КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Кафедра математического анализа

С. Р. НАСЫРОВ

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Казань – 2024

УДК 517.1
ББК 22.161

Принято на заседании учебно-методической комиссии ИММ
Протокол № 6 от 14 апреля 2024 г.

Рецензент:
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа **Р. Н. Гумеров**

Насыров С.Р.
Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Функциональные ряды. – Казань: Казанский федеральный университет, 2024. – 88 с.

В настоящем учебном пособии излагаются теория несобственных интегралов, зависящих от параметра, а также функциональные ряды, в том числе и ряды Фурье. Материал соответствует курсу «Математический анализ» для классических университетов, 4-й семестр.

1 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

1.1 Равномерная сходимость последовательности функций

Сначала рассмотрим пример, дающий представление о равномерной сходимости. Пусть из пункта A в пункт B движется счетное число черепах T_1, $T_2, \ldots$. Они начинают движение в одно и то же время и движутся равномерно с фиксированной скоростью. Пусть скорость черепахи T_n равна $1/n$, расстояние AB равно 1. Спрашивается, наступит ли момент времени, когда все черепахи окажутся в пункте B? Ответ отрицательный. Действительно, черепаха T_n окажется в пункте B в момент времени n. Поскольку множество натуральных чисел не ограничено сверху, то для любого момента времени t существует такое натуральное n, что $n > t$. Это означает, что черепаха T_n в момент времени t еще не придет в пункт B. Этот пример показывает, что если число объектов бесконечно и каждый из них в какой-то момент времени приходит в конечный пункт, то это не значит, что в какой-то момент все они придут в этот пункт. Это — пример неравномерного движения (сходимости).

Теперь дадим определения поточечной и равномерной сходимости последовательности функций. Пусть $f_n : X \to \mathbb{R}$ — последовательность функций на множестве X. Говорят, что последовательность f_n сходится поточечно на X к функции $f : X \to \mathbb{R}$, если для любого $x \in X$ числовая последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$. Более подробно, f_n сходится к f поточечно на X, если $\forall x \in X \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geq N$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Говорят, что последовательность f_n сходится равномерно на X к функции $f : X \to \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \;\; \forall x \in X$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Отметим, что в отличие от поточечной, при равномерной сходимости номер N не зависит от x, т. е. может быть выбран единым для всех x сразу. В случае равномерной сходимости пишут $f_n \rightrightarrows f$ на X.

Если $\forall x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, то верно неравенство $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Обратно, если $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, то $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \;\; \forall x \in X$. Это показывает, что равномерная сходимость равносильна тому, что числовая последовательность $\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|$ стремится к нулю при $n\to\infty$. (То, что знак в неравенстве $|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$ нестрогий, несущественно, так как ε — любое положительное число, и его всегда можно уменьшить.)

Очевидна следующая

Теорема. *Если последовательность функций f_n сходится к f на X равномерно, то она сходится к f на X и поточечно.*

Обратное утверждение неверно, как показывают примеры ниже.

Отметим некоторые простые свойства равномерной сходимости, которые сразу следуют из определений.

1) Если X — конечное множество, то из поточечной сходимости следует равномерная.

2) Если $f_n\rightrightarrows f$ на множествах $X_1,\ X_2,\dots,X_m$, то $f_n\rightrightarrows f$ на $X=\cup_{j=1}^m X_j$.

3) Если $f_n(x)\equiv\alpha_n=\mathrm{const}$ сходится к $f\equiv\alpha=\mathrm{const}$, то $f_n\rightrightarrows f$.

4) Если $f_n\rightrightarrows f$, $g_n\rightrightarrows g$ на множестве X, то $f_n+g_n\rightrightarrows f+g$ на множестве X.

5) Если $f_n\rightrightarrows f$ на множестве X, $\alpha\in\mathbb{R}$, то $\alpha f_n\rightrightarrows\alpha f$ на множестве X.

6) Если $f_n\rightrightarrows f$, а функция g ограничена на множестве X, то $gf_n\rightrightarrows gf$ на множестве X.

7) Если $f_n\rightrightarrows f$ на X и g — ограниченная функция на X, то $gf_n\rightrightarrows gf$ на X. Действительно,

$$\sup_X|gf_n-gf|=\sup_X|g(f_n-f)|\leq\sup_X|g|\sup_X|f_n-f|\to 0,\quad n\to\infty.$$

1.2 Геометрическая интерпретация равномерной сходимости

Посмотрим, что означает геометрически условие $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in X$. Оно равносильно неравенству $f(x)-\varepsilon<f_n(x)<f(x)+\varepsilon$ $\forall x\in X$. Следовательно, график функции $y=f_n(x)$ на множестве X при $n\geq N$ лежит в узкой полоске «высоты» 2ε, ограниченной сверху и снизу графиками функций $y=f(x)+\varepsilon$ и $y=f(x)-\varepsilon$.

Примеры. 1) Рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = x^n$ на отрезке $X = [0;1]$. Поточечный предел последовательности f_n существует и равен

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & \quad x = 1. \end{cases}$$

Докажем, что равномерной сходимости здесь нет. Действительно,

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0 \le x < 1} x^n = 1 \not\to 0, \quad n \to \infty.$$

2) Пусть $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $0 \le x \le 1$. Тогда $f_n \to 0$ поточечно на $[0;1]$. Исследуем, будет ли равномерная сходимость последовательности f_n к нулю. Имеем $\sup_{[0;1]} |f_n| = \max_{[0;1]} f_n$. Найдем максимальное значение функции f_n на $[0;1]$. Имеем $f'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n$, откуда нетрудно заключить, что функция f_n имеет максимум в точке $x = n/(n+1)$. Тогда

$$\sup_{[0;1]} |f_n| = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \le 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \to 0,$$

$n \to \infty$. Таким образом, $f_n \rightrightarrows f$ на $[0;1]$.

1.3 Критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций

Теорема. *Последовательность f_n сходится равномерно на X к некоторой функции f тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n, m \ge N$ $\forall x \in X \ \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на X. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) : \forall n \ge N \ \forall x \in X \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. Если n, $m \ge N$, то $|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N : \forall n, m \ge N \ \forall x \in X$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. При фиксированном $x \in X$ получаем, что числовая последовательность $f_n(x)$ фундаментальна, следовательно, сходится к некоторому пределу, который обозначим через $f(x)$. Докажем, что $f_n \rightrightarrows f$ на X. Так как $\forall x \in X$ при n, $m \ge N$ имеем неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, при $m \to \infty$ получаем $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$. Итак,

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) :\ \forall n \geq N\ \ \forall x \in X\ \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Это означает, что $f_n \rightrightarrows f$ на X.

1.4 Равномерная сходимость и непрерывность

Одним из важных свойств равномерной сходимости является свойство сохранения непрерывности. Справедлива

Теорема. *Пусть X — топологическое пространство и функции f_n непрерывны в точке $x_0 \in X$. Если $f_n \rightrightarrows f$ на X, то функция f также непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $f_n \rightrightarrows f$ на X, то $\exists N = N(\varepsilon) :\ \forall n \geq N\ \ \forall x \in X\ \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Фиксируем $n \geq N$. Функция f_n непрерывна в точке x_0, поэтому существует окрестность U точки x_0 такая, что $\forall x \in U$ имеем $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда для любого $x \in U$ имеем

$$|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Итак, $\forall\varepsilon > 0$ существует окрестность U точки x_0 такая, что $\forall x \in U$ $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Это означает, что функция f непрерывна в точке x_0.

Следствие 1. *Если функции f_n непрерывны на X и $f_n \rightrightarrows f$ на X, то функция f непрерывна на X.*

Следствие 2. *Если функции f_n непрерывны на X и $f_n \to f$ на X, а функция f не непрерывна на X, то $f_n \not\rightrightarrows f$ на X.*

Следствие 3. *Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на X, x_0 — предельная точка X и существует $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \alpha_n$, $n \geq 1$. Если $\alpha_n \to \alpha$, $n \to \infty$, то существует $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$.*

Доказательство. Если $x_0 \notin X$, то определим, а если $x_0 \in X$, то переопределим f_n и f в точке x_0 по формулам $f_n(x_0) = \alpha_n$, $f(x_0) = \alpha$. Тогда новые функции f_n сходятся равномерно к новой функции f на множестве $X \cup \{x_0\}$. Кроме того, функции f_n непрерывны в точке x_0, поэтому по предыдущей теореме функция f непрерывна в точке x_0, т. е. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$.

Отметим, что последнее равенство можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Теперь поставим вопрос: при каких дополнительных условиях из поточечной сходимости следует равномерная? Приводимая ниже теорема Дини частично дает ответ на этот вопрос.

Последовательность функций f_n на множестве X называется монотонно убывающей, если для любого $x \in X$ имеют место неравенства

$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \ldots \geq f_n(x) \geq \ldots,$$

и возрастающей, если

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f_n(x) \leq \ldots \quad \forall x \in X.$$

Монотонно убывающие и монотонно возрастающие последовательности часто называются просто монотонными.

Напомним некоторые сведения из топологии.

1) Замкнутое подмножество компактного множество компактно.

2) Пусть $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$ — некоторая последовательность непустых компактных множеств в некотором топологическом пространстве. Тогда $\cap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$.

3) Прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении, заданном на замкнутом множестве, является замкнутым множеством.

Теорема (Дини). *Пусть f_n — монотонная последовательность непрерывных функций на компактном множестве X. Если f_n поточечно сходится к непрерывной на X функции f, то эта последовательность сходится к f на X равномерно.*

Доказательство. Пусть для определенности, f_n монотонно убывает. Рассмотрим функции $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$. Ясно, что $g_1(x) \geq g_2(x) \geq \ldots \geq g_n(x) \geq \ldots$, причем g_n непрерывны на X. Фиксируем $\varepsilon > 0$ рассмотрим множества $X_n := \{x \in X \mid g_n(x) \geq \varepsilon\} = g_n^{-1}([\varepsilon, +\infty))$. Так как множество $[\varepsilon, +\infty)$ замкнуто, а функции g_n непрерывны, X_n — замкнутые подмножества компактного множества X, следовательно, X_n компактны. Из монотонности последовательности g_n следует, что

$X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$. По условию теоремы g_n поточечно сходится к нулю. Это означает, что $\forall x \in X \ \exists N : \forall n \geq N \ g_n < \varepsilon$, т. е. $x \notin X_n$. Следовательно, $\cap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$. Но пересечение непустых вложенных друг в друга компактных множеств непусто. Следовательно, $\exists n_0$: $X_{n_0} = \emptyset$. Тогда $X_n = \emptyset$, $n \geq n_0$, т. е. $\forall n \geq n_0$ и $\forall x \in X \ g_n(x) < \varepsilon$, т. е. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Так как ε — любое положительное число, то отсюда следует равномерная сходимость f_n к f.

1.5 Равномерная сходимость и операции дифференцирования и интегрирования

Теорема 1. *Пусть f_n — последовательность интегрируемых функций на измеримом по Жордану множестве A функций сходится к интегрируемой на A функции f равномерно. Тогда $\int_A f_n(x)dx \to \int_A f(x)dx$, $n \to \infty$.*

Доказательство. Действительно,

$$\left|\int_A f_n(x)dx - \int_A f(x)dx\right| = \left|\int_A (f_n(x) - f(x))dx\right| \leq \sup_X |f_n - f| \cdot \mu(A) \to 0,$$

$n \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть последовательность функций f_n определена на $[a;b]$ и в некоторой точке $c \in [a;b]$ числовая последовательность $f_n(c)$ сходится к некоторому числу α. Если f_n дифференцируемы на $[a;b]$ и производные f_n' сходятся равномерно на $[a,b]$ к некоторой функции g, то последовательность f_n сходится равномерно к дифференцируемой функции f и $f' = g$.*

Доказательство. Фиксируем $x_0 \in [a,b]$. Пусть

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} & x \neq x_0, \\ f_n'(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

Докажем, что последовательность φ_n сходится равномерно на $[a;b]$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда по критерию Коши $\exists N : \forall x \in [a;b] \ \forall m \geq n \geq N$ имеет место неравенство $|f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon$. При $m \geq n \geq N$ в силу формулы конечных приращений Лагранжа при $x \neq x_0$ имеем

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} \right| =$$

$$\left| \frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))}{x - x_0} \right| = |f_n'(\theta) - f_m'(\theta)| < \varepsilon,$$

где θ лежит между x и x_0. Отметим, что при $x = x_0$ также

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = |f_n'(x_0) - f_m'(x_0)| < \varepsilon.$$

Следовательно, по критерию Коши последовательность φ_n сходится равномерно на $[a; b]$. Так как функция $g(x) = x - x_0$ ограничена на этом отрезке и не зависит от n, то последовательность $f_n(x) - f_n(x_0) = g(x)\varphi_n(x)$ сходится равномерно на $[a; b]$. Теперь пусть $x_0 = c$. Так как числовая последовательность $f_n(c)$ сходится, то отсюда следует, что последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно к некоторой функции f. Осталось показать, что $f' = g$. В силу равномерной сходимости последовательности φ_n и следствия 3 предыдущего пункта получаем, что существует

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \to \infty} f_n'(x_0) = g(x_0).$$

1.6 Собственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть $z = f(x, y)$ — некоторая функция, определенная на $A \times Y$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ — множество, измеримое по Жордану и при любом $y \in Y$ существует интеграл $\int_A f(x, y)dx$. Результатом интегрирования является число $F(y) = \int_A f(x, y)dx$, которое зависит от $y \in Y$. Такие интегралы называются интегралами зависящими от параметра. Одними из наиболее интересных вопросов являются: при каких условиях на f функция F непрерывна? дифференцируема?

Теорема 1(непрерывность интеграла, зависящего от параметра). *Пусть множество A компактно и функция $z = f(x, y)$ непрерывна на $A \times [a; b]$. Тогда функция*

$$F(y) = \int_A f(x, y)dx$$

непрерывна на $[a; b]$.

Доказательство. Можно считать, что $\mu(A) > 0$. Множество $A \times [a; b]$ компактно как произведение компактных множеств. Функция f непрерывна на $A \times [a; b]$, поэтому она равномерно непрерывна, т. е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : \ \forall (x_1, y_1), \ (x_2, y_2) \in A \times [a; b]$ $(\|x_1 - x_2\| < \delta$ и $|y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow$ $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon/\mu(A))$. Тогда при $|y_1 - y_2| < \delta$ имеем

$$|F(y_1) - F(y_2)| = \left| \int_A f(x, y_1)dx - \int_A f(x, y_2)dx \right| =$$

$$= \left| \int_A f((x, y_1) - f(x, y_2))dx \right| \leq \int_A |f((x, y_1) - f(x, y_2)|dx \leq \frac{\varepsilon}{\mu(A)} \mu(A) = \varepsilon.$$

Следовательно, F непрерывна на $[a; b]$.

Теорема 2 (дифференцируемость интеграла, зависящего от параметра). *Пусть A — компактное множество, функция f непрерывна на $A \times [a; b]$ и в любой точке (x, y) множества $A \times [a; b]$ существует частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, которая является непрерывной функцией на $A \times [a; b]$. Тогда $F(y) = \int_A f(x, y)dx$ является непрерывной функцией на $[a; b]$ и*

$$F'(y) = \int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \, dx, \quad y \in [a; b].$$

Доказательство. Можно считать, что $\mu(A) > 0$. Имеем

$$F'(y) = \lim_{h \to 0} \frac{F(y + h) - F(y)}{h}. \qquad (*)$$

Докажем, что этот предел существует и равен $\int_A \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx$. Действительно, в силу формулы конечных приращений

$$\frac{F(y + h) - F(y)}{h} - \int_A \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \, dx = \frac{1}{h} \left[\int_A f(x, y + h)dx - \int_A f(x, y)dx \right] -$$

$$-\int_A \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx = \int_A \frac{1}{h}[f(x,y+h)-f(x,y)]dx - \int_A \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx =$$
$$= \int_A \left[\frac{\partial f(x,y+\theta h)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]\,dx,$$

где $\theta = \theta(x,y) \in (0;1)$. Частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывна на компактном множестве $A\times[a;b]$, поэтому по теореме Кантора она равномерно непрерывна, следовательно, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall y',\ y''\in[a;b]\ \forall x\in A$

$$|y'-y''|<\delta \Rightarrow \left|\frac{\partial f(x,y')}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y'')}{\partial y}\right| < \frac{\varepsilon}{\mu(A)}\,.$$

Используя это, получаем

$$\left|\frac{F(y+h)-F(y)}{h} - \int_A \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx\right| \le$$
$$\le \int_A \left|\frac{\partial f(x,y+\theta h)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| dx \le \frac{\varepsilon}{\mu(A)}\,\mu(A) = \varepsilon.$$

Таким образом, предел $(*)$ существует и равен $\int_A \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$. В силу предыдущей теоремы последний интеграл является непрерывной функций переменной y. Теорема доказана.

Теорема 3 (интегрируемость интеграла, зависящего от параметра). *Пусть $A\subset\mathbb{R}^n$ и $B\subset\mathbb{R}^m$ — измеримые по Жордану замкнутые множества и f — функция, непрерывная на $A\times B$. Тогда функция $F(y)=\int_A f(x,y)dx$ является интегрируемой на B функцией, $\Phi(x)=\int_B f(x,y)dy$ является интегрируемой на A функцией и*

$$\int_B F(y)dy = \int_B dy\int_A f(x,y)dy = \int_A dx\int_B f(x,y)dx = \int_A \Phi(x)dx.$$

Эта теорема следует из свойств кратных интегралов.

Теперь рассмотрим интегралы с переменными пределами интегрирования вида $\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$.

Теорема 4. *Пусть f непрерывна на $[\alpha;\beta]\times[a;b]$, функции φ и $\psi:\ [a;b]\to[\alpha;\beta]$ непрерывны. Тогда функция $\Phi(y)=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$ непрерывна на $[a;b]$.*

Доказательство. Фиксируем точку $y_0 \in [a;b]$. Установим непрерывность Φ в точке y_0. Имеем

$$\Phi(y) = \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y_0)} f(x,y)dx + \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x,y)dx + \int_{\psi(y_0)}^{\psi(y)} f(x,y)dx.$$

По теореме о непрерывности интеграла, зависящего от параметра, имеем

$$\int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x,y)dx \to \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x,y_0)dx = \Phi(y_0).$$

Оценим первое и третье слагаемые. Так как f непрерывна на компакте $[\alpha;\beta] \times [a;b]$, она ограничена, т. е. $\sup|f| = M < +\infty$. Значит,

$$\left| \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y_0)} f(x,y)dx \right| \le M|\varphi(y_0) - \varphi(y)| \to 0, \quad y \to y_0,$$

так как φ непрерывна, поэтому первое слагаемое стремится к нулю. Аналогично показываем, что третье слагаемое стремится к нулю при $y \to y_0$. Итак, $\lim_{y \to y_0} \Phi(y) = \Phi(y_0)$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы 4 и, кроме того, существует непрерывная частная производная* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *на* $[\alpha;\beta] \times [a;b]$. *Тогда функция* Φ *дифференцируема на* $[a;b]$ *и*

$$\Phi'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx + f(\psi(y),y)\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\varphi'(y).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию трех переменных $\chi(u,v,y) = \int_u^v f(x,y)dy$. Эта функция определена и непрерывно дифференцируема на $[\alpha;\beta] \times [\alpha;\beta] \times [a;b]$ и ее частные производные равны:

$$\frac{\partial \chi}{\partial v} = f(v,y), \quad \frac{\partial \chi}{\partial u} = -f(u,y), \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = \int_u^v \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx.$$

Здесь для вычисления $\frac{\partial \chi}{\partial v}$ и $\frac{\partial \chi}{\partial v}$ мы применили теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом, а для вычисления $\frac{\partial \chi}{\partial y}$ — теорему 2. Так как $\Phi(y) = \chi(\varphi(y), \psi(y), y)$, по правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\Phi'(y) = \frac{\partial \chi}{\partial u}\varphi'(y) + \frac{\partial \chi}{\partial v}\psi'(y) + \frac{\partial \chi}{\partial y}.$$

Подставляя сюда полученные выражения для частных производных функции χ, получаем требуемое равенство.

2 Однопараметрические семейства функций и равномерная сходимость

2.1 Определение равномерной сходимости семейства функций. Критерий Коши.

Рассмотрим функцию $u = F(x,t)$, $F : X \times [a;b) \to \mathbb{R}$, где $-\infty < a < b \leq +\infty$. Предположим, что для любого фиксированного $x \in X$ при $t \to b-$ существует конечный предел $\lim_{t\to b-} F(x,t) =: F_0(x)$. Тогда функция F_0 называется поточечным пределом семейства $F(x,t)$ при $t \to b-$. Функция F_0 называется равномерным пределом семейства $F(x,t)$, $a \leq t < b$ на X при $t \to b-$, если $\sup_{x\in X} |F(x,t) - F_0(x)| \to 0$, $t \to b-$. Эквивалентное определение: $F(x,t) \rightrightarrows F_0(x)$ на X при $t \to b-$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists b_\varepsilon \in [a;b)$: $\forall t \in (b_\varepsilon; b)$ $\forall x \in X$ выполняется неравенство $|F(x,t) - F_0(x)| < \varepsilon$.

Теорема 1 (аналог теоремы Гейне). *Однопараметрическое семейство функций $F(x,t) \rightrightarrows F_0(x)$ на X при $t \to b-$ тогда и только тогда, когда $\forall t_n \in [a;b)$*

$$t_n \to b,\ n \to \infty \Rightarrow F(x,t_n) \rightrightarrows F_0(x),\ n \to \infty \text{ на } X.$$

Доказательство. Обозначим $g(t) = \sup_{x\in X} |F(x,t) - F_0(x)|$. Равномерная сходимость семейства $F(x,t) \rightrightarrows F_0(x)$ на X означает, что $\lim_{t\to b-} g(t) = 0$. По теореме Гейне это эквивалентно условию: $\forall t_n \in [a;b)$ $t_n \to b$, $n \to \infty$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} g(t_n) = 0$. Последнее эквивалентно условию теоремы.

Теорема 2 (критерий Коши). *Однопараметрическое семейство функций $F(x,t)$ сходится равномерно к некоторой функции $F_0(x)$ на X при $t \to b-$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists b_\varepsilon \in [a;b)$: $\forall t'$, $t'' \in (b_\varepsilon; b)$ $\forall x \in X$ выполняется неравенство $|F(x,t') - F(x,t'')| < \varepsilon$.*

Доказательство следует из обычного критерия Коши существования предела функции, примененного к функции

$$g(t) = \sup_{x\in X} |F(x,t) - F_0(x)|.$$

2.2 Равномерная сходимость семейства функций и непрерывность

Теорема 1. *Пусть X — топологическое пространство и $F(x,t)$, $a \leq t < b$, — некоторое однопараметрическое семейство функций, непрерывных на X при любом фиксированном $t \in [a;b)$. Если $F(x,t) \rightrightarrows F_0(x)$ на X при $t \to b-$, то функция F_0 непрерывна на X.*

Доказательство. Если $F(x,t) \rightrightarrows F_0(x)$ на X при $t \to b-$, то в силу аналога теоремы Гейне $\forall t_n \in [a;b)$

$$t_n \to b,\ n \to \infty \Rightarrow F(x,t_n) \rightrightarrows F_0(x),\ n \to \infty \text{ на } X.$$

Функция F_0 является непрерывной на X как равномерный предел последовательности непрерывных функций $F(x,t_n)$.

Теорема 2 (аналог теоремы Дини). *Пусть X — компактное топологическое пространство, $F(x,t)$, $a \leq t < b$, — некоторое однопараметрическое семейство функций, непрерывных на X при любом фиксированном $t \in [a;b)$, причем либо*
1) $\forall x \in X\ \ \forall t_1,\ t_2 \in [a;b)\ \ t_1 < t_2 \Rightarrow F(x,t_1) \leq F(x,t_2)$, *либо*
2) $\forall x \in X\ \ \forall t_1,\ t_2 \in [a;b)\ \ t_1 < t_2 \Rightarrow F(x,t_1) \geq F(x,t_2)$.

Если $\forall x \in X\ \ F(x,t) \to F_0(x)$ и F_0 является непрерывной функцией на $[a;b)$, то $F(x,t) \rightrightarrows F_0(x)$ на X при $t \to b-$.

Доказательство. Для любой последовательности $t_n \in [a;b)$ такой, что $t_n \to b$, $n \to \infty$, имеем последовательность $F(x,t_n)$ монотонна и сходится к непрерывной функции $F_0(x)$. Следовательно, последовательность $F(x,t_n) \rightrightarrows f_0(x)$ на X, $n \to \infty$. По аналогу теоремы Гейне семейство $F(x,t) \rightrightarrows F_0(x)$, $t \to b-$.

2.3 Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра

Пусть функция $f : Y \times [a;b) \to \mathbb{R}$ и для любого $t \in [a;b)$ интеграл $F(y,t) = \int_a^t f(x,y)dx$ является собственным интегралом Римана и при $t \to b-$ существует конечный предел $F(y) := \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x,y)dx$, но

$\int_a^b f(x,y)dx$ не является собственным интегралом Римана для любого $y \in Y$. Тогда говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится поточечно на Y.

Предположим, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится поточечно на Y. Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, если семейство $F(y,t) = \int_a^t f(x,y)dx$ сходится равномерно к $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ на Y. Таким образом, $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists b_\varepsilon \in [a;b)$: $\forall t \in [b_\varepsilon; b)$ и $\forall y \in Y$ $\left|\int_t^b f(x,y)dx\right| < \varepsilon$. Действительно,

$$F(y) - F(y,t) = \int_a^b f(x,y)dx - \int_a^t f(x,y)dx = \int_t^b f(x,y)dx.$$

Теорема 1 (аналог теоремы Гейне). *Несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y тогда и только тогда, когда для любой последовательности $t_n \in [a;b)$, сходящейся к точке b, последовательность $\int_a^{t_n} f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y к $\int_a^b f(x,y)dx$.*

Действительно, пусть $F(y,t) = \int_a^t f(x,y)dx$. Ранее было показано, что семейство $F(y,t)$ сходится равномерно на Y к $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ тогда и только тогда, когда любой последовательности $t_n \in [a;b)$, сходящейся к точке b, последовательность $F(y,t_n)$ сходится равномерно на Y к $F(y)$.

Теорема 2 (критерий Коши). *Несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists b_\varepsilon \in [a;b)$: $\forall t'$, $t'' \in [b_\varepsilon; b)$ и $\forall y \in Y$ $\left|\int_{t'}^{t''} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$.*

Действительно,

$$\int_{t'}^{t''} f(x,y)dx = \int_a^{t''} f(x,y)dx - \int_a^{t'} f(x,y)dx = F(y,t'') - F(y,t').$$

Далее применяем критерий Коши равномерной сходимости однопараметрических семейств функций.

2.4 Достаточные условия равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 1 (признак Вейерштрасса). *Пусть для любого* $x \in [a;b)$ *и для любого* $y \in Y$ *имеет место неравенство* $|f(x,y| \le g(x)$. *Если несобственный интеграл* $\int_a^b g(x)dx$ *с единственной особенностью в точке* b *сходится, то* $\int_a^b f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* Y.

Доказательство. Интеграл $\int_a^b g(x)dx$ сходится, поэтому по критерию Коши сходимости несобственных интегралов $\forall \varepsilon > 0 \ \exists b_\varepsilon \in [a;b) : \forall t'$, $t'' \in [b_\varepsilon; b)$ выполняется неравенство $\left|\int_a^b g(x)dx\right| < \varepsilon$. Тогда $\forall t'$, $t'' \in [b_\varepsilon; b)$ и $\forall y \in Y$ имеем

$$\left|\int_a^b f(x,y)dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x,y)|dx\right| \le \left|\int_a^b g(x)dx\right| < \varepsilon.$$

По критерию Коши интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно.

Теорема 2 (Дини). *Пусть* $f(x,y) \ge 0$ *и непрерывна на* $[a;b) \times Y$, *где* Y *— компактное множество. Предположим, что для любого* $y \in Y$ *интеграл* $F(y) := \int_a^b f(x,y)dx$ *сходится и функция* F *непрерывна на* Y. *Тогда интеграл* $\int_a^b f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* Y.

Доказательство. Рассмотрим любую возрастающую последовательность точек $t_n \in [a;b)$, сходящуюся к точке b. Последовательность собственных интегралов $F(y,t_n) = \int_a^{t_n} f(x,y)dx$ — это последовательность непрерывных функций на компактном множестве Y, так как f непрерывна на $[a;t_n] \times Y$.

Так как функций f неотрицательна, имеем

$$F(y,t_{n+1}) = \int_a^{t_{n+1}} f(x,y)dx = \int_a^{t_n} f(x,y)dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x,y)dx \le$$

$$\le \int_a^{t_n} f(x,y)dx = F(y,t_n).$$

Следовательно, последовательность $F(y,t_n)$ монотонно возрастает при любом фиксированном $y \in Y$. По теореме Дини для последовательностей $F(y,t_n) \rightrightarrows F(y)$ на Y. Поскольку последовательность t_n произвольна, получаем $F(y,t) \rightrightarrows F(y)$, $t \to b-$ на Y. Это означает равномерную сходимость интеграла $\int_a^b f(x,y)dx$ на Y.

Теорема 3 (признак Дирихле). *Интеграл $\int_a^b f(x,y)g(x,y)dx$ с единственной особенностью в точке b для любого $y \in Y$ сходится равномерно, если:*

1) функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a;b)$ для любого фиксированного $y \in Y$ и $\exists M > 0 : \forall y \in Y \ \ \forall t \in [a;b)$

$$\left| \int_a^t f(x,y)dx \right| \le M;$$

2) *функция $g(x,y)$ дифференцируема и монотонно убывает по переменной x на $[a;b)$ для любого фиксированного $y \in Y$;*

3) $g(x,y) \rightrightarrows 0$, $x \to b-$, *на* Y.

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{t'}^{t''} f(x,y)g(x,y)dx = F(x,y)g(x,y)|_{t'}^{t''} - \int_{t'}^{t''} F(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\,dx,$$

где $F(t) = \int_a^t f(x,y)dx$, поэтому с учетом монотонности функции $g(x,y)$ по переменной x получаем

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x,y)g(x,y)dx \right| \le M|g(t'',y)| + M|g(t',y)| + M\left| \int_{t'}^{t''} \left| \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \right| dx \right| =$$

$$= M\left(g(t'',y) + g(t',y) + \left| \int_{t'}^{t''} \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} dx \right| \right) \le 2M(g(t'',y) + g(t',y)).$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как функция $g(x,y) \rightrightarrows 0$ при $x \to b-$, существует $b_\varepsilon \in [a;b) : \forall t \in [b_\varepsilon;b) \ \ \forall y \in Y$ имеет место неравенство $g(t,y) < \frac{\varepsilon}{4M}$. Если $t', \ t'' \in [b_\varepsilon;b)$, то из полученных выше оценок следует, что

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x,y)g(x,y)dx \right| < 2M\left(\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M} \right) = \varepsilon.$$

По критерию Коши $\int_a^b f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно.

Теорема 4 (признак Абеля). *Интеграл $\int_a^b f(x,y)g(x,y)dx$ с единственной особенностью в точке b для любого $y \in Y$ сходится равномерно, если:*

1) функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a;b)$ для любого фиксированного $y \in Y$ и $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y,

2) функция $g(x,y)$ непрерывно дифференцируема по x и монотонно убывает для любого фиксированного $y \in Y$,

3) $\exists M > 0 : \ \forall x \in [a;b) \ \ \forall y \in Y \ \ |g(x,y)| \leq M$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3, применим критерий Коши. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $\widetilde{F}(t) = \int_b^t f(x,y)dx$. В силу 1) $\exists t_\varepsilon \in [a,b)$: $\forall t \in (t_\varepsilon; b)$: $|\widetilde{F}(t)| < \frac{\varepsilon}{4M}$. Рассуждая как и при доказательстве теоремы 3 (только вместо F используем $\widetilde{F}$), получаем, что $\forall t'$, $t'' \in (t_\varepsilon; b)$ $\forall y \in Y$

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x,y)g(x,y)dx \right| \leq 2\,\frac{\varepsilon}{4M}(g(t'',y) + g(t',y)) < \varepsilon.$$

2.5 Непрерывность и дифференцируемость несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 1. *Пусть функция f непрерывна на $[a;b) \times Y$ и интеграл $F(y) = \int_a^b f(x,y)$ сходится равномерно на Y. Тогда функция F является непрерывной на Y.*

Доказательство. Для любого фиксированного $t \in [a;b)$ функция $F(y,t) = \int_a^t f(x,y)dx$ непрерывна на Y по теореме о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра. При $t \to b-$ семейство $F(y,t) \rightrightarrows F(y)$. Следовательно, $F(y)$ непрерывна на Y как равномерный предел семейства непрерывных функций.

Теорема 2. *Пусть функция f непрерывна на $[a;b) \times [c,d]$ и существует частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, которая является непрерывной на $[a;b) \times [c,d]$ функцией. Если для любого $y \in [c;d]$ сходится интеграл $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$, а интеграл $\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$ сходится равномерно, то функция F непрерывно дифференцируема на $[c;d]$ и $F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$, $y \in [c;d]$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $t_n \in [a;b)$: $t_n \to b$,

$n \to \infty$. Тогда $\forall y \in Y$

$$F(y,t_n) = \int_a^{t_n} f(x,y)dx \to F(y) = \int_a^b f(x,y)dx.$$

С помощью теоремы о дифференцировании собственных интегралов, зависящих от параметра, из условий теоремы получаем, что

$$\frac{dF(y,t_n)}{dy} = \int_a^{t_n} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dx \rightrightarrows \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dx$$

на $[c;d]$ в силу равномерной сходимости последнего интеграла. По теореме о дифференцируемости последовательности функций отсюда следует, что $F(y)$ дифференцируема и

$$F'(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{dF(y,t_n)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx.$$

По предыдущей теореме $\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dx$ является непрерывной функцией, следовательно, F непрерывно дифференцируема.

2.6 Интегрирование несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a;b) \times [c;d]$ и несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)dx = F(y)$ сходится равномерно на $[c;d]$. Тогда*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

Доказательство. Пусть $b_n \in [c;b)$ — некоторая последовательность, сходящаяся к b при $n \to \infty$. Тогда по теореме об интегрировании собственных интегралов, зависящих от параметра, имеем

$$\int_c^d \left(\int_a^{b_n} f(x,y)dx \right) dy = \int_a^{b_n} \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

При $n \to \infty$

$$F_n(y) = \int_a^{b_n} f(x,y)dx \rightrightarrows F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

на $[c;d]$ по условию теоремы. Тогда, используя определение несобственного интеграла и теорему о предельном переходе под знаком интеграла, получаем

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_c^d \left(\int_a^{b_n} f(x,y)dx\right) = \lim_{n\to\infty} \int_c^d F_n(y)dy =$$
$$= \int_c^d F(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy.$$

Теорема 2. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна и неотрицательна на $[a;b)\times[c;d)$, несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)dx = F(y)$ сходится для любого $y\in[c;d)$, несобственный интеграл $\int_c^d f(x,y)dy = G(x)$ сходится для любого $x\in[a;b)$ и функции F и G являются непрерывными на $[c;d)$ и $[a;b)$ соответственно. Если сходится один из интегралов $\int_c^d F(y)dy$, $\int_a^b G(x)dx$, то сходится и другой и их значения совпадают:*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx.$$

Доказательство. Обозначим $A=\int_c^d F(y)dy$, $B=\int_a^b G(x)dx$. Фиксируем некоторую возрастающие последовательности точек $b_n\in[a;b)$ и $d_n\in[c;d_n)$. Так как интеграл $\int_a^b f(x,y)dx = F(y)$ сходится для любого $y\in[c;d)$, $f\ge 0$ и $F(y)$ непрерывна, по теореме Дини этот интеграл сходится равномерно на любом отрезке $[c;d_n]\subset[c;d]$. Аналогично, интеграл $G(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ сходится равномерно на любом отрезке $[a;b_n]\subset[a;b)$. По предыдущей теореме с учетом неотрицательности f имеем

$$\int_c^{d_n} \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^{d_n} f(x,y)dy\right) dx \le \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx,$$

следовательно, $\int_c^{d_n} F(y)dy \le B$. Так как $F(y)\ge 0$, то отсюда следует, что существует $\lim_{n\to\infty}\int_c^{d_n} F(y)dy \le B$. Итак, $A\le B$. Совершенно аналогично получаем, что $B\le A$, поэтому $A=B$.

Пример. Вычислим интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Отметим, что несобственный интеграл сходится, так как $\sin x \sim x$, $x \to 0$, а на $+\infty$ интеграл сходится по признаку Дирихле ($\sin x$ имеет ограниченную первообразную, а $1/x$ монотонно стремится к нулю).

Для вычисления интеграла Дирихле рассмотрим вспомогательный интеграл

$$F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x}\, dx, \quad y \geq 0.$$

Этот интеграл сходится равномерно по признаку Абеля на $[0; +\infty)$. Действительно, интеграл Дирихле сходится, а функция e^{-xy} обладает свойствами: $|e^{-xy}| \leq 1$, x, $y \geq 0$, она убывает по x при любом фиксированном $y \geq 0$.

Применяя теорему о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра, получаем, что $F(y)$ — непрерывная функция и интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = F(0) = \lim_{y \to 0+} F(y).$$

Теперь рассмотрим $\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{-xy} \frac{\sin x}{x} \right) dx = -\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx$. Отметим, что при $y = 0$ последний интеграл расходится, но для любого $y_0 > 0$ интеграл сходится равномерно на $[y_0; +\infty)$. Действительно, при $x \geq 0$, $y \geq y_0 > 0$ имеем $|e^{-xy} \sin x| \leq e^{-xy} \leq e^{-xy_0}$. Интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy_0} dx = - \left. \frac{e^{-xy_0}}{y_0} \right|_{x=0}^{+\infty} = \frac{1}{y_0}$$

сходится. По признаку Вейерштрасса интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx$ сходится равномерно на $[y_0; +\infty)$. Поэтому к несобственному интегралу $F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$ можно применить теорему о дифференцировании по параметру. С учетом того, что y_0 — любое положительное число, имеем при $y > 0$

$$F'(y) = -\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Тогда $F(y) = -\operatorname{arctg} y + C$. Докажем, что $\lim_{y \to +\infty} F(y) = 0$. Действительно,

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx = \frac{1}{y} \to 0, \quad y \to +\infty,$$

так как $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что

$$0 = \lim_{y \to +\infty} (-\operatorname{arctg} y + C) = -\pi/2 + C,$$

т. е. $C = \pi/2$. Итак, $F(y) = \pi/2 - \operatorname{arctg} y$ и интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{y \to 0} (\pi/2 - \operatorname{arctg} y) = \pi/2.$$

3 Функциональные ряды

3.1 Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Критерий Коши.

Рассмотрим формальную сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots,$$

где $f_n(x)$ — некоторая функция, заданная на множестве X. Эта сумма называется функциональным рядом. Говорят, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится поточечно, если для любого $x \in X$ числовой ряд сходится.

Говорят, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно на X, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится поточечно на X.

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется равномерно сходящимся на множестве X, если последовательность его частичных сумм $\sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ сходится равномерно на X (к $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$). Пусть $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, тогда равномерная сходимость ряда означает, что $S(x) - S_N(x) \rightrightarrows 0$, $N \to \infty$, т.е. остаток $r_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows 0$ на X.

Теорема (Критерий Коши). *Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на X тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists M = M(\varepsilon)\colon \forall m \geq n \geq M\ \ \forall x \in X\ \ \left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon$.*

Доказательство. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно тогда и только тогда, когда последовательность $S_N(x)$ сходится равномерно. По критерию Коши равномерной сходимости последовательности функций это равносильно тому, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists M = M(\varepsilon)\colon \forall m \geq$

$n \geq M$ $\forall x \in X$ $|S_m(x) - S_{n-1}(x)| < \varepsilon$. Но $S_m(x) - S_{n-1}(x) = \sum_{k=n}^{m} f_k(x)$. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Его частичные суммы

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} x^n = \frac{x - x^{N+1}}{1-x} \to \frac{x}{1-x},$$

если $|x| < 1$. Однако ряд не сходится равномерно на $(-1;1)$, так как

$$\sup_{|x|<1} \left| \frac{x - x^{N+1}}{1-x} - \frac{x}{1-x} \right| = \sup_{|x|<1} \left| \frac{x^{N+1}}{1-x} \right| = +\infty.$$

Если же рассмотреть сходимость ряда на множестве $\{|x| < q\}$, где $q < 1$ — фиксированное число, то сходимость будет равномерной, так как

$$\sup_{|x|<q} \left| \frac{x - x^{N+1}}{1-x} - \frac{x}{1-x} \right| = \sup_{|x|<q} \left| \frac{x^{N+1}}{1-x} \right| = \frac{q^{N+1}}{1-q} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Замечание. Критерий Коши означает, что при равномерной сходимости $\sup_X |S_m(x) - S_{n-1}(x)| \to 0$, т.е. $\sup_X |\sum_{k=n}^{m} f_n(x)| \to 0$, m, $n \to \infty$. В частности, беря $m = n$, получаем

Следствие. *Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на X, то $\sup_X |f_n(x)| \to 0$, $n \to \infty$.*

3.2 Равномерная сходимость функциональных рядов и непрерывность

Теорема 1. *Пусть X — топологическое пространство, f_n — непрерывные функции на X и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на X. Тогда сумма ряда $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ является непрерывной функцией на X.*

Доказательство. По определению ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на X тогда и только тогда, когда частичные суммы сходятся равномерно на X. Функции $S_N(x)$ непрерывны на X как конечные суммы непрерывных на X функций. Следовательно, $S(x)$ непрерывна на X как равномерный предел непрерывных на X функций.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$, $x \in [0;1]$. Имеем $S_N(x) = (1-x)(x+x^2+x^3+\ldots+x^N) = x - x^{N+1}$. При $N \to \infty$ имеем

$$S_N(x) \to S(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1), \\ x-1, & x = 1. \end{cases}$$

Члены ряда $(1-x)x^n$ являются непрерывными функциями, а сумма ряда $S(x)$ разрывна в точке $x = 1$. Следовательно, ряд не может сходиться равномерно на $[0;1]$.

Теорема Дини. *Пусть X — компактное топологическое пространство, функции f_n неотрицательны и непрерывны на X. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на X и его сумма является непрерывной функцией на X. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на X.*

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$. Так как функции $f_n(x)$ непрерывны и неотрицательны, функции $S_N(x)$ непрерывны и последовательность $S_N(x)$ монотонно возрастает для любого фиксированного x. Кроме того, $S_N(x)$ сходится поточечно к $S(x)$, $N \to \infty$, где $S(x)$ непрерывна на множестве X. По теореме Дини для последовательностей функций $S_N(x)$ сходится к $S(x)$ равномерно на X. Это означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на X.

3.3 Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема 1 (признак Вейерштрасса). *Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Предположим, что для любого $x \in X$ имеют место неравенства $|f_n(x)| \le \alpha_n$, $n \ge 1$. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на X.*

Доказательство. Абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ следует из признака сравнения для числовых рядов. Докажем равномерную сходимость на X. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По критерию Коши для числовых рядов $\exists N\colon \forall m \ge n \ge N$ $\sum_{k=n}^{m} \alpha_k < \varepsilon$. Тогда $\forall m \ge n \ge N$ $\forall x \in X$

$\sum_{k=n}^{m}|f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{m}\alpha_k < \varepsilon$. По критерию Коши функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на X.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$. Так как $\frac{1}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Лемма. *Пусть последовательность g_n неотрицательна и монотонно убывает, а последовательность F_n удовлетворяет условию $|F_n(x)| \leq M$, $n \geq 0$, для некоторого $M > 0$. Тогда*

$$\left|\sum_{k=n}^{m}(F_k - F_{k-1})g_k\right| \leq 2Mg_n, \quad \forall m \geq n \geq 1.$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{k=n}^{m}(F_k - F_{k-1})g_k = \sum_{k=n}^{m}F_kg_k - \sum_{k=n}^{m}F_{k-1}g_k = \sum_{k=n}^{m}F_kg_k - \sum_{k=n-1}^{m-1}F_kg_{k+1} =$$

$$= \sum_{k=n}^{m}F_kg_k - \sum_{k=n}^{m}F_kg_{k+1} + F_mg_{m+1} - F_{n-1}g_n = \sum_{k=n}^{m}F_k(g_k - g_{k+1}) + F_mg_{m+1} - F_{n-1}g_n.$$

Следовательно, по неравенству треугольника

$$\left|\sum_{k=n}^{m}(F_k - F_{k-1})g_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m}|F_k|\,|g_k - g_{k+1}| + |F_m|\,|g_{m+1}| + |F_{n-1}|\,|g_n| \leq$$

$$\leq M\left(\sum_{k=n}^{m}(g_k - g_{k+1}) + g_{m+1} + g_n\right) = M(g_n - g_{m+1} + g_{m+1} + g_n) = 2Mg_n.$$

Теорема 2 (признак Дирихле). *Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ сходится равномерно на X, если выполняются следующие условия:*

1) *существует константа $M > 0$ такая, что $\forall N \geq 1\ \forall x \in X$*

$$\left|\sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right| \leq M;$$

2) *последовательность $g_n(x)$ убывает для любого $x \in X$;*

3) $g_n(x) \rightrightarrows 0$, $n \to \infty$, *на* X.

Доказательство. Пусть $F_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$. Тогда $\forall N \geq 1\ \forall x \in X$ выполняется неравенство $|F_N(x)| \leq M$. Так как $g_n(x) \rightrightarrows 0$, $n \to \infty$, для любого $\varepsilon > 0$ $\exists N\colon \forall n \geq N$ $\forall x \in X$ выполняется неравенство $|g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Используя лемму, получаем что $\forall m \geq n \geq N$ $\forall x \in X$

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)g_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n}^{m}(F_k(x) - F_{k-1}(x))g_k(x)\right| \leq 2Mg_n(x) < 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

По критерию Коши функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ сходится равномерно на X.

Теорема 3 (признак Абеля). *Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ сходится равномерно на X, если выполняются следующие условия:*

1) *функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на X;*

2) *последовательность $g_n(x)$ убывает для любого $x \in X$;*

3) *существует константа $C > 0$ такая, что $\forall n \geq 1$ $\forall x \in X$ $|g_n| \leq C$.*

Доказательство. Так как функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на X, по критерию Коши $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N\colon \forall m,\ n\colon m \geq n \geq N$ $\forall x \in X$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2C}. \qquad (*)$$

Фиксируем число $n \geq N$. Пусть $\widetilde{F}_k(x) = \sum_{i=n}^{k} f_k(x)$, $k \geq n$, $\widetilde{F}_{n-1} = 0$. Тогда в силу $(*)$ имеем $|\widetilde{F}_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2C}$, $k \geq n$, $x \in X$. Применяя лемму, получаем, что при $m \geq N$

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)g_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n}^{m}(\widetilde{F}_k(x) - \widetilde{F}_{k-1}(x))g_k\right| \leq 2\frac{\varepsilon}{2C}|g_n(x)| \leq \varepsilon.$$

По критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ сходится равномерно на X.

3.4 Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных рядов

Теорема 1. *Пусть функции f_n непрерывно дифференцируемы на ограниченном числовом промежутке I. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится* *по крайней мере в одной точке промежутка I и ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно на I. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на I и его сумма S непрерывно дифференцируема на I, причем $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$, $x \in I$.*

Замечание. Последнее равенство можно записать в виде

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

При этом говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ можно почленно дифференцировать.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Из условий теоремы следует, что $S_n(x)$ сходится в некоторой точке из промежутка I. Имеем: последовательность $S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)$ сходится равномерно на I. Тогда по теореме о дифференцировании последовательности функций $S_n(x)$ сходится равномерно на I к дифференцируемой функции $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ и

$$S'(x) = \lim_{n\to\infty} S_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x).$$

Теорема 2. *Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ составлен из интегрируемых на отрезке $[a;b]$ функций и сходится равномерно на $[a;b]$ интегрируемой на $[a;b]$ функции f. Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

В частности, утверждается, что последний ряд сходится.

Замечание. Последнее равенство можно записать в виде

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

При этом говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ можно почленно интегрировать.

Доказательство. Пусть $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Функции $S_n(x)$ интегрируемы и равномерно сходятся к f на $[a;b]$. ПО теореме о предельном переходе под знаком интеграла получаем, что $\int_a^b S_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$, $n \to \infty$. Но $\int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x)dx$. Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^\infty \int_a^b f_k(x)dx$ сходится и его сумма равна $\int_a^b f(x)dx$.

Теорема 3. *Пусть ряд $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ составлен из непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций и сходится равномерно на $[a;b]$ к функции f. Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^\infty \int_c^x f_n(t)dt$$

сходится равномерно на $[a;b]$ к функции $\int_c^x f(t)dt$, где c — произвольная точка из $[a;b]$.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что f непрерывна на отрезке $[a;b]$. Пусть $F_n(x) = \int_c^x f_n(t)dt$, $F(x) = \int_c^x f(t)dt$. Тогда

$$F_n'(x) = f_n(x), \quad F'(x) = f(x), \quad x \in [a;b].$$

Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^\infty F_n(x)$. Ряд $\sum_{n=1}^\infty F_n'(x)$ сходится равномерно, а ряд $\sum_{n=1}^\infty F_n(c)$ сходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^\infty F_n(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$ и его сумма $S(x)$ такова, что $S'(x) = f(x)$, причем $S(c) = 0$. По формуле Ньютона-Лейбница получаем, что $S(x) = \int_c^x f(t)dt = F(x)$.

4 Степенные ряды

4.1 Радиус сходимости степенного ряда. Интервал и область сходимости

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots.$$

При этом говорят, что ряд записан в точке x_0, а a_n называется n-м коэффициентом ряда.

Радиусом сходимости ряда $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n$ называется число

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad (*)$$

Отметим, что $0 \le R \le +\infty$.

Теорема. *Если $R = 0$, то степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ сходится только при $x = 0$. Если $R = +\infty$, то степенной ряд сходится при любом $x \in \mathbb{R}$. Если $0 < R < +\infty$, то степенной ряд сходится на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ и расходится при $|x - x_0| > R$. В точках $x = x_0 \pm R$ ряд может как сходиться, так и расходиться.*

Доказательство. Любой степенной ряд сходится при $x = x_0$. Пусть $x \ne x_0$. Применим к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ радикальный признак Коши. Имеем

$$q = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} - |x - x_0| \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x - x_0|}{R}.$$

Если $|x - x_0| < R$, то $q < 1$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x - x_0)^n|$ сходится, поэтому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ сходится абсолютно. Если $|x - x_0| > R$, то $q > 1$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x - x_0)^n|$ расходится, причем его n-й член стремится к $+\infty$. Следовательно, $a_n(x - x_0)^n$ не стремится к нулю, и ряд расходится $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Если $|x - x_0| = R$, то возможна как сходимость, так и расходимость (см. примеры ниже). Теорема доказана.

Интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Множество точек I, где сходится степенной ряд, называется областью сходимости этого ряда. Если $R = +\infty$, то $I = \mathbb{R}$. Если $0 < R < +\infty$, то $(x_0 - R; x_0 + R) \subset I \subset [x_0 - R; x_0 + R]$. Следовательно, область сходимости может отличаться от интервала не более чем на две точки — концы интервала $x = x_0 \pm R$.

Примеры. 1) Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$. Имеем

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Ряд сходится только при $x = 0$.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Имеем

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Следовательно, ряд сходится для любого $x \in \mathbb{R}$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$.

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} [n]\sqrt{n} = 1.$$

Интервал сходимости — $(-1;1)$. При $x = 1$ имеем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, который сходится как ряд Лейбница. При $x = -1$ имеем гармонический ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится.

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^\lambda}$. Имеем $R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\lambda} = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^\lambda = 1$. Интервал сходимости — $(-1;1)$. Рассмотрим сходимость на концах интервала. При $x = 1$: ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}$ сходится при $\lambda > 1$. При $x = -1$: ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\lambda}$ сходится при $\lambda > 0$.

5) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. $R = \lim)_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$. Интервал сходимости — $(-1;1)$. При $x = 1$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ расходится, при $x = -1$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ также расходится.

Формула $(*)$ называется формулой Коши-Адамара.

Теорема. *Если существует*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R \qquad (**)$$

, то радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ равен R.

Доказательство. Пусть $x \neq x_0$. Применим к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x-x_0)^n|$ признак Даламбера. Пусть

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}|}{|a_n (x - x_0)^n|} = |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x - x_0|}{R}.$$

Если $|x-x_0| < R$, то $q < 1$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ сходится по признаку Даламбера. Следовательно, наш ряд сходится абсолютно. Если $|x-x_0| > R$, то $q > 1$ и $|a_n(x - x_0)^n| \to +\infty$, $n \to \infty$. Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ расходится.

Формула $(**)$ называется формулой Даламбера.

Пример. Рассмотрим ряд $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$. По формуле Коши-Адамара радиус сходимости ряда равен 1. Однако формула Даламбера не применима, так как не существует предела $(**)$: $\left|\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}\right| = +\infty$, $\left|\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}\right| = 0$.

4.2 Операции над степенными рядами

Пусть даны два степенных ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$. Можно определить сумму, разность и произведение рядов как $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(x-x_0)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k bn-k$.

Теорема. *Пусть R_1 и R_2 — радиусы сходимости степенных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$. Пусть $R = \min\{R_1, R_2\} > 0$. Тогда сумма, разность и произведение этих рядов сходится абсолютно при $|x-x_0| < R$.*

Доказательство. Для суммы и разности доказательство очевидно. Рассмотрим случай произведения. Если $|x-x_0| < R$, то ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ сходятся абсолютно. поэтому произведение сходится абсолютно по теореме Мертенса.

4.3 Непрерывность суммы степенного ряда

Теорема 1. *Степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, лежащем в интервале сходимости.*

Доказательство. Пусть радиус R сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ — положительное число. Рассмотрим любой отрезок $[a;b] \subset (x_0-R; x_0+R)$. Существует $r < R$ такое, что для любого $x \in [a;b]$ имеем $|x-x_0| \le r$. Имеем $|a_n(x-x_0)^n| \le |a_n|r^n$, $n \ge 0$. Степенной ряд сходится абсолютно в точке $x = x_0 + r$, лежащей в интервале сходимости, т. е. сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n$. Из признака Вейерштрасса следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ сходится равномерно на $[a;b]$.

Теорема 2. *Сумма степенного ряда является непрерывной функцией в интервале сходимости.*

Доказательство. Фиксируем любую точку x из $(x_0-R; x_0+R)$. Докажем, что сумма степенного ряда непрерывна в этой точке. Поместим x вместе с малой окрестностью в отрезок $[a;b]$, лежащий в интервале сходимости. По теореме 1 ряд сходится равномерно на $[a;b]$. Члены ряда $a_n(x-x_0)^n$ являются непрерывными функциями, поэтому сумма является непрерывной на $[a;b]$ в силу равномерной сходимости.

Теорема 3 (теорема Абеля). *Если радиус сходимости* $0 < R < +\infty$ *и степенной ряд сходится в точке* $x = x_0 + R$ *(*$x = x_0 - R$*), то ряд сходится равномерно на отрезке* $[x_0; x_0+R]$ *(*$[x_0-R; x_0]$*). В частности, сумма ряда является непрерывной функцией на отрезке* $[x_0; x_0+R]$ *(*$[x_0 - R; x_0]$*).*

Доказательство. Рассмотрим $x = x_0+R$. Их сходимости ряда в этой точке следует, что сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$. Это — числовой ряд, поэтому он сходится равномерно но x на $[x_0; x_0 + R]$. Представим наш степенной ряд в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x - x_0}{R}\right)^n .$$

Имеем $\left|\frac{x-x_0}{R}\right| \leq 1$, если $x \in [x_0; x_0 + R]$. Величина $\left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n$ монотонна по n при любом фиксированном x. Следовательно, по признаку Абеля степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ сходится равномерно на $[x_0; x_0 + R]$.

Упражнение. Докажите, что если сходятся ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, являющийся их произведением, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$. Указание: перейдите к степенным рядам.

4.4 Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Теорема 1. *Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости, т.е. если* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$*,* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$*, то сумма ряда* $f(x)$ *является дифференцируемой функцией на* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *и*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R). \qquad (*)$$

Доказательство. Пусть $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Поместим точку x в симметричный относительно точки x_0 отрезок $[x_0 - r, x_0 + r] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ как внутреннюю точку. Так как

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

то радиус сходимости ряда, получающегося почленным дифференцированием, совпадает с радиусом сходимости исходного ряда. Следовательно, ряд $(*)$ сходится равномерно на $[x_0 - r, x_0 + r]$ по теореме 1 из предыдущего пункта. Так как исходный ряд сходится на $(x_0 - R, x_0 + R)$, по теореме о почленном дифференцировании функциональных рядов $f(x)$ является дифференцируемой функцией на $(x_0 - R, x_0 + R)$ и справедливо равенство $(*)$.

Следствие. *Сумма степенного ряда является бесконечно дифференцируемой функцией в интервале сходимости.*

Теорема 2. *Степенной ряд можно почленно интегрировать в интервале сходимости, т.е. если $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, то $\forall x \in (x_0 + R; x_0 - R)$*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x - x_0)^{n+1}}{n+1}. \qquad (**)$$

Более того, если степенной ряд сходится в точке $x = x_0 + R$ ($x = x_0 - R$), то равенство $(**)$ справедливо и для этой точки. При этом радиус сходимости ряда в правой части $(**)$ совпадает с радиусом сходимости исходного ряда.

Доказательство. Пусть $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$, тогда степенной ряд сходится равномерно на отрезке с концами x_0 и x. Следовательно, можно применить теорему почленном интегрировании функционального ряда, откуда следует $(**)$. Если исходный ряд сходится в точке точке $x = x_0 + R$ ($x = x_0 - R$), то опять-таки он сходится равномерно на отрезке с концами x_0 и x и имеет место $(**)$.

Наконец, радиус сходимости ряда в правой части $(**)$ равен

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \frac{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

4.5 Ряд Тейлора. Аналитические функции.

Пусть функция f бесконечно дифференцируема в точке x_0. Рядом Тейлора функции f в точке x_0 называется степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, где $a_n = \frac{f^{(n)(x_0)}}{n!}$. Предположим, что радиус сходимости ряда Тейлора функции

f равен $R > 0$. Тогда при $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ можно определить сумму этого ряда $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Возникает вопрос: когда сумма ряда $S(x)$ совпадает с $f(x)$? Следующий пример показывает, что ответ не всегда положителен.

Пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ \qquad 0 & x = 0. \end{cases}$$

Докажем, что функция бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$ и все производные функции f в точке $x = 0$ равны 0. При $x \neq 0$ производная $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$. В точке $x = 0$ имеем, с использованием замены переменных и правила Лопиталя,

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^{t^2}} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0.$$

Аналогично $f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4} \right) e^{-1/x^2}$,

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}}{x} = 2 \lim_{t \to \infty} \frac{t^4}{e^{t^2}} = 0.$$

Точно также показываем что $f^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, ряд Тейлора функции f в точке $x = 0$ состоит из нулей, т.е. $S(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $f(x) \neq S(x)$, $x \neq 0$.

Функция f называется аналитической в точке $x = x_0$, если в некоторой окрестности этой точки сумма ряда Тейлора функции f, записанного в точке x_0, совпадает с $f(x)$.

Если функция f бесконечно дифференцируема в точке x_0, то для любого $n \in \mathbb{N}$ можно записать формулу Тейлора n-го порядка: $f(x) = S_n(x) + r_n(x)$, где $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$, и, как и выше, $a_k = \frac{f^{(k)(x_0)}}{k!}$. Нетрудно заметить, что $S_n(x)$ являются частичными суммами ряда Тейлора, поэтому $f(x) = S(x)$ тогда и только тогда, когда остаток $r_n(x) \to 0$, $n \to \infty$. Итак, доказана

Теорема 1. *Функция f является аналитической в точке x_0 тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности этой точки $r_n(x) \to 0$, $n \to \infty$.*

Теперь сформулируем достаточное условие аналитичности функции f в точке, следующее непосредственно из теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $M_n = \sup_{x \in I} |f^{(n)}(x)|$, *где* I — δ*-окрестность точки* x_0. *Если* $\frac{M_n}{n!}\delta^n \to 0$, $n \to \infty$, *то ряд Тейлора функции* f *в точке* x_0 *сходится к* f *в* δ*-окрестности точки* x_0 *и, следовательно, функция* f *является аналитической в точке* x_0.

Пусть теперь задан некоторый степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ с радиусом сходимости $R > 0$ и S — его сумма в интервале сходимости.

Теорема 3. *Степенной ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *является рядом Тейлора своей суммы* S.

Доказательство. Имеем $S(x_0) = a_0$. По теореме о почленном дифференцировании степенных рядов имеем в интервале сходимости

$$S'(x) = a_1 + 2a_2(x-x)^2 + 3(x-x_0)^3 + \ldots,$$

поэтому $S'(x_0) = a_1$. Аналогично, дифференцируя еще раз, получаем

$$S'(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x-x_0) + \ldots,$$

и $S''(x_0) = 2a_2$. Продолжая далее получаем

$$S^n(x) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1a_n + (n+1) \cdot n \cdot \ldots \cdot 2a_{n+1}(x-x_0) + \ldots,$$

поэтому $S^n(x_0) = n!a_n$ и $a_n = \frac{S^{(n)(x_0)}}{n!}$. Последнее означает, что степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ является рядом Тейлора своей суммы S.

Функция f называется аналитической на интервале $(a;b)$, если она аналитическая в любой точке этого интервала.

Отметим некоторые свойства аналитических функций.

1) Сумма, разность произведение функций, аналитических в точке x_0 (на $(a;b)$) является аналитической функцией в точке x_0 (на $(a;b)$).

2) Если f, g — аналитические в точке x_0 (на $(a;b)$) функции и $g(x) \neq 0$ в точке x_0 (на $(a;b)$), то частное f/g является аналитической функцией в точке x_0 (на $(a;b)$).

3) Если функция f аналитична в точке x_0 и функция g аналитична в точке $f(x_0)$, то суперпозиция $g \circ f$ является непрерывной в точке x_0.

4.6 Разложение в ряд Тейлора некоторых элементарных функций

1) $y = e^x$. Имеем $y^{(n)}(x) = e^x$, поэтому $y^{(n)}(0) = 1$ и $a_n = \frac{1}{n!}$. Ряд Тейлора функции в точке $x = 0$ имеет вид

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Докажем, что сумма этого ряда совпадает с e^x для любого $x \in \mathbb{R}$. Отметим, что радиус сходимости ряда

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1/n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Имеем для любого $r > 0$ $M_n = \sup_{|x|\le r} |y^{(n)}(x)| = \sup_{|x|\le r} e^x = e^r$. Так как $\frac{M_n}{n!}\delta^n = \frac{e^r}{n!}\delta^n \to 0$, $n \to \infty$, то по теореме 2 имеем

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

для любого $x \in [-r; r]$. Так как r — любое положительное число, то это равенство имеет место для любого $x \in \mathbb{R}$.

2) $y = \sin x$. Имеем $y'(x) = \cos x$, $y''(x) = -\sin x$, $y'''(x) = -\cos x$, $y^{IV}(x) = \sin x$, ... Для любого $n \in \mathbb{N}$ получаем $y^{(n)}(x) = \sin(x + n\pi/2)$. Поэтому для любого числового промежутка вида $I = [-\delta; \delta]$ имеем $M_n = \sup_I |y^{(n)}(x)| \le 1$. Тогда $0 \le \frac{M_n}{n!}\delta^n \le= \frac{1}{n!}\delta^n \to 0$, $n \to \infty$. По теореме 2 получаем, что ряд Тейлора функции $y = \sin x$ сходится к значению $\sin x$ в любой точке $x \in \mathbb{R}$. С учетом равенств

$$y^{(n)}(0) = \sin(n\pi/2) = \begin{cases} 0, & n \text{ — четное,} \\ (-1)^k, & n = 2k+1, \end{cases}$$

получаем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

$x \in \mathbb{R}$. Отметим, что радиус сходимости ряда равен, разумеется, $+\infty$.

3) $y = \cos x$. Дифференцируя почленно разложение функции $y = \sin x$, получаем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

$x \in \mathbb{R}$.

4) Для любого комплексного z определим функции

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots.$$

Тогда

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \ldots + \frac{(iz)^n}{n!} + \ldots =$$

$$= 1 + iz + -\frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \ldots + \ldots = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\right) +$$

$$\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\right) = \cos z + i \sin z.$$

Итак, $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (формула Эйлера).

5) При $|x| < 1$ из формулы суммы геометрической прогрессии получаем

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots,$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots.$$

6) Обобщенный бином. Пусть $y = (1+x)^\alpha$. Имеем $y'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $y''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \ldots$, $y^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Таким образом, $y(0) = 1$, $y'(0) = \alpha$, $y''(0) = \alpha(\alpha-1), \ldots$, $y^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$. Ряд Тейлора функции $y = (1+x)^\alpha$ имеет вид

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots. \quad (*)$$

Если α — натуральное число, то все члены ряда, начиная с некоторого номера равны нулю и ряд сходится к $(1+x)^\alpha$ в силу формулы бинома Ньютона. Если $\alpha \neq 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, то по формуле Даламбера радиус сходимости ряда

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| = 1.$$

Обозначим через $S(x)$ сумму ряда $(*)$. Покажем, что $S(x) = (1+x)^\alpha$, $|x| < 1$. Имеем

$$S'(x) = \alpha + \alpha(\alpha-1)x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!} + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots,$$

откуда

$$(1+x)S'(x) = S'(x) + xS'(x) = \alpha + \alpha(\alpha-1)x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots + \alpha x + \alpha(\alpha-1)x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^n + \dots = \alpha + \alpha^2 x + \frac{\alpha^2(\alpha-1)}{2!}x^2 +$$

$$+ \frac{\alpha^2(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha^2(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots = \alpha S(x).$$

Мы показали, что функция S удовлетворяет дифференциальному уравнению $(1+x)S'(x) = S(x)$, $|x < 1|$. Решим это уравнение. Имеем

$$\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{\alpha}{1+x} \Longrightarrow \ln S(x) = \alpha \ln(1+x) + C \Longrightarrow S(x) = e^C (1+x)^\alpha.$$

Учитывая, что $S(0) = 1$, получаем, что $C = 0$ и $S(x) = (1+x)^\alpha$.

Упражнение. Исследуйте сходимость ряда $(*)$ при $x = \pm 1$.

7) В силу (5) имеем

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots.$$

Почленно интегрируя это разложение, получаем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots.$$

Отметим, что при $x = 1$ имеем ряд Лейбница

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots.$$

По теореме Абеля сумма ряда является непрерывной функцией в точке $x=1$. Так как $\ln(1+x)$ является непрерывной функцией в точке $x=1$, имеем

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} + \ldots .$$

8) Пусть $y = \operatorname{arctg} x$. Имеем

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Интегрируя почленно этот ряд получаем

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Как и в предыдущем примере имеем при $x=1$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots .$$

9) Пусть $y = \arcsin x$. Тогда

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-x^2)^n, \quad |x| < 1,$$

где

$$a_n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = (-1)^n \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2}}{n!} =$$

$$= (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!}.$$

Таким образом,

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} x^{2n},$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

При $x=1$ получаем

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{1}{2n+1}.$$

10) $y = \sin^2 x$. Имеем

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{2}(1-1+\frac{(2x)^2}{2!}-\frac{(2x)^4}{4!}+\frac{(2x)^6}{6!}-\ldots) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2x)^n}{n!}.$$

11) Пусть $y = \ln\frac{1+x}{1-x}$. Имеем

$$y' = \frac{2}{1-x^2} = 2 + 2x^2 + 2x^4 + \ldots + 2x^{2n} + \ldots, \quad |x| < 1,$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \ldots + \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad |x| < 1.$$

12) $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ (интегральный синус). Имеем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots,$$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

13)

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x/2} =$$

$$= (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \ldots + \frac{x^n}{2^n} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + \ldots + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)x^n + \ldots, \quad |x| < 1.$$

14) Разложим функцию $y = 1/x$ в степенной ряд в точке $x = x_0 \neq 0$. Имеем

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0 + (x - x_0)} = \frac{1}{x_0}\cdot\frac{1}{1 + \frac{x-x_0}{x_0}} =$$

$$= \frac{1}{x_0}\left(1 - \frac{x-x_0}{x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{x_0^2} - \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{x_0^n} + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x_0^{n+1}}(x-x_0)^n.$$

Ряд сходится при $\left|\frac{x-x_0}{x_0}\right| < 1$, т. е. при $|x - x_0| < |x_0|$.

15) Разложим функцию $y = 1/x^2$ в степенной ряд в точке $x = x_0 \neq 0$. Дифференцируя предыдущее разложение, получаем

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x_0^{n+1}}\,n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{x_0^{n+1}}(n+1)(x-x_0)^n.$$

16) Рассмотрим функцию $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{n!}$. Этот ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса, т. к. $\left|\frac{\sin(2^n x)}{n!}\right| \leq \frac{1}{n!}$, а числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится. Так как члены ряда непрерывны, функция f непрерывна. Дифференцируя почленно этот ряд, получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cos(2^n x)}{n!}$. Этот ряд также сходится равномерно, так как числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ сходится. Следовательно, сумма этого ряд является производной $f'(x)$. Аналогично получаем

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} \sin(2^n x)}{n!},$$

и т. д.,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{kn} \sin(2^n x + k\frac{\pi}{2})}{n!}.$$

Таким образом, функция f бесконечно дифференцируема.

Теперь построим ряд Тейлора функции f в точке $x = 0$. Имеем $f(0) = 0$, $f'(0) = e^2$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$, ..., $f^{(2k)} = 0$, $f^{(2k+1)} = (-1)^k e^{2^{2k+1}}$. Следовательно, ряд Тейлора функции f имеет вид $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{2^{2k+1}}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$. Применим к исследованию сходимости этого ряда признак Даламбера. Имеем

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{e^{2^{2k+3}}}{(2k+3)} x^{2k+3} : \frac{e^{2^{2k+1}}}{(2k+1)} x^{2k+1} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{2^{2k+3} - 2^{2k+1}}}{(2k+2)(2k+3)} |x^2| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{e^{3\cdot 2^{2k+1}}}{(2k+2)(2k+3)} |x^2| = +\infty,$$

если $x \neq 0$. Таким образом, ряд Тейлора функции f расходится для любого $x \neq 0$.

5 Ряды Фурье в гильбертовых пространствах

5.1 Метрические пространства

Пусть X — некоторое множество и задана функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:

1) $d(x, y) \geq 0$ $\forall x$, $y \in X$ и $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $d(x,y) = d(y,x)$ $\forall x,\ y \in X$ (симметричность);

3) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ $\forall x,\ y,\ z \in X$ (неравенство треугольника).

Пара (X,d) называется метрическим пространством, а функция d — расстоянием или метрикой на X.

Примеры метрических пространств.

1) $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$.

2) $X = \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

3) Пространство l_2 квадратично суммируемых последовательностей. Оно состоит из вещественных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ таких, что $\sum_{n=1}^\infty (x_n)^2 < +\infty$. Метрика вводится по формуле: $d(x,y) = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty (x_n - y_n)^2}$. Нетрудно показать, что это действительно метрика. Проверка условий 1) и 2) очевидна. Докажем, что имеет место неравенство треугольника. Для любого натурального N имеем неравенство треугольника в $\mathbb{R}^N$ (пример 2):

$$\sqrt{\sum_{n=1}^N (x_n - z_n)^2} \le \sqrt{\sum_{n=1}^N (x_n - y_n)^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^N (y_n - z_n)^2}.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ получаем

$$\sqrt{\sum_{n=1}^\infty (x_n - z_n)^2} \le \sqrt{\sum_{n=1}^\infty (x_n - y_n)^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^\infty (y_n - z_n)^2}.$$

Это — требуемое неравенство треугольника в l_2.

4) Рассмотрим пространство непрерывных на компактном множестве X функций $C(X)$. Введем расстояние между непрерывными функциями f и g на X: $d(f,g) = \max_{x\in X} |f(x) - g(x)|$. По теореме Вейерштрасса этот максимум существует. Проверим, что так введенная функциям удовлетворяет условиям 1)–3). Условия 1) и 2) очевидны. Установим справедливость неравенства треугольника. Фиксируем $x \in X$. Тогда в силу неравенства треугольника для чисел

$$|f(x) - h(x)| \le |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \le$$

$$\le \max_{t\in X} |f(t) - g(t)| + \max_{t\in X} |g(t) - h(t)| = d(f,g) + d(g,h).$$

Итак, $|f(x)-h(x)| \leq d(f,g)+d(g,h)$ для любого $x \in X$. Учитывая, что правая часть последнего неравенства не зависит от x, получаем $d(f,h) = \max_{x\in X}|f(x)-g(x)| \leq d(f,g)+d(g,h$.

В качестве X можно взять и отрезок $[a;b]$. В этом случае соответствующее пространство обозначается $C[a,b]$.

5) Рассмотрим на пространстве непрерывных функций на отрезке $[a;b]$ функцию

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx.$$

Докажите, что что функция d_1 определяет некоторое расстояние на этом пространстве. Еще одна метрика, которую можно определить на пространстве непрерывных на отрезке функций, задается по формуле

$$d_2(f,g) = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

Пусть (X,d) — метрическое пространство. Говорят, что последовательность x_n сходится в этом пространстве к элементу x, если $d(x_n,x) \to 0$, $n\to\infty$.

Последовательность x_n называется фундаментальной в (X,d), если $\forall\varepsilon>0\ \exists N:\ \forall m,\ n\geq N\ \ d(x_m,x_n)<\varepsilon$.

Очевидна

Теорема. *Если последовательность в метрическом пространстве сходится, то она фундаментальна.*

Обратное, вообще говоря, неверно.

Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится. Примеры полных метрических пространств: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $C(X)$, где X компактно (см. теорему ниже).

Примеры неполных метрических пространств: пространство непрерывных на $[a;b]$ функций с интегральной метрикой d_1 или с интегральной метрикой d_2. Чтобы продемонстрировать это, построим фундаментальную последовательность в этом пространстве. которая не сходится ни к какой непрерывной функции. Для простоты рассмотрим отрезок $[0,1]$.

Пусть функция

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1/2, \\ n(x - 1/2), & 1/2 \le x \le 1/2 + 1/n, \\ 1, & 1/2 + 1/n \le x \le 1. \end{cases}$$

Теорема. *Пространство $C(X)$ полно.*

Доказательство. Пусть последовательность $f_n \in C(X)$ и $d(f_n, f_m) \to 0$ при m, $n \to \infty$, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m,\ n \ge N$ $d(f_m, f_n) = \max_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Тогда для любого $x \in X$ при m, $n \ge N$ имеем

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Это означает, что числовая последовательность $f_n(x)$ фундаментальна в $\mathbb{R}$. По критерию Коши последовательность $f_n(x)$ сходится в $\mathbb{R}$. Обозначим ее предел через $f(x)$. Переходя к пределу в $(*)$, получаем

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \tag{$**$}$$

при $n \ge N$. Это неравенство выполняется для любого $x \in X$ и $N = N(\varepsilon)$ не зависит от $x \in X$. Значит, $f_n \rightrightarrows f$ на X. Так как f_n непрерывны на X, то и f непрерывна как равномерный предел последовательности непрерывных функций. Так как $(**)$ выполняется для любого $x \in X$, то $d(f_n, f) = \max_X |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$, $n \ge N$. Следовательно, $f_n \to f$ в $C(X)$ и теорема доказана.

Замечание. В процессе доказательства мы показали, что сходимость в пространстве $C(X)$ равносильна равномерной сходимости.

5.2 Линейные нормированные пространства

Нормированное векторное пространство E над полем Λ (в дальнейшем будем считать, что $\Lambda = \mathbb{R}$ или $\Lambda = \mathbb{C}$) — это линейное векторное пространство над Λ, на котором определена функция $\|\cdot\|$, называемая нормой и удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $\forall x \in E$ $\|x\| \ge 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

2) $\forall x \in E$ $\forall \lambda \in \Lambda$ имеем $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (однородность);

3) $\forall x, y \in E$ справедливо неравенство $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Любое нормированное пространство является метрическим с метрикой $d(x, y) = \|x - y\|$.

Примеры нормированных пространств.

1) $\mathbb{R}$ с нормой $\|x\| = |x|$.

2) $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$.

3) Множество $C(X)$ непрерывных функций на компактном множестве X с нормой $\|f\| = \max_{x\in X}|f(x)|$. Свойства нормы 1) и 2) легко проверяются. Покажем, что имеет место неравенство треугольника. Для любого $x \in X$ имеем $|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \max_{y\in X}|f(y)| + \max_{y\in X}|g(y)| = \|f\| + \|g\|$. Итак, $|f(x) + g(x)| \le \|f\| + \|g\|$, $x \in X$. Следовательно, $\|f + g\| = \max_{x\in X}|f(x) + g(x)| \le \|f\| + \|g\|$.

4) Рассмотрим множество l_p $(p \ge 1)$ последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ таких, что сходится ряд $\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p$. Определим в l_p норму $\|x\| = (\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p)^{1/p}$. Эта норма превращает l_p в линейное нормированное пространство. Важнейший частный случай — $p = 2$.

5) Рассмотрим множество $L_p(a, b)$ $(p \ge 1)$ функций f на отрезке $[a, b]$, таких что функция $|f|^p$ интегрируема (по Лебегу) на $[a, b]$ (по поводу интеграла Лебега см. замечание ниже). Следующая операция превращает $L_p(a, b)$ в линейное нормированное пространство:

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Важнейшие частные случаи — $p = 1$ и $p = 2$.

Замечание 1. Интеграл Лебега является обобщением интеграла Римана. Здесь мы не даем определения интеграла Лебега! Отметим только, что если функция интегрируема по Риману на отрезке, то она интегрируема и по Лебегу и интегралы Римана и Лебега от нее совпадают.

Замечание 2. На самом деле требуется также, чтобы функции из $L_p(a, b)$ были измеримыми. Кроме того, функции, совпадающие во всех точках отрезка, за исключением множества меры нуль по Лебегу, считаются за один элемент пространства $L_p(a, b)$.

Банаховым пространством называется полное линейное нормированное пространство.

5.3 Унитарные пространства

Пусть Λ — полем действительных или комплексных чисел. Линейное пространство U над полем Λ называется унитарным, если оно бесконечномерно и задана функция $(\,\cdot\,, cdot\,) : U \times U \to \Lambda$, удовлетворяющая условиям

1) для любых x, y, $z \in U$ и любых α, $\beta \in \Lambda$ имеем $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$;

2) для любых x, y, $z \in U$ выполняется равенство $(y, x) = \overline{(x, y)}$ (черта сверху означает комплексное сопряжение);

3) для любого $x \in U$ имеем $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$.

При этом функция $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ называется скалярным произведением. Обозначим $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ и назовем $\|x\|$ нормой элемента x.

Упражнение 1. Докажите, что в действительном унитарном пространстве $(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$, а в комплексном — $\mathrm{Re}(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$, $\Im(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$. Таким образом, скалярное произведение можно выразить через норму.

Упражнение 2. Основываясь на результате упражнения 1, докажите, что $f : U_1 \to U_2$ — линейное отображение унитарных пространств и $\|f(x)\|_{U_2} = \|x\|_{U_1}$ для любого $x \in U_1$, то $(f(x_1), f(x_2))_{U_2} = (x_1, x_2)_{U_1}$, x_1, $x_2 \in U_1$.

Теорема (неравенство Коши-Буняковского). *Для любых x, y, $z \in U$ выполняется равенство*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Знак равенства в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда x и y линейно зависимы.

Доказательство. Для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем $0 \leq \|tx + y\|^2 = (tx + y, tx + y) = (tx, tx) + (y, tx) + (tx, y) + (y, y) = t^2(x, x) + t(x, y) + t\overline{(x, y)} + (y, y) = \|x\|^2 t^2 + 2\,\mathrm{Re}(x, y)t + \|y\|^2$. Итак, $\|x\|^2 t^2 + 2\,\mathrm{Re}(x, y)t + \|y\|^2 \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Можно считать, что x, $y \neq \theta$. Тогда $\|x\|^2 \neq 0$ и квадратичный трехчлен имеет дискриминант $D \leq 0$, откуда $D/4 = (\mathrm{Re}(x, y))^2 -$

$\|x\|^2\|y\|^2 \le 0$. Таким образом, $|\operatorname{Re}(x,y)| \le \|x\|\cdot\|y\|$.

Для доказательства неравенства Коши-Буняковского рассмотрим вместо x вектор $e^{-i\theta}x$, где $\theta \in \mathbb{R}$. Тогда в силу доказанного, $|\operatorname{Re}(e^{-i\theta}x,y)| \le \|e^{-i\theta}x\|\cdot\|y\| = \|x\|\cdot\|y\|$. Можно считать, что $(x,y)\ne 0$, иначе неравенство очевидно. Пусть $\theta = -\arg(x,y)$. Тогда $\operatorname{Re}(e^{-i\theta}x,y) = |(x,y)|$ и нужное неравенство установлено. Если в неравенстве Коши-Буняковского имеет место знак равенства, то дискриминант квадратичного трехчлена равен нулю и существует $t\in\mathbb{R}$ при котором этот трехчлен обращается в нуль. Тогда $\|te^{-i\theta}x+y\|^2=0$, откуда $te^{-i\theta}x+y=\theta$. Следовательно, x и y линейно зависимы. Обратно, если $y=\lambda x$, то $|(x,y)| = |(x,\lambda x)| = |\lambda|\cdot|(x,x)| = |\lambda|\cdot\|x\|^2 = |\lambda|\cdot\|x\|\cdot\|x\| = \|x\|\cdot\|\lambda x\| = \|x\|\cdot\|y\|$.

Теперь докажем, что функция $\|\cdot\|$ обладает свойствами абстрактной нормы.

1) $\forall x\in U$ $\|x\|\ge 0$, причем $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=\theta$. Это очевидно.

2) $\forall\lambda\in\Lambda$ $\forall x\in U$ $\|\lambda x\| = (\lambda x,\lambda x)^{1/2} = (\lambda\cdot\overline{\lambda}(x,x))^{1/2} = |\lambda|\cdot\|x\|$.

3) $\forall x,\, y\in U$ $\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) = (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y) = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x,y) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2$, откуда следует неравенство треугольника $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Любое унитарное пространство является нормированным с нормой* $\|x\| = (x,x)^{1/2}$.

Поскольку нормированное пространство является метрическим с расстоянием $\rho(x,y)=\|x-y\|$, в унитарном пространстве U можно ввести метрику и говорить о сходимости по этой метрике.

Теорема 2. *Норма и скалярное произведение в унитарном пространстве являются непрерывными функциями, т. е. если* $x_n\to x$, $y_n\to y$, *то* 1) $\|x_n\|\to\|x\|$; 2) $(x_n,y_n)\to(x,y)$.

Доказательство. 1) Непрерывность норму следует из неравенства треугольника. Имеем $|\,\|x_n\|-\|x\|\,| \le \|x_n-x\|$. Если $x_n\to x$, то $\|x_n-x\|\to 0$ и тогда $|\,\|x_n\|-\|x\|\,|\to 0$. Отсюда следует, что $\|x_n\|\to\|x\|$.

2) Имеем с применением неравенств треугольника и Коши-Буняковского: $|(x_n, y_n) - (x, y)| = |((x_n - x) + x, (y_n - y) + y) - (x, y)| = |(x_n - x, y_n - y) + (x, y_n - y) + (x_n - x, y)| \le |(x_n - x, y_n - y)| + |(x, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \le \|x_n - x\| \, \|y_n - y\| + \|x\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y)| \to 0$ если $x_n \to x$, $y_n \to y$. Поэтому $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Теорема доказана.

Векторы x и y назовем ортогональными в унитарном пространстве U, если $(x, y) = 0$. В случае ортогональности векторов x и y пишем $x \perp y$.

Ортогональной системой в U называется система $\{e_\alpha\}$ векторов из U таких, что $e_\alpha \ne \theta$ для любого α и $(e_\alpha, e_\beta) = 0$, т. е. $e_\alpha \perp e_\beta$, для любых α, β таких, что $\alpha \ne \beta$.

Лемма. *Если $\{e_\alpha\}$ — ортогональная система векторов в U, то $\{e_\alpha\}$ — линейно независимая система.*

Доказательство. Предположим, что некоторые векторы системы e_{α_1}, $e_{\alpha_2}, \ldots, e_{\alpha_n}$ линейно зависимы. Тогда существуют константы λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не все равные нулю такие, что $\lambda_1 e_{\alpha_1} + \lambda_2 e_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n e_{\alpha_n} = 0$. Умножая скалярно обе части последнего равенства на e_{α_k}, $1 \le k \le n$, получаем $\lambda_k = 0$. Таким образом, все $\lambda_k = 0$ — противоречие. Итак, $\{e_\alpha\}$ — линейно независимая система.

Ортогональная система $\{e_\alpha\}$ в унитарном пространстве U называется ортонормированной, если $\forall \alpha \ \ \|e_\alpha\| = 1$. Любая ортогональная система $\{f_\alpha\}$ может быть сделана ортонормированной преобразованием $f_\alpha \mapsto e_\alpha = \frac{f_\alpha}{\|f_\alpha\|}$. Для краткости вместо «ортонормированная система» будем писать «онс».

Пусть $\{e_\alpha\}$ — онс в U. Эта система называется полной в U, если линейная оболочка этой системы $L\{e_\alpha\}$ плотна в U, т. е. замыкание $\overline{L\{e_\alpha\}}$ совпадает с U. Другими словами, $\forall x \in U \ \exists x_n \in L\{e_\alpha\}\colon x)n \to x$, $n \to \infty$.

5.4 Примеры унитарных пространств и онс в них

1) Пространство $\mathbb{C}^n$. Элементами $\mathbb{C}^n$ являются упорядоченные наборы комплексных чисел $z = (z_1, z_2 \ldots, z_n)$. Пусть $x = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2 \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Определим их скалярное произведение по формуле

$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k\overline{y_k}$. Это пространство удовлетворяет всем условиям, входящим в определение унитарного пространства, за исключением одного: оно конечномерно. Следующий пример дает бесконечномерное обобщение пространства $\mathbb{C}^n$.

2) Пространство l_2 квадратично суммируемых последовательностей. Оно состоит из последовательностей $z = (z_1, z_2 \ldots, z_n, \ldots)$ комплексных чисел z_n таких, что $\sum_{k=1}^\infty |z_k|^2 < +\infty$. Введем в l_2 линейные операции сложения и умножения на скаляр. Если $\lambda \in \mathbb{C}$, $z = (z_1, z_2 \ldots, z_n, \ldots)$ и $u = (u_1, u_2 \ldots, u_n, \ldots)$ — векторы из l_2, то, по определению, $\lambda z = (\lambda z_1, \lambda z_2 \ldots, \lambda z_n, \ldots)$, $z+u = (z_1+u_1, z_2+u_2, \ldots, z_n+u_n, \ldots)$. Проверим, что λz и $z + u$ лежат в l_2. Действительно,

$$\sum_{k=1}^\infty |\lambda z_k|^2 = |\lambda|^2 \sum_{k=1}^\infty |z_k|^2 < +\infty,$$

$$\sum_{k=1}^\infty |z_k + u_k|^2 \le \sum_{k=1}^\infty 2(|z_k|^2 + |u_k|^2) = 2\left(\sum_{k=1}^\infty |z_k|^2 + \sum_{k=1}^\infty |u_k|^2\right) < +\infty.$$

Эти операции превращают l_2 в линейное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ (проверьте это!). Роль нулевого играет вектор $\theta = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Введем в l_2 скалярное произведение по правилу $(z, u) = \sum_{k=1}^\infty z_k\overline{u_k}$. Покажем, что последний ряд сходится. Имеем $|z_k\overline{u_k}| = |z_k|\,|u_k| \le \frac{1}{2}(|z_k|^2 + |u_k|^2)$, поэтому $\sum_{k=1}^\infty |z_k\overline{uk}| \le \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^\infty |z_k|^2 + \sum_{k=1}^\infty |u_k|^2\right) < +\infty$. Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^\infty z_k\overline{u_k}$ сходится абсолютно, следовательно, сходится.

Проверим аксиомы скалярного произведения. Имеем

$$(\lambda z, u) = \sum_{k=1}^\infty \lambda z_k\overline{u_k} = \lambda \sum_{k=1}^\infty z_k\overline{u_k} = \lambda(z, u),$$

$$(z + u, v) = \sum_{k=1}^\infty (z_k + u_k)\overline{v_k} = \sum_{k=1}^\infty z_k\overline{v_k} + \sum_{k=1}^\infty u_k\overline{v_k} = (z, v) + (u, v),$$

$$(u, z) = \sum_{k=1}^\infty u_k\overline{z_k} = \sum_{k=1}^\infty \overline{z_k\overline{u_k}} = \overline{\sum_{k=1}^\infty z_k\overline{u_k}} = \overline{(z, u)},$$

$$(z, z) = \sum_{k=1}^\infty z_k\overline{z_k} = \sum_{k=1}^\infty |z_k|^2 \ge 0,$$

причем $(z,z)=0$ тогда и только тогда, когда $z_k=0$, т. е. $z=\theta=(0,0,\ldots,0,\ldots)$.

Рассмотрим систему векторов в l_2

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1,0,0,\ldots,0,\ldots),\\ e_2 & = & (0,1,0,\ldots,0,\ldots),\\ \ldots & . & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ e_n & = & (0,0,0,\ldots,1,\ldots),\\ \ldots & . & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Ясно, что $e_m\perp e_n$, $m\neq n$, и $\|e_n\|=1$. Таким образом, $\{e_n\}$ — онс в l_2.

Система $\{e_n\}$ является полной в l_2. Действительно, покажем, что для любого $x\in l_2$ существует последовательность $y_n\in L\{e_n\}$, сходящаяся к x. Пусть $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$. Рассмотрим последовательность $y_n=\sum_{k=1}^n x_ke_k=(x_1,x_2,\ldots,x_n,0,0,\ldots)$. Тогда $x-y_n=(0,0,\ldots,0,x_{n+1},x_{n+2},\ldots)$ и $\|x-x_n\|^2=\sum_{k=n+1}^\infty|x_k|^2\to 0$, $n\to\infty$, как остаток сходящегося ряда. Следовательно, $y_n\to x$, $n\to\infty$. то означает, что $\overline{L\{e_n\}}=l_2$.

Пространство l_2 является нормированным с нормой $\|z\|=\sqrt{\sum_{k=1}^\infty|x_k|^2}$.

3) Пространство $L_2(a,b)$ — это пространство комплекснозначных измеримых функций f на отрезке $[a;b]$ таких, что функция $|f|^2$ интегрируема по Лебегу на $[a;b]$. Более детально интеграл Лебега будет рассмотрен далее в курсах «Функциональный анализ» или «Действительный анализ». Здесь мы будем пользоваться свойствами этого интеграла без особых обоснований.

Пусть $\alpha\in\mathbb{C}$. Если $f\in L_2(a,b)$, то $\alpha f\in L_2(a,b)$, так как функция $|\alpha f|^2=|\alpha|^2|f|^2$ интегрируема по Лебегу на $[a;b]$. Если f, $g\in L_2(a,b)$, то $|f|^2$ и $|g|^2$ интегрируемы на $[a;b]$, поэтому из неравенства $|f+g|^2\le 2(|f|^2+|g|^2)$ следует, что $|f+g|^2$ интегрируема на $[a;b]$. Операции сложения и умножения на скаляр превращают $L_2(a,b)$ в линейное векторное пространство.

Введем на $L_2(a,b)$ скалярное произведение. Для любых f, $g\in L_2(a,b)$ положим

$$(f,g)=\int_a^b f\overline{g}d\mu. \qquad (**)$$

Это определение корректно. Действительно, $|f\overline{g}| = |f|\,|g| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$, откуда следует, что функция $f\overline{g}$ интегрируема по Лебегу на $[a;b]$.

Проверим, что скалярное произведение, заданное по формуле (**) удовлетворяет всем нужным свойствам. Имеем $(f,f) = \int_a^b f\overline{f}d\mu = \int_a^b |f|^2 d\mu \geq 0$, так как $|f|^2 \geq 0$. Если $(f,f) = 0$, то $\int_a^b |f|^2 d\mu = 0$ и, поскольку функция $|f|^2$ неотрицательна, с использованием свойств интеграла Лебега выводим, что $f = 0$ почти всюду (т. е. за исключением множества меры нуль) на $[a;b]$. Будем не различать функции, которые равны почти всюду. Тогда $f \equiv 0$. Остальные свойства скалярного произведения выполняются очевидным образом.

Как и любое унитарное пространство, $L_2(a,b)$ является нормированным с нормой $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$, т. е.

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f|^2 d\mu\right)^{1/2}.$$

Покажем, что система $\{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}$ является ортогональной в $L_2(0,2\pi)$.

$1 \perp \cos nx$, $n \in \mathbb{N}$. Проверим это. Имеем

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = \left.\frac{\sin nx}{n}\right|_0^{2\pi} = 0$$

Аналогично показываем, что $1 \perp \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$.

$\sin mx \perp \cos nx$, m, $n \in \mathbb{N}$, так как при $m \neq n$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(m+n)x\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(m-n)x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left.\frac{\cos(m+n)x}{m+n}\right|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\left.\frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right|_0^{2\pi} = 0.$$

При $m = n$ вычисления проводятся еще проще.

$\cos mx \perp \cos nx$, m, $n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, так как

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)x\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+n)x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left.\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\left.\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right|_0^{2\pi} = 0.$$

Аналогично $\sin mx \perp \sin nx$, m, $n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$.

Подсчитаем нормы элементов этой ортогональной системы.

Имеем

$$\|1\|^2 = \int_0^{2\pi} 1^2 dx = 2\pi,$$

при $n \in \mathbb{N}$

$$\|\cos nx\|^2 = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2nx) dx = \pi,$$

$$\|\sin nx\|^2 = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos 2nx) dx = \pi.$$

Таким образом, $\|1\| = \sqrt{2\pi}$, $\|\cos nx\| = \|\sin nx\| = \sqrt{\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Итак, следующая система является онс: $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin nx}{\sqrt{2\pi}}, \ldots\}$

5.5 Сепарабельные унитарные пространства. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Теорема. *Пусть $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — некоторая система линейно независимых векторов в унитарном пространстве U. Тогда в U существует счетная ортогональная система $\{e_n\}$ такая, что линейная оболочка $L\{e_n\}$ системы векторов e_n совпадает с линейной оболочкой $L\{f_n\}$ системы векторов f_n.*

Доказательство. Строим систему $\{e_n\}$ по индукции. Пусть $e_1 = f_1$. Будем искать e_2 в виде $e_2 = f_2 - \alpha e_1$. Тогда $(e_1, e_2) = 0 \Longrightarrow (e_2, e_1) = (f_2, e_1) - \alpha(e_1, e_1) = 0$, откуда $\alpha = \frac{(f_2,e_1)}{(e_1,e_1)} = \frac{(f_2,f_1)}{(f_1,f_1)}$. Теперь предположим, что построены векторы e_1, $e_2, \ldots, e_{n-1}$. Будем искать e_n в виде $e_n = f_n - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \ldots - \alpha_{n-1} e_{n-1}$. По предположению индукции e_1, $e_2, \ldots, e_{n-1}$ являются линейными комбинациями векторов f_1, $f_2, \ldots, f_{n-1}$. Поэтому e_n является линейной комбинацией векторов f_1, $f_2, \ldots, f_n$. Обратно, $f_n = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_{n-1} e_{n-1} + e_n$ — линейная комбинация векторов e_k, $1 \leq k \leq n$. Для того, чтобы $e_n \perp e_k$, $1 \leq k \leq n-1$, необходимо и достаточно, чтобы $0 = (e_n, e_k) = (f_n, e_k) - \alpha_1(e_1, e_k) - \alpha_2(e_2, e_k) - \ldots - \alpha_{n-1}(e_{n-1}, e_k) = (f_n, e_k) - \alpha_k(e_k, e_k)$, откуда $\alpha_k = \frac{(f_n,e_k)}{(e_k,e-k)}$.

Следствие. *В любом сепарабельном пространстве существует счетная полная онс.*

Действительно, пусть $\{f_n\}$ — счетная всюду плотная система векторов в ZU. Без ограничения общности можно считать, что система векторов $\{f_n\}$ линейно независима. Примени к этой системе процесс ортогонализации Грама-Шмидта. В результате получим счетную ортогональную систему векторов $\{e_n\}$. При этом, $L\{e_n\} = L\{f_n\}$, откуда $\overline{L\{e_n\}} = \overline{L\{f_n\}} = U$. Наконец, систему $\{e_n\}$ можно нормировать, заменяя e_n на $\frac{e_n}{\|e_n\|}$.

5.6 Коэффициенты Фурье разложения элемента унитарного пространства в ряд Фурье

Пусть U — унитарное пространство, $\{e_n\}$ — счетная онс в нем. Тогда скалярное произведение $c_k := (x, e_k)$ назовем k-м коэффициентом Фурье элемента x по онс $\{e_n\}$.

Лемма. Для любых a_1, $a_2, \dots, a_n$ справедливо неравенство

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\| \geq \|x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\|,$$

где c_k — коэффициенты Фурье элемента x по онс $\{e_n\}$.

Доказательство. Имеем

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\|^2 = (x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k) =$$

$$= (x, x) - 2\operatorname{Re}(x, \sum_{k=1}^{n} a_k e_k) + (\sum_{k=1}^{n} a_k e_k, \sum_{k=1}^{n} a_k e_k) =$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\overline{a_k} + \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{a_k}(e_k, e_k) = \|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} c_k \overline{a_k} + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} c_k \overline{a_k} + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k - a_k|^2 \geq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.$$

Равенство в последнем неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда $a_k = c_k$, $1 \le k \le n$.

Следствие 1.

$$\min_{a_1,\dots,a_n} \|x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\| = \|x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\| = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.$$

Следствие 2 (неравенство Бесселя). Если c_k — коэффициенты Фурье элемента x по счетной онс $\{e_n\}$, то последовательность $c = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots) \in l_2$ и $\|c\|_{l_2} \le \|x\|$, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \le \|x\|^2. \qquad (*)$$

Действительно, из следствия 1 получаем: $\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \ge 0$, т. е. $\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \le \|x\|^2$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Неравенство (*) называется неравенством Бесселя. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ сходится и его сумма $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \le \|x\|^2$. С другой стороны, $\|c\|_{l_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$.

Система $\{e_n\}$ называется замкнутой, если для любого элемента $x \in U$ имеет место равенство $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \le \|x\|^2$, где c_n — коэффициенты Фурье элемента x по онс $\{e_n\}$.

Теорема. *Система $\{e_n\}$ полна тогда и только тогда, когда она замкнута.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что система $\{e_n\}$ полна. Тогда любой элемент x можно представить как предел последовательности некоторых $x_m \in L\{e_n\}$. Пусть $x_m = \sum_{k=1}^{N_m} a_k x_k$. В силу леммы частичные суммы ряда Фурье $x_m = \sum_{k=1}^{N_m} c_k x_k$ элемента x дают лучшее приближение, чем $\sum_{k=1}^{N_m} a_k x_k$. Поэтому $\|x - \sum_{k=1}^{N_m} c_k e_k\|^2 \to 0$, $m \to \infty$. С другой стороны, $\|x - \sum_{k=1}^{N_m} c_k e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{N_m} |c_k|^2 \to 0$, $m \to \infty$. Следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{N_m} |c_k|^2 - \|x\|^2$. Таким образом, для любого элемента x имеет место равенство Парсеваля. Значит, система замкнута.

Достаточность. Пусть система $\{e_n\}$ замкнута. Тогда для любого $x \in U$ имеет место равенство Парсеваля и $\|x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\|^2 = \|x\|^2 -$

$\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 - \sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty}|c_k|^2 \to 0,\ n \to \infty$. Это означает, что элемент x является пределом элементов $x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ из линейной оболочки $L\{e_n\}$. Таким образом, система $\{e_n\}$ полна.

Из доказательства теоремы получаем

Следствие. *Если $\{e_n\}$ — полная онс в унитарном пространстве U, то для любого элемента $x \in H$ его ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ сходится к x.*

5.7 Гильбертовы пространства. Теорема Рисса-Фишера.

Гильбертовым пространством называется полное унитарное пространство.

Теорема (Рисс-Фишер). *Пусть $c = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ — некоторая последовательность из пространства l_2, $\{e_n\}$ — счетная онс в гильбертовом пространстве H. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ сходится в гильбертовом пространстве H к некоторому элементу x, причем c_k является k-м коэффициентом Фурье элемента x.*

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы $S_n := \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Требуется доказать, что последовательность S_n сходится в пространстве H. Для этого достаточно установить, что S_n фундаментальна. При $m > n$ имеем

$$\|S_m - S_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k\|^2 = (\sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k, \sum_{j=n+1}^{m} c_j e_j) = \sum_{k,j=n+1}^{m} (c_k e_k, c_j e_j) =$$

$$= \sum_{k,j=n+1}^{m} c_k \overline{c_j}(e_k, e_j) = \sum_{k,j=n+1}^{m} c_k \overline{c_j}\delta_{kj} = \sum_{k=n+1}^{m} c_k \overline{c_k} = \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2.$$

Так как $c \in l_2$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$ сходится. По критерию Коши $\sum_{k=n+1}^{m}|c_k|^2 \to 0,\ m,\ n \to \infty$. Тогда $\|S_m - S_n\|^2 \to 0,\ m,\ n \to \infty$, т. е. последовательность S_n фундаментальна. В силу полноты H существует предел $\lim_{n\to\infty} S_n = x$. В силу непрерывности скалярного произведения получаем $(x, e_k) = \lim_{n\to\infty}(S_n, e_k)$. Так как при $n \geq k$ имеет место равенство $(S_n, e_k) = (\sum_{k=1}^{n} c_j e_j, e_k) = \sum_{k=1}^{n} c_j (e_j, e_k) = \sum_{k=1}^{n} c_j \delta_{jk} = c_k$, то $(x, e_k) = c_k$.

Два гильбертовых пространства H_1 и H_2 называются изоморфными, если существует изоморфизм $f : H_1 \to H_2$ линейных векторных пространств такой, что $(f(x_1), f(x_2))_{H_1} = (x_1, x_2)_{H_2}$ для любых x_1, $x_2 \in H_1$. Изоморфизм определяет отношение эквивалентности на множестве гильбертовых пространств.

Теорема. *Любое сепарабельно гильбертово пространство H изоморфно l_2.*

Доказательство. Рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство H. По доказанному выше в H существует полная, значит, замкнутая, счетная онс $\{e_n\}$. Рассмотрим отображение $f : H \to l_2$, действующее по правилу $f : x \mapsto c := (c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$, где $c_n = (x, e_n)$ — n-й коэффициент Фурье элемента x. В силу равенства Парсеваля $\|c\|_{l_2} = \|x\|_H$, т. е.

$$\|f(x)\|_{l_2} = \|x\|_H. \tag{$*$}$$

В силу теоремы Рисса-Фишера существует отображение $g : l_2 \to H$, действующее по правилу $c := (c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots) \mapsto x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$. По той же теореме $f \circ g = \mathrm{id}_{l_2}$. Так как ряд Фурье любого элемента по полной онс сходится к этому элементу, имеем $g \circ f = \mathrm{id}_H$. Таким образом, g — отображение, обратное к f и слева и справа. Следовательно, f — биекция. из определения следует, что f — линейное отображение. Таким образом, f — изоморфизм между H и l_2. Равенство (*) означает, что f сохраняет норму. Следовательно, f сохраняет и скалярное произведение. Теорема доказана.

Следствие. *Любые два сепарабельных гильбертовых пространства изоморфны.*

6 Тригонометрические ряды Фурье

6.1 Сходимость тригонометрических рядов Фурье в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$

Рассмотрим пространство $L_2(a, b)$, $b - a = 2\pi$. Все эти пространства изоморфны между собой и получаются друг из друга сдвигом: $f(x) \mapsto$

$f(x+t)$. Поэтому без ограничения общности будем считать, что $a=-\pi$, $b=\pi$.

Как показано выше, тригонометрическая система функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ n \geq 1\right\}$$

является ортонормированной системой в $L_2(-\pi,\pi)$. Ниже мы покажем, что эта система является полной. Ряд Фурье функции f по этой системе имеет вид:

$$\alpha_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\alpha_1\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}+\beta_1\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}+\alpha_2\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}+\beta_2\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}+\ldots,$$

где коэффициенты Фурье вычисляются как скалярное произведение функции f на соответствующий элемент онс:

$$\alpha_n=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}dt, \quad \beta_n=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}dt,$$

$$\alpha_0=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dt.$$

В силу полноты онс этот ряд сходится в пространстве $L_2(-\pi,\pi)$ к элементу f и имеет место равенство Парсеваля:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt=\alpha_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2+\beta_n^2).$$

На практике вместо этой онс используют более простую: $\{1,\ \cos nx$, $\sin nx,\ n\geq 1\}$. Эта система является ортогональной, но не нормированной. Обозначим

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt dt, \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt.$$

Тогда $\alpha_n=\sqrt{\pi}a_n$, $\beta_n=\sqrt{\pi}b_n$, $n\geq 1$, $\alpha_0=\sqrt{2\pi}a_0$ и имеет место равенство

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx. \tag{1}$$

Отметим, что скобки в последней сумме, как правило, не ставят. Равенство Парсеваля в терминах коэффициентов a_n, b_n имеет вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Замечание. Следует отметить, что равенство (1) имеет место в смысле пространства $L_2(-\pi,\pi)$. Поскольку в $L_2(-\pi,\pi)$ две функции, отличающиеся друг от друга на множестве меры нуль по Лебегу, считаются одинаковыми, то из (1) не следует, что в фиксированной точке x равенство это имеет место.

В связи с этим возникают следующие вопросы:

1) При каких условиях на функцию f равенство (1) имеет место в точке $x \in [a,b]$?

2) при каких условиях на функцию f равенство ряд Фурье сходится равномерно к f на $[a,b]$?

Решению этих вопросов будут посвящены следующие пункты.

6.2 Частичные суммы ряда Фурье. Ядро Дирихле.

Рассмотрим частичные суммы ряда $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$. Имеем

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt dt \cos kx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt dt \sin kx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt)\right] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right] dt.$$

Подсчитаем сумму

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos kx}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{(2k+1)x}{2} - \sin\frac{(2k-1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Обозначим

$$D_n(x) = \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\pi\sin\frac{x}{2}}.$$

Функция $D_n(x)$ называется ядром Дирихле.

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)dt.$$

Установим следующий вспомогательный результат.

Лемма. *Если функция f является 2π-периодической на $\mathbb{R}$, то для любых точек a, b выполняется равенство*

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_b^{b+2\pi} f(t)dt.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^{b+2\pi} f(t)dt + \int_{b+2\pi}^{a+2\pi} f(t)dt =$$

$$= \int_a^b f(t)dt + \int_b^{b+2\pi} f(t)dt + \int_b^a f(t+2\pi)dt =$$

$$= \int_a^b f(t)dt + \int_b^{b+2\pi} f(t)dt + \int_b^a f(t)dt = \int_b^{b+2\pi} f(t)dt.$$

Функция D_n является 2π-периодической. Продолжим функцию f до 2π-периодической функции на всю прямую $\mathbb{R}$. Если $f(-\pi) \neq f(\pi)$, то переопределим произвольно f в одной из точек $-\pi$, π, на величину интегралов это не влияет. Тогда

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)dt = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(t+x)D_n(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)D_n(t)dt.$$

Итак,

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)D_n(t)dt.$$

6.3 Ядро Фейера. Теорема Фейера.

Если функция f непрерывна на $[-\pi;\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$, то ее ряд Фурье не обязан сходиться к f, тем более, равномерно. Однако в этом случае средние арифметические частичных сумм ряда Фурье сходятся равномерно к f.

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — некоторый числовой ряд. Обозначим через S_n его n-ю частичную сумму. Рассмотрим средние арифметические $\sigma_n = \frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}$ частичных сумм S_1, $S_2,\ldots,S_n$. Эти величины σ_n называются чезаровскими средними ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Если последовательность σ_n имеет конечный предел S, то говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по Чезаро и его сумма равна S.

Теперь рассмотрим тригонометрический ряд Фурье. Его чезаровские средние равны

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x)+S_1(x)+\ldots+S_{n-1}(x)}{n} =$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t+x)}{\sin\frac{t}{2}}\left[\sin\frac{t}{2}+\sin\frac{3t}{2}+\ldots+\sin\frac{(2n-1)t}{2}\right]dt.$$

Имеем

$$\sin\frac{t}{2}+\sin\frac{3t}{2}+\ldots+\sin\frac{(2n-1)t}{2} =$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{t}{2}+2\sin\frac{t}{2}\sin\frac{3t}{2}+\ldots+2\sin\frac{t}{2}\sin\frac{(2n-1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{(1-\cos t)+(\cos t-\cos 2t)+\ldots+(\cos(n-1)t-\cos nt)}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{1-\cos nt}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Итак,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt.$$

Функция

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi n}\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}$$

называется ядром Фейера.

Свойства ядра Фейера.

1) $\Phi_n(t) \geq 0$, $t \in (-\pi, \pi)$, $t \neq 0$, $n \geq 1$.

2) $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)dt = 1$, $n \geq 1$. Действительно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos nt) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\,dt = 1.$$

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)dt = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}(D_0(t) + D_1(t) + \ldots + D_{n-1}(t))dt =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} D_0(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} D_1(t)dt + \ldots + \int_{-\pi}^{\pi} D_{n-1}(t)dt\right) = 1.$$

3) $\lim_{t\to 0}\Phi_n(t) = \frac{n}{2\pi}$.

4) Для любого $\varepsilon \in (0, \pi)$ последовательность $\Phi_n(t)$ равномерно стремится к 0 на $[-\pi; -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi]$. Действительно,

$$|\Phi_n(t)| \leq \frac{1}{2\pi n\sin^2\frac{\varepsilon}{2}} \to 0,\ n \to \infty,$$

на $[-\pi; -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi]$ при $n \to \infty$.

Теорема Фейера. *Если функция f непрерывна на $[-\pi; \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то чезаровские средние σ_n частичных сумм тригонометрического ряда Фурье этой функции равномерно сходятся к функции f на $[-\pi; \pi]$.*

Доказательство. Так как $f(-\pi) = f(\pi)$, функцию f можно продолжить на всю прямую до непрерывной 2π-периодической функции, которую будем также обозначать через f. Имеем $\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\Phi_n(t)dt$. Кроме того, с учетом свойства 2) функции Φ_n имеем

$$f(x) = f(x)\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\Phi_n(t)dt.$$

Тогда, с учетом свойства 1) функции Φ_n получаем

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}[f(t+x) - f(x)]\Phi_n(t)dt\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi}|f(t+x) - f(x)|\Phi_n(t)dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{-\delta}|f(t+x) - f(x)|\Phi_n(t)dt + \int_{-\delta}^{\delta}|f(t+x) - f(x)|\Phi_n(t)dt +$$

$$+\int_{\delta}^{\pi}|f(t+x)-f(x)|\Phi_n(t)dt. \qquad (*)$$

Функция f непрерывна на отрезке $[-2\pi;2\pi]$. Значит, f равномерно непрерывна. Отметим, что если x, $t\in[-\pi;\pi]$, то x, $x+t\in[-2\pi;2\pi]$ и тогда из равномерной непрерывности следует, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall\ x$, $t\in\in[-\pi;\pi]$ $(|t|<\delta\Rightarrow|f(x+t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2})$. Тогда, с использованием свойств 1) и 2) функции $\Phi_n(t)$, имеем

$$\int_{-\delta}^{\delta}|f(t+x)-f(x)|\Phi_n(t)dt\le\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)dt=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как f непрерывна на $[-2\pi;2\pi]$, существует $M>0:|f(x)|\le M$ $\forall x\in[-2\pi;2\pi]$. Тогда

$$\int_{\delta}^{\pi}|f(t+x)-f(x)|\Phi_n(t)dt\le\int_{\delta}^{\pi}(|f(t+x)|+|f(x)|)\Phi_n(t)dt\le 2M\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)dt.$$

Так как $\Phi_n\rightrightarrows 0$ на $[\delta;\pi]$, последовательность интегралов $\alpha_n=\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)dt\to 0$, $n\to\infty$. Следовательно, $\exists N:\ \forall n\ge N$ $(\alpha_n<\frac{\varepsilon}{8M})$. Тогда при $n\ge N$

$$\int_{\delta}^{\pi}|f(t+x)-f(x)|\Phi_n(t)dt<2M\frac{\varepsilon}{8M}=\frac{\varepsilon}{4}.$$

Подчеркнем что $N=N(\delta)=N(\delta(\varepsilon))$ зависит только от ε и не зависит от x.

Аналогично, при $n\ge N$ получаем неравенство

$$\int_{-\pi}^{\delta}|f(t+x)-f(x)|\Phi_n(t)dt<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Из полученных неравенств и неравенства $(*)$ следует, что $|\sigma_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$ при $x\in[-\pi;\pi]$, $n\ge N$, т. е. $\sigma_n\rightrightarrows f$, $n\to\infty$. Теорема Фейера доказана.

6.4 Теоремы Вейерштрасса о приближении. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.

Тригонометрическим многочленом называется выражение вида $T_N(x)\sum_{k=0}^{N}(a_k\sin kx+b_k\sin kx)$, где a_k и b_k — константы.

Теорема Вейерштрасса о приближении тригонометрическими многочленами. *Если функция непрерывна и* 2π*-периодична на* $\mathbb{R}$*, то существует последовательность тригонометрических многочленов, равномерно сходящаяся на* $\mathbb{R}$ *к функции* f*. Иначе говоря, для любого* $\varepsilon > 0$ *существует тригонометрических многочлен* T_n *такой, что* $|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$ *для любого* $x \in \mathbb{R}$*.*

Доказательство сразу следует теоремы Фейера и того факта, что чезаровские средние частичных сумм тригонометрического ряда Фурье функции f являются тригонометрическими многочленами.

Теперь отметим особенности разложения в тригонометрический ряд Фурье четных и нечетных функций.

Теорема 1. *Если функция а интегрируема по Лебегу на* $[-\pi;\pi]$ *и является четной, то при разложении в ряд Фурье все коэффициенты* b_n *равны нулю, т. е.*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

причем

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx.$$

Доказательство. Имеем

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nxdx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-x)\sin nxdx = 0.$$

Аналогично

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx.$$

Точно так же доказывается

Теорема 2. *Если функция а интегрируема по Лебегу на* $[-\pi;\pi]$ *и является нечетной, то при разложении в ряд Фурье все коэффициенты* a_n *равны нулю, т. е.*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx,$$

причем

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx.$$

Из теоремы Фейера с учетом теорем 1 и 2 можно вывести следствия.

Следствие 1. *Если функция* f *непрерывна на* $[-\pi,\pi]$ *и является четной, то* f *можно представить в виде равномерного предела последовательности тригонометрических многочленов вида* $\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx$, *а если нечетной — то многочленов вида* $\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$.

Следствие 2. *Если функция* f *непрерывна на* $[0,\pi]$, *то*

1) f *можно представить в виде равномерного предела последовательности тригонометрических многочленов вида* $\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx$,

2) в случае, если $f(0) = f(\pi)$, f *можно представить в виде равномерного предела последовательности тригонометрических многочленов вида* $c + \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$.

Доказательство. 1) Любую непрерывную на $[0,\pi]$ функцию можно продолжить четным образом на $[-\pi,\pi]$. Далее применяем следствие 1.

2) Если к тому же $f(0) = f(\pi)$, то функцию $g(x) = f(x) - f(0)$ можно продолжить нечетным образом на $[-\pi,\pi]$, при этом $g(-\pi) = g(\pi) = 0$. В силу следствия 1 g можно представить в виде равномерного предела последовательности тригонометрических многочленов вида $\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$. Тогда f можно представить в виде равномерного предела последовательности тригонометрических многочленов вида $f(0) + \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$.

Многочлены Чебышева.

Рассмотрим функции $P_n(x) = \cos n \arccos x$, где n — неотрицательное целое число. Используя формулы для косинусов кратных углов, получаем $P_0(x) = \cos 0 = 1$, $P_1(x) = \cos\arccos x = x$, $P_2(x) = \cos 2\arccos x = 2x^2 - 1$, $P_3(x) = \cos 3\arccos x = 4x^3 - 3x$. Мы видим, что при $n = 0$, 1, 2, 3 функции $P_n(x)$ являются многочленами от переменной x.

Теорема. *Для любого неотрицательного целого n функция P_n является многочленом от x степени n.*

Доказательство. Пусть $\alpha = \arccos x$, тогда $\cos\alpha = x$. Имеем

$$P_n(x) = \cos n\alpha = \operatorname{Re} e^{in\alpha} = \operatorname{Re}(e^{i\alpha})^n = \operatorname{Re}(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n =$$

$$= \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^{n-k}\alpha (i\sin\alpha)^k = \sum_{j=0}^{[n/2]}(-1)^j C_n^{2j}\cos^{n-2j}\alpha\sin^{2j}\alpha =$$

$$= \sum_{j=0}^{[n/2]}(-1)^j C_n^{2j}\cos^{n-2j}\alpha(1-\cos^2\alpha)^j = \sum_{j=0}^{[n/2]}(-1)^j C_n^{2j} x^{n-2j}\alpha(1-x^2)^j.$$

Теорема Вейерштрасса о приближении алгебраическими многочленами. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то функцию f можно представить как равномерный предел последовательности алгебраических многочленов на отрезке $[a;b]$. Иначе говоря, для любого $\varepsilon > 0$ существует алгебраический многочлен Q_n такой, что $|f(x) - Q_n(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in [a;b]$.*

Доказательство. 1) Сначала рассмотрим случай, когда функция f задана на отрезке $[-1;1]$. Пусть $g(x) = f(\cos x)$, $x \in [0;\pi]$. В силу следствия 2 для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx$ такой, что $|g(t) - T_n(t)| < \varepsilon$ для любого $t \in [0;\pi]$. Тогда $\forall x \in [-1;1]$ имеем $|f(x) - T_n(\arccos x)| < \varepsilon$. При этом $T_n(\arccos x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k \arccos x = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x)$, где $P_k(x)$ — многочлены Чебышева. Следовательно, $T_n(\arccos x)$ является искомым алгебраическим многочленом.

2) Случай произвольного отрезка $[a;b]$ сводится к рассмотренному выше линейной заменой переменной. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \alpha t + \beta$. При $\alpha = (b-a)/2$, $\beta = (b+a)/2$ эта функция отображает отрезок $[-1;1]$ на $[a;b]$. Пусть $h(t) = f(\varphi(t))$. Функция h непрерывна на $[-1;1]$. В силу доказанного в п. 1) для любого $\varepsilon > 0$ существует алгебраический многочлен R_n такой, что $|h(t) - R_n(t)| < \varepsilon$. Тогда $|f(x) - R_n(\varphi^{-1}(x))| < \varepsilon$, $x \in [a;b]$, где $\varphi^{-1}(x) = (x-\beta)/\alpha$. Остается заметить, что $R_n(\varphi^{-1}(x)$ является алгебраическим многочленом от переменной x.

6.5 Полнота тригонометрической системы функций в пространстве $L_2(-\pi,\pi)$

С помощью теорем Вейерштрасса можно доказать полноту тригонометрической системы функций в пространстве $L_2(-\pi,\pi)$. Предварительно дадим некоторые определения и установим необходимые факты.

Пусть X — топологическое пространство, A, $B \subset X$. Множество A называется плотным в B, если $\overline{A} \supset B$. Например, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, поэтому $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$.

Лемма. *Если A плотно в B, B плотно в C, то A плотно в C.*

Доказательство. Имеем $\overline{A} \supset B$, $\overline{B} \supset C$, поэтому $\overline{A} = \overline{\overline{A}} \supset \overline{B} \supset C$.

Теперь рассмотрим пространство $L_2(-\pi,\pi)$. В курсе теории функций действительного переменного доказывается, что множество непрерывных функций $C[a;b]$ плотно в пространстве $L_2(a;b)$. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема. *Система $\{1, \cos nx, \sin nx, n \geq 1\}$ полна в $L_2(-\pi,\pi)$.*

Доказательство. Рассмотрим линейную оболочку Λ векторов тригонометрической системы. Пусть функция f непрерывна на $[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По теореме Вейерштрасса существует тригонометрический полином $Q(x)$ такой, что $\forall x \in [-\pi,\pi]$ $|f(x) - Q(x)| < \varepsilon/\sqrt{2\pi}$. Тогда

$$\|f - Q\|_{L_2(-\pi,\pi)} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - Q(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^2 dx\right)^{1/2} = \varepsilon.$$

Следовательно, множество Λ плотно в $C[-\pi,\pi]$ в смысле топологии $L_2(-\pi,\pi)$. Далее, как отмечалось выше, $C[-\pi;\pi]$ плотно в пространстве $L_2(-\pi;\pi)$. В силу леммы отсюда следует, что Λ плотно в $L_2(-\pi;\pi)$. Таким образом, тригонометрическая система полна в $L_2(-\pi;\pi)$.

Следствие. *Пусть функция $f \in L_2(-\pi;\pi)$ и*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

ее ряд Фурье. Тогда справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Доказательство следует из того, что система полна в $L_2(-\pi, \pi)$, поэтому она замкнута, т. е. для любой функции $f \in L_2(-\pi; \pi)$ справедливо равенство Парсеваля.

Замечание Из равенства Парсеваля следует, что для любой функции $f \in L_2(-\pi; \pi)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ сходится, следовательно, a_n, $b_n \to 0$, $n \to \infty$.

6.6 Комплексная форма рядов Фурье

Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Из формулы Эйлера следует, что

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}), \quad \sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}).$$

С учетом этих равенств преобразуем ряд Фурье: Пусть

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx+b_n \sin nx = \frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(e^{inx}+e^{-inx})-ib_n(e^{inx}-e^{-inx})] =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n - ib_n)e^{inx} + (a_n + ib_n)e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

Таким образом,

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

т. е. функции f сопоставляется комплексный ряд Фурье $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$.

Отметим, что комплекснозначная система $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является ортогональной в пространстве $L_2(-\pi; \pi)$. Действительно, для любых $m \neq n$ имеем

$$(e^{imx}, e^{inx}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\overline{e^{inx}}dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}e^{-inx}dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = \left. \frac{e^{i(m-n)x}}{i(m-n)x} \right|_{x=-\pi}^{\pi} = 0.$$

При этом

$$\|e^{inx}\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |e^{inx}|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi,$$

откуда $\|e^{inx}\| = \sqrt{2\pi}$. Коэффициенты c_n вычисляются по правилу

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx.$$

Система система $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ является полной, следовательно, и замкнутой в пространстве $L_2(-\pi; \pi)$. Равенство Парсеваля справедливо дял любой функции $f \in L_2(-\pi; \pi)$ и имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

6.7 Связь комплексных рядов Фурье с теорией функций комплексного переменного

Рассмотрим в единичном круге $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ аналитическую функцию $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Если последний ряд сходится в граничной точке $e^{i\theta}$ единичного круга, то по теореме Абеля существует конечный предел

$$\lim_{r \to 1-} f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (e^{i\theta})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

Это показывает, что комплексные ряды Фурье являются средством для изучения граничных значений аналитических функций.

6.8 Осцилляционная лемма. Принцип локализации Римана

Осцилляционная лемма. *Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ по Лебегу. Тогда*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = \lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0.$$

Замечание. Название леммы связано с тем, что при больших λ функции $\cos\lambda x$ и $\sin\lambda x$ сильно осциллируют, т. е. колеблются на отрезке $[a,b]$.

Доказательство. Рассмотрим для примера интеграл $\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx$. (Второй интеграл рассмотрите самостоятельно.)

1) Рассмотрим сначала случай, когда f непрерывно дифференцируема на $[a,b]$. Тогда функции f и f' непрерывны на $[a,b]$, следовательно, ограничены на этом отрезке. т. е. существуют константы M, C такие, что $|f(x)|\le M$, $|f'(x)|\le C$, $x\in[a,b]$. Применяя интегрирование по частям, получаем

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx=\frac{1}{\lambda}\int_a^b f(x)d\sin\lambda x=\frac{1}{\lambda}f(x)\sin\lambda x|_a^b-\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\sin\lambda x dx,$$

следовательно, с учетом неравенства треугольника, получаем

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right|\le\frac{1}{|\lambda|}\left(|f(b)|\,|\sin\lambda b|+|f(a)|\,|\sin\lambda a|+\int_a^b|f'(x)|\,|\sin\lambda x|dx\right)\le$$

$$\le\frac{1}{|\lambda|}\left(|f(b)|+|f(a)|+\int_a^b|f'(x)|dx\right)\le\frac{2M+C}{|\lambda|}\to 0,\ \lambda\to\infty.$$

2) Рассмотрим произвольную интегрируемую функцию f. фиксируем $\varepsilon>0$. Множество непрерывных функций плотно в пространстве интегрируемых функций $L_1(a,b)$, а непрерывную функцию можно приблизить сколь угодно точно алгебраическими многочленами. Следовательно, существует многочлен φ такой, что

$$\|f-\varphi\|_{L_1(a,b)}=\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как φ — гладкая функция, в силу 1) имеем

$$\int_a^b\varphi(x)\cos\lambda x dx\to 0,\ \lambda\to\infty.$$

Следовательно, существует λ_0 такое, что при $|\lambda|>\lambda_0$

$$\left|\int_a^b\varphi(x)\cos\lambda x dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

При $|\lambda| > \lambda_0$ имеем

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right| \le \left|\int_a^b (f(x)-\varphi(x))\cos\lambda x dx\right| + \left|\int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,|\cos\lambda x| dx + \frac{\varepsilon}{2} \le \int_a^b |f(x)-\varphi(x)| dx + \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Теорема (принцип локализации Римана). Сходимость ряда Фурье интегрируемой на отрезке $[-\pi,\pi]$ функции f точке $x \in (-\pi,\pi)$ зависит лишь от поведения этой функции в любой сколь угодно малой окрестности точки x.

Доказательство. частичные суммы ряда Фурье функции f равны

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt,$$

где

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((2n-1)t/2)}{\sin(t/2)}$$

ядро Дирихле. Фиксируем достаточно малое $\delta > 0$. Имеем

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\delta} f(x+t) D_n(t) dt + \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) D_n(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt.$$

Докажем, что в последней сумме первое и третье слагаемые стремятся к нулю при $n \to \infty$. Рассмотрим для определенности третье слагаемое (первое исследуется аналогично).

Имеем

$$\int_{\delta}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+t)}{\sin(t/2)} \sin((2n-1)t/2) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} g(t) \sin((2n-1)t/2) dt,$$

где

$$g(t) = \frac{f(x+t)}{\sin(t/2)}.$$

Функция $f(x+t)$ интегрируема на $[\delta,\pi]$ как суперпозиция интегрируемой функции и сдвига $t \mapsto x+t$, а функция $\sin(t/2)$ непрерывна и $\sin(t/2) \ge$

$\sin(\delta/2) > 0$ на $[\delta, \pi]$. Поэтому функция g как частное этих функций интегрируема на $[\delta, \pi]$. По осцилляционной лемме

$$\int_{\delta}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} g(t)\sin((2n-1)t/2)dt \to 0, \ n \to \infty.$$

Таким образом, сходимость $S_n(x)$ конечному пределу имеет место тогда и только тогда, когда имеет конечный предел второе слагаемое

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)D_n(t)dt.$$

Но это слагаемое зависит лишь от значений функции f в δ-окрестности точки x. Поскольку δ может быть взято сколь угодно малым, теорема доказана.

Замечание. Совершенно аналогично доказывается, что ряд Фурье интегрируемой на $[-\pi, \pi]$ функции сходится в точке $x \in (-\pi, \pi)$ к значению $f(x)$ тогда и только тогда, когда разность

$$S_n(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\delta}[f(x+t) - f(x)]D_n(t)dt + \int_{-\delta}^{\delta}[f(x+t) - f(x)]D_n(t)dt +$$
$$+ \int_{\delta}^{\pi}[f(x+t) - f(x)]D_n(t)dt$$

стремится к нулю. При этом первое и третье слагаемые стремятся к нулю по осцилляционной лемме, поэтому ряд Фурье сходится в точке x к $f(x)$ тогда и только тогда, когда при некотором $\delta \in (0, \pi)$ (или при любом $\delta \in (0, \pi)$!)

$$\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+t) - f(x)]D_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(x+t) - f(x)}{\sin(t/2)}\sin((2n-1)t/2)dt \to 0,$$

$n \to \infty$.

6.9 Сходимость ряда Фурье в точке

Будем говорить, что интегрируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция f удовлетворяет условию Дини в точке $x \in (-\pi, \pi)$, если для некоторого малого δ существует интеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\right| dt. \qquad (*)$$

Отметим, что если этот интеграл существует для некоторого малого δ, то он существует при всех $\delta \in (0, \pi)$, поскольку знаменатель подинтегрального выражения непрерывен и обращается в нуль только в точке $t = 0$.

Теорема 1. *Пусть функции f интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет в точке $x \in (-\pi, \pi)$ условию Дини. Тогда ряд Фурье этой функции в точке x сходится к значению $f(x)$.*

Доказательство. Пусть для некоторого δ существует интеграл $(*)$. Тогда он существует при всех $\delta \in (0, \pi)$. Из свойства абсолютной непрерывности интеграла как функции множества следует, что при $\delta \to 0$ значение интеграла стремится к нулю. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta \in (0, \pi)$ такое, что

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \varepsilon.$$

Используя известное неравенство $(2/\pi)|t| \leq |\sin t| \leq 1$, $t \in [0, \pi/2]$ получаем

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{\sin(t/2)} \sin((2n-1)t/2) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{\sin(t/2)} \right| dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из осцилляционной леммы следует, что существует N такое, что при $n \geq N$ выполняются неравенства

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{\sin(t/2)} \sin((2n-1)t/2)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{\sin(t/2)} \sin((2n-1)t/2)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда с учетом аддитивности интеграла и неравенства треугольника получаем при $n \geq N$

$$|S_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{\sin(t/2)} \sin((2n-1)t/2)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теперь опишем некоторые классические условия, при которых выполняется условие Дини.

1) Говорят, что функция f удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha > 0$ в точке x, если существуют константы δ, $A > 0$ такие, что

$$|f(x+t) - f(x)| \leq A|t|^{\alpha}, \quad |t| \leq \delta.$$

Если функция f непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию Гельдера в точке $x \in (-\pi, \pi)$, то она удовлетворяет условию Дини в этой точке. Действительно, из условия Гельдера следует, что

$$\left|\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\right| \leq \frac{A}{|t|^{1-\alpha}}.$$

Поскольку несобственный интеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{|t|^{1-\alpha}}\, dt$$

сходится, то существует интеграл $(*)$. Таким образом, справедливо

Следствие 1. *Пусть функции f непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию Гельдера в точке $x \in (-\pi, \pi)$. Тогда ряд Фурье этой функции в точке x сходится к значению $f(x)$.*

2) Пусть функция f непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и дифференцируема в точке $x \in (-\pi, \pi)$. Тогда существует

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = f'(x).$$

Поэтому функция

$$\frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

ограничена в некоторой окрестности нуля, следовательно, функция f удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha = 1$. Отсюда получаем следующее достаточно простое достаточное условие сходимости ряда Фурье.

Следствие 2. *Пусть функции f непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и дифференцируема в точке $x \in (-\pi, \pi)$. Тогда ряд Фурье этой функции в точке x сходится к значению $f(x)$.*

Замечание. Из принципа локализации Римана следует, что в следствиях 1 и 2 непрерывность функции f достаточно требовать лишь в некоторой малой окрестности точки x.

Теперь рассмотрим случай, когда точка x может являться точкой разрыва первого рода функции f.

Будем говорить, что функция f удовлетворяет обобщенному условию Дини в точке x, если в точке x существуют конечные односторонние пределы $f(x \pm 0)$ и существуют интегралы

$$\int_0^\delta \left|\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\right| dt, \quad \int_0^\delta \left|\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\right| dt. \qquad (**)$$

Теорема 2. *Пусть функции f интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$ и удовлетворяет в точке $x \in (-\pi,\pi)$ обобщенному условию Дини. Тогда ряд Фурье этой функции в точке x сходится к значению $(1/2)(f(x+0)+f(x-0))$.*

Доказательство проводится точно так же как в случае обычного условия Дини. Докажите теорему самостоятельно!

Замечание. Если функции f интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$ и существуют пределы $f(\pi-0)$, $f(-\pi+0)$ в концевых точках отрезка, то ряд Фурье функции f сходится в точках $\pm\pi$ к значению $(1/2)(f(\pi-0)+f(-\pi+0))$. Действительно, достаточно рассмотреть 2π-периодическое продолжение функции f на всю числовую ось (при этом значение в точках $\pi+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, задаем произвольно, значение коэффициентов Фурье от этихз значений не зависит!).vskip0.3 cm

Пример. Рассмотрим функцию $f(x)=x$, $x \in [-\pi,\pi]$. Эта функция нечетная, поэтому ее разложение происходит только по синусам. Имеем

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

поэтому ряд Фурье функции f имеет вид

$$2\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Поскольку функция f дифференцируема в любой точке из $(-\pi,\pi)$, сумма того ряда равна $f(x)=x$, т. е.

$$x = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx, \quad x \in (-\pi,\pi).$$

Если мы рассмотрим этот ряд в точках $x = \pm\pi$, то его сумма равна нулю. При этом $f(\pi-0) = \pi$, $f(-\pi+0) = -\pi$ и $(1/2)(f(\pi-0)+f(-\pi+0)) = 0$, что согласуется с замечанием выше.

6.10 Равномерная сходимость ряда Фурье

Теперь коснемся вопроса равномерной сходимости ряда Фурье. Будем говорить что непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция f, принимающая одинаковые значения на концах отрезка, удовлетворяет равномерному условию Дини, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого x выполняется неравенство

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \varepsilon.$$

Без доказательства приведем следующую теорему и следствия из нее.

Теорема. *Пусть функция f непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Если f удовлетворяет равномерному условию Дини, то ее ряд Фурье сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ к функции f.*

Следствие 1. *Пусть функция f задана на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Если f удовлетворяет условию Гельдера*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq A|x_1 - x_2|^{\alpha}, \quad x_1, x_2 \in [-\pi, \pi],$$

с некоторыми константами $A > 0$, $\alpha \in (0, 1]$, то ее ряд Фурье сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ к функции f.

Следствие 2. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема задана на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда ее ряд Фурье сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ к функции f.*

7 Интеграл Фурье и преобразование Фурье

7.1 Интеграл Фурье

Нам понадобится понятие функции, интегрируемой по Лебегу на всей числовой прямой. Определение похоже на определение несобственных интегралов Римана. Функция f, заданная на всей числовой оси, интегрируема на $\mathbb{R}$, если она интегрируема на любом отрезке и для любой последовательности отрезков A_n, исчерпывающей $\mathbb{R}$, существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}|f(x)|dx.$$

Если f интегрируема на $\mathbb{R}$, то, по определению,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f(x)dx.$$

Интегралы Лебега по неограниченным множествам обладают большинством свойств, которым удовлетворяют интегралы Лебега по ограниченным множествам.

Интегрируемые на $\mathbb{R}$ функции образуют банахово пространство $L_1(\mathbb{R})$ с нормой

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx.$$

Теорема. *Пусть функцию f интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}$. Если эта функция в точке x удовлетворяет условию Дини, то*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt.$$

Доказательство. Требуется доказать, что

$$I_A := \frac{1}{\pi}\int_0^{A}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt \to f(x), \quad A\to+\infty.$$

Из неравенства

$$|f(t)\cos\lambda(t-x) \le |f(t)|, \quad \lambda\in[0,A],\ t\in\mathbb{R},$$

и интегрируемости функции $|f|$ на $\mathbb{R}$ следует, что функция $f(t)\cos\lambda(t-x)$ интегрируема на $[0,A]\times\mathbb{R}$. По известной теореме Фубини о перестановке порядка интегрирования получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{A}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt\int_0^{A}\cos\lambda(t-x)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{\sin[A(t-x)]}{t-x}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t+x)\frac{\sin At}{t}\,dt.$$

Таким образом,
$$I_A = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+x) \frac{\sin At}{t}\, dt.$$
Используя известное значение интеграла Дирихле, получаем
$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin At}{t}\, dt = f(x) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin At}{t}\, dt = f(x) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\tau}\, d\tau = f(x).$$

Таким образом,
$$I_A - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t+x) - f(x)}{t} \sin At\, dt.$$

Докажем, что при $M \to +\infty$
$$\int_{-\infty}^{-M} \frac{f(t+x) - f(x)}{t} \sin At\, dt \to 0, \quad \int_{M}^{+\infty} \frac{f(t+x) - f(x)}{t} \sin At\, dt \to 0, \tag{1}$$
причем сходимость равномерна по $A \in [1, \infty]$. Рассмотрим второй интеграл, первый исследуется аналогично. Имеем
$$\left| \int_{M}^{+\infty} \frac{f(t+x) - f(x)}{t} \sin At\, dt \right| \leq$$
$$\leq \int_{M}^{+\infty} \frac{|f(t+x) - f(x)|}{t} |\sin At|\, dt + |f(x)| \left| \int_{M}^{+\infty} \frac{\sin At}{t}\, dt \right| \leq$$
$$\leq \int_{M}^{+\infty} \frac{|f(t+x) - f(x)|}{t}\, dt + |f(x)| \left| \int_{AM}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+x) - f(x)|\, dt + |f(x)| \left| \int_{AM}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \right|.$$
Если $M \to +\infty$, то $\frac{1}{M} \to 0$, и поскольку $AM \geq M$ при $A \geq 1$, имеем
$$\int_{AM}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \to 0,$$
как остаток сходящегося несобственного интеграла Дирихле, причем равномерно по A на $[1, +\infty)$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда в силу (1) существует $M > 0$ такое, что для любого $A \geq 1$ выполняются неравенства
$$\left| \int_{-\infty}^{-M} \frac{f(t+x) - f(x)}{t} \sin At\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2}$$

$$\left|\int_M^{+\infty} \frac{f(t+x)-f(x)}{t}\,\sin At\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (3)$$

Точно так же как при доказательстве теоремы о сходимости ряда Фурье в точке доказываем, что при выполнении условия Дини в точке x

$$\int_{-M}^{M} \frac{f(t+x)-f(x)}{t}\,\sin At\,dt \to 0, \quad A \to +\infty,$$

поэтому существует $A_0 ge 1$ такое, что при $a \geq A_0$ выполняется неравенство

$$\left|\int_{-M}^{M} \frac{f(t+x)-f(x)}{t}\,\sin At\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (4)$$

Из свойства аддитивности интеграла имеем

$$I_A - f(x) = \int_{-\infty}^{-M} \frac{f(t+x)-f(x)}{t}\,\sin At\,dt +$$

$$+\int_{-M}^{M} \frac{f(t+x)-f(x)}{t}\,\sin At\,dt + \int_{M}^{+\infty} \frac{f(t+x)-f(x)}{t}\,\sin At\,dt.$$

Применяя неравенство треугольника с учетом (2), (3) и (4) получаем

$$|I_A - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

$A \geq A_0$. Это и означает, что $I_A - f(x) \to 0$, $A \to +\infty$. Доказательство теоремы закончено.

7.2 Прямое и обратное преобразование Фурье

Запишем доказанное равенство несколько по-другому. Заметим, что функция

$$G(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt$$

нечетная, поэтому

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{A\to+\infty}\int_0^A G(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} G(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi}\,v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda)d\lambda.$$

Аналогично, поскольку функция

$$H(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)dt$$

нечетная, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\, v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda) d\lambda = 0.$$

Применяя равенство Эйлера

$$\cos\lambda(t-x) - i\sin\lambda(t-x) = e^{-i\lambda(t-x)},$$

записываем равенство в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\, v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\lambda) - iH(\lambda)] d\lambda = \frac{1}{2\pi}\, v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

Обозначим

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt. \tag{5}$$

Тогда последнее равенство можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \tag{6}$$

Отметим, что равенства (5) и (6) достаточно похожи. При этом, интеграл в (6) понимается в смысле главного значения по Коши.

Пусть равенство (5) имеет место для всех точек $x \in \mathbb{R}$. Соответствие $F : f \mapsto \Phi$, определяемое (5), называется преобразованием Фурье, а функция F — преобразование Фурье функции f. В дальнейшем вместо Φ будем часто писать $F[f]$, подчеркивая, что функция Φ — результат преобразования Фурье F, примененного к функции f. Аналогично, равенство (6) определяет обратное преобразование Фурье, которое обозначается через F^{-1}. Таким образом, $f = F^{-1}[\Phi]$.

7.3 Свойства преобразования Фурье

Теорема 1. *Если последовательность f_n сходится в пространстве $L_1(\mathbb{R})$ к функции f, то $F[f_n] \rightrightarrows F[f]$ на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Имеем

$$|F[f_n](\lambda) - F[f](\lambda)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f_n(t) - f(t)) e^{-i\lambda t} dt \right| \le$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t) - f(t)| dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f_n - f\|_{L_1(\mathbb{R})} \to 0,$$

$n \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}$. Тогда $F[f]$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}$, причем $F[f](\lambda) \to 0$, $\lambda \to \infty$.*

Доказательство. 1) Рассмотрим сначала случай, когда $f = \chi_{[a,b]}$ — характеристическая функция отрезка $[a, b]$, т. е.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Имеем

$$F[f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-i\lambda t} dt = \left. \frac{e^{-i\lambda t}}{-i\lambda\sqrt{2\pi}} \right|_a^b = \frac{e^{-i\lambda b} - e^{-i\lambda a}}{-i\lambda\sqrt{2\pi}},$$

откуда видно, что $F[f](\lambda)$ является непрерывной функцией на $\mathbb{R}$. При этом,

$$|F[f](\lambda)| = \left| \frac{e^{-i\lambda b} - e^{-i\lambda a}}{-i\lambda\sqrt{2\pi}} \right| \leq \frac{|e^{-i\lambda b}| + |e^{-i\lambda a}|}{\lambda\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{|\lambda|} \to 0, \quad \lambda \to \infty.$$

2) Пусть $f(x) = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k \chi_{a_k, b_k}(x)$ — линейная комбинация характеристических функций отрезков. Тогда утверждение следует из доказанного в п. 1) и линейности преобразования Фурье, в силу которой

$$F[f](\lambda) = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k F[\chi_{a_k, b_k}](\lambda).$$

3) Теперь рассмотрим случай произвольной функции из $L_1(\mathbb{R})$. Из свойств интеграла Лебега следует, что существует последовательность функций f_n, каждая из которых является линейной комбинацией характеристических функций отрезков, и которяа сходится к f в пространстве $L_1(\mathbb{R})$. В силу доказанного в п. 2) их преобразования Фурье $F[f_n]$ являются непрерывными функциями, стремящимися к нулю на бесконечности. По теореме 1 $F[f_n] \rightrightarrows F[f]$ на $\mathbb{R}$. Продолжим функции $F[f_n]$ на $\overline{\mathbb{R}}$, полагая $F[f_n](-\infty) = F[f_n](+\infty) = 0$, $F[f](-\infty) = F[f](+\infty) = 0$. Тогда

$F[f_n] \rightrightarrows F[f]$ на $\overline{\mathbb{R}}$. Равномерный предел последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией, поэтому $F[f]$ непрерывна на $\mathbb{R}$. В частности, существуют $\lim_{\lambda\to-\infty} F[f](\lambda) = F[f](-\infty) = 0$, $\lim_{\lambda\to+\infty} F[f](\lambda) = F[f](+\infty) = 0$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть* $f(t) \in L_1(\mathbb{R})$ *и* $tf(t) \in L_1(\mathbb{R})$. *Тогда функция* $F[f]$ *дифференцируема на* $\mathbb{R}$ *и*

$$\frac{d}{d\lambda}F[f](\lambda) = F[-itf(t)](\lambda).$$

Приведем доказательство для случая, когда функции $f(t)$ и $tf(t)$ абсолютно интегрируемы в несобственном смысле по Риману на $\mathbb{R}$. Обоснуем возможность дифференцируемости под знаком интеграла. Имеем

$$\frac{d}{d\lambda}(f(t)e^{-i\lambda t}) = -itf(t)e^{-i\lambda t}.$$

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

сходится, поскольку $|f(t)e^{-i\lambda t}| = |f(t)|$ — интегрируемая несобственном смысле функция на $\mathbf{R}$.

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\lambda}(f(t)e^{-i\lambda t})dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

сходится равномерно по λ по признаку Вейерштрасса, поскольку

$$|(-it)f(t)e^{-i\lambda t}| = |tf(t)|$$

является интегрируемой функцией на $\mathbb{R}$.

Таким образом, с учетом предыдущих равенств получаем

$$\frac{d}{d\lambda}F[f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (-it)f(t)e^{-i\lambda t}dt = F[-itf(t)](\lambda).$$

Следствие. *Если в условиях теоремы 3 функция* $t^n f(t)$ *интегрируема на* $\mathbb{R}$, *то преобразование Фурье функции* f *является* n *раз непрерывно дифференцируемой на* $\mathbb{R}$ *функцией и*

$$\frac{d^n F[f](\lambda)}{d\lambda^n} = F[(-it)^n f(t)](\lambda).$$

Теорема 4. Если функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ и непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, причем $f'(t) \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$F[f'](\lambda) = (i\lambda)F[f](\lambda).$$

Доказательство. Применяя интегрирование по частям, получаем

$$F[f'](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\lambda t}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, f(t)e^{-i\lambda t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt = (i\lambda)F[f](\lambda).$$

Следствие 1. *Если функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ непрерывно дифференцируема n раз на $\mathbb{R}$, причем $f^{(n)}(t) \in L_1(\mathbb{R})$, то*

$$F[f^{(n)}](\lambda) = (i\lambda)^n F[f](\lambda).$$

Следствие 2. *В условиях следствия 1*

$$F[f](\lambda) = o(\lambda^{-n}), \quad \lambda \to \infty.$$

Действительно, силу теоремы 1 и следствия 1

$$F[f](\lambda) = \frac{F[f^{(n)}](\lambda)}{(i\lambda)^n} = \frac{o(1)}{(i\lambda)^n} = o(\lambda^{-n}), \quad \lambda \to \infty.$$

Следствие 2. *Если функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, то $F[f](\lambda) = o(\lambda^{-2})$, $\lambda \to \infty$. Следовательно, функция $F[f]$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и интеграл в формуле для обратного преобразования Фурье $f = F^{-1}[\Phi]$, где $\Phi = F[f]$, можно понимать в обычном смысле, а не в смысле главного значения по Коши.*

7.4 Преобразование Фурье в пространстве быстро убывающих на ∞ функций

Введем пространство S_∞ быстро убывающих на ∞ функций. Это пространство играет важную роль при определении так называемых обобщенных функций, играющих важную роль в соременной математике.

Говорят, что функция f принадлежит пространству S_∞, если $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и для любых целых неотрицательных p и q выполняется условие

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p f^{(q)}(x)| < +\infty.$$

Если $f \in S_\infty$, то
$$|f^{(q)}(x)| \le \frac{c_{p,q}}{|x|^p} \quad \forall p, q \ge 0, \tag{$*$}$$
с некоторыми константами $c_{p,q}$. Из $(*)$ следует, что сама функция f и все ее производные убывают на бесконечности быстрее, чем любая степенная функция. Отсюда также следует, что все производные $f^{(q)}$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Более того, для любых p, $q \ge 0$ функция $x^p f^{(q)}(x) \in L_1(\mathbb{R})$.

Примером функции $f \in S_\infty$ является функция $f(x) = e^{-x^2}$.

Из формулы Лейбница следует, что для любых целых неотрицательных m и n
$$(x^m f(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} A_k x^{\alpha_k} f^{(k)}(x)$$
с некоторыми неотрицательными целыми α_k и константами A_k. Поэтому
$$\sup_{\mathbb{R}} |(x^m f(x))^{(n)}| < +\infty.$$
Более того,
$$(x^m f(x))^{(n)} = o(x^{-s}), \quad x \to \infty,$$
для любого $s \ge 0$. Справедлива

Теорема. *Преобразование Фурье является биекцией пространства S_∞ на себя.*

Доказательство. Используя теоремы 3 и 4 из предыдущего пункта, получаем, что если функция $f \in S_\infty$, то для любых p, $q \ge 0$ функция $F[f]$ является q раз непрерывно дифференцируемой и
$$(i\lambda)^p \frac{d^q F[f](\lambda)}{d\lambda^q} = F\left[\frac{d^p[(-it)^q f(t)](\lambda)}{dt^p}\right],$$
откуда следует, что $F[f] \in S_\infty$, так как по теореме 2 предыдущего пункта преобразование Фурье интегрируемой функции является непрерывной функцией, стремящейся к нулю на бесконечности, т.е ограниченной.

Так как для любой функции $f \in S_\infty$ имеем $F[f] \in S_\infty$, обратное преобразование Фурье F^{-1} переводит $F[f]$ в f, при этом $F^{-1} \circ F = F \circ F^{-1} = id_{S_\infty}$. Таким образом, F обладает обратным F^{-1} как слева, так и справа, следовательно, F — биекция.

7.5 Преобразование Фурье свертки

Пусть $f_1,\ f_2 \in L_1(\mathbb{R})$. Сверткой этих функций называется функция

$$f(x) = f_1 * f_2(x) =: \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi.$$

С помощью теоремы Фубини можно показать, что правая часть последнего равенства существует почти всюду и является интегрируемой по Лебегу на $\mathbb{R}$ функцией. Действительно, рассмотрим повторный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi) f_2(x-\xi)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi)| d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x-\xi)| dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\xi)| d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(t)| dt.$$

Следовательно, существует этот повторный интеграл. Из теоремы Фубини следует, что существуют оба повторных интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi,$$

причем во втором интеграле внутренний интеграл существует почти всюду и является интегрируемой функцией; отметим, что он совпадает с функцией f.

Теорема. *Если* $f_1,\ f_2 \in L_1(\mathbb{R})$, *то* $F[f_1 * f_2] = F[f_1] \cdot F[f_2]$.

Доказательство. С использованием теоремы Фубини (см. ниже) можно изменить порядок интегрирования в повторном интеграле, который представляет собой преобразование Фурье от свертки. Имеем, с использованием замены переменных,

$$F[f_1 * f_2](\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x-\xi) e^{-i\lambda x} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-i\lambda(t+\xi)} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-i\lambda t} dt = F[f_1] \cdot F[f_2].$$

Обоснование применения теоремы Фубини. Имеем $|e^{-i\lambda x}| = 1$, поэтому $|e^{-i\lambda x} f_1(\xi) f_2(x-\xi)| = |f_1(\xi) f_2(x-\xi)|$. Повторный интеграл от функции $|f_1(\xi) f_2(x-\xi)|$ существует, этом мы показывали пере доказательством теоремы. Таким, образом, теорема Фубини применима.

Список литературы

[1] *Никольский С.М.* Курс математического анализа / С.М. Никольский. – Москва: Физматлит, 2001, изд. 6-е., стер. – 591 с.

[2] *Зорич В.А.* Математический анализ, ч. I, II / В.А. Зорич. – М.: МЦНМО, 2002, изд 4-е, испр. – 657 с.

[3] *Шерстнев А.Н.* Конспект лекций по математическому анализу / А.Н. Шерстнев. – Казань: КГУ, 2005. изд. 4-е. – 373 с.

[4] *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2004. – 572 с.

Содержание