем из четвертой строки вторую, умноженную на 2. Таким образом получим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Выполним обратный ход.

Из последнего уравнения получим $x_4 = 2$.

Из третьего уравнения найдем $x_3 = 1 - 2 = -1$.

Из второго уравнение найдем $x_2 = -2 - (-1) = -1$.
Из первого уравнения найдем $x_1 = 2 - 2 + 1 + 1 = 2$.

Ответ. $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$.

Покажем, как выполнить это упражнение в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/1G50tDEZcBGqAQZFklp1Fkiko6nT2NMJD?usp=sharing

Во всех следующих упражнениях надо решить системы методом Гаусса.

Упражнение 3.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3, \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 2, \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

Ответ. $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Упражнение 4.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 4, \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 6, \\ 8x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 12, \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 6. \end{array}$$

Ответ. $x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = -1$.

Упражнение 5.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 20, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 11, \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & 9x_3 & + & 7x_4 & = & 40, \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 37. \end{array}$$

Ответ. $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 2, x_4 = 0$.

Упражнение 6.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 7x_1 & + & 9x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & - & 2 & = & 0, \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 6 & = & 0, \\ 5x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & - & 3 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0. \end{array}$$

Ответ. $x_1 = -0.4, x_2 = -1.2, x_3 = 3.4, x_4 = 1$.

Упражнение 7.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
2x_1 & - & x_2 & - & 6x_3 & + & 3x_4 & + & 1 & = & 0, \\
7x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 15x_4 & + & 32 & = & 0, \\
x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 9x_4 & - & 5 & = & 0, \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 6x_4 & + & 8 & = & 0.
\end{array}$$

Ответ. $x_1 = -3, x_2 = 0, x_3 = -1/2, x_4 = 2/3$.

Упражнение 8.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 15, \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 35, \\
x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 10x_4 & + & 15x_5 & = & 70, \\
x_1 & + & 4x_2 & + & 10x_3 & + & 20x_4 & + & 35x_5 & = & 126. \\
x_1 & + & 5x_2 & + & 15x_3 & + & 35x_4 & + & 70x_5 & = & 210.
\end{array}$$

Ответ. $x_1 = 5, x_2 = 4, x_3 = 3, x_4 = 2, x_5 = 1$.

Упражнение 9.

$$\begin{array}{rcrcrcr}
4x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -4, \\
6x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -1, \\
5x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -3.
\end{array}$$

Ответ. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$.

Упражнение 10.

$$\begin{array}{rcrcrcr}
5x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -2, \\
2x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 0, \\
3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & -10.
\end{array}$$

Ответ. $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = -2$.

Упражнение 11.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x_1 & + & 3x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & 2, \\
x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\
2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -3, \\
x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -3.
\end{array}$$

Ответ. $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = -1$.

Упражнение 12.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3, \\
3x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & -6, \\
6x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & -8, \\
3x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & = & -8.
\end{array}$$

Ответ. $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -1$.

Упражнение 13.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 6x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & + & 4 & = & 0, \\ 9x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & - & 13 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & - & 1 & = & 0, \\ 3x_1 & - & 9x_2 & & & + & 2x_4 & - & 11 & = & 0. \end{array}$$

Ответ. $x_1 = 2/3, x_2 = -1, x_3 = 3/2, x_4 = 0$.

Упражнение 14.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & = & -1, \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 6x_3 & + & 2x_4 & = & 3, \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 8, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 4. \end{array}$$

Ответ. $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = -3/2, x_4 = 1/2$.

Упражнение 15.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 2, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 10x_4 & + & 13x_5 & = & 12, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 11x_3 & + & 16x_4 & + & 21x_5 & = & 17, \\ 2x_1 & - & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 7x_4 & + & 2x_5 & = & 57. \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & + & 10x_5 & = & 7. \end{array}$$

Ответ. $x_1 = 3, x_2 = -5, x_3 = 4, x_4 = -2, x_5 = 1$.

Глава 5. Линейные пространства

5.1 Определение линейного пространства (занятие 16)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.
Видео:
https://disk.yandex.ru/i/jiqtW0FCZyPjUg
https://disk.yandex.ru/i/0lG50bp1cpA3Ww
Презентации:
https://disk.yandex.ru/i/MHue-3Iyy1CJqA
https://disk.yandex.ru/i/-PEDxVsSaj9czQ
Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 6, §1, 2

Говорят, что множество $\mathbb{X}$ является *вещественным линейным пространством*, если для любых элементов x,$y \in \mathbb{X}$ определена операция сложения, т. е. определен элемент $z = x + y \in \mathbb{X}$, называемый *суммой* элементов x, y; для любого элемента $x \in \mathbb{X}$ и любого вещественного числа α определен элемент $\alpha x \in \mathbb{X}$, называемый *произведением* α и x. Предполагается, что для этих двух операций выполнены *аксиомы линейного пространства*:

1) $x + y = y + x$ — *коммутативность* операции сложения;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ — *ассоциативность* операции сложения;

3) существует единственный элемент $0 \in \mathbb{X}$ такой, что $x+0 = x$ для любого элемента $x \in \mathbb{X}$; элемент 0 называют *нулевым элементом* пространства $\mathbb{X}$;

4) для любого элемента $x \in \mathbb{X}$ существует единственный элемент x' такой, что $x + x' = 0$; элемент x' называют *противоположным* элементу x;

5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ — *дистрибутивность* по сложению векторов;

6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ — *дистрибутивность* по сложению скаляров;

7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ — *ассоциативность* по умножению скаляров;

8) $1x = x$ — *нейтральность* единичного скаляра.

Если в определении линейного пространства взять комплексные числа α, β, то множество $\mathbb{X}$ называется *комплексным линейным пространством.* Приведем некоторые важные примеры линейных пространств.

1. Вещественное пространство $\mathbb{R}^n$ — множество всех упорядоченных наборов вещественных чисел вида

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где $n \geqslant 1$ — фиксированное целое число. Линейные операции на пространстве $\mathbb{R}^n$ вводятся следующим образом. По определению, для любого вещественного числа α и любого $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, по определению,

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Нулевой элемент пространства $\mathbb{R}^n$ есть вектор, все компоненты которого равны нулю:

$$0 = (0, 0, \ldots, 0).$$

Противоположный к x элемент определяется следующим образом:

$$x' = -x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n).$$

2. Комплексное линейное пространство $\mathbb{C}^n$ — это множество всех упорядоченных наборов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ комплексных чисел, где $n \geqslant 1$ — фиксированное целое число. Линейные операции, нулевой и противоположный элементы в этом пространстве вводятся так же, как в $\mathbb{R}^n$.

Заметим, что $\mathbb{C}^1$ и $\mathbb{R}^1$ одновременно являются и линейными пространствами и множествами всех скаляров. В дальнейшем будем обозначать $\mathbb{C}^1$ через C, а $\mathbb{R}^1$ через R.

3. Множество всех векторов (направленных отрезков) трехмерного евклидова пространства с введенными обычным образом операциями умножения вектора на число и сложения векторов — вещественное линейное пространство. В дальнейшем будем обозначать это пространство через $\mathbb{V}_3$.

4. Множество всех матриц размера $m \times n$ с введенными на нем операциями умножения матрицы на число и сложения двух матриц естественно интерпретировать как пространство $\mathbb{C}^{mn}$ векторов длины $m \cdot n$. В этом случае векторы записываются в виде прямоугольных таблиц, но с точки зрения операций умножения вектора на число и сложения векторов это не имеет значения.

5. Множество $\mathbb{Q}_n$ всех полиномов степени не выше n, где $n \geqslant 0$ — фиксированное целое число, а линейные операции определены обычным образом, является комплексным линейным пространством.

6. Вещественное линейное пространство $\mathbb{C}[a,b]$ состоит из всех непрерывных на отрезке $[a,b]$ вещественных функций с обычными операциями сложения функций и умножения функции на вещественное число.

Упражнение 1. Пусть $\mathbb{X}$ — множество всех векторов линейного пространства $\mathbb{R}^n$ с положительными элементами, т. е.

$$\mathbb{X} = \{x : x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_i > 0,\ i = 1,2,\ldots,n\}.$$

Операции сложения векторов и умножения вектора на число определяются так же, как и в пространстве $\mathbb{R}^n$. Выяснить, является ли множество $\mathbb{X}$ вещественным линейным пространством.

Решение. Множество $\mathbb{X}$ с данными операциями сложения векторов и умножения вектора на число не является линейным пространством, так как в результате умножения вектора из $\mathbb{X}$ на вещественное число можно получить вектор, не принадлежащий $\mathbb{X}$. Действительно, если выбрать

$$\alpha = -1 \in \mathbb{R}, \quad x = (1,1,\ldots,1) \in \mathbb{X},$$

то вектор

$$\alpha x = (-1,-1,\ldots,-1)$$

не принадлежит $\mathbb{X}$.

Упражнение 2. Проверить, является ли вещественным линейным пространством множество $\mathbb{X}$, которое было введено в предыдущем упражнении, если операции сложения векторов и умножения вектора на число определяются следующим образом:

$$x + y = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n), \quad \alpha x = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha), \quad \alpha \in R.$$

Решение. Операции сложения векторов и умножения вектора на число определены корректно, и не выводят за пределы множества $\mathbb{X}$, так как произведение положительных чисел положительно и положительна (по определению) любая вещественная степень положительного числа. Проверим теперь аксиомы 1)–8) вещественного линейного пространства.

1. Сложение векторов коммутативно, т. к. умножение вещественных чисел обладает этим свойством. Действительно, коммутативность операции сложения векторов следует из цепочки равенств:

$$x + y = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n) = (y_1x_1, y_2x_2, \ldots, y_nx_n) = y + x$$

для любых $x, y \in \mathbb{X}$.

2. Аналогично проверяется ассоциативность операции сложения векторов. Для любых x, y, $z \in \mathbb{X}$ имеем

$$(x + y) + z = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n) + z =$$

$$= (x_1y_1z_1, x_2y_2z_2, \ldots, x_ny_nz_n) =$$

$$= x + (y_1z_1, y_2z_2, \ldots, y_nz_n) = x + (y + z).$$

3. В качестве нулевого элемента нужно взять вектор

$$0 = (1{,}1, \ldots{,}1).$$

Действительно,

$$x + 0 = (x_1 \cdot 1, x_2 \cdot 1, \ldots, x_n \cdot 1) = x$$

для любого вектора $x \in \mathbb{X}$.

4. Для любого вектора $x = (x_1{,}x_2, \ldots{,}x_n)$ противоположным элементом будет вектор $x' = (x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_n^{-1})$, так как

$$x + y = (x_1x_1^{-1}, x_2x_2^{-1}, \ldots, x_nx_n^{-1}) = (1{,}1, \ldots{,}1) = 0.$$

Важно отметить, что противоположный элемент существует и определяется однозначно для любого $x \in \mathbb{X}$, так как по условию задачи все компоненты вектора x положительны.

5. Для любых $x{,}y \in \mathbb{X}$ и любого $\alpha \in R$ имеем

$$\alpha(x + y) = \alpha(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n) =$$

$$= ((x_1y_1)^\alpha, (x_2y_2)^\alpha, \ldots, (x_ny_n)^\alpha) = (x_1^\alpha y_1^\alpha, x_2^\alpha y_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha y_n^\alpha) =$$

$$= (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha) + (y_1^\alpha, y_2^\alpha, \ldots, y_n^\alpha) = \alpha x + \alpha y.$$

6. Для любого $x \in \mathbb{X}$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеем

$$(\alpha + \beta)x = (x_1^{\alpha+\beta}, x_2^{\alpha+\beta}, \ldots, x_n^{\alpha+\beta}) = (x_1^\alpha x_1^\beta, x_2^\alpha x_2^\beta, \ldots, x_n^\alpha x_n^\beta) =$$

$$= (x_1^{\alpha}, x_2^{\alpha}, \ldots, x_n^{\alpha}) + (x_1^{\beta}, x_2^{\beta}, \ldots, x_n^{\beta}) = \alpha x + \beta x.$$

7. Для любого $x \in \mathbb{X}$ и любых $\alpha, \beta \in R$ имеем

$$(\alpha\beta)x = (x_1^{\alpha\beta}, x_2^{\alpha\beta}, \ldots, x_n^{\alpha\beta}) =$$

$$= ((x_1^{\beta})^{\alpha}, (x_2^{\beta})^{\alpha}, \ldots, (x_n^{\beta})^{\alpha}) = \alpha(x_1^{\beta}, x_2^{\beta}, \ldots, x_n^{\beta}) = \alpha(\beta x).$$

8. Наконец, для любого $x \in \mathbb{X}$ имеем $1 \cdot x = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1) = x$.

Следовательно, данное множество $\mathbb{X}$ с определенными операциями сложения векторов и умножения вектора на вещественное число является вещественным линейным пространством.

Упражнение 3. Выяснить, является ли множество всех полиномов из пространства $\mathbb{Q}_n$ линейным пространством, если операция сложения полиномов задается так же, как и в пространстве $\mathbb{Q}_n$, но для $\alpha \in C$ и

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{Q}_n$$

операция умножения на комплексное число определяется следующим образом:

$$\alpha f(x) = \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \alpha a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + \alpha a_0.$$

Решение. Для любых полиномов f и g степени не выше n и любого $\alpha \in C$ сумма $f+g$ и произведение αf тоже являются полиномами степени не выше n. Нетрудно проверить, что аксиомы 1)–7) комплексного линейного пространства выполняются для данных операций. Однако, если у многочлена f старший коэффициент a_n отличен от нуля, то многочлен

$$(1 \cdot f)(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_n$$

не равен многочлену $f(x)$ и, следовательно, условие 8) не выполняется. Таким образом, данное множество с введенными операциями сложения и умножения на число не является линейным пространством.

Упражнение 4. Пусть задано множество $\mathbb{X}$ всех прямоугольных матриц из пространства $\mathbb{C}^{mn}$, на котором операция сложения вводится следующим образом: для любых матриц $A, B \in \mathbb{X}$ с элементами a_{ij} и b_{ij} соответственно их сумма $C = A + B$ есть матрица того же размера с элементами $c_{ij} = -a_{ij} - b_{ij}$, где $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Операция произведения матрицы на вещественное число определяется так же, как и в пространстве $\mathbb{C}^{mn}$. Выяснить, является ли множество $\mathbb{X}$ линейным пространством.

Решение. Легко видеть, что обе операции определены корректно и не выводят за пределы $\mathbb{X}$. Проверим аксиомы комплексного линейного пространства.

1. Операция сложения коммутативна. Действительно, так как

$$-a_{ij} - b_{ij} = -b_{ij} - a_{ij}, \quad i = 1,2,\ldots,m, \ j = 1,2,\ldots,n,$$

то

$$A + B = B + A \quad \text{для любых} \quad A, B \in \mathbb{X}.$$

2. Проверим ассоциативность операции сложения. Пусть A, B, и C — три произвольные матрицы из множества $\mathbb{X}$ с элементами a_{ij}, b_{ij} и c_{ij} соответственно. Тогда матрица $(A + B) + C$ состоит из элементов

$$-(-a_{ij} - b_{ij}) - c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} - c_{ij}, \quad i = 1,2,\ldots,m, \ j = 1,2,\ldots,n,$$

а матрица $A + (B + C)$ — из элементов

$$-a_{ij} - (-b_{ij} - c_{ij}) = -a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}, \quad i = 1,2,\ldots,m, \ j = 1,2,\ldots,n.$$

Отсюда следует, что равенство

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

не может выполняться для всех $A, B, C \in \mathbb{X}$. Так, если A и B — нулевые матрицы, а все элементы матрицы C равны единице, то любой элемент матрицы $(A + B) + C$ равен -1, а произвольный элемент матрицы $A + (B + C)$ равен 1. Таким образом, операция сложения не ассоциативна, множество $\mathbb{X}$ с данными операциями не является линейным пространством.

Упражнение 5. Дано множество $\mathbb{X}$ всех элементов пространства $\mathbb{C}^n$. Операция сложения векторов определена так же, как в $\mathbb{C}^n$, а операция умножения вектора на комплексное число — следующим образом:

$$\alpha x = (\overline{\alpha} x_1, \overline{\alpha} x_2, \ldots, \overline{\alpha} x_n), \quad \alpha \in C, \ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{X},$$

где $\bar{\alpha}$ есть число, комплексно сопряженное к α. Определить, является ли множество $\mathbb{X}$ комплексным линейным пространством.

Решение. Так как операция сложения векторов определена так же, как и в линейном пространстве $\mathbb{C}^n$, то, очевидно, выполняются аксиомы 1)–4). Проверка аксиом 5), 6), 8) не составляет труда. Проверим аксиому 7). С одной стороны,

$$(\alpha\beta)x = (\overline{\alpha\beta} x_1, \ldots, \overline{\alpha\beta} x_n) = (\overline{\alpha}\overline{\beta} x_1, \ldots, \overline{\alpha}\overline{\beta} x_n).$$

С другой стороны

$$\alpha(\beta x) = \alpha(\overline{\beta}x_1, \ldots, \overline{\beta}x_n) = (\overline{\alpha}\overline{\beta}x_1, \ldots, \overline{\alpha}\overline{\beta}x_n).$$

Так как правые части равенств совпадают, то равны и левые части. Значит условие 7) выполняется и, следовательно, данное множество $\mathbb{X}$ с введенными операциями является комплексным линейным пространством.

Упражнение 6. Образует ли множество $\mathbb{X}$ всех векторов из $\mathbb{R}^n$ линейное пространство, если операция сложения векторов определяется равенством

$$x + y = (0, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \quad x,\, y \in \mathbb{X},$$

а операция произведения вектора на вещественное число задается так же, как в пространстве $\mathbb{R}^n$? Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие аксиомы линейного пространства нарушаются.

Ответ. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 3) и 6).

Упражнение 7. Образует ли множество $\mathbb{X}$ всех векторов из $\mathbb{R}^n$ линейное пространство, если операция произведения вектора на вещественное число определяется следующим образом:

$$\alpha x = (|\alpha|x_1, |\alpha|x_2, \ldots, |\alpha|x_n), \quad \alpha \in R,\ x \in \mathbb{X},$$

а операция сложения векторов задается так же, как в пространстве $\mathbb{R}^n$? Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие аксиомы линейного пространства нарушаются.

Ответ. Не является линейным пространством, так как не выполняется аксиома 6).

Упражнение 8. Образует ли множество $\mathbb{X}$ всех векторов из $\mathbb{R}^n$ линейное пространство, если операция сложения векторов определяется равенством

$$x + y = (x_1 + 2y_1, x_2 + 2y_2, \ldots, x_n + 2y_n), \quad x,\, y \in \mathbb{X},$$

а операция произведения вектора на вещественное число задается так же, как в пространстве $\mathbb{R}^n$? Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие аксиомы линейного пространства нарушаются.

Ответ. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 1), 2) и 6).

Упражнение 9. Образует ли множество $\mathbb{X}$ всех векторов из $\mathbb{R}^n$ линейное пространство, если операция сложения векторов определяется равенством

$$x + y = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n), \quad x, y \in \mathbb{X},$$

а операция произведения вектора на вещественное число задается так же, как в пространстве $\mathbb{R}^n$?

Ответ. Не является линейным пространством, так как противоположный вектор $x' = (1/x_1, \ldots, 1/x_n)$ не определен, например, для элемента $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{X}$.

Упражнение 10. Выяснить, является ли множество $\mathbb{X}$ всех невырожденных квадратных матриц из пространства $\mathbb{C}^{nn}$ комплексным линейным пространством, если операция сложения матриц определяется равенством

$$A + B = AB, \quad A, B \in \mathbb{X},$$

а операция умножения матрицы на комплексное число вводится также, как в пространстве $\mathbb{C}^{nn}$.

Ответ. Не является линейным пространством, так как операция умножения матриц не коммутативна, и аксиома 1) не выполняется.

Упражнение 11. Выяснить, является ли множество всех полиномов из пространства $\mathbb{Q}_n$ линейным пространством, если операция сложения полиномов определяется так же, как и в пространстве $\mathbb{Q}_n$, а операция умножения на комплексное число вводится иначе:

$$\alpha f(x) = (\alpha + a_n)x^n + (\alpha + a_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (\alpha + a_0),$$

здесь $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ — произвольный многочлен из пространства $\mathbb{Q}_n$, $\alpha \in C$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие аксиомы линейного пространства нарушаются.

Ответ. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 5), 6), 7) и 8).

Упражнение 12. Выяснить, является ли множество $\mathbb{X}$ всех векторов из пространства $\mathbb{C}^n$ комплексным линейным пространством, если операция сложения векторов определяется так же, как и в пространстве $\mathbb{C}^n$, а операция умножения на комплексное число вводится иначе:

$$\alpha x = (\alpha \overline{x}_1, \alpha \overline{x}_2, \ldots, \alpha \overline{x}_n), \quad \alpha \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{X}.$$

Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие аксиомы линейного пространства нарушаются.

Ответ. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 7) и 8).

Упражнение 13. Выяснить, образует ли множество $\mathbb{X}$ всех векторов (направленных отрезков) из трехмерного евклидова пространства вещественное линейное пространство, если произведение вектора на число определяется как обычно, а сумма векторов, как их векторное произведение:

$$x + y = [x,y] \quad x, y \in \mathbb{X}.$$

Ответ. Не является линейным пространством, так как $[x,y] \neq [y,x]$. Следовательно, аксиома 1) не выполняется.

Упражнение 14. Образует ли множество $\mathbb{X}$ всех векторов из $\mathbb{R}^n$ вещественное линейное пространство, если операция произведения вектора на вещественное число определяется следующим образом:

$$\alpha x = x, \quad \alpha \in R,\ x \in \mathbb{X},$$

а операция сложения векторов задается так же, как в пространстве $\mathbb{R}^n$? Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие аксиомы линейного пространства нарушаются.

Ответ. Не является линейным пространством, так как не выполняется аксиома 6).

Упражнение 15. Образует ли множество $\mathbb{X}$ всех векторов из $\mathbb{R}^n$ вещественное линейное пространство, если операция произведения вектора на вещественное число определяется следующим образом:

$$\alpha x = (e^{\alpha-1} x_1, \ldots, e^{\alpha-1} x_n), \quad \alpha \in R,\ x \in \mathbb{X},$$

а операция сложения векторов задается так же, как в пространстве $\mathbb{R}^n$?

Ответ. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 6) и 7).

Упражнение 16. Образует ли множество $\mathbb{X}$ всех векторов из $\mathbb{R}^n$ вещественное линейное пространство, если операция сложения векторов определяется следующим образом:

$$x + y = (x_n + y_n, \ldots, x_1 + y_1), \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \, y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{X},$$

а операция произведения вектора на вещественное число задается так же, как в пространстве $\mathbb{R}^n$? Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие аксиомы линейного пространства нарушаются.

Ответ. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 2), 3), 6) при $n > 1$.

Упражнение 17. Образует ли множество $\mathbb{X}$ всех векторов из $\mathbb{R}^n$ вещественное линейное пространство, если операция сложения векторов определяется следующим образом:

$$x + y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n), \quad x, y \in \mathbb{X},$$

а операция произведения вектора на вещественное число задается так же, как в пространстве $\mathbb{R}^n$? Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие аксиомы линейного пространства нарушаются.

Ответ. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 1), 2), 6).

Упражнение 18. Выяснить, является ли множество $\mathbb{X}$ всех квадратных диагональных матриц из $\mathbb{C}^{nn}$ комплексным линейным пространством, если операция сложения матриц введена следующим образом:

$$A + B = AB, \quad A, B \in \mathbb{X},$$

а операция умножения матрицы на комплексное число определена также, как в пространстве $\mathbb{C}^{nn}$.

Ответ. Диагональные матрицы перестановочны, однако множество $\mathbb{X}$ не является линейным пространством, так как вырожденные матрицы необратимы. Следовательно, аксиома 4) не выполняется.

Упражнение 19. Выяснить, является ли множество $\mathbb{X}$ всех полиномов из пространства $\mathbb{Q}_n$ комплексным линейным пространством, если операция сложения полиномов определена так же, как и в пространстве $\mathbb{Q}_n$, а операция умножения на комплексное число определена иначе:

$$\alpha f(x) = \alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha a_1 x.$$

здесь $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — произвольный многочлен из множества $\mathbb{X}$, $\alpha \in C$. Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие аксиомы линейного пространства нарушаются.

Ответ. Не является линейным пространством, так как не выполняется аксиома 8).

Упражнение 20. Выяснить, является ли множество $\mathbb{X}$ всех полиномов из пространства $\mathbb{Q}_n$ комплексным линейным пространством, если операция сложения полиномов определена так же, как и в пространстве $\mathbb{Q}_n$, а операция умножения на комплексное число определена иначе:

$$\alpha f(x) = \alpha a_0 x^n + \alpha a_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha a_{n-1} x + \alpha a_n,$$

здесь $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — произвольный многочлен из множества $\mathbb{X}$, $\alpha \in C$.

Ответ. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 7), 8).

Упражнение 21. Выяснить, является ли множество $\mathbb{X}$ всех векторов из пространства $\mathbb{C}^n$ линейным пространством, если операция сложения векторов определяется так же, как и в пространстве $\mathbb{C}^n$, а операция умножения на комплексное число вводится иначе:

$$\alpha x = (\overline{\alpha} \cdot \overline{x}_1, \overline{\alpha} \cdot \overline{x}_2, \ldots, \overline{\alpha} \cdot \overline{x}_n), \quad \alpha \in C,\ x \in \mathbb{X}.$$

Если данное множество не является линейным пространством, то указать, какие аксиомы линейного пространства нарушаются.

Ответ. Не является линейным пространством, так как не выполняются аксиомы 7), 8).

5.2 Линейная зависимость векторов, линейно независимые системы векторов (занятие 17)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.
Видео:
https://disk.yandex.ru/i/-UaDl-bzeSY_dQ
https://disk.yandex.ru/i/SDKua1iwrGHh0A
Презентации:
https://disk.yandex.ru/i/j163lPlRxWX3Wg
https://disk.yandex.ru/i/BnXc7lAMcfbNqw
Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 6, §3, 4

Векторы a, b из линейного пространства $\mathbb{X}$ будем называть *коллинеарными* (*пропорциональными*, *линейно зависимыми*), если существуют числа α, β, не равные одновременно нулю, такие, что

$$\alpha a + \beta b = 0.$$

Понятно, что если два вектора линейно зависимы, то они различаются лишь числовым множителем. Действительно, если $\alpha \neq 0$, то $a = \dfrac{-\beta}{\alpha} b$, если $\beta \neq 0$, то $b = \dfrac{-\alpha}{\beta} a$, если и α, и β отличны от нуля, то имеют место оба эти равенства.

Обобщая понятие линейной зависимости двух векторов, будем говорить, что система векторов из $\mathbb{X}$,

$$\{a^i\}_{i=1}^m = \{a^1, a^2, \dots, a^m\},$$

где, $m \geqslant 1$, *линейно зависима*, если существуют числа x_1, $x_2, \dots$, x_m, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_m a^m = 0.$$

Определению линейной зависимости векторов удобно придать матричную формулировку. Пусть

$$\mathcal{A}_m = \{a^1, a^2, \dots, a^m\}$$

есть упорядоченный набор векторов из пространства $\mathbb{X}$; для $x \in \mathbb{C}^m$ положим

$$\mathcal{A}_m x = x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_m a^m.$$

Можно сказать тогда, что векторы a^1, a^2,…, a^m *линейно зависимы*, если существует ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^m$ такой, что

$$\mathcal{A}_m x = 0. \tag{5.1}$$

Система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m = \{a^1, a^2, \ldots, a^m\}$, $m \geqslant 1$, линейного пространства $\mathbb{X}$ называется *линейно независимой*, если из равенства

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \ldots + x_m a^m = 0, \quad x_i \in C, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.2}$$

следует, что $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Определению линейной независимости векторов удобно придать матричную формулировку. Как обычно, обозначим

$$\mathcal{A}_m = \{a^1, a^2, \ldots, a^m\}$$

упорядоченный набор векторов из пространства $\mathbb{X}$ и для $x \in \mathbb{C}^m$ положим

$$\mathcal{A}_m x = x_1 a^1 + x_2 a^2 + \ldots + x_m a^m.$$

Используя эти обозначения, можно сказать, что если из равенства

$$\mathcal{A}_m x = 0$$

следует, что $x = 0$, то система векторов $\mathcal{A}_m$ *линейно независима.*

Будем говорить, что вектор $a \in \mathbb{X}$ *линейно выражается* через векторы

$$b^1, b^2, \ldots, b^p, \quad p \geqslant 1,$$

или является *линейной комбинацией* этих векторов, если существует вектор $x \in \mathbb{C}^p$ такой, что

$$a = x_1 b^1 + x_2 b^2 + \cdots + x_p b^p,$$

в матричной записи:

$$a = \mathcal{B}_p x.$$

Говорят, что система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ *линейно выражается* через систему векторов $\{b^i\}_{i=1}^p$, если существует матрица $X(p,m)$ такая, что

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X(p, m). \tag{5.3}$$

В более подробной записи это означает, что

$$a^k = \sum_{j=1}^{p} x_{j,k} b^j, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

а именно, k-тый элемент системы $\mathcal{A}_m$ есть линейная комбинация элементов системы $\mathcal{B}_p$ с коэффициентами, образующими k-тый столбец матрицы $X(p, m)$.

Системы векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ и $\{b^i\}_{i=1}^p$ называются *эквивалентными*, если существуют матрицы $X(p,m)$, $Y(m, p)$ такие, что

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X(p,m), \quad \mathcal{B}_p = \mathcal{A}_m Y(m, p),$$

т. е. каждый вектор одной системы линейно выражается через векторы другой системы.

Упражнение 1. Найти линейную комбинацию $x_1 a^1 + x_2 a^2 + x_3 a^3 + x_4 a^4$ четырех векторов из пространства $\mathbb{R}^3$,

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

сначала с коэффициентами $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -4$, $x_4 = 0$, а затем с коэффициентами $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = -2$. Что можно сказать о системе векторов a^1, a^2, a^3, a^4?

Решение. Первая линейная комбинация равна нулю:

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + x_3 a^3 + x_4 a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{5.5}$$

Не все коэффициенты в этой линейной комбинации равны нулю, следовательно, система векторов a^1, a^2, a^3, a^4 линейно зависима. Для этого вывода достаточно было бы одного ненулевого коэффициента.

Вторая линейная комбинация, при $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = -2$, также равна нулю:

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + x_3 a^3 + x_4 a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{5.6}$$

На самом деле, если система векторов линейно зависима, существует бесконечно много ненулевых наборов коэффициентов, линейные комбинации данных векторов с которыми равны нулю.

Упражнение 2. Запишите равенства (5.5), (5.6) в матричном виде (5.1).

Решение. Используя векторы a^1, a^2, a^3, a^4 и $x = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ из предыдущего упражнения, равенства (5.5), (5.6) можно записать в матричном виде:

$$\mathcal{A}_4 x = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\mathcal{A}_4 x = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Вектор x в этих равенствах не равен нулю, значит система векторов

$$\mathcal{A}_4 = \{a^1, a^2, a^3, a^4\},$$

определенная в (5.4), линейно зависима.

Упражнение 3. Верно ли что векторы a^3 и a^4 системы (5.4) линейно выражаются через a^1 и a^2? Запишите соответствующее равенство в матричном виде (5.3).

Решение. Векторы a^3 и a^4 системы (5.4) линейно выражаются через векторы a^1 и a^2:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эти равенства в матричной записи имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Объединим их вместе, получим матричный вид (5.3):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Введем соответствующие обозначения. Пусть

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_2 X.$$

Упражнение 4. Найти линейную комбинацию $3a^1 - 2a^2 + 7ax^3$ векторов

$$a^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

пространства $\mathbb{R}^4$. Что можно сказать о системе векторов a^1, a^2, a^3?

Ответ. Линейная комбинация равна нулю. Система векторов a^1, a^2, a^3 линейно зависима.

Упражнение 5. Для многочленов

$$f^1(t) = 1 - t^2, \quad f^2(t) = 1 + t^3, \quad f^3(t) = t - t^3$$

найти линейную комбинацию $f^4 = 5f^1 + f^2 - 4f^3$. Что можно сказать о линейной зависимости системы многочленов f^1, f^2, f^3, f^4?

Ответ. $f^4(t) = 6 - 4t - 5t^2 + 5t^3$. Система многочленов f^1, f^2, f^3, f^4 линейно зависима: $5f^1 + f^2 - 4f^3 - f^4 = 0$. Вообще, для того, чтобы система векторов была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы она содержала вектор, который линейно выражается через все остальные.

Упражнение 6. В пространстве $\mathbb{R}^3$ исследовать на линейную зависимость следующую систему векторов:

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для того, чтобы проверить линейную зависимость данной системы векторов используем то, что определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы линейно зависимы. Построим матрицу, столбцами которой являются векторы a^1, a^2, и a^3:

$$\mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы $\mathcal{A}_3$ равен нулю. Следовательно, система a^1, a^2, a^3 линейно зависима.

Упражнение 7. Исследовать на линейную зависимость в пространстве $\mathbb{R}^3$ следующие системы векторов:

$a)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix};$

$b)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Указание. a) Линейно независимая система; b) линейно зависимая система. Определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда ее столбцы линейно зависимы. Следовательно, система из трех векторов пространства $\mathbb{R}^3$ линейно независима тогда и только тогда, когда определитель матрицы, столбцами которой являются данные векторы, отличен от нуля.

Упражнение 8. Исследовать на линейную зависимость в пространстве $\mathbb{R}^3$ следующие системы векторов:

$$a)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ a^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},\ a^3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix};$$

$$b)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. a) Линейно зависимая система; b) линейно независимая система.

Упражнение 9. Доказать, что матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

линейно независимы в пространстве $\mathbb{R}^{2\cdot 3}$ матриц размера 2×3.

Решение. Нулевым элементом в пространстве $\mathbb{R}^{2\cdot 3}$ является нулевая матрица размера 2×3. Составим линейную комбинацию данных матриц и приравняем ее нулевому элементу:

$$x_1 A + x_2 B + x_3 C + x_4 D + x_5 E + x_6 F = 0,$$

или более подробно,

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ x_4 \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Левая и правая части данного равенства есть матрицы размера 2×3. Две матрицы равны тогда и только тогда, когда равны все соответствующие друг другу элементы матриц. Таким образом, имеем систему однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 0, \\ \quad - x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 2x_5 + x_6 = 0, \\ \quad\quad 2x_3 + 3x_4 - x_5 + 2x_6 = 0, \\ \quad\quad\quad 2x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 0, \\ \quad\quad\quad\quad 2x_5 + 3x_6 = 0, \\ \quad\quad\quad\quad\quad x_6 = 0. \end{cases}$$

Определитель матрицы этой системы не равен нулю, следовательно, система крамеровская и имеет единственное нулевое решение. Это, в свою очередь, означает, что система векторов $\{A, B, C, D, E, F\}$ в линейном пространстве $\mathbb{R}^{2\cdot 3}$ является линейно независимой.

Упражнение 10. Проверить, является ли система матриц $\{A, B, C, D\}$ линейно независимой в пространстве $\mathbb{R}^{2\cdot 2}$ матриц второго порядка:

$a)$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

$b)$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Указание. $a)$ Линейно независимая система; $b)$ линейно зависимая система. Использовать то, что однородная система линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю.

Упражнение 11. Проверить, является ли система матриц $\{A^1, A^2, A^3, A^4\}$ линейно независимой в пространстве $\mathbb{R}^{2\cdot 2}$ матриц второго порядка:

$a)$ $A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

$b)$ $A^1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Ответ. $a)$ Линейно независимая система; $b)$ линейно зависимая система.

Упражнение 12. Доказать, что $p^1(z) = 1$, $p^2(z) = z - 1$, $p^3(z) = (z+3)^2$ являются линейно независимыми полиномами.

Решение. Составим линейную комбинацию трех данных полиномов и приравняем ее нулю:

$$a_1 \cdot p^1(z) + a_2 \cdot p^2(z) + a_3 \cdot p^3(z) = 0.$$

Преобразуя это равенство, получаем

$$(a_1 - a_2 + 9a_3) + (a_2 + 6a_3)z + a_3 z^2 = 0.$$

Полином равен нулю тогда и только тогда, когда все его коэффициенты нули. Таким образом, приходим к следующей системе однородных уравнений:

$$\begin{cases} a_1 - a_2 + 9a_3 = 0, \\ \qquad a_2 + 6a_3 = 0, \\ \qquad\qquad a_3 = 0. \end{cases}$$

Определитель данной системы не равен нулю, значит, система крамеровская и имеет единственное нулевое решение $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Следовательно, система полиномов $\{p^1(z), p^2(z), p^3(z)\}$ является линейно независимой.

Упражнение 13. Проверить, будут ли линейно независимыми следующие системы полиномов:
a) $p^1(z) = z^2 + 4z,\ p^2(z) = 2z^2 - z + 4,\ p^3(z) = 4z^2 - 4z + 1;$
b) $p^1(z) = 4z^2 - 3z - 1,\ p^2(z) = 4z - 3,\ p^3(z) = 4z^2 + 9z - 10.$

Указание. *a*) Линейно независимая система; *b*) линейно зависимая система. Использовать два факта. Во-первых, то, что полином равен нулю тогда и только тогда, когда все его коэффициенты нули. Во-вторых то, что однородная система линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю.

Упражнение 14. Проверить, будут ли линейно независимыми следующие системы полиномов:
a) $p^1(z) = 4z^2 - 3z + 2,\ p^2(z) = -3z^2 + 2z + 3,\ p^3(z) = 7z^2 - 5z - 1;$
b) $p^1(z) = 3z - 4,\ p^2(z) = 3z^2 - 2z - 3,\ p^3(z) = z^2 + 3z + 3.$

Ответ. *a*) Линейно зависимая система; *b*) линейно независимая система.

Упражнение 15. Пусть a, b, c, d — линейно зависимая система. Доказать, что тогда система векторов

$$d, \quad 2(c+d), \quad 3(b+c+d), \quad 4(a+b+c+d)$$

также линейно зависима.

Указание. Справедливо следующее утверждение. Пусть система векторов $\mathcal{A}_m$ линейно зависима. Пусть система векторов $\mathcal{B}_m$ линейно выражается через систему $\mathcal{A}_m$,

$$\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m X,$$

где матрица X невырождена. Тогда система векторов $\mathcal{B}_m$ линейно зависима.

Следовательно, для того, чтобы выполнить упражнение, надо выписать матрицу X, преобразующую исходную систему

$$\mathcal{A}_4 = \{a, b, c, d\}$$

к виду

$$\mathcal{B}_4 = \{d, 2(c + d), 3(b + c + d), 4(a + b + c + d)\},$$

т. е. такую, что $\mathcal{B}_4 = \mathcal{A}_4 X$. Затем проверить, что матрица X невырождена.

Упражнение 16. Доказать, что векторы a, b, c, d линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы векторы

$$a + b + c, \quad a + b + d, \quad a + c + d, \quad b + c + d.$$

Указание. Выписать матрицу X, преобразующую исходную систему $\mathcal{A}_4$ к указанному виду, $\mathcal{B}_4 = \mathcal{A}_4 X$. Проверить, что матрица X невырождена. Воспользоваться утверждением из указания к предыдущему упражнению. Показать, что обратное преобразование осуществляет матрица X^{-1}, т. е. $\mathcal{A}_4 = \mathcal{B}_4 X^{-1}$.

Упражнение 17. Пусть $\mathcal{A}_3 = \{a,b,c\}$ — линейно независимая система векторов. Будут ли линейно независимы следующие системы векторов:
$a)$ $\mathcal{B}_3 = \{a, a + b, a + b + c\}$,
$b)$ $\mathcal{B}_3 = \{a + b, b + c, c + a\}$,
$c)$ $\mathcal{B}_3 = \{a - b, b - c, c - a\}$?

Указание. Справедлива следующая теорема. Пусть $\{a^k\}_{k=1}^m$ — линейно независимые векторы. Пусть система векторов $\{b^k\}_{k=1}^m$ линейно выражается через систему векторов $\{a^k\}_{k=1}^m$, т. е. существует квадратная матрица X порядка m такая, что $\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m X$. Для того, чтобы система векторов $\{b^k\}_{k=1}^m$

была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы матрица X была невырожденной.

Для выполнения упражнения надо воспользоваться этим критерием линейной независимости системы $\mathcal{B}_3$: построить такую матрицу X, что $\mathcal{B}_3 = \mathcal{A}_3 X$, и проверить вырождена ли эта матрица.

Ответ. *a*) Да, *b*) да, **c)** нет.

Упражнение 18. Найти все значения λ, при которых:
a) из линейной независимости системы векторов $\mathcal{A}_2 = \{a^1,a^2\}$ следует линейная независимость системы $\mathcal{B}_2 = \{\lambda a^1 + a^2, a^1 + \lambda a^2\}$,
b) из линейной независимости системы векторов $\mathcal{A}_m = \{a^k\}_{k=1}^m$ следует линейная независимость системы

$$\mathcal{B}_m = \{a^1 + a^2, a^2 + a^3, \ldots, a^{m-1} + a^m, a^m + \lambda a^1\}?$$

Указание. *a*) $\lambda \neq \pm 1$, *b*) $\lambda \neq (-1)^{-m}$. Воспользоваться теоремой, сформулированной в указании к упражнению 17: построить матрицу X и найти такие λ, что $\det X \neq 0$.

Упражнение 19. Доказать, что в пространстве многочленов система

$$\mathcal{B}_{m+1} = \{a_{0,0}, a_{1,0} + a_{1,1}z, \ldots, a_{m,0} + a_{m,1}z + \cdots + a_{m,m}z^m\} \tag{5.7}$$

линейно независима, если $a_{k,k} \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

Указание. Воспользоваться теоремой, сформулированной в указании к упражнению 17: доказать невырожденность такой матрицы X, что

$$\mathcal{B}_{m+1} = \mathcal{A}_{m+1} X,$$

где система векторов $\mathcal{B}_{m+1}$ определена в (5.7),

$$\mathcal{A}_{m+1} = \{1, z, \ldots, z^m\},$$

при условии, что $a_{k,k} \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

Упражнение 20. Известно, что векторы a^1, a^2, a^3 некомпланарны. Выяснить компланарны ли векторы b^1, b^2, b^3 в пространстве $\mathbb{V}^3$:
a) $b^1 = 2a^1 - a^2 - a^3$, $b^2 = -a^1 + 2a^2 - a^3$, $b^3 = -a^1 - a^2 + 2a^3$;
b) $b^1 = a^1 + a^2 + a^3$, $b^2 = a^2 + a^3$, $b^3 = -a^1 + a^3$;

$c)$ $b^1 = a^3$, $b^2 = a^1 - a^2 - a^3$, $b^3 = a^1 - a^2 + a^3$.

Указание. $a)$ Компланарны, $b)$ некомпланарны, $c)$ компланарны. Воспользоваться теоремой, сформулированной в указании к упражнению 17. Записать выражения векторов $\mathcal{B}_3 = \{b^i\}_{i=1}^3$ через векторы $\mathcal{A}_3 = \{a^i\}_{i=1}^3$ в матричном виде: $\mathcal{B}_3 = \mathcal{A}_3 X$. Выяснить, вырождена ли матрица X.

5.3 Конечномерные пространства, базисы (занятие 18)

Перед решением задач полезно ознакомиться с теорией.

Видео: https://disk.yandex.ru/i/3wekGQ_62NO1gA

Презентация: https://disk.yandex.ru/i/ZfwU-eO-Am584g

Учебник: https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 6, §6

Линейное пространство $\mathbb{X}$ называется *конечномерным*, если существуют векторы $\mathcal{E}_n = \{e^1, e^2, \dots, e^n\}$, образующие линейно независимую систему в пространстве $\mathbb{X}$, и такие, что любой вектор $x \in \mathbb{X}$ представим в виде линейной комбинации

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k = \mathcal{E}_n \xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^n.$$

Говорят в этом случае, что векторы $\{e^k\}_{k=1}^n$ образуют *базис* пространства $\mathbb{X}$. Число n называют *размерностью* пространства $\mathbb{X}$. Линейное пространство $\mathbb{X}$ размерности n будем обозначать через $\mathbb{X}_n$. Коэффициенты разложения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ называют *координатами* вектора x в базисе $\{e^k\}_{k=1}^n$.

Если пространство не является конечномерным, т. е. в нем нет базиса, состоящего из конечного числа векторов, его называют *бесконечномерным*.

В любом конечномерном пространстве $\mathbb{X}_n$ существует сколько угодно базисов. Любые n линейно независимых векторов образуют базис. Если $\mathcal{E}_n$ — базис, то система векторов

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{E}_n T,$$

где T — произвольная невырожденная матрица, также является базисом. Матрицу T называют *матрицей перехода* от базиса $\mathcal{E}_n$ к базису $\mathcal{F}_n$. Если известны координаты ξ некоторого вектора $x \in \mathbb{X}_n$ в базисе $\mathcal{E}_n$, и задана матрица перехода T к базису $\mathcal{F}_n$, то координаты η этого же вектора x в базисе $\mathcal{F}_n$ вычисляются по формуле

$$\eta = T^{-1}\xi.$$

Приведем примеры некоторых важных пространств и базисов в них.

1. Любые три некомпланарных вектора e^1, e^2, e^3 пространства $\mathbb{V}_3$ образуют базис. Пространство $\mathbb{V}_3$ трехмерно. Любой вектор $x \in \mathbb{V}_3$ представим в виде

$$x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3,$$

где x_1, x_2, x_3 — координаты вектора x в базисе $\{e_k\}_{k=1}^3$. Особую роль играет *декартов* базис i^1, i^2, i^3. Координаты вектора в этом базисе есть его декартовы координаты.

2. В пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$ единичные векторы

$$i^1 = (1, 0, \ldots, 0),$$
$$i^2 = (0, 1, \ldots, 0),$$
$$\ldots$$
$$i^n = (0, 0, \ldots, 1)$$

образуют, так называемый, *естественный базис*. Размерность этих пространств равна n. Если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ (или $\mathbb{R}^n$), то

$$x = x_1 i^1 + x_2 i^2 + \cdots + x_n i^n,$$

т. е. координатами вектора x в естественном базисе $i^1, i^2, \ldots, i^n$ служат компоненты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ этого вектора.

3. *Естественным базисом* в пространстве $\mathbb{Q}_n$ всех полиномов с комплексными коэффициентами степени не выше n называют систему векторов $\{1, z, \ldots, z^n\}$, где z — комплексная переменная. Размерность пространства $\mathbb{Q}_n$ равна $n + 1$. Если

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \in \mathbb{Q}_n,$$

то, очевидно, координатами многочлена P_n в естественном базисе служат его коэффициенты a_0, a_1, …, a_n. Аналогично, в пространстве вещественных полиномов $\mathbb{P}_n$ естественный базис образует система векторов $\{1, t, \ldots, t^n\}$, где t — вещественная переменная.

4. Пространство всех полиномов бесконечномерно. Действительно, в нем линейно независима система векторов $\{1, z, \ldots, z^k\}$ при любом, сколь угодно большом, целом k.

5. Пространство $C[a,b]$ бесконечномерно, так как содержит полиномы с вещественными коэффициентами любого порядка.

Упражнение 1. Доказать, что векторы

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^4$.

Решение. В пространстве $\mathbb{R}^4$ любые четыре линейно независимых вектора образуют базис. Составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

столбцами которой являются векторы a^1, a^2, a^3, a^4. Матрица невырождена тогда и только тогда, когда ее столбцы (строки) линейно независимы. Вычислим определитель матрицы A, он равен двум. Следовательно, система векторов $\{a^k\}_{k=1}^4$ является базисом в пространстве $\mathbb{R}^4$.

Упражнение 2. Выяснить, какие из следующих систем векторов являются базисами подходящего пространства $\mathbb{R}^n$:

$$a)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$b)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$c)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Ответ. a) Нет, система линейно зависима; b) да, это базис в $\mathbb{R}^3$; c) нет, число векторов в системе меньше $n = 4$, это не базис в $\mathbb{R}^4$.

Упражнение 3. Найти разложение вектора a^4 по базису a^1, a^2, a^3, предварительно проверить, что векторы a^1, a^2, a^3 действительно образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$a)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$b)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad a^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},\quad a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$c)\quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. a) Проверим, что векторы a^1, a^2, a^3 образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^3$. Для этого составим матрицу, столбцами которой являются эти векторы, и вычислим ее определитель. Он равен трем. Матрица невырожденная, следовательно, ее столбцы образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^3$.

По определению, вектор a^4 разлагается по базису $\{a^1, a^2, a^3\}$, если существуют такие числа x_1, x_2, x_3, что имеет место равенство

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + x_3 a^3 = a^4.$$

Это равенство можно рассматривать как уравнение относительно неизвестных x_1, x_2, x_3 с векторными коэффициентами. После подстановки числовых данных в это уравнение, имеем

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы в левой части равенства умножим на соответствующие числа и сложим, получим следующую систему линейных уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Эта система Крамеровская. Найдем ее решение методом Гаусса. Для этого выпишем расширенную матрицу и выполним необходимые преобразования:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Применяя обратный ход метода Гаусса, находим:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = -2.$$

Итак, вектор a^4 может быть представлен в следующем виде:

$$a^4 = a^1 + 4a^2 - 2a^3.$$

Ответ. $b)$ $a^4 = -a^1 + a^2 + 2a^3$; $c)$ $a^4 = 2a^1 - a^2 + 3a^3$.

Покажем, как выполнить упражнение 3 $a)$ в `sympy`: https://colab.research.google.com/drive/10p-6K5VN6KDyPrEx2bP0gLclT_osm5tC?usp=sharing

Упражнение 4. Найти разложение вектора a^4 по базису a^1, a^2, a^3, предварительно проверить, что векторы a^1, a^2, a^3 действительно образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$a) \quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; a^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \; a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$b) \quad a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; a^4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $a)$ $a^4 = 5a^1 + 3a^2 - 2a^3$; $b)$ $a^4 = 3a^1 + 2a^2 + a^3$.

Упражнение 5. Показать, что векторы

$$a^1 = (4{,}1, -1), \quad a^2 = (1{,}2, -5), \quad a^3 = (-1{,}1{,}1)$$

образуют базис пространства $\mathbb{V}_3$. Найти координаты векторов

$$x = (4{,}4, -5), \quad y = (2{,}4, -10), \quad z = (0{,}3, -4)$$

в этом базисе.

Указание. $x = 1a^1 + 1a^2 + 1a^3$, $y = 0a^1 + 2a^2 + 0a^3$, $z = 0a^1 + 1a^2 + 1a^3$. В пространстве $\mathbb{V}_3$ любые три некомпланарных вектора образуют базис, а критерием компланарности трех векторов является равенство нулю определителя матрицы, составленной из столбцов их декартовых координат. Координаты x_1, x_2, x_3 вектора $x \in \mathbb{V}_3$ в базисе a^1, a^2, a^3 находятся как решение системы линейных алгебраических уравнений $a^1x_1 + a^2x_2 + a^3x_3 = x$.

Упражнение 6. Доказать, что матрицы

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ E_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^{2\cdot 2}$ вещественных квадратных матриц второго порядка, и найти координаты матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

Указание. $A = -1E_1 + 2E_2 - 1E_3 + 1E_4$. Запишите каждую матрицу E_i, как элемент пространства $\mathbb{R}^4$, составьте из получившихся столбцов матрицу четвертого порядка B и проверьте, что она невырождена. Координаты матрицы A в базисе $\{E_i\}_{i=1}^4$ найдите как решение системы линейных уравнений с матрицей B и вектором правой части, полученным из матрицы A.

Упражнение 7. При каких α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ векторы

$$a = (1,\alpha,\alpha^2), \quad b = (1,\beta,\beta^2), \quad c = (1,\gamma,\gamma^2)$$

образуют базис пространства $\mathbb{V}_3$?

Ответ. При попарно различных α, β, γ.

Упражнение 8. Доказать, что векторы

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ n \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ n \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ \dots \\ n \end{pmatrix}, \ \dots, \ a^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ n \end{pmatrix}$$

образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Указание. Вычислить определитель матрицы, столбцами которой являются векторы a^1, a^2, $\dots$, a^n.

Упражнение 9. Доказать, что векторы

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, a^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Указание. Вычислить определитель матрицы, столбцами которой являются векторы a^1, a^2, $\dots$, a^n.

Упражнение 10. Пусть $\mathbb{S}$ — множество всех бесконечных последовательностей вещественных чисел вида

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots).$$

Линейные операции на множестве $\mathbb{S}$ вводятся следующим образом. По определению для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и любого $x \in \mathbb{S}$ положим

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n, \dots).$$

Для любых $x, y \in \mathbb{S}$ по определению

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots).$$

Доказать, что $\mathbb{S}$ — бесконечномерное линейное пространство.

Решение. Убедимся, прежде всего, что $\mathbb{S}$ — вещественное линейное пространство. Ясно, что линейные операции не выводят за пределы этого множества. Справедливость восьми аксиом также не вызывает сомнений. Отметим лишь, что нулевой элемент пространства $\mathbb{S}$ имеет вид

$$0 = (0, 0, \dots, 0, \dots).$$

Противоположный к x элемент записывается так:

$$x' = -x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_k, \dots).$$

Покажем, что векторы

$$s^1 = (1,0, \dots,0,0, \dots),$$

$$s^2 = (0,1,\ldots,0,0,\ldots),$$

$$\ldots$$

$$s^k = (0,0,\ldots,1,0,\ldots)$$

линейно независимы. Пусть

$$x_1 s^1 + x_2 s^2 + \cdots + x_k s^k = 0 \in \mathbb{S}, \quad x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Тогда

$$(x_1,x_2,\ldots,x_k,0,\ldots) = (0,0,\ldots,0,0,\ldots),$$

т. е. $x_i = 0$, $i = 1$, 2, …, k. Таким образом, для любого, сколь угодно большого, целого k можно указать k линейно независимых векторов пространства $\mathbb{S}$, следовательно, $\mathbb{S}$ — бесконечномерное пространство.

Упражнение 11. Пусть $\mathbb{F}$ — множество всех бесконечных действительных последовательностей вида

$$x = (a, b,a,b, \ldots, a,b, \ldots).$$

Линейные операции на множестве $\mathbb{F}$ вводятся так же, как на $\mathbb{S}$ (см. предыдущее упражнение). Доказать, что $\mathbb{F}$ — двумерное линейное пространство.

Решение. Множество $\mathbb{F}$ — вещественное линейное пространство, так как является подмножеством линейного пространства $\mathbb{S}$, а линейные операции, очевидно, не выводят за его пределы. Покажем, что векторы

$$e^1 = (1,0,1,0,1,0,\ldots),$$

$$e^2 = (0,1,0,1,0,1,\ldots)$$

образуют базис пространства $\mathbb{F}$. В самом деле, эти векторы линейно независимы, так как равенство $x_1 e^1 + x_2 e^2 = 0 \in \mathbb{F}$, где x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$, означает, что

$$(x_1,x_2,x_1,x_2,x_1,x_2,\ldots) = (0,0,0,0,0,0,\ldots),$$

т. е. $x_1 = x_2 = 0$. С другой стороны, любой вектор

$$x = (a,b,a,b,a,b,\ldots) \in \mathbb{F}$$

является линейной комбинацией векторов e^1, e^2: $x = ae^1 + be^2$.

Упражнение 12. Доказать, что в пространстве $\mathbb{Q}_n$ многочленов степени не выше n базисом является всякая система ненулевых многочленов, содержащая по одному многочлену каждой степени $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$.

Решение. Пространство $\mathbb{Q}_n$ имеет размерность $n+1$. Следовательно, любая система из $n+1$ линейно независимых векторов является базисом в этом пространстве. В пространстве $\mathbb{Q}_n$ рассмотрим систему ненулевых многочленов, содержащую по одному многочлену каждой степени $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$:

$$\mathcal{A}_{n+1} = \{a_{0,0}, a_{1,0} + a_{1,1}z,\ \ldots, a_{n,0} + a_{n,1}z + \cdots + a_{n,n}z^n\},$$

где $a_{k,k} \neq 0$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$. Эта система линейно независима согласно упражнению 19, с. 132, предыдущего параграфа.

Упражнение 13. Чему равна размерность линейного пространства $\mathbb{R}$?

Ответ. 1.

Упражнение 14. Доказать, что система векторов

$$\mathcal{F}_3 = \{1, (t-1), (t-1)^2\}$$

является базисом в пространстве $\mathbb{P}_2$, и найти координаты многочлена

$$p(t) = 1 + t + t^2$$

в этом базисе.

Решение получим двумя способами. Первый способ основан на использовании *формулы Тейлора*[1] для многочлена $p(t)$ степени n с вещественными коэффициентами:

$$p(t) = p_0(t_0) + \frac{p'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{p''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n,$$

где t_0 — произвольное вещественное число. В рассматриваемом нами случае $n = 2$, $p(t) = 1+t+t^2$, а $t_0 = 1$. Вычислим значение полинома и его первых двух производных в точке 1: $p(1) = p'(1) = 3$, а $p''(1) = 2$. Следовательно,

$$p(t) = 3 + 3(t-1) + 1(t-1)^2.$$

[1] См. курс математического анализа.

Второй способ. Пусть

$$\mathcal{E}_3 = \{e^1, e^2, e^3\} \,=\, \{1,\, t,\, t^2\},$$
$$\mathcal{F}_3 = \{f^1, f^2, f^3\} = \{1,\, t-1,\, (t-1)^2\}.$$

Тогда эти векторы связаны равенствами

$$\begin{aligned} f^1 &= e^1, \\ f^2 &= -e^1 + e^2, \\ f^3 &= e^1 - 2e^2 + e^3. \end{aligned}$$

Записывая эти равенства в матричном виде, получим $\mathcal{F}_3 = \mathcal{E}_3 T$, где

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица T невырождена, следовательно, система векторов $\mathcal{F}_3$ есть базис в пространстве $\mathbb{P}_n$, а координаты η полинома $p(t)$ в базисе $\mathcal{F}_3$ вычисляются по формуле $\eta = T^{-1}\xi$, где $\xi = (1,1,1)$ — координаты полинома $p(t)$ в естественном базисе $\mathcal{E}_3$. Найдем матрицу T^{-1}.

Матрица T — треугольная, поэтому вычислять присоединенную матрицу не будем. Опишем метод, которым удобно пользоваться при вычислении обратных матриц к матрицам «простой структуры». По определению $TT^{-1} = I$. Обозначим $X = T^{-1}$ и найдем X из матричного уравнения $TX = I$. Ясно, что каждый столбец x^k матрицы X есть решение системы уравнений с матрицей T и вектором правой части $i^k \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1^1 & - & x_2^1 & + & x_3^1 & = & 1, \\ & & x_2^1 & - & 2x_3^1 & = & 0, \\ & & & & x_3^1 & = & 0; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_3^2 & = & 0, \\ & & x_2^2 & - & 2x_3^2 & = & 1, \\ & & & & x_3^2 & = & 0; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1^1 & - & x_2^3 & + & x_3^3 & = & 0, \\ & & x_2^3 & - & 2x_3^3 & = & 0, \\ & & & & x_3^3 & = & 1. \end{array}\right.$$

Из решений этих систем составим столбцы матрицы

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно вычислить координаты полинома $p(t)$ в базисе $\mathcal{F}_3$:

$$\eta = T^{-1}\xi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $p(t) = 1 + t + t^2 = 3f^1 + 3f^2 + 1f^3 = 3 + 3(t-1) + 1(t-1)^2$.

Упражнение 15. Как связаны между собой базисы $\{f^i\}_{i=1}^n$ и $\{e^i\}_{i=1}^n$ пространства $\mathbb{X}_n$, если матрица T перехода от базиса $\mathcal{E}_n$ к базису $\mathcal{F}_n$:
a) единичная,
b) диагональная,
c) верхняя треугольная,
d) нижняя треугольная.

Ответ. a) $f^i = e^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$;
b) каждый вектор f^i коллинеарен e^i, $i = 1, 2, \ldots, n$;
c) каждый вектор f^i линейно выражается через векторы $e^1, \ldots, e^i$;
d) каждый вектор f^i линейно выражается через векторы $e^i, \ldots, e^n$.

Упражнение 16. Матрица S является матрицей перехода от базиса $\mathcal{E}_n$ к базису $\mathcal{F}_n$. Матрица Q является матрицей перехода от базиса $\mathcal{G}_n$ к базису $\mathcal{F}_n$. Найти матрицу T перехода:
a) от базиса $\mathcal{F}_n$ к базису $\mathcal{E}_n$,
b) от базиса $\mathcal{E}_n$ к базису $\mathcal{G}_n$.

Решение. a) Пусть $\mathcal{F}_n = \mathcal{E}_n S$. Тогда $\mathcal{E}_n = \mathcal{F}_n S^{-1}$.
b) Пусть $\mathcal{F}_n = \mathcal{E}_n S$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{G}_n Q$. Тогда $\mathcal{G}_n Q = \mathcal{E}_n S$, и $\mathcal{G}_n = \mathcal{E}_n S Q^{-1}$.

Упражнение 17. Найти матрицу перехода от стандартного базиса в пространстве $\mathbb{P}_2$ к базису, составленному из полиномов Лежандра

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1) \right\}.$$

Ответ. $T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -(1/2)\sqrt{5/2} \\ 0 & \sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & (3/2)\sqrt{5/2} \end{pmatrix}$.