5. Интегрирование функций комплексного переменного

Пусть Γ — ориентированная кривая в $\mathbb{C}$, и $f(z)$ — функция, заданная в точках кривой Γ. Считая $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ и $dz = dx + idy$, проведём формальную выкладку:

$$I = \int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma} (u+iv)\,d(x+iy) = \int\limits_{\Gamma} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{\Gamma} v\,dx + u\,dy = I_1 + iI_2. \quad (1)$$

Таким образом, вычисление интеграла от функции комплексного переменного вдоль кривой сводится к вычислению двух криволинейных интегралов 2-го рода.

Точное определение интеграла $I = \int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ и его корректное сведение к I_1 и I_2 можно посмотреть в пособии [Ду], стр. 25–26.

Пример. В № 126 [Ду] нужно вычислить интеграл от функции $f(z) = |z|$ по трем различным путям с началом в точке $-i$ и концом в точке i (рисунок в Pic1.jpg). Имеем: $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $v = 0$.

а) Параметризуем рассматриваемый путь: $x = 0$, y изменяется от -1 до 1. В формуле (1) тогда получаем: $I_1 = 0$, $I_2 = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{y^2}\,dy = 2\int\limits_{0}^{1} y\,dy = 1$, Следовательно, $I = i$.

в) Параметризуем путь: $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, φ изменяется от $-\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{\pi}{2}$. В формуле (1) тогда получаем: $I_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,d\cos\varphi = 0$, $I_2 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,d\sin\varphi = 2$, Следовательно, $I = 2i$.

Другой способ решения: пользоваться формулами замечаний 1 и 2 в [Ду] на стр. 27. Полагаем $z = e^{i\varphi}$, и тогда $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,de^{i\varphi} = e^{i\varphi}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2i$.

б) Можно решать так же, как в пункте в), изменяя φ от $\dfrac{3\pi}{2}$ до $\dfrac{\pi}{2}$ (см. рисунок), а можно посредством следующей выкладки:

$$\oint\limits_{|z|=1} |z|\,dz = \oint\limits_{|z|=1} 1\,dz = 0 = \int\limits_{\Gamma_1} 1\,dz + \int\limits_{(\Gamma_2)_-} 1\,dz \implies \int\limits_{\Gamma_2} 1\,dz = \int\limits_{\Gamma_1} 1\,dz = 2i.$$

Случай аналитической функции. Пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, $\Gamma \subset \Omega$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитична в Ω (то есть дифференцируема в каждой точке Ω, а значит, всюду в Ω выполняются условия Коши–Римана).

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \implies \text{в } I_2 \text{ случай полного дифференциала.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \implies \text{в } I_1 \text{ случай полного дифференциала.}$$

Следовательно, $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ зависит лишь от начальной и конечной точек кривой Γ и не зависит от её конкретного вида. В частности, $\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$.

Формула Ньютона–Лейбница. В рассматриваемой ситуации аналитической функции всегда найдётся функция $F(z)$ такая, что $F'(z) = f(z)$ в Ω. В этом случае $\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0)$, понимая, что интеграл берется вдоль произвольной кривой с началом в точке z_0 и концом в точке z_1.

Вопрос о нахождении такой функции $F(z)$ часто решается достаточно просто. Формулы дифференцирования непосредственно переносятся с вещественного случая на комплексный ([Ду], пункт 4.1 на стр. 23), мы проверили, что $(e^z)' = e^z$ (а также $(\cos z)' = -\sin z$ и т.п.). Основное правило: для элементарных функций и функций $f(z)$, которые получаются из элементарных с помощью арифметических операций и суперпозиции, первообразная функция $F(z)$ отыскивается так же, как и в действительном анализе.