5. Вычисление несобственных интегралов от неограниченных функций

Напомним, что интеграл $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ $(a, c \in \mathbb{R})$ имеет единственную особенность в точке c, если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ при любом $b \in (a, c)$ и неограничена на (b, c). Аналогично интегралам с бесконечными пределами интегрирования рассматривается $\lim\limits_{b \to c-0} \int\limits_a^b f(x)\,dx$ и говорят о сходимости интеграла $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ и его значении.

Аналогичным образом рассматривается и интеграл $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ с единственной особенностью в точке c.

Пример 1.

$$\int\limits_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} (x \ln x\big|_\varepsilon^1 - \int\limits_\varepsilon^1 1\,dx) = \lim_{\varepsilon \to +0} (\varepsilon \ln \varepsilon - (1 - \varepsilon)) = -1.$$

Второе равенство получается интегрированием по частям, а $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} (\varepsilon \ln \varepsilon)$ нетрудно сосчитать, используя правило Лопиталя.

Пример 2.

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} (-\ln \varepsilon) = +\infty,$$

то есть $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ расходится.

Пример 3. Более обще, как предполагаю было показано на лекциях,

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} \text{ при } \alpha < 1, \\ +\infty \text{ при } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Таким образом, $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ сходится $\iff$ $\alpha < 1$.

Замечание. Учитывая теорему о непрерывности интеграла Римана по переменному пределу интегрирования, нетрудно понять, что вычисляя обычный интеграл Римана так же, как несобственный, мы всё равно придём к правильному ответу.

Например, $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ при $\alpha \leq 0$ особенностей не имеем, однако, всё равно $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$.

В несобственных интегралах можно выполнять замену переменной и иногда это может привести к обычному интегралу Римана. Нпример, в следующем примере интеграл имеет особенность в точке -1 и выполняем замену $\sqrt{x+1} = t$.

Пример 4.

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{t}\cdot 2t\,dt = 2.$$

Часто бывает нужно рассматривать несобстванные интегралы с несколькими особенностями, и тогда разбиваем интеграл на сумму нескольких интегралов с одной особенностью. Например, $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ имеет две особенности: в точке 0 справа и слева, и мы представляем его в виде $\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ — суммы двух интегралов с одной особенностью.

Теорема (обобщенная формула Ньютона–Лейбница). Пусть функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $a \leq c_0 < c_1 < \cdots < c_n \leq b$ и $F'(x) = f(x)$ всюду на $[a,b]$ кроме, может быть, точек $c_0, c_1, \ldots c_n$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Пример 5.

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Пример 6. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ расходится, так как расходится $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx$. Обобщенная формула Ньютона–Лейбница здесь неприменима ($\ln|x|$ не является непрерывной функцией на отрезке $[-1,1]$).

Пример 7.

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$