Функция Сегё на неспрямляемой дуге

Д.Б. Кац

Аннотация

Пусть Γ есть простая жорданова дуга на комплексной плоскости. В работах последних лет функцией Сегё для этой дуги называют такую голоморфную в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функцию $S(z)$, что

$$S^+(t)S^-(t) = \rho(t), t \in \Gamma,$$

где ρ есть заданная на Γ функция, а $S^{\pm}(t)$ означают предельные значения $S(z)$ в точке $t \in \Gamma$ слева и справа соответственно.

В данной работе строится функция Сегё на неспрямляемой дуге с концами в точках ± 1. В основе построения лежат свойства преобразования Коши производной по $\overline{z}$ от функции

$$F(z) := \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}},$$

понимаемой как обобщенная функция на комплексной плоскости.

Введение

В течение последнего десятилетия было опубликовано большое число работ, посвященных применению краевой задачи Римана-Гильберта при исследовании ортогональных многочленов и различных их обобщений. При этом используется как матричная задача Римана (т.н. подход Дейфта-Чжоу, см., напр., [1, 2, 3, 4]),так и обычная краевая задача Римана и другие связанные с ней краевые задачи для обычной (т.е. не матричной) голоморфной функции на плоскости или на римановой поверхности (см. [5, 6, 7]). Следует отметить также работы Ф.Н.Гарифьянова, где методы идеи теории краевых задач применяются для изучения биортогональных систем функций, см., напр., [8]. В этих исследованиях существенную роль играет аналитическая в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ функция $S(z)$, имеющая на заданной дуге Γ заданное произведение своих предельных значений слева и справа:

$$S^+(t)S^-(t) = \rho(t), t \in \Gamma \setminus \{a_1, a_2\}, \tag{1}$$

где $a_{1,2}$ - концы дуги Γ. Эту функцию называют (см, напр., [6]) функцией Сегё для этой дуги в честь одного из создателей современной теории ортогональных многочленов Габора Сёге. Формальное логарифмирование этого краевого условия приводит к краевой задаче Римана

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = f(t), t \in \Gamma \setminus \{a_1, a_2\}, \tag{2}$$

где Φ и f - логарифмы S и ρ соответственно. Для кусочно гладких дуг решение такой задачи Римана известно (см., напр., [9], с. 442) и строится с помощью интеграла типа Коши. Однако в случае неспрямляемой дуги Γ эта техника не работает, поскольку в определении контурного интеграла $\int_\Gamma \cdot dz$ возникают определенные трудности. Так, если понимать этот интеграл в смысле Стильтьеса, то наиболее простым достаточным (хотя и не необходимым) условием его существования является конечность вариации z как функции на дуге Γ, что равносильно спрямляемости этой дуги.

Следует отметить работу [10], где задача (1) впервые была исследована без предположения об отсутствии нулей у искомой функции. Но контур Γ и в этой работе предполагался спрямляемым.

Задача Римана на неспрямляемой дуге была впервые решена в работе [11] методом регуляризации квазирешений.

В данной работе мы решаем ее путем замены интеграла типа Коши преобразованием Коши некоторых обобщенных функций. В результате здесь удается ослабить ограничения работы [11] на дугу Γ.

Преобразование Коши меры с компактным носителем μ

$$\mathcal{C}\mu := \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z},$$

называемое также потенциалом Коши, стало в последние десятилетия популярным объектом исследований (см., напр., [12, 13, 14]). В частном случае, когда носитель μ есть спрямляемая кривая, $d\mu = f(t)dt$ и $f(t)$ есть интегрируемая на этой кривой функция, это выражение превращается в интеграл типа Коши.

Определение преобразования Коши легко переносится с мер на обобщенные функции. Если φ есть обобщенная функция с компактным носителем

S на комплексной плоскости, то ее преобразование Коши определяется равенством

$$\mathcal{C}\varphi := \frac{1}{2\pi i}\langle\varphi, \frac{1}{\zeta - z}\rangle,$$

где $z \notin S$ и φ применяется к $\frac{1}{\zeta - z}$ как к функции переменной ζ.

Отметим, что сходный объект исследовался под названием "аналитическое представление"в книге [15]. Однако аналитическое представление в смысле этой книги для распределения с носителем на плоскости представляет собою аналитическую функцию двух комплексных переменных.

В первом параграфе данной работы рассматриваются свойства некоторого семейства обобщенных функций. Во втором исследуются их преобразования Коши. Наконец, в третьем параграфе на этой основе решается вспомогательная краевая задача Римана (2) на неспрямляемой дуге, строится функция Сёге и обсуждаются вопросы ее единственности.

1 Свойства обобщенной функции $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$

Пусть Γ есть простая жорданова дуга с концами в точках ± 1. В дальнейшем мы считаем, что она, вообще говоря, неспрямляема, но имеет нулевую плоскую меру Жордана. Пусть $F(z)$ есть однозначная в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ ветвь функции $\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$. Для конкретности будем считать, что это та из двух однозначных ветвей этой функции, разложение которой в степенной ряд в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид $F(z) = \frac{1}{z} + \dots$. Функция F голоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$, ограничена вне любых окрестностей точек ± 1, а в этих точках имеет особенности порядка $1/2$. Таким образом, эта функция интегрируема в любом круге. Любую функцию $F \in L_{\text{loc}}(\mathbb{C})$ можно отождествить с обобщенной функцией, действующей по правилу

$$\langle F, \omega\rangle = \iint_{\mathbb{C}} F(z)\omega(z) dz d\overline{z}, \omega \in C_0^\infty(\mathbb{C}),$$

где $C_0^\infty(\mathbb{C})$ означает, как обычно, пространство всех заданных на комплексной плоскости функций с компактными носителями, имеющих частные производные всех порядков, а $dz d\overline{z} \equiv dz \wedge d\overline{z} = -2i dx dy$. Мы рассмотрим обобщенную функцию $\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}$, то есть результат применения дифференциального оператора

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

к обобщенной функции, полученной таким образом из упомянутой выше ветви $\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$. При этом мы обозначаем через $F_+(t)$ и $F_-(t)$ предельные значения функции F при приближении в внутренней точке t дуги Γ слева и справа соответственно; дуга Γ обходится от точки -1 к точке $+1$. Очевидно,

$$F_-(t) = -F_+(t).$$

По определению производной обобщенной функции (см., напр., [16])

$$\langle \frac{\partial}{\partial \overline{z}} F, \omega \rangle = -\iint_{\mathbb{C}} F \frac{\partial \omega}{\partial \overline{z}} dz d\overline{z}. \tag{3}$$

Если носитель ω не пересекает Γ, то по формуле Грина мы получаем

$$\langle \frac{\partial}{\partial \overline{z}} F, \omega \rangle = -\iint_{\operatorname{supp} \omega} \frac{\partial F \omega}{\partial \overline{z}} dz d\overline{z} = \int_{\Lambda} F \omega dz = 0,$$

где Λ есть спрямляемая простая замкнутая кривая, не пересекающая Γ и ограничивающая область, содержащую $\operatorname{supp} \omega$. Это значит, что $\operatorname{supp} \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} \subset \Gamma$. Но из леммы Вейля (см. [16]) следует, что $\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}$ не имеет общих точек с Γ (в противном случае функция F была бы аналитической в такой общей точке). Поэтому

$$\operatorname{supp} \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = \Gamma.$$

В частном случае, когда Γ спрямляема, эту обобщенную функцию можно представить следующим образом. Построим от точки -1 к $+1$ дополнительную спрямляемую дугу Γ' так, чтобы область D, ограниченная замкнутой кривой $\Gamma \bigcup \Gamma'$, находилась слева от Γ. Функцию $F(z)$ представим в виде суммы $F(z) = F^+(z) + F^-(z)$, где $F^+(z)$ равна $F(z)$ в области D и нулю вне ее, а $F^-(z)$ - нулю в области D и $F(z)$ вне ее. Тогда в силу формулы Грина

$$\langle \frac{\partial F^+}{\partial \overline{z}}, \omega \rangle = -\iint_D \frac{\partial F \omega}{\partial \overline{z}} dz d\overline{z} = \int_{\Gamma \bigcup \Gamma'} F^+(t) \omega(t) dt.$$

Аналогично,

$$\langle \frac{\partial F^-}{\partial \overline{z}}, \omega \rangle = -\int_{\Gamma \bigcup \Gamma'} F^-(t) \omega(t) dt$$

Но, так как $F^+ + F^- = F$, а скачок F при переходе через Γ' равен нулю, имеем

$$\langle\frac{\partial F}{\partial \overline{z}},\omega\rangle = \int_\Gamma (F_+(t) - F_-(t))\omega(t)dt = 2\int_\Gamma F_+(t)\omega(t)dt.$$

Таким образом, $\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}$ можно рассматривать как обобщение операции интегрирования с весом $2F_+$ на неспрямляемые кривые.

Непосредственно из формулы (3) следует, что при $\omega \in C_0^\infty(\Delta)$, где Δ - любая конечная область, содержащая Γ,

$$|\langle\frac{\partial F}{\partial \overline{z}},\omega\rangle| \leq 2\sup\{|\frac{\partial \omega}{\partial \overline{z}}| : z \in \overline{\Delta}\}\iint_\Delta |F|dxdy \leq C\|\omega\|_{C^1(\overline{\Delta})}.$$

Поэтому обобщенную функцию $\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}$ можно продолжить до непрерывного функционала на $C^1(\Delta)$. Иначе говоря, обобщенное интегрирование $\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}$ применимо к любой дифференцируемой в окрестности Γ функции.

Однако можно доказать, что $\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}$ ограничено и по норме более обширного пространства, а именно Гёльдера. Пространством Гёльдера $H_\nu(A)$ на компакте A называется множество всех заданных на этом компакте функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем ν, то есть условию

$$h_\nu(f) := \sup\{\frac{|f(t_1) - f(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\nu} : t_{1,2} \in A, t_1 \neq t_2)\} < \infty,$$

снабженное нормой $\|f\|_{H_\nu(A)} \equiv h_\nu(f) + \|f\|_{C(A)}$, где $\|f\|_{C(A)}$ означает обычную равномерную норму пространства $C(A)$.

В дальнейшем нам понадобится верхняя метрическая размерность. Её определение таково. Для компактного множества $A \subset \mathbb{C}$ рассмотрим все его покрытия кругами, диаметр каждого из которых не превосходит ε. Через $N_\varepsilon(A)$ обозначим наименьшее возможное число кругов в таком покрытии. Верхней метрической размерностью называется

$$\overline{\mathrm{dm}}\, A = \overline{lim}_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln N_\varepsilon(A)}{\ln \varepsilon^{-1}}.$$

Эта размерность введена в работе [18] (см. также [19]). Легко видеть, что $1 \leq \overline{\mathrm{dm}}\, A \leq 2$, причем она равна 1 для спрямляемых кривых и 2 для множеств, имеющих внутренние точки. Основным результатом этого раздела является

Теорема 1 *При* $\nu > \frac{3}{4}\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma - \frac{1}{2}$ *обобщённая функция* $\frac{\partial F}{\partial \bar z}$ *допускает оценку*

$$|\langle \frac{\partial F}{\partial \bar z}, \omega\rangle| \le C\|\omega\|_{H_\nu(\overline{\Delta})}$$

для любой функции $\omega \in C_0^\infty(\Delta)$. *Здесь* Δ *есть произвольная конечная область, содержащая* Γ.

Для доказательства этой теоремы мы воспользуемся разбиением Уитни (см., напр., [17], с. 199). Оно состоит из неналегающих диадических квадратов Q, накрывающих $C\backslash\Gamma$ и таких, что

$$\mathrm{dist}(Q, \Gamma) \asymp \mathrm{diam}\, Q$$

Обозначим через W эту совокупность квадратов, а через m_n - число квадратов со стороной 2^{-n}, входящих в разбиение W. Пусть W_1 - совокупность всех квадратов из W со стороной не больше 1. Обозначим через Δ такую область, что $\overline{\Delta} = \overline{\bigcup_{Q\in W_1} Q}$. Очевидно, $\Gamma \subset \Delta$. Кроме того, обозначим $\Gamma^* = \overline{\bigcup_{Q\in W_1} \partial Q}$. Для любой функции $\omega \in C_0^\infty()\Delta$ рассмотрим ее сужение на Γ^* и обозначим через $\tilde\omega$ продолжение Уитни этого сужения. Как известно (см. [17]), оператор продолжения Уитни связывает с заданной на компакте A функцией f ее продолжение f^w на всю комплексную плоскость, причем вне A это продолжение имеет производные всех порядков, причем

$$|\nabla f^w(z)| \le h_\nu(f)\,\mathrm{dist}^{\nu-1}(z, \Gamma) \tag{4}$$

если $f \in H_\nu(\Gamma)$. По построению продолжения Уитни, внутри каждого квадрата $Q \in W_1$ функция $\tilde\omega$ фактически является продолжением сужения ω на границу этого квадрата.

Лемма 1 *Если* $f \in H_\nu(\partial Q)$ *и* $p < \frac{1}{1-\nu}$, *то*

$$\iint_Q |\nabla f^w|^p dxdy \le C a^{2-(1-\nu)p} h_\nu^p(f)$$

где a *- сторона квадрата* Q, $h_\nu(f)$ *- коэффициент Гёльдера функции* f *на границе* Q, *а* C *не зависит от и от* f.

Доказательство леммы. Без ограничения общности можно читать, что центром квадрата находится в начале координат. Разобьем квадрат его диагоналями на четыре равных треугольника. В каждом из них $\mathrm{dist}(z, \partial Q)$

равна $\frac{a}{2}-x$ или $\frac{a}{2}-y$, где $z=xi+y$. Обозначим один из треугольников (для конкретности, с вертикальным основанием) через T. Тогда, согласно неравенству (4),

$$\iint_T |Vf^w|^p dxdy \leq h_\nu^p(f)\int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_{-x}^{x} \frac{dy}{(\frac{a}{2}-x)^{(1-\nu)p}} = 2h_\nu^p(f)\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{xdx}{(\frac{a}{2}-x)^{(1-\nu)p}}$$

При условии $p<\frac{1}{1-\nu}$ последний интеграл сходится. Замена переменной $x=\frac{at}{2}$ немедленно приводит к требуемой оценке.

При $\omega \in C_0^\infty(\Delta)$ имеем:

$$\langle\frac{\partial F}{\partial \overline{z}},\omega\rangle = -\iint_\Delta F\frac{\partial\omega}{\partial\overline{z}}dzd\overline{z} = -\Sigma_{Q\in W_1}\iint_Q \frac{\partial F\omega}{\partial\overline{z}}dzd\overline{z} =$$

$$= \Sigma_{Q\in W_1}\int_{\partial Q} F\omega dzd\overline{z} = \Sigma_{Q\in W_1}\int_{\partial Q} F\tilde{\omega} dzd\overline{z} = -\iint_\Delta F\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\overline{z}}dzd\overline{z}$$

Согласно неравенству Коши,

$$\left|\langle\frac{\partial F}{\partial\overline{z}},\omega\rangle\right| \leq 2\left(\iint_\Delta |F|^q dxdy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\iint_\Delta |\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\overline{z}}|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Первый из интегралов сходится при $q<4$. Второй оцениваем согласно лемме:

$$\iint_\Delta |\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\overline{z}}|^p dxdy \leq Ch_\nu^p(\omega)\Sigma_{n=0}^\infty m_n(2^{-n})^{2-(1-\nu)p},$$

где m_n есть число квадратов со стороной 2^{-n} в нашем разбиении Уитни. Из определения верхней метрической размерности следует (см., напр., [20]), что $m_n \leq C2^{nd}$, где d - любое число, большее $\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$. В результате слагаемые последней суммы оцениваются величинами вида $2^{(d-2+(1-\nu)p)n}$, и эта сумма конечна при $d-2+(1-\nu)p<0$, то есть при $p<\frac{2-d}{1-\nu}$. Мы должны потребовать, чтобы $\frac{1}{p}<\frac{3}{4}$; отсюда $\nu>\frac{3}{4}d-\frac{1}{2}$, что завершает доказателство теоремы.

Тем самым доказано, что $\frac{\partial F}{\partial\overline{z}}$ продолжается до непрерывного функционала на замыкании $C_0^\infty(\Delta)$ по норме $H_\nu(\overline{\Delta})$, если ν удовлетворяет условию теоремы. Это замыкание не совпадает с $H_\nu(\overline{\Delta})$, но оно содержит $H_\mu(\overline{\Delta})$ при любом $\mu>\nu$. Поэтому это продолжение определено на $H_\nu(\overline{\Delta})$ при любом ν, удовлетворяющем условию теоремы. Мы будем называть его продолжением Уитни обобщенной функции $\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}$ и обозначать $(\frac{\partial F}{\partial \overline{z}})^w$. Имеем

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}\right)^w (f) = -\iint_{\mathbb{C}} F\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \overline{z}} dz d\overline{z},$$

где $\tilde{f}$ - продолжение Уитни сужения $f \in H_\nu(\overline{\Delta})$ на Γ^* с компактным носителем. Получить такое продолжение можно умножением $(f|_{\Gamma^*})^w$ на функцию $\omega_0 \in C_0^\infty$, равную 1 в окрестности Γ.

Это продолжение позволяет ввести семейство обобщенных функций $\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} f$ по формуле

$$\langle \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} f, \omega\rangle = \left(\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}\right)^w (f\omega) = -\iint_{\mathbb{C}} F\frac{\partial \tilde{\omega f}}{\partial \overline{z}} dz d\overline{z}.$$

Они определены при том же условии на ν и имеют носитель на Γ. Эти обобщенные функции можно рассматривать как интегрирования по дуге Γ с весами вида $2F_+(t)f(t)$.

Покажем, что последнюю формулу можно несколько упростить, записав ее в виде

$$\langle \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} f, \omega\rangle = -\iint_{\mathbb{C}} F\frac{\partial \omega (f|_\Gamma)^w \omega_0}{\partial \overline{z}} dz d\overline{z},$$

то есть заменить $\tilde{\omega f} \equiv ((\omega f)|_{\Gamma^*})^w \omega_0$ на более простое выражение $\omega (f|_\Gamma)^w \omega_0$. Для этого нам потребуется следующее рассуждение. Предположим, мы бы имели дело с ограниченной функцией F. Положим $(\tilde{f\omega}) - (f|_\Gamma)^w \omega\omega_0 = \xi$. Требуется показать. что $\iint_C F\frac{\partial \xi}{\partial \overline{z}} dz d\overline{z} = 0$. Покроем $\mathbb{C}$ двоичными квадратами со стороной 2^{-n}, а объединение тех из них, которые имеют общие точки с кривой Γ назовем Δ_n. Количество двоичных квадратов в Δ_n обозначим через m_n, а длину $\partial\Delta_n$ через L_n. Построим также область D таким образом, чтобы носитель ω_0 лежал внутри D. Таким образом, получим

$$\iint_{\mathbb{C}} F\frac{\partial \xi}{\partial \overline{z}} dz d\overline{z} = \iint_D F\frac{\partial \xi}{\partial \overline{z}} dz d\overline{z} = \iint_{\Delta_n} F\frac{\partial \xi}{\partial \overline{z}} dz d\overline{z} + \iint_{D\setminus\Delta_n} F\frac{\partial \xi}{\partial \overline{z}} dz d\overline{z}$$

Ясно, что площадь Δ_n будет стремиться к нулю при $n \to \infty$, поэтому

$$\iint_{\mathbb{C}} F\frac{\partial \xi}{\partial \overline{z}} dz d\overline{z} = \lim_{n\to\infty} \iint_{D\setminus\Delta_n} \frac{\partial F\xi}{\partial \overline{z}} dz d\overline{z}.$$

Легко видеть, что формула Стокса справедлива для функции, непрерывной в замкнутой области, первые частные производные которой существуют внутри этой области за возможным исключением системы из спрямляемых кривых, разбивающих эту область на конечное число частей, и интегрируемы в замыкании этой области. Отсюда

$$\iint_{D\setminus\Delta_n} \frac{\partial F\xi}{\partial \overline{z}} dz d\overline{z} = \int_{\partial\Delta_n} F\xi dz$$

Получим оценку для последнего интеграла. Очевидно, при $z \in \partial\Delta_n$ мы имеем $|\xi| \leq 2^{-n\nu}C$. Далее, $L_n \leq Cm_n 2^{-n}$ и $m_n \leq C2^{nd}$, где d- любая величина превосходящая $\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$ (доказательство последнего неравенства см., напр., в [20]). Отсюда

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} F\xi dz\right| \leq C\int_{\partial\Delta_n} |\xi||dz| \leq C2^{-n\nu}L_n \leq C2^{n(d-1)-n\nu} = C2^{n(d-1-\nu)}$$

Но $\nu > \frac{3}{4}d - \frac{1}{2} \geq d-1$, поэтому $2^{d-1-\nu} \to 0$ при $n \to \infty$. Мы, однако, имеем дело с неограниченной в окрестности $+1$ и -1 функцией F. Тем не менее, данное рассуждение можно применить и здесь. Вырежем квадратные окрестности точек -1 и $+1$ со стороной 2^{-k}, обозначим эту пару окрестностей через Q и применим рассуждение к оставшейся области. Обозначим Δ_n - объединение квадратов двоичной сетки со стороной 2^{-n}, имеющих с $\Gamma \setminus Q$ общие точки. Получим

$$\iint_{\mathbb{C}} F\frac{\partial\xi}{\partial\overline{z}} dz d\overline{z} = \iint_{\Delta_n} F\frac{\partial\xi}{\partial\overline{z}} dz d\overline{z} + \iint_{D\setminus(\Delta_n \bigcup Q)} F\frac{\partial\xi}{\partial\overline{z}} dz d\overline{z} + \iint_{Q} F\frac{\partial\xi}{\partial\overline{z}} dz d\overline{z}.$$

Устремим сначала к ∞ величину n; в силу предыдущего рассуждения здесь исчезнут первые два слагаемых. Затем устремим к ∞ величину k. При этом в силу интегрируемости $F\frac{\partial\xi}{\partial\overline{z}}$ последний интеграл в сумме устремится к нулю. Тем самым возможность вышеуказанной замены доказана. Из нее вытекает, в частности,

Теорема 2 *Пусть* $f, g \in H_\nu(\overline{\Delta})$, $\Gamma \subset \Delta$, $\nu > \frac{3}{4}\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma - \frac{1}{2}$. *Тогда из равенства сужений этих функций на дугу* Γ *следует равенство соответствующих им интегрирований:* $\frac{\partial F}{\partial\overline{z}}f = \frac{\partial F}{\partial\overline{z}}g$.

Таким образом, интегрирование $\frac{\partial F}{\partial\overline{z}}f$ определяется сужением f на Γ. Если функция f определена только на Γ, то мы можем продолжить ее по

Уитни и связать с ней интегрирование

$$\langle\frac{\partial F}{\partial\overline{z}}f,\omega\rangle=-\iint_{\mathbb{C}}F\frac{\partial f^w\omega_0\omega}{\partial\overline{z}}dzd\overline{z}. \tag{5}$$

Разумеется, продолжение f^w определяется неоднозначно, но предшествующее теореме 2 рассуждение показывает, что на обобщенную функцию (5) эта неоднозначность не влияет. Не зависит эта обобщенная функция и от выбора компактифицирующего множителя $\omega_0\in C_0^\infty$, равного единице в некоторой окрестности Γ.

Отметим, что использованная здесь схема построения обобщенных интегрирований по неспрямляемой дуге предложена в работе [21], но там она была реализована только для замкнутых кривых и ограниченных функций F. Существуют и другие схемы построения интегралов по неспрямляемым кривым; см. их обзор в работе [21].

2 Преобразования Коши для интегрирований.

Теперь рассмотрим преобразования Коши интегрирований $\frac{\partial F}{\partial\overline{z}}f$, то есть функции

$$\mathcal{C}\left(\frac{\partial F}{\partial\overline{z}}f\right)=\frac{1}{2\pi i}\left\langle\frac{\partial F}{\partial\overline{z}}f,\frac{1}{\zeta-z}\right\rangle, z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma.$$

Конечно, обобщенная функция $\frac{\partial F}{\partial\overline{z}}f$ применяется здесь не к ядру Коши, а к его произведению на некоторую функцию ω_0 класса C_0^∞, равную единице в окрестности Γ и нулю в окрестности z. Нас интересуют граничные значения функции $\mathcal{C}\left(\frac{\partial F}{\partial\overline{z}}f\right)(z)$ на Γ и ее поведение в точках ±1 и ∞. Но прежде всего мы построим аналог классической формулы Бореля-Помпейю (см., напр., [22]).

Без ограничения общности можно считать, что $\omega_0=\omega_1(1-\omega_2)$, где $\omega_{1,2}\in C_0^\infty$, причем ω_1 обращается в единицу в некоторой окрестности дуги Γ, а ω_2 - только в окрестности точки z, причем носитель ω_2 содержится в круге $|\zeta-z|<\varepsilon$, не пересекающем Γ. Тогда согласно представлению (5)

$$\mathcal{C}\left(\frac{\partial F}{\partial\overline{z}}f\right)(z)=-\frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}F(\zeta)\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\left(\frac{f^w(\zeta)\omega_1(\zeta)(1-\omega_2(\zeta))}{\zeta-z}\right)d\zeta d\overline{\zeta}=$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}F\frac{\partial f^w\omega_1}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\zeta d\overline{\zeta}}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}F\frac{\partial f^w\omega_1\omega_2}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\zeta d\overline{\zeta}}{\zeta-z}.$$

Предел второго слагаемого при $\varepsilon \to 0$ равен $F(z)f^w(z)\omega_1(z)$; в этом легко убедиться, применив в нем формулу Стокса в кольце $\varepsilon > |\zeta - z| > \eta$, где η настолько мало, что ω_2 равна единице в круге $|\zeta - z| \le \eta$. Итак,

$$\mathcal{C}\left(\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} f\right)(z) = F(z)f^w(z)\omega_1(z) - \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} F\frac{\partial f^w\omega_1}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\zeta d\overline{\zeta}}{\zeta - z}, \qquad (6)$$

где ω_1 есть любая функция класса C_0^∞, обращающаяся в единицу в окрестности Г. Это и есть необходимый нам аналог формулы Бореля-Помпейю.

Положим

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} F\frac{\partial f^w\omega_1}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\zeta d\overline{\zeta}}{\zeta - z}.$$

Это интегральный член формулы (6). Он представляет собою преобразование Коши (иначе говоря, потенциал Коши) меры с компактным носителем $F\frac{\partial f^w\omega_1}{\partial\overline{\zeta}}d\zeta d\overline{\zeta}$, и его свойства хорошо известны (см., напр., [22]). Так, если $\varphi \in L_p$ имеет компактный носитель, то функция

$$\frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\zeta)d\zeta d\overline{\zeta}}{\zeta - z}$$

при $p > 2$ непрерывна во всей плоскости и удовлетворяет условию Гельдера с показателем $1-\frac{2}{p}$. В нашем случае $\frac{\partial(f^w\omega_1)}{\partial\overline{\zeta}}$ интегрируема в любой степени $p < \frac{2-\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma}{1-\nu}$. Это было установлено в первом разделе (см. также [20]). Условие $p > 2$ выполняется при $\nu < \frac{1}{2}\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$. Заметим, что $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma \ge \frac{3}{4}\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma - \frac{1}{2}$, то есть при $\nu > \frac{1}{2}\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$ выполнены условия теоремы 1.

Функция F ограничена вне любых окрестностей точек ± 1. Обозначим через $K_\varepsilon(\pm 1)$ круги радиуса ε с центрами в точках ± 1 и положим $D = \operatorname{supp}\omega_1 \setminus (K_\varepsilon(+1) \cup K_\varepsilon(-1))$. Тогда

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\iint_{K_\varepsilon(1)} + \iint_{K_\varepsilon(-1)} + \iint_D\right) F\frac{\partial(f^w\omega_1)}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\zeta d\overline{\zeta}}{\zeta - z}.$$

В силу произвольности радиуса третье слагаемое непрерывно и удовлетворяет условию Гельдера с показателем $1 - \frac{2}{p}$ во всей плоскости.

Для оценки первых двух слагаемых воспользуемся неравенством:

$$\iint_B \frac{|d\zeta d\overline{\zeta}|}{|\zeta - z_1|^\alpha|\zeta - z_2|^\beta} \le C|z_1 - z_2|^{\alpha+\beta-2},$$

где B - любая конечная область, $\alpha < 2, \beta < 2, \alpha + \beta > 2$ (см. [22]). Отсюда при малом ε

$$|\iint_{K_\varepsilon(\pm 1)} F(\zeta)\frac{\partial(f^w\omega_1)}{\partial\bar\zeta}\frac{d\zeta d\bar z}{\zeta - z}| = |\iint_{K_\varepsilon(\pm 1)} F(\zeta)\frac{\partial f^w}{\partial\bar\zeta}\frac{d\zeta d\bar z}{\zeta - z}|$$

$$\leq (\iint_{K_\varepsilon(\pm 1)} |\frac{\partial f^w}{\partial\bar\zeta}|^p |d\zeta d\bar\zeta|)^{\frac{1}{p}} (\iint_{K_\varepsilon(\pm 1)} |\frac{F(\zeta)}{\zeta - z}|^q |d\zeta d\bar\zeta|)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \|\frac{\partial f^w}{\partial\bar\zeta}\|_{L_p} C(\iint_{K_\varepsilon(\pm 1)} \frac{dxdy}{|\zeta \pm 1|^{\frac{q}{2}}|\zeta - z|^q})^{\frac{1}{q}} \leq C\|\frac{\partial f^w}{\partial\bar\zeta}\|_{L_p} |z \pm 1|^{\frac{3}{2} - \frac{2}{q}},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{q} = \frac{3}{2} - 2(1 - \frac{1}{p}) = \frac{2}{p} - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$$

Итак, $|G(z)| \leq C|z \pm 1|^{-\frac{1}{2}}$ вблизи точек ± 1. Далее, слагаемое $F(z)f^w(z)\omega_1(z)$ имеет скачок $F_+(t)f(t) - F_-(t)f(t) = 2F_+(t)f(t)$ на дуге Γ за исключением ее концов. Кроме того, оно ведет себя как $|z \pm 1|^{-\frac{1}{2}}$ вблизи точек ± 1. Для формулировки полученного результата введем следующие термины и обозначения. Положим $\Gamma^\circ = \Gamma \setminus \{\pm 1\}$. Любую связную компоненту множества $\{z : |z - t| < r\} \setminus \Gamma$ при $t \in \Gamma^\circ, r < |t \pm 1|$ будем называть нормальной полуокрестностью точки t. Мы знаем, что оба слагаемых формулы (6) в любой нормальной полуокрестности любой точки $t \in \Gamma^\circ$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $1 - \frac{2}{p}$, т.е. с любым показателем, меньшим

$$\mu = \frac{2\nu - \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma}{2 - \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma}. \tag{7}$$

Будем относить к классу $\mathsf{H}^\circ_\mu(\Gamma)$ все голоморфные в $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ функции, удовлетворяющие в любой нормальной полуокрестности любой точки $t \in \Gamma^\circ$ условию Гельдера с любым показателем, меньшим μ. Итак, справедлива

Теорема 3 *Пусть $f \in H_\nu(\Gamma), \nu > \frac{1}{2}\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$. Тогда функция $\mathcal{C}(\frac{\partial F}{\partial\bar z}f)(z)$ голоморфна в $\overline{C} \setminus \Gamma$ и имеет предельные значения с обеих сторон в каждой точке $t \in \Gamma^\circ$. При этом она имеет скачок $2F_+(t)f(t)$ на дуге Γ, обращается в 0 в точке ∞, удовлетворяет оценкам*

$$\mathcal{C}(\frac{\partial F}{\partial\bar z}f)(z) = O(|z \pm 1|^{-\frac{1}{2}})$$

вблизи точек ± 1 и принадлежит классу $\mathsf{H}^\circ_\mu(\Gamma)$, где μ определяется формулой (7).

В качестве примера рассмотрим случай $f \equiv 1$. Простой подсчет на основе формулы (6), формулы Грина и формулы Коши дает $\mathcal{C}(\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}1)(z) = F(z)$.

3 Вспомогательная задача Римана и функция Сёге

Теперь рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}F^{-1}(z)\mathcal{C}\left(\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}f\right)(z). \tag{8}$$

Очевидно, при $t \in \Gamma^\circ$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{2}F_+^{-1}(t)\mathcal{C}^+(\frac{\partial F}{\partial \overline{z}})(t) + \frac{1}{2}F_-^{-1}(t)\mathcal{C}^-(\frac{\partial F}{\partial \overline{z}})(t)$$

$$= \frac{1}{2}F_+^{-1}(t)(C^+(\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}f)(t) - \mathcal{C}^-(\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}f)(t)) = \frac{1}{2}F_+^{-1}(t)2F_+(t)f(t) = f(t),$$

причем в окрестностях точек ± 1 функция $\Phi(z)$ ограничена. Таким образом, эта функция является ограниченным решением краевой задачи (2). Кроме того, $\Phi \in \mathsf{H}_\mu^\circ(\Gamma)$, где μ определяется равенством (7).

Пусть $\Phi_1(z)$ есть любое другое ограниченное решение задачи 2) в классе $\mathsf{H}_\mu^\circ(\Gamma)$. Рассмотрим функцию

$$\Psi(z) := F(z)(\Phi(z) - \Phi_1(z)).$$

Она голоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ и непрерывна на Γ°. Кроме того, в достаточно малой окрестности любой точки $t \in \Gamma^\circ$ она удовлетворяет условию Гёльдера с любым показателем меньше μ. Если $\mu > \operatorname{dmh}\Gamma - 1$, где $\operatorname{dmh}\Gamma$ обозначает хаусдорфову размерность кривой Γ, то согласно теореме Е.П. Долженко [23] функция $\Psi(z)$ голоморфна во всех точках множества Γ°. Но тогда ее особенности в точках ± 1 являются изолированными. Из оценок $\Psi(z) = O(|z \pm 1|^{-1/2})$ вблизи точек ± 1 следует, что эти особенности устранимые. Итак, функция $\Psi(z)$ голоморфна в $\overline{\mathbb{C}}$ и поэтому постоянна в силу теоремы Лиувилля. Но $\Psi(\infty) = 0$ и отсюда $\Psi \equiv 0$. Итак, при условии

$$\operatorname{dmh}\Gamma - 1 < \mu = \frac{2\nu - \overline{\operatorname{dm}}\,\Gamma}{2 - \overline{\operatorname{dm}}\,\Gamma} \tag{9}$$

функция $\Phi(z)$ является единственным ограниченным решением задачи (2) в классе $\mathsf{H}_\mu^\circ(\Gamma)$. Тем самым доказана

Теорема 4 *При условии $f \in H_\nu(\Gamma)$, $\nu > \frac{1}{2}\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$, функция (8) является ограниченным решением задачи (2). Если, кроме того, выполнено условие (9), то эта функция является единственным ограниченным решением задачи (2) в классе $\mathsf{H}^\circ_\mu(\Gamma)$.*

Как уже отмечалось, решение краевой задачи Римана на неспрямляемой дуге было впервые построено в работе [11]. Однако там при решении однородной задачи налагалось дополнительное условие, которое в нашем случае приобретает вид

$$\ln_\Gamma \frac{z-1}{z+1} = O(\ln|z \pm 1|^{-1}), z \to \pm 1,$$

а при решении неоднородной - условие

$$\ln_\Gamma \frac{z-1}{z+1} \sim \ln|z \pm 1|, z \to \pm 1,$$

где $\ln_\Gamma \frac{z-1}{z+1}$ означает однозначную ветвь логарифма, выделенную с помощью разреза вдоль дуги Γ. Это геометрические ограничения на рассматриваемую дугу, означающие, что на концах этой дуги либо не происходит ее скручивание в спирали, либо это спирали логарифмическог типа. Теорема 4 не содержит таких ограничений. Кроме того, в работе [11] рассматривались только неограниченные решения неоднородной задачи Римана. Таким образом, результат теоремы 4 является новым.

Теперь перейдем к задаче о построении функции Сегё. Мы будем называть функцией Сегё голоморфную в $\overline{C} \setminus \Gamma$ функцию $S(z)$, которая удовлетворяет граничному условию

$$S^+(t)S^-(t) = \rho(t), t \in \Gamma^\circ, \tag{10}$$

а также ограничена и отделена от нуля во всей комплексной плоскости:

$$C^{-1} < |S(z)| < C, z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma, C = C(S) > 0. \tag{11}$$

В силу условия (11) логарифм $\ln S(z)$ имеет в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ однозначную ветвь $\Phi(z)$. Будем считать, что $\rho(t)$ удовлетворяет на Γ условию Гёльдера с показателем ν и не обращается там в 0. Тогда $\ln \rho(t)$ также имеет однозначную ветвь, принадлежащую $H_\nu(\Gamma)$. Обозначим одну из таких ветвей $f(t)$. Очевидно,

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = f(t) + 2\pi i n, t \in \Gamma^\circ,$$

где n - не зависящее от t целое число. Получили краевую задачу Римана вида (2). Как мы знаем, при условии $\nu > \frac{1}{2}\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$ эта краевая задача имеет решение $\Phi(z) = \frac{1}{2}F^{-1}(z)\mathcal{C}\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(f + 2\pi i n)\right)(z) = \frac{1}{2}F^{-1}(z)\mathcal{C}\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}f\right)(z) + \pi i n$. Здесь мы воспользовались примером, приведенным в конце предыдущего параграфа.

Следовательно, при том же условии задача о построении функции Сегё разрешима и ее решениями являются две функции

$$S(z) = \pm \exp\left(\frac{1}{2}F^{-1}(z)\mathcal{C}\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}f\right)(z)\right). \tag{12}$$

Вопрос о возможности существования других решений решается точно также, как при доказательстве предыдущей теоремы.

В итоге мы получаем следующий результат.

Теорема 5 *При условиях $\rho(t) \neq 0$, $\rho \in H_\nu(\Gamma)$, $\nu > \frac{1}{2}\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$ на дуге Γ существует две функции Сёге, отличающиеся друг от друга знаком и определяемые равенством (12). Если, кроме того, выполнено условие (9), то эти функции лежат в классе $\mathsf{H}^\circ_\mu(\Gamma)$, и других функций Сегё этого класса не существует.*

Список литературы

[1] Deift P., Orthogonal Polynomials and Random Matrices : A Riemann–Hilbert Approach, Courant Lecture Notes, Vol. 3, New York University, 1999.

[2] Deift P., Kriecherbauer T., McLaughlin K.T.-R., Venakides S., Zhou X., A Riemann–Hilbert approach to asymptotic questions for orthogonal polynomials, J. Comput. Appl. Math. 133 (2001) 47–63.

[3] Kuijlaars A.B.J., Riemann–Hilbert analysis for orthogonal polynomials, in: E. Koelink, W. Van Assche (Eds.), Orthogonal Polynomials and Special Functions, Leuven 2002, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1817, Springer, Berlin, 2003, pp. 167–210.

[4] Baratchart L. and Yattselev M. Convergent Interpolation to Cauchy Integrals over Analytic Arcs with Jacobi-Type Weights. International Mathematics Research Notices (2010), Article ID rnq026, 65 pages. doi:10.1093/imrn/rnq026

[5] Суетин С.П. О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций// Матем. Сб. 2000 Т.191, №9, С.81-114

[6] Аптекарев А.И. Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций//Матем. Сб. 2002 Т.193, №9, С.3-72

[7] Aptekarev A.I. and Van Asshe W. Scalar and matrix Riemann–Hilbert approach to the strong asymptotics of Pade approximants and complex orthogonal polynomials with varying weight. Journal of Approximation Theory 129 (2004) 129–166

[8] Гарифьянов Ф.Н., Биортогональные ряды, порожденные группой диэдра. Известия ВУЗов, Математика,2001, №4, с.11-15

[9] Гахов Ф.Д., Краевые задачи, Москва, Наука, 1977. - 640 с.

[10] Говоров Н.В., Кузнецов Н.К. Ободной нелинейной краевой задаче на разомкнутом контуре. Теория функций, функ. анализ и их приложения, 20, С. 49-63 (1974).

[11] Кац Б. А. Задача Римана на разомкнутой жордановой кривой. Известия ВУЗов. Математика. 1983, №12. С. 30-38

[12] Mattila P. and Melnikov M.S., Existence and weak type inequalities for Cauchy integrals of general measure on rectifiable curves and sets, Proc. Am. Math. Soc. 120(1994), P. 143-149

[13] Эйдерман В.Я. Мера Хаусдорфа и емкость связанная с потенциалами Коши. Матем. заметки 63, No.6, 923-934 (1998).

[14] Tolsa X., Bilipschitz maps, analytic capacity and the Cauchy integral, Ann. of Math. (2) 162(2005), P. 1243-1304.

[15] Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. Москва, Мир, 1968. - 276 с.

[16] Хёрмандер Л., Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными I. Теория распределений и анализ Фурье. Москва, Мир, 1986. - 404 с.

[17] Стейн И., Сингулярные интегралы и дифференциальные свойств функций, Москва, Мир, 1973. - 342 с.

[18] Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М., $\varepsilon-$энтропия и емкость множеств в функциональных пространствах, Успехи Мат. Наук, 14 (1959), С. 3–86.

[19] Федер Е., Фракталы, Москеа, Мир, 1991.

[20] Кац Б.А., Задача Римана на замкнутой жордановой кривой. Известия ВУЗов. Математика. 1983, №4. С. 68-80

[21] Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Kats B.A. Integration over non-rectifiable curves and Riemann boundary value problems. J. Math. Anal. Appl. Принято к печати

[22] Векуа И.Н., Обобщенные аналитические фукции, Москва, Наука, 1988. - 512 с.

[23] Долженко Е.П., О "стирании"особенностей аналитических функций, Успехи Матем. Наук, 18(1963), No 4, С. 135-142