

В.А.Чугунов

Казанский федеральный университет

Точные и приближенные решения одномерных уравнений «мелкой воды» и их физическая интерпретация.

Основной целью настоящей работы является получение точных и приближенно-аналитических решений уравнений «мелкой воды» применительно к природным явлениям.

Ключевые слова: «мелкая вода», трение, линеаризация уравнений.

Многие важные физические процессы, связанные с движением сплошной среды и характеризующиеся малостью отношения характерного вертикального масштаба к характерному размеру по горизонтали моделируются уравнениями «мелкой воды» (МВ) [1]. Например, такие явления как сход лавин, движение тонких слоев гранулированных материалов описываются, чаще всего, моделью Хуттера-Саваджа [2]. Система уравнений, лежащая в основе этой модели, представляет модификацию уравнений МВ [3]. Другим важным природным явлением, с точки зрения обеспечения жизнедеятельности населенных пунктов, расположенных в прибрежных зонах, является распространение по поверхности водоемов длинноволновых волн. Действительно среди стихийных бедствий одно из первых мест в мире занимают наводнения. Морские наводнения вызываются различными причинами: прохождением глубоких циклонов, подводными землетрясениями, извержениями подводных вулканов. Последние, на поверхности океанов и морей, вызывают образование волн, длина которых намного больше глубины соответствующих водоемов. Такие волны получили название «Цунами», от японских слов цу - гавань и нами – волна. Амплитуда волн «Цунами» в открытом океане невелика от 1 метра до 20-30 метров, а их длина достигает сотни километров и значительно превышает глубину океана, которая имеет порядок 4 км. При подходе такой волны к берегу скорость ее движения падает, а амплитуда резко возрастает, что в конечном итоге приводит к разрушению различного рода сооружений в береговой зоне и к ее затоплению. Следовательно, с точки зрения нормальной жизнедеятельностью приморских городов, портов и безотказной работы гидротехнических сооружений важно уметь прогнозировать степень воздействия волн «Цунами» на прибрежную зону. Такой прогноз может быть осуществлен методами математического моделирования процессов распространения и наката волн «Цунами» на берег. Выше описанные особенности данного явления приводят к тому, что в качестве математической модели используются уравнения МВ [4.5].

Следует отметить, что уравнения МВ относятся к классу нелинейных уравнений в частных производных и их решение в общем виде возможно лишь на основе численных методов. Однако интерес к аналитическим методам не ослабевает. Это связано с тем, что аналитические методы позволяют оценить качественное поведение изучаемого объекта, вскрыть его основные особенности, не прибегая к многочисленным вычислениям. Кроме того, аналитические решения часто служат единственным обоснованием применимости того или иного численного алгоритма.

Основной целью настоящей работы является получение точных и приближенно-аналитических решений уравнений МВ применительно к вышеописанным природным явлениям.

1. Симметрии одномерных уравнений МВ. Рассмотрим одномерную систему уравнений МВ, записанную в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{u}h)}{\partial \hat{x}} &= 0; \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \beta \frac{\partial h}{\partial \hat{x}} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

где h – толщина движущегося слоя, \hat{u} – средняя по сечению слоя скорость, t – время, \hat{x} – пространственная координата.

Методами классического группового анализа [7,8] было доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Система дифференциальных уравнений (1) допускает бесконечномерную алгебру Ли инфинитезимальных операторов, соответствующих группам преобразований, структура которой определяется формулой $L_5 \oplus L_\infty$, где алгебра L_5 задается базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial \hat{x}}, X_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + \hat{x} \frac{\partial}{\partial \hat{x}}, \quad (2)$$

$$X_4 = \hat{x} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + 2h \frac{\partial}{\partial h} + \hat{u} \frac{\partial}{\partial \hat{u}}, X_5 = t \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + h \frac{\partial}{\partial \hat{u}}, \quad (3)$$

а алгебра L_∞ определяется одним базисным оператором вида

$$X_\infty = Z(\hat{u}, h) \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + T(\hat{u}, h) \frac{\partial}{\partial t}. \quad (4)$$

Здесь функции $Z(\hat{u}, h), T(\hat{u}, h)$ определяются линейными уравнениями:

$$\begin{aligned} Z_{\hat{u}} - \hat{u}T_{\hat{u}} + hT_h &= 0; \\ Z_h - \hat{u}T_h + \beta T_{\hat{u}} &= 0. \end{aligned}$$

Отметим, что неполная система базисных операторов для уравнений (1) была ранее приведена в работе [9].

В работах [10,11] были подробно исследованы различные типы инвариантных решений системы (1), с помощью которых решен ряд физически интересных задач. Так, например, показано [10], решение задачи о распаде разрыва для системы (1) описывается частично инвариантным решением относительно оператора X_2 и имеет вид

$$\left\{ \begin{aligned} h &= \frac{1}{9\beta} \left(2\sqrt{\beta h_0} - \frac{\hat{x} - \ell}{t} \right)^2 \\ \hat{u} &= 2\sqrt{\beta} (\sqrt{h_0} - \sqrt{h}) \\ h &= h_0, \hat{u} = 0, \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} \hat{x}_* < \hat{x} < \hat{x}_0, \\ \hat{x} \leq \hat{x}_* \end{aligned} \quad (5)$$

где h_0, ℓ – начальная толщина слоя, начальное положение разрыва соответственно, а подвижные границы \hat{x}_*, \hat{x}_0 определяются равенствами

$$\hat{x}_* = \ell - \sqrt{\beta h_0} t; \quad (6)$$

$$\hat{x}_0 = \ell + 2\sqrt{\beta h_0} t. \quad (7)$$

Полученное решение можно трактовать как рассыпание слоя гранулированного материала без учета трения. На практике, при исследовании процесса движения сыпучих материалов (схода лавин в том числе) наличие трения играет существенную роль и необходимо в модели учитывать этот эффект, что и делает модель Хуттера-Саваджа [2]. Как уже отмечалось, при определенных условиях [10,11], эта модель, путем невырожденной замены переменных, сводится к системе (1). Если к решению (5)-(7) применить обратное преобразование, то свойство быть решением соответствующей системы уравнений сохраняется, а условие на границе \hat{x}_* нарушается, то есть преобразованное решение (5)-(7) перестает быть решением задачи о распаде разрыва для модели Хуттера- Саваджа.

Для построения решения задачи вышеуказанной задачи воспользуемся тем фактом, вытекающим из теоремы 1, что система (1) допускает бесконечномерную алгебру Ли, за счет оператора X_∞ , а следовательно может быть линеаризована. Очевидно, это будет справедливо и для вышеупомянутой модели. Следует отметить, что процесс натекания длинноволновой волны на берег водоема моделируется системой уравнений, которая при определенных условиях подобна модели Хуттера – Саваджа, а следовательно может быть линеаризована.

Построению решения задачи о распаде разрыва с учетом трения посвящен второй параграф, а решения, описывающие процесс наката длинноволновых волн на берег водоема, рассматриваются в третьем параграфе данной работы.

2. Задача о распаде разрыва модели Хуттера_Саваджа. Вывод уравнений Хуттера-Саваджа можно найти в работах [2,3]. В одномерном (по пространству) случае эти уравнения приобретают следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + K \cos \zeta g \frac{\partial h}{\partial x} &= \cos \zeta (\tan \zeta - \lambda \frac{u}{|u|}) g, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\lambda = \tan \delta$, g -ускорение свободного падения, $K = K(\delta, \phi)$ -коэффициент, зависящий от внутреннего трения среды и от трения о подстилающую поверхность, δ, ϕ, ζ -угол сухого трения, угол внутреннего трения, угол наклона подстилающей поверхности. Для классической задачи о распаде разрыва $\zeta = 0$. В дальнейшем для простоты рассуждений будет рассмотрен именно этот случай.

Переходя к безразмерным величинам, введем вертикальный параметр масштабирования h_0 , характеризующий начальную толщину слоя, запишем

$$x = \frac{h_0 K}{\lambda} X, \quad t = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{h_0 K}{g}} \tau, \quad u = \sqrt{gh_0 K U}, \quad h = h_0 H. \quad (9)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \tau} + \frac{\partial(UH)}{\partial X} &= 0; & \tau > 0, -\infty < X < \infty \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial X} &= -\frac{U}{|U|}, \tau > 0, -\infty < X < \infty \end{aligned} \quad (10)$$

Очевидно, что для рассматриваемой задачи начальными условиями для системы (10) будут

$$\begin{aligned} H(X,0) &= 1, X \in (-\infty, 0], & H(X,0) &= 0, X \in (0, \infty] \\ U(X,0) &= 0, X \in (-\infty, \infty). \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что качественное поведение решения рассматриваемой задачи, особенно в начальные моменты времени, должно совпадать с аналогичной задачей без учета трения и рассмотренной в первом параграфе. Поэтому можно предполагать, что и в этом случае возникают два фронта: правый фронт нулевой толщины - X_0 и левый фронт нулевой скорости - X_* . Ясно, что для решения поставленной задачи достаточно найти функции H и U в интервале $X \in [X_*, X_0]$, а также величины X_* и X_0 . Из физических соображений ясно, что $U \geq 0$. Следовательно, правая часть второго уравнения системы (10) будет равна -1. В этом случае, как уже отмечалось в первом параграфе, замена $\hat{U} = U + \tau$, $\hat{X} = X - 0.5\tau^2$ приводит систему (10) к уравнениям (1). Таким образом, становится очевидным возможность использования результатов первого параграфа и для линейаризации системы (10) можно воспользоваться преобразованием, которое приведено в работе [10] и следует из теоремы 1. Однако в этом случае, в новых переменных, довольно трудно сформулировать условия, в которые перейдут начальные данные (11). С этой точки зрения более эффективными оказываются преобразования, предложенные в работе [12] для линейаризации уравнений, составляющих математическую модель процесса наката длинноволновых волн на берег водоема. Итак, в рассматриваемой системе уравнений (10) произведем замену

$$H = -X + \eta. \quad (12)$$

При этом система (10) приводится к виду, в котором правые части обоих уравнений равны 0:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{\partial(U(\eta - X))}{\partial X} &= 0; & \tau > 0, -\infty < X < \infty \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial \eta}{\partial X} &= 0, & \tau > 0, -\infty < X < \infty \end{aligned} \quad (13)$$

Дальнейшие преобразования проводятся при помощи введения новых координат вида:

$$\hat{t} = t + U, \quad q = \eta - X. \quad (14)$$

Далее, произведем замену

$$\psi = \eta + 0.5U^2, \quad \sigma = \sqrt{q} \quad (15)$$

Следует заметить, что с учетом (12), (14) и (15) можно записать $\sigma^2 = H$. Далее, поскольку $H \geq 0$, σ является вещественным параметром и из условий (11) вытекает, что $0 \leq \sigma \leq 1$.

Очевидно, что $\sigma = 0$ соответствует правому фронту, а $\sigma = 1$ - левому фронту. Преобразования (14), (15) приводят к системе

$$-U_{\hat{t}} + \frac{\psi_{\sigma}}{2\sigma} = 0, \quad -(\sigma^2 U)_{\sigma} + 2\sigma \psi_{\hat{t}} = 0.$$

Исключение U из этой системы позволяет сформулировать следующее уравнение

$$4\psi_{\hat{t}\hat{t}}\sigma - (\sigma\psi_{\sigma})_{\sigma} = 0, \quad \hat{t} > 0, \quad 0 < \sigma < 1$$

Далее, можно записать [12]:

$$\psi = \eta + 0.5U^2 = \varphi_{\hat{t}}, \quad U = \frac{\varphi_{\sigma}}{2\sigma}, \quad \eta = \varphi_{\hat{t}} - \frac{\varphi_{\sigma}^2}{8\sigma^2}. \quad (16)$$

Путем простой подстановки нетрудно убедиться, что функция φ удовлетворяет тому же уравнению, что и функция ψ

$$4\varphi_{\hat{t}\hat{t}}\sigma - (\sigma\varphi_{\sigma})_{\sigma} = 0, \quad \hat{t} > 0, \quad 0 < \sigma < 1 \quad (17)$$

Уравнение (17) представляет собой уравнение в частных производных второго порядка, и для нахождения единственного решения необходимо ввести начальные условия при $\hat{t} = 0$ и граничные условия при $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$. С учетом (16), начальные условия можно записать так:

$$\varphi(\sigma, 0) = P(\sigma), \quad \varphi_{\hat{t}}(\sigma, 0) = F(\sigma), \quad (18)$$

$$\text{где } P(\sigma) = \int_0^{\sigma} 2\sigma' U(\sigma', 0) d\sigma', \quad F(\sigma) = \eta(\sigma, 0) + 0.5U^2(\sigma, 0). \quad (19)$$

Равенства (16) и условия на границах X_* и X_0 , позволяют записать

$$\varphi < \infty, \quad 0 \leq \sigma < 1 \quad (20)$$

$$\varphi_{\sigma} = 0, \quad \sigma = 1 \quad (21)$$

Таким образом, решение задачи (10)-(11) сводится к решению уравнения (17) с начальными условиями (18) и граничными условиями (20), (21). Заметим, что рассматриваемая задача характеризуется отсутствием движения материала в начальный момент времени – условия (11), и, далее, учитывая форму слоя в виде «ступеньки», равенствам (19) можно придать следующий вид:

$$P(\sigma) = 0, \quad F(\sigma) = \sigma^2 \quad (22)$$

Для решения задачи (17), (18), (20) - (22) применим интегральное преобразование Фурье-Бесселя:

$$\bar{\varphi}(\rho, \hat{t}) = \int_0^1 \sigma J_0(\rho\sigma) \varphi(\sigma, \hat{t}) d\sigma \quad (23)$$

При этом функция $\varphi(\sigma, \hat{t})$ восстанавливается формулой

$$\varphi(\sigma, \hat{t}) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}(\rho_k, \hat{t})}{J_0^2(\rho_k)} J_0(\rho_k \sigma). \quad (24)$$

Здесь $J_0(x)$ - функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а ρ_k удовлетворяет уравнению

$$J_1(\rho_k) = 0, \text{ где } J_1(x) - \text{ функция Бесселя первого рода первого порядка.} \quad (25)$$

После несложных преобразований находим

$$\bar{\varphi}(\rho_k, \hat{t}) = \frac{4J_0(\rho_k)}{\rho_k^3} \sin \frac{\rho_k \hat{t}}{2}.$$

Подставляя это выражение в формулу (24), получаем искомый потенциал $\varphi(\sigma, \hat{t})$:

$$\varphi(\sigma, \hat{t}) = \frac{\hat{t}}{2} + 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_k \sigma)}{\rho_k^3 J_0(\rho_k)} \sin \left(\frac{\rho_k \hat{t}}{2} \right). \quad (26)$$

Таким образом, решение задачи (17), (18), (20) - (22), к которой была сведена исходная задача (10)-(11), найдено. Далее, используя (14), (16), (26), нетрудно построить окончательное решение поставленной задачи (10), (11). В литературе эта задача получила название «Dam Break with Coulomb Friction». Итак, точное решение задачи (10), (11) задается формулами:

$$X = -\sigma^2 + \varphi_{\hat{t}} - \varphi_{\sigma}^2 / (8\sigma^2), \quad t = \hat{t} - \varphi_{\sigma} / (2\sigma), \quad \sigma = \sqrt{H}, \quad (27)$$

где $\varphi(\sigma, \hat{t})$ определяется равенством (26). Формулы (27) определяют закон движения сечения слоя рассыпающегося материала, в котором задана толщина H , в параметрическом виде.

На рисунке 1 представлены результаты расчетов по формулам (26), (27), которые показывают изменения свободной поверхности слоя рассыпающегося материала в зависимости от времени t . Расчеты также показывают, что левый фронт останавливается при $t=1.529$ на расстоянии от начала координат $X_* = -0.7216$, а правый фронт приходит в стационарное состояние при $t=2$ в точке $X_0 = 2$. При этом закон движения правого фронта находится из первого выражения (27) и формулы (26), если положить $\sigma = 0$:

$$X_0 = 0.5 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(0.5 \rho_k \hat{t})}{\rho_k^2 J_0(\rho_k)} - 2 \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(0.5 \rho_k \hat{t})}{\rho_k J_0(\rho_k)} \right]^2, \quad t = \hat{t} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(0.5 \rho_k \hat{t})}{\rho_k J_0(\rho_k)}. \quad (28)$$

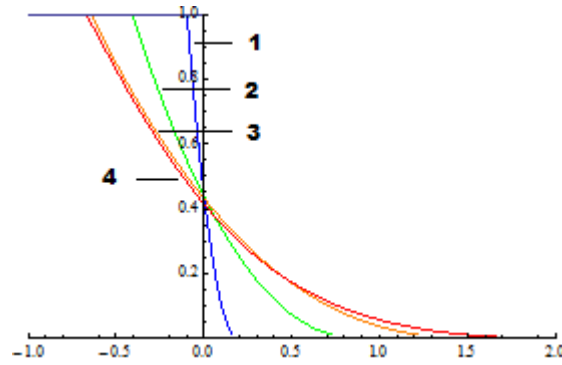


Рис. 1. Результаты расчетов по формулам (26), (27), иллюстрирующие динамику рассыпания слоя гранулированного материала: 1- $t=0.1$, 2- $t=0.5$, 3- $t=1$, 4- $t=2$

Интервал изменения параметра \hat{t} подбирается так, чтобы время t менялось от 0 до 2. Таким образом, зависимость $X_0(t)$ определяется равенствами (28) в параметрическом виде. Результаты вычислительных экспериментов показывают, что построенная зависимость является параметрической записью функции $-2t+0.5t^2$ - характеристикой рассматриваемых уравнений, на которой $H=0$, и, следовательно, выражающей закон движения правого фронта. Этот факт подтверждает правильность найденного решения.

Аналогично находится и левый фронт, но при $\sigma = 1$:

$$X_* = -4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(0.5\rho_k t)}{\rho_k^2}, \text{ так как } t = \hat{t}. \quad (29)$$

Эта функция уже не совпадает с характеристикой рассматриваемых уравнений, как это было в случае отсутствия трения (см. первый параграф). Существенным отличием полученного решения от решения в первом параграфе заключается в том, что наличие трения приводит к существованию стационарного решения. На рис.1 стационарному решению соответствует кривая под номером 4.

3. Задача о набегании длинноволновой волны на берег водоема. Выпишем систему уравнений мелкой воды применительно к описанию наката волны на берег [4,5,12]:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + g \frac{\partial \eta'}{\partial x'} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + u' \frac{\partial ([\eta' + \varphi'(x')]u')}{\partial x'} = 0 \quad (31)$$

Здесь η' - возвышение волны над равновесным положением поверхности океана (смещение уровня воды); u' - средняя по глубине скорость волнового потока; t' - время; g - ускорение свободного падения; $x'_s(t)$ - положение границы вода-суша;

$$\eta'_s(t) = \eta'(-x'_s(t), t'); \quad (32)$$

$z = -\varphi'(x')$ - функция, описывающая рельеф дна, например (типичный случай для исследования наката волн на берег)

$$\varphi'(x') = \begin{cases} h'(x'), & x < l \\ h_0, & x > l \end{cases}, \quad (33)$$

где $h'(x') = \alpha'x'$, α' - характеризует наклон поверхности дна к равновесной поверхности океана; l - положение границы резкого изменения рельефа дна;

Из (32) и (33) следует, что

$$\eta'_s(t) = \alpha'x'_s(t) \quad (34)$$

Система уравнений (30), (31) должна быть решена при следующих начальных и граничных условиях:

$$t' = 0, \quad \eta'_s(x',0) = f'(x'); \quad (35)$$

$$u'(x',0) = 0 \quad (36)$$

Условия (35), (36) моделируют начальную волну вдали от береговой линии, возникшую, например, в результате подводного землетрясения или извержения вулкана.

Одним из граничных условий является условие при $x \rightarrow \infty$. Предполагая, что вдали от начальной волны поверхность океана остается невозмущенной, можно записать

$$x \rightarrow \infty, \quad \lim \eta'(x',t'0) = 0 \quad (37)$$

$$\lim u'(x',t'0) = 0 \quad (38)$$

Условие на подвижной границе, очевидно, будет иметь вид

$$x' = -x'_s(t), \quad \eta'(-x'_s(t),t') = -\varphi'(-x'_s). \quad (39)$$

Введем характерные масштабы процесса:

h_0 - характерная глубина океана; u_0 - характерная скорость движения жидкости; c_0 - характерная скорость движения волны; $t_0 = \frac{l}{c_0}$ - характерное время процесса; η_0 - характерная амплитуда волны.

Используя введенные масштабы, перейдем к безразмерным переменным:

$$x_s = \frac{x'_s}{l}; \quad t = \frac{t'}{t_0}; \quad u = \frac{u'}{u_0}; \quad x = \frac{x'}{l}; \quad \eta = \frac{\eta'}{\eta_0}; \quad \varphi(x) = \frac{\varphi'(x')}{h_0}. \quad (40)$$

Очевидно, что величины h_0, η_0, l известны из условий задачи. Скоростные масштабы определяются из анализа размерностей уравнений (30) – (31). В результате получаем

$$c_0 = \sqrt{gh_0}, \quad u_0 = \eta_0 \sqrt{\frac{g}{h_0}} \quad (41)$$

Учитывая (40) - (41), система (30), (31) в безразмерном виде запишется так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (42)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u(\varphi(x) + \varepsilon \eta)] = 0, \quad (43)$$

где $\varepsilon = \frac{\eta_0}{h_0}$ малый параметр, поскольку рассматривается случай, когда амплитуда волны значительно меньше глубины океана.

Начальное условие в новых переменных принимает следующую форму:

$$t = 0, \quad \eta(x,0) = f(x), \quad (44)$$

$$u(x,0) = 0, \quad (45)$$

а граничные условия запишутся в виде:

$$x = -x_s(t), \quad \varepsilon \eta(-x_s, t) = -\varphi(-x_s), \quad (46)$$

$$x \rightarrow \infty, \quad \lim \eta(x, t) = \lim u(x, t) = 0 \quad (47)$$

Наличие малого параметра дает возможность приближенно линеаризовать поставленную задачу. Для получения равномерно пригодного разложения по ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ в уравнениях (42), (43) сделаем следующую замену пространственной переменной:

$$x = y - \varepsilon x_m, \quad (48)$$

где $x_m = x_s / \varepsilon$, поскольку $x_s = O(\varepsilon)$. Неизвестные величины будем искать в виде рядов по степеням ε :

$$\begin{aligned} u &= u_1 + \varepsilon u_2 + O(\varepsilon^2) \\ \eta &= \eta_1 + \varepsilon \eta_2 + O(\varepsilon^2) \\ x_m &= x_1 + \varepsilon x_2 + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (49)$$

После несложных преобразований находим, что главные члены разложений (49) должны удовлетворять следующим уравнениям

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (u_1 \varphi(y)) = 0 \quad (50)$$

$$x_1 = \frac{1}{\alpha} \eta_1(0, t)$$

где $\alpha = \varphi'(0)$.

Таким образом, для получения главных членов разложений (49) необходимо решить систему (50) в фиксированной области $]0, \infty[$. При этом в точке $y = 0$, $\varphi(y) = 0$, то есть во втором уравнении системы (50) имеется вырождающийся коэффициент. Этот факт приводит к тому, что при $y \rightarrow 0$ следует наложить на искомые функции u_1 , η_1 , условие их ограниченности.

От уравнений (50) можно перейти к исследованию одного уравнения относительно η_l , которое получается из последних двух уравнений системы (50) исключением функции u_l :

$$\frac{\partial^2 \eta_l}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi(y) \frac{\partial \eta_l}{\partial y} \right) = 0, \quad 0 < y < \infty \quad (51)$$

Начальными условиями для уравнения (51) будут:

$$t = 0, \quad \eta_l = f(y), \quad \frac{\partial \eta_l}{\partial t} = 0, \quad (52)$$

которые легко находятся из (45), (46) с учетом того, что $x_s(0) = x_m(0) = 0$. Граничными условиями для рассматриваемого уравнения (51), очевидно, являются

$$x \rightarrow 0, \quad \eta_l < \infty \quad (53)$$

$$x \rightarrow \infty, \quad \eta_l \rightarrow 0 \quad (54)$$

Задача (51) –(54) корректно поставлена и имеет единственное решение. Решив эту задачу, легко находится закон движения границы суша-вода (урез):

$$x_m(t) = \frac{1}{\alpha} \eta_l(0, t) \quad (55)$$

Заменяя y на $x + \varepsilon x_l$, согласно (49), получаем равномерно пригодное для всех $x \geq -\varepsilon x_l$ решение исходной задачи с точностью $O(\varepsilon)$.

Задачу (51) – (54) будем решать, используя общую теорию интегральных преобразований [13]. Строго говоря, рассматриваемая задача требует построение интегрального преобразования в полубесконечной области. Однако, применение интегрального преобразования Лапласа по переменной t приводит к значительным трудностям и громоздким выражениям при построении оригинала, а применение интегрального преобразования по переменной y в области $]0, \infty[$ сопряжено с вычислением спектральной функции, что также представляет из себя трудоемкую задачу, особенно в тех случаях, когда функция $\varphi(y)$ имеет сложный вид. По этой причине рассмотрим ограниченную область $]0, L[$. Граничное условие на L выберем, для простоты рассуждений, в виде

$$y = L, \quad \eta_l = 0 \quad (56)$$

Так как уравнение (51) гиперболического типа и носитель функции $f(y)$ сосредоточен в интервале $[y_l, y_r]$, то условие (56) начинает влиять на решение задачи, когда возмущения, вызванные начальными данными, достигнут точки $y = L$. Так как характеристики уравнения (51) имеют вид

$$\int_0^y \frac{\partial \xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} = \pm t + C, \quad C - \text{const}, \quad (57)$$

то легко найти время, за которое возмущение дойдет до L . Действительно, из (57) получаем

$$\int_{y_r}^L \frac{\partial \xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} = t^*,$$

где t^* - искомое время. Таким образом, если процесс изучается в интервале времени $[0, T]$, то величину L следует выбрать из условия

$$\int_{y_r}^L \frac{\partial \xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} > T \quad (58)$$

В большинстве случаев вдали от береговой линии можно положить $\varphi(\xi) = 1$ и условие (59) принимает простую форму: $L > T + y_r$. Следовательно, в задаче (51) –(54) граничное условие (54) можно заменить условием (56).

Введем в рассмотрение интегральное преобразование по пространственной переменной y с произвольным ядром $K(\mu, y)$:

$$\bar{\eta}_l = \int_0^L \eta_l(y, t) K(\mu, y) dy, \quad (59)$$

где μ - параметр интегрального преобразования.

Применяя это преобразование к задаче (51) –(53), (56) получаем уравнение для ядра $K(\mu, y)$ и для изображения искомой функции.

$$\frac{d}{dy} \left(\varphi(y) \frac{dK}{dy} \right) + \mu^2 K = 0 \quad (60)$$

$$y = 0, \quad K < \infty \quad (61)$$

$$y = L, \quad K = 0 \quad (62)$$

$$\frac{d^2 \bar{\eta}_l}{dt^2} + \mu^2 \bar{\eta}_l = 0 \quad (63)$$

$$t = 0, \quad \bar{\eta}_l = \bar{f}(\mu), \quad \bar{\eta}_l = 0 \quad (64)$$

Задача (60)-(62) является задачей Штурма-Лиувилля. [13]. Пусть $\{\mu_k\}$ последовательность собственных чисел, а $K(\mu_k, y)$ - система нормированных собственных функций. Тогда используя свойства полноты и ортогональности собственных функций, можно записать формулу обращений для интегрального преобразования (60) в следующем виде

$$\eta_l(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\eta}_l(\mu_k, t) K(\mu_k, y) \quad (65)$$

Из системы (63), (64) находим $\overline{\eta}_l(u_k, t)$.

$$\overline{\eta}_l(\mu_k, t) = \overline{f}(\mu_k) \cos \mu_k t. \quad (66)$$

Подставляя (66) в (65), получаем решение задачи (51) –(53), (56):

$$\eta_l(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^L f(y) K(\mu_k, y) dy K(\mu_k, y) \cos \mu_k t \quad (67)$$

Из первого уравнения системы (50) легко находится скорость u_l :

$$u_l = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K'_y(\mu_k, y)}{\mu_k} \int_0^L f(y) K(\mu_k, y) dy K(\mu_k, y) \sin \mu_k t \quad (68)$$

Подставляя (67) в (55) находим закон движения границы вода-суша.

$$x_l(t) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^L f(\xi) K(\mu_k, \xi) d\xi \cdot K(\mu_k, 0) \cos \mu_k t \quad (69)$$

Возвращаясь в выражениях (67), (68) к переменной x , то есть, подставляя вместо y $x + \varepsilon x_l(t)$, получаем равномерно пригодное решение поставленной задачи на всем диапазоне изменений $x \in [-\varepsilon x_l(t), L]$.

Рассмотрим конкретный пример использования полученных результатов. Пусть рельеф дна водоема описывается функцией $\varphi(y)$ следующего вида:

$$-\varphi(y) = \alpha y \quad \infty < y < \infty. \quad (70)$$

Этот случай интересен тем, что, уравнения (42), (43) допускают точную линеаризацию с произвольным ε , поскольку они сводятся к системе, рассмотренной в параграфе 2, а следовательно и к системе первого параграфа. Как уже отмечалось задача о накате волны на берег при условии (70) была рассмотрена в работе [12]. Таким образом, представляет интерес сравнение точного решения задачи [12] с решением (67)-(69), полученным на основе приближенной линеаризации.

Если $\varphi(y)$ имеет вид (70), то как следует из (34) безразмерный наклон α определяется выражением $\alpha = \alpha' \frac{l}{h_0}$. Так как в этом случае нет строго масштаба для глубины, то за h_0 можно принять глубину, которая достигается на расстоянии l от уреза, то есть $h_0 = \alpha' l$. Поэтому можно считать $\alpha = 1$.

Решение задачи Штурма-Лиувилля (60) – (62) в рассматриваемом примере легко находится. Подставляя это решение в формулы (67)-(69), получаем

$$\eta_l(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_0(2\mu_k \sqrt{x + \varepsilon x_l(t)})}{L \cdot J_1^2(2\mu_k \sqrt{L})} \cos \mu_k t \cdot \int_0^L f(\xi) J_0(2\mu_k \sqrt{\xi}) d\xi, \quad (71)$$

$$u_l(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_1(2\mu_k \sqrt{x + \varepsilon x_l(t)})}{L \cdot J_1^2(2\mu_k \sqrt{L}) \sqrt{x + \varepsilon x_l(t)}} \sin \mu_k t \cdot \int_0^L f(\xi) J_0(2\mu_k \sqrt{\xi}) d\xi, \quad (72)$$

$$x_l(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \mu_k t}{L \cdot J_1^2(2\mu_k \sqrt{L})} \cdot \int_0^L f(\xi) J_0(2\mu_k \sqrt{\xi}) d\xi, \quad (73)$$

где μ_k являются корнями уравнения $J_0(2\mu_k \sqrt{L}) = 0$. (74)

Как и ранее $J_0(z)$, $J_1(z)$ - функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков, соответственно.

Формулы (71)-(73) описывают динамику профиля волны, скорости течения и границы раздела вода-суша.

Следуя работе [12] преобразуем уравнения (42), (43) при условии (70), используя следующие преобразования переменных.

$$u(\sigma, \hat{t}) = -\frac{1}{2\sigma} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}; \quad (75)$$

$$\eta(\sigma, \hat{t}) = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} - \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{2\sigma} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right)^2; \quad (76)$$

$$x(\sigma, \hat{t}) = \sigma^2 - \varepsilon \eta(\sigma, \hat{t}); \quad (77)$$

$$t(\sigma, \hat{t}) = \hat{t} + \varepsilon u(\sigma, \hat{t}), \quad (78)$$

где потенциал ϕ удовлетворяет линейному гиперболическому уравнению вида:

$$4\phi_{\hat{t}\hat{t}}\sigma - (\sigma\bar{\phi}_{\sigma})_{\sigma} = 0, \quad \hat{t} > 0, \quad 0 < \sigma < \infty \quad (79)$$

Уравнение (79) решается при условии

$$\hat{t} = 0, \quad \phi = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \hat{t}} = f(\sigma^2). \quad (80)$$

Заметим, что второе условие (80) при переходе к физическим координатам x, t даст начальное условие (44) только в случае когда $\max|f'(x)| \cdot \varepsilon \ll 1$. Это условие, как правило, выполняется. В противном случае происходит быстрое обрушение волны и задача (42) – (45) теряет смысл.

Решение задачи (79), (80) в работе [12] находится точно и имеет следующий вид:

$$\phi(\sigma, \hat{t}) = 2 \int_0^{\infty} f(b^2) G(b, \sigma, \hat{t}) db \quad (81)$$

где $G(b, \sigma, \hat{t})$ - функция Грина, определяемая формулой:

$$G(b, \sigma, \hat{t}) = \begin{cases} 0, & \frac{1}{2} \hat{t} < |\sigma - b| \\ \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{b}{\sigma}}} K\left(\frac{\hat{t}^2 - 4(\sigma - b)^2}{16\sigma b}\right), & |\sigma - b| < \frac{1}{2} \hat{t} < |\sigma + b|, \\ \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{t}^2 - 4(\sigma - b)^2}} K\left(\frac{16\sigma b}{\hat{t}^2 - 4(\sigma - b)^2}\right), & \frac{1}{2} \hat{t} > |\sigma + b| \end{cases},$$

где $K(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\sqrt{1 - z^2 \sin^2 v}}$.

Зная потенциал $\phi(\sigma, \hat{t})$, по формулам (75), (76) находятся функции $u(\sigma, \hat{t}), \eta(\sigma, \hat{t})$, а формулы (77), (78) позволяют найти значения скорости и профиль волны в физической плоскости (t, x) . Это возможно только тогда, когда якобиан преобразований (77), (78) отличен от нуля. Можно показать, что равенство 0 якобиана достигается в тех точках, где крутизна волны $\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$ становится бесконечно большой. Физически это означает, что в данном случае происходит обрушение волны и полученное решение справедливо лишь до точки обрушения. Ясно, что если волна не обрушивается на урете, то она не обрушивается и при $\sigma > 0$, так как граница раздела вода-суша наиболее удалена от начального положения волны. Вычислительные эксперименты показывают, что существуют такие значения параметра ε , при которых обрушение волны не происходит. В каждом конкретном случае существует свое значение ε_k такое, что при $\varepsilon < \varepsilon_k$ обрушение волны не наблюдается. Для сравнения двух решений рассматривались ситуации, удовлетворяющие этому условию. Кроме того, начальный профиль волны принимался в виде:

$$f(y) = e^{-k(y-y_0)^2}, \quad 0 < y < \infty, \quad (82)$$

а параметр $L=25$. При этом диапазон изменения времени t должен быть, согласно (58), следующий $t \in [0,8]$, $y_0 = 1$, $k = 4$. На рис.2 показаны результаты расчетов, выполненные по формулам (71)-(74) – сплошные линии и по точным формулам (75)-(78), (81) – пунктирные линии. Случай а) соответствует значению $\varepsilon = 0.03$, а случай в) - $\varepsilon = 0.01$. Заметим, что критическое значение параметра ε для данного примера составляет $\varepsilon_k = 0.033$. Из рисунка видно (случай в)), что если параметр $\varepsilon < \varepsilon_k$, то приближенное решение достаточно точно отражает динамику уреза при накате волны на берег. Если параметр ε имеет порядок ε_k (случай а)), то расхождения будут заметными. Это

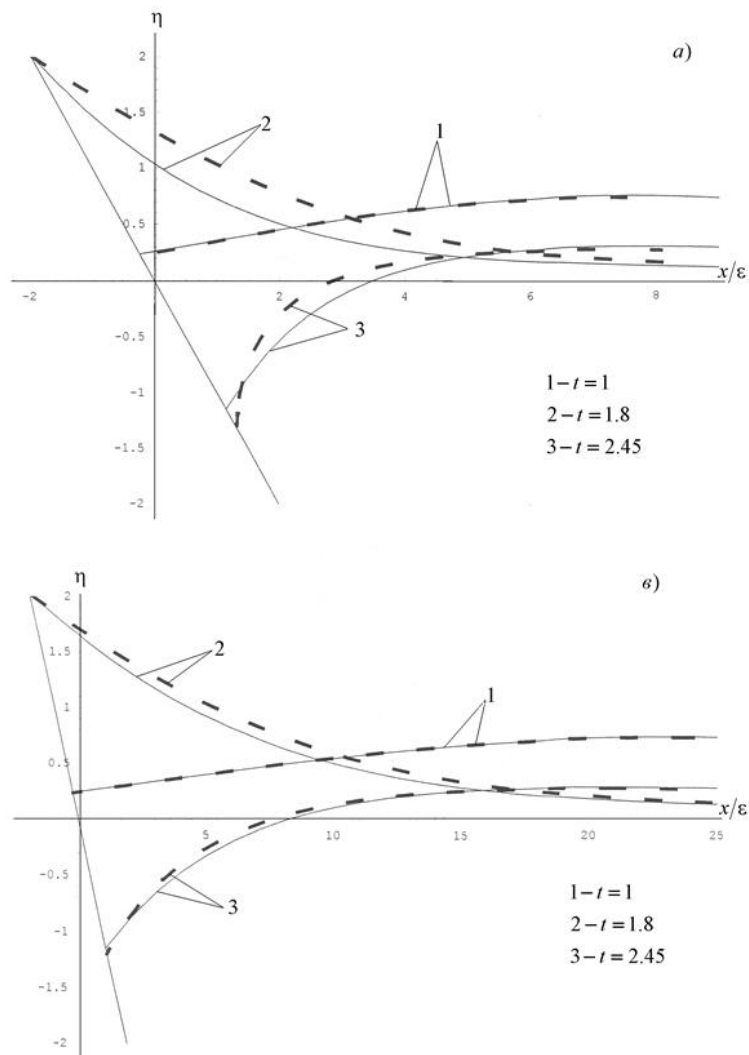


Рис.2. Поведение поверхности океана в окрестности береговой линии.

обусловлено тем, что в случае, когда ϵ имеет порядок ϵ_k , в определенный момент крутизна волны становится бесконечно большой, так как якобиан становится близким к 0. Однако, как показывают многочисленные вычислительные эксперименты, приближенные формулы описывают исследуемый процесс вполне удовлетворительно для любых $\epsilon < \epsilon_k$.

Заключение. Основными результатами данной работы следует считать то, что в ней на основе группового анализа подтверждена возможность линеаризации уравнений МВ. Этот факт позволил получить точные решения задачи о распаде разрыва с учетом и без учета трения. Эти решения могут служить для моделирования процессов, связанных с движением сыпучих материалов, в частности, схода лавин.

Кроме того, показано, что математическая модель наката волн на берег водоема при определенных условиях сводится к системе, для которой показана возможность точной линеаризации. Именно это обстоятельство позволило Carrier, George F [12] получить точное решение задачи о накате волны на берег постоянного наклона. Однако, произвольная конфигурация дна водоема делает невозможным применение этого метода. Наличие малого параметра позволяет предложить приближенную процедуру линеаризации, которая позволяет аналитически решать задачи с различными

конфигурациями профиля дна водоема. На примере, рассмотренном в [12], показана применимость предлагаемого приближенного метода.

В заключении мне хочется поблагодарить профессора **Сергея Ивановича Сенашова**, благодаря которому была написана эта статья, и поздравить его с надвигающимся юбилеем. Общение с Сергеем Ивановичем всегда бывает очень плодотворным и способствует рождению новых научных результатов. Желаю ему крепкого здоровья и выполнения всех его начинаний.

Литература.

1. Темам Р. Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ / Темам Р. // — 2-е изд. — М.: Мир. 1981. 408 с.
2. Savage S.B. The motion of a finite mass of granular material down a rough incline / Savage S.B., Hutter K. // J. Fluid Mech. 199, 1989. 177-215 pp.
3. Gray N. Rapid Granular Avalanches / Gray N. // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Volume 11. Dynamic Response of Granular and Porous Materials under Large and Catastrophic Deformations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003, 3-42 pp.
4. Вольцингер Н.Е. Теория мелкой воды / Вольцингер Н.Е., Пяковский Р.В // Гидрометеоздат, Ленинград 1977. 207с.
5. Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами / Пелиновский Е.Н. // Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996, 150 с.
7. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Овсянников Л.В. //-М: 1983. Наука. - 1987, 399 с. .
8. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике / Ибрагимов Н.Х.// М: Наука.- 1983, 280 с..
9. Hydon P.E. Symmetry methods for differetial equations / Hydon P.E. // Cambridge University Press, 2000, 220 p.
10. Chugunov, V.A. Exact solutions of the Savage-Hutter equations for one-dimensional granular flows/ V.A. Chugunov, J.M.N.T. Gray and K.Hutter // Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences. Preprint Series. NI03077 - GPF. 2003. 25 p.
11. Chugunov V.A. Group Theoretic Methods and Similarity Solutions of the Savage-Hutter Equations /V.A.Chugunov, J.M.N.T.Gray, K. Hutter/ // Dynamic Response of granular and Porous Materials under Large and Catastrophic Deformations. Springer-Verlad Berlin Heidelberg, 2003, 250-261 p.p.
- 12.Carrier, George F. Tsunami run-up and draw-down on a plane beach /George F. Carrier, Tai Tei Wu, Harry Yeh// J. Fluid Mech.,vol. 475. 2003. 24 p.
13. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физике / Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. // Издательство: «Высшая школа», Москва 1970.-710 с.