Ю. А. Альпин, Л. Ю. Колотилина, Н. Н. Корнеева, Совместные оценки для перроновских корней неотрицательных матриц и их приложения, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2006, том 334, 30–56

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 334, 2006 г.

Ю. А. Альпин, Л. Ю. Колотилина, Н. Н. Корнеева

СОВМЕСТНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПЕРРОНОВСКИХ КОРНЕЙ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Введение

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. Введем в рассмотрение абсолютные строчные суммы

$$r_i(A) = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

и обозначим $\langle n\rangle = \{1, \dots, n\}$. Как хорошо известно,

$$\|A\|_\infty = \max_{i\in\langle n\rangle} r_i(A)$$

– мультипликативная матричная норма, а для неотрицательной матрицы A ее спектральный радиус $\rho(A)$, называемый перроновским корнем A, удовлетворяет двусторонним оценкам Фробениуса

$$\min_{i\in\langle n\rangle} r_i(A) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} r_i(A). \tag{1.1}$$

Поскольку, очевидно, для любой невырожденной диагональной матрицы D справедливо равенство

$$\rho(D^{-1}AD) = \rho(A),$$

из (1.1) естественным образом вытекает следующая задача: найти такие отличные от единичной диагональные матрицы D_1 и D_2 с положительными диагональными элементами, что

$$\max_{i\in\langle n\rangle} r_i(D_1^{-1}AD_1) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} r_i(A) \tag{1.2}$$

и

$$\min_{i\in\langle n\rangle} r_i(D_2^{-1}AD_2) \geqslant \min_{i\in\langle n\rangle} r_i(A). \tag{1.3}$$

Как нетрудно убедиться, в неприводимом случае всегда существует диагональная матрица D с положительными диагональными элементами, для которой справедливы равенства

$$\max_{i\in\langle n\rangle} r_i(D^{-1}AD) = \min_{i\in\langle n\rangle} r_i(D^{-1}AD) = \rho(A). \tag{1.4}$$

Действительно, по теореме Перрона–Фробениуса, перроновский вектор $v=(v_i)$ матрицы A, который определен однозначно с точностью до положительного множителя, положителен, а из равенства

$$Av = \rho(A)v$$

легко следует, что соотношения (1.4) справедливы для матрицы $D = D_v = \operatorname{diag}(v_1,\dots,v_n)$.

Ясно, что выбор $D = D_v$ оптимален с теоретической точки зрения. Однако, на практике для его использования требуется, чтобы перроновский вектор был известен. Поэтому представляет интерес задача поиска менее дорогого метода определения нетривиальных матриц D_1 и D_2, удовлетворяющих условиям (1.2) и (1.3).

Эта задача тесно связана с задачей получения оценок перроновского корня неотрицательной матрицы, но является более общей. Неявно она уже рассматривалась в работе [1], в которой был установлен (см. также [4]) следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $n\geqslant 1$, – неотрицательная матрица, не имеющая нулевых строк. Положим*

$$C(A) = \max_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)}\left\{\prod_{i\in\bar\gamma} r_i(A)\right\}^{1/|\gamma|}, \quad c(A) = \min_{\gamma\in\mathfrak{C}(A)}\left\{\prod_{i\in\bar\gamma} r_i(A)\right\}^{1/|\gamma|} \tag{1.5}$$

и определим диагональные матрицы $D = \operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n)$ и $G = \operatorname{diag}(g_1,\dots,g_n)$ с помощью соотношений

$$\begin{gathered} d_i = \max_{(i=i_1,\dots,i_k,i_{k+1})\in\mathfrak{P}(A)} \prod_{j=1}^{k}[r_j(A)/C(A)], \\ g_i = \min_{(i=i_1,\dots,i_k,i_{k+1})\in\mathfrak{P}(A)} \prod_{j=1}^{k}[r_j(A)/c(A)], \quad i=1,\dots,n. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\min_{i\in\langle n\rangle} r_i(A) \leqslant c(A) \leqslant \min_{i\in\langle n\rangle} r_i(G^{-1}AG) \leqslant \rho(A)\\ \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} r_i(D^{-1}AD) \leqslant C(A) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} r_i(A).\end{aligned} \tag{1.7}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то либо

$$c(A) = \rho(A) = C(A),$$

либо

$$c(A) < \rho(A) < C(A).$$

В теореме 1.1 и ниже используются следующие обозначения. Для матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, через $G_A = (\langle n\rangle,\ E_A)$ обозначается ее ориентированный граф с множеством вершин $\langle n\rangle = \{1, \dots, n\}$ и множеством дуг

$$E_A = \{(i,j):\ i,j \in \langle n\rangle \quad \text{и} \quad a_{ij} \neq 0\}.$$

Через $\mathfrak{C}(A)$ обозначается множество всех (простых) контуров в графе G_A. Напомним, что *контуром* длины k в графе G_A называется упорядоченная последовательность $\gamma = (i_1, \dots, i_k, i_{k+1})$, где все вершины $i_1, \dots, i_k \in \langle n\rangle$ различны, $i_{k+1} = i_1$ и для каждого $j = 1, \dots, k$ в G_A существует дуга из i_j в i_{j+1}. Множество $\{i_1, \dots, i_k\}$ называется *носителем* контура γ и обозначается через $\bar{\gamma}$. Длина контура γ обозначается через $|\gamma|$; $|\gamma| = k$. Множество путей $\mathfrak{P}(A)$ в графе G_A определяется следующим образом:

$$\mathfrak{P}(A) = \{(i_1, \dots, i_k, i_{k+1}) : a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_k i_{k+1}} \neq 0,\ k \geqslant 0\},$$

а через $\mathfrak{S}\mathfrak{P}_i(A)$, $i \in \langle n\rangle$, обозначается множество всех простых путей в G_A, выходящих из вершины i.

Заметим, что из доказательства, представленного в [1], следует, что максимум и минимум в (1.6) можно брать по множеству $\mathfrak{S}\mathfrak{P}_i(A)$, что существенно упрощает построение диагональных матриц D и G.

Как легко видеть, в том случае, когда все диагональные элементы матрицы A отличны от нуля, крайние правое и левое неравенства в (1.7) оба являются равенствами. Поэтому теорема 1.1 может в действительности улучшать оценки Фробениуса (1.1) только для матриц, имеющих достаточное количество нулевых диагональных элементов.

В данной работе рассматривается еще более общая задача, а именно: для заданного конечного множества $n \times n$ матриц $\Sigma = \{A^{(x)}\}_{x \in X}$ требуется найти такие отличные от единичной невырожденные диагональные матрицы D_1 и D_2, что

$$\max_{x \in X} \max_{i \in \langle n \rangle} r_i(D_1^{-1} A^{(x)} D_1) \leqslant \max_{x \in X} \max_{i \in \langle n \rangle} r_i(A^{(x)}) \tag{1.8}$$

и

$$\min_{x \in X} \min_{i \in \langle n \rangle} r_i(D_2^{-1} A^{(x)} D_2) \geqslant \min_{x \in X} \min_{i \in \langle n \rangle} r_i(A^{(x)}). \tag{1.9}$$

Разумеется, мы стремимся минимизировать левую часть неравенства (1.8) и максимизировать левую часть неравенства (1.9).

Статья построена следующим образом. Основные результаты, касающиеся решения задач (1.8) и (1.9), установлены в разделе 2. В разделе 3 рассматриваются некоторые приложения результатов раздела 2. Точнее говоря, установлены совместные двусторонние оценки для перроновских корней заданных неотрицательных матриц, совместные верхние оценки для спектральных радиусов заданных комплексных матриц, условия, достаточные дл того, чтобы все выпуклые комбинации заданных матриц были бы устойчивы по Шуру, а также оценки для совместного и нижнего спектральных радиусов матриц из заданного множества.

2. Основные результаты

В этом разделе для заданного конечного множества $\Sigma = \{A^{(x)}\}_{x \in X}$ неотрицательных матриц порядка $n \geqslant 1$ выводятся совместные верхние и нижние оценки для строчных сумм $r_i(D^{-1}A^{(x)}D)$, $i \in \langle n \rangle$, $x \in X$, при специальном выборе невырожденной диагональной матрицы D.

Ниже нам понадобится вспомогательная матрица

$$\bar{A} = (\bar{a}_{ij}), \quad \bar{a}_{ij} = \max_{x \in X} a_{ij}^{(x)}. \tag{2.1}$$

Простейший способ получения верхних оценок строчных сумм для множества $D^{-1}\Sigma D$ состоит в том, чтобы перейти к матрице $\bar{A}$, определенной в (2.1), и ограничить сверху строчные суммы $D^{-1}\bar{A}D$, например, используя оценку теоремы 1.1 или другую верхнюю оценку, формулируемую в терминах строчных сумм матрицы $\bar{A}$. (Нижние оценки можно получить аналогичным образом, если в (2.1) заменить $\max\limits_{x \in X}$ на $\min\limits_{x \in X}$.) Так полученные совместные оценки будут, очевидно, зависеть от строчных сумм матрицы

$\bar{A}$. Однако, как будет показано ниже, для строчных сумм матриц $D^{-1}A^{(x)}D$ можно получить и совместные оценки, которые зависят только от шаблонов разреженности и строчных сумм исходных матриц $A^{(x)}$. Первым результатом такого рода является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть $\Sigma = \{A^{(x)}\}_{x\in X}$ – конечное множество неотрицательных матриц $A^{(x)} = (a_{ij}^{(x)})$ порядка $n \geqslant 1$ таких, что матрица $\bar{A}$ не имеет нулевых строк, и пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Тогда при*

$$D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n), \quad \text{где} \quad d_i = \max_{x\in X} r_i(A^{(x)})^{1-\alpha},\ i = 1, \dots, n, \tag{2.2}$$

мы имеем

$$\begin{aligned} &\max_{x\in X}\max_{i\in\langle n\rangle} r_i(D^{-1}A^{(x)}D) \\ &\leqslant \max_{i,j:\ \bar{a}_{ij}>0} \left\{ \left[\max_{x:\ a_{ij}^{(x)}>0} r_i(A^{(x)}) \right]^{\alpha} \left[\max_{x\in X} r_j(A^{(x)}) \right]^{1-\alpha} \right\} \\ &\leqslant \max_{x\in X}\max_{i\in\langle n\rangle} r_i(A^{(x)}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Аналогично, если все матрицы $A^{(x)}$, $x \in X$, не имеют нулевых строк, то при

$$D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n), \quad \text{где} \quad d_i = \min_{x\in X} r_i(A^{(x)})^{1-\alpha},\ i = 1, \dots, n, \tag{2.4}$$

мы имеем

$$\begin{aligned} &\min_{x\in X}\min_{i\in\langle n\rangle} r_i(D^{-1}A^{(x)}D) \\ &\geqslant \min_{i,j:\ \bar{a}_{ij}>0} \left\{ \left[\min_{x:\ a_{ij}^{(x)}>0} r_i(A^{(x)}) \right]^{\alpha} \left[\min_{x\in X} r_j(A^{(x)}) \right]^{1-\alpha} \right\} \\ &\geqslant \min_{x\in X}\min_{i\in\langle n\rangle} r_i(A^{(x)}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Доказательство. Заметим сперва, что из предположения о том, что матрица $\bar{A}$ не имеет нулевых строк, следует, что все числа d_i, определенные в (2.2), положительны, а из предположения о том, что все матрицы $A^{(x)}$, $x \in X$, содержат только ненулевые строки, вытекает, что числа d_i, определенные в (2.4), все являются положительными.

Для доказательства левого неравенства в (2.3) мы выводим:

$$r_i(D^{-1}A^{(x)}D) = \left[\max_{x\in X} r_i(A^{(x)})\right]^{-(1-\alpha)} \sum_{j:\, a_{ij}^{(x)}>0} a_{ij}^{(x)} d_j$$

$$\leqslant \left[\max_{x\in X} r_i(A^{(x)})\right]^{-(1-\alpha)} r_i(A^{(x)}) \max_{j:\, a_{ij}^{(x)}>0} d_j$$

$$\leqslant \max_{j:\, a_{ij}^{(x)}>0} \left\{ r_i(A^{(x)})^{\alpha} \max_{x\in X} r_j(A^{(x)})^{1-\alpha} \right\}, \quad i = 1,\dots,n, \quad x \in X.$$

Из полученных соотношений вытекают неравенства

$$\max_{x\in X} r_i(D^{-1}A^{(x)}D) \leqslant \max_{j:\, \bar a_{ij}>0} \left\{ \max_{x:\, a_{ij}^{(x)}>0} r_i(A^{(x)})^{\alpha} \max_{x\in X} r_j(A^{(x)})^{1-\alpha} \right\},$$

$$i = 1,\dots,n,$$

из которых левое неравенство в (2.3) следует очевидным образом. Правое неравенство в (2.3) тривиально.

Неравенства (2.5) устанавливаются аналогично. □

Заметим, что в том случае, когда все матрицы $A^{(x)}$, $x \in X$, имеют один и тот же шаблон разреженности, оценки (2.3) и (2.5) принимают более простой вид:

$$\max_{x\in X} \max_{i\in\langle n\rangle} r_i(D^{-1}A^{(x)}D)$$

$$\leqslant \max_{i,j:\, \bar a_{ij}>0} \left\{ \left[\max_{x\in X} r_i(A^{(x)})\right]^{\alpha} \left[\max_{x\in X} r_j(A^{(x)})\right]^{1-\alpha} \right\} \tag{2.6}$$

и

$$\min_{x\in X} \min_{i\in\langle n\rangle} r_i(D^{-1}A^{(x)}D)$$

$$\geqslant \min_{i,j:\, \bar a_{ij}>0} \left\{ \left[\min_{x\in X} r_i(A^{(x)})\right]^{\alpha} \left[\min_{x\in X} r_j(A^{(x)})\right]^{1-\alpha} \right\}. \tag{2.7}$$

В частности, в случае одной неотрицательной матрицы теорема 2.1 приводит к следующему новому результату.

Следствие 2.1. *Пусть A – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$, не имеющая нулевых строк, пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и пусть*

$$D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n), \quad \text{где} \quad d_i = r_i(A)^{1-\alpha}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.8}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \min_{i \in \langle n \rangle} r_i(A) &\leqslant \min_{i,j:\, a_{ij}>0} \left\{ r_i(A)^{\alpha}\, r_j(A)^{1-\alpha} \right\} \leqslant r_i(D^{-1}AD) \\ &\leqslant \max_{i,j:\, a_{ij}>0} \left\{ r_i(A)^{\alpha}\, r_j(A)^{1-\alpha} \right\} \leqslant \max_{i \in \langle n \rangle} r_i(A), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Следует отметить, что в случае одной матрицы верхняя и нижняя оценки получены для одной и той же преобразующей диагональной матрицы D, что, вообще говоря, не так для общего случая набора матриц.

Отметим также, что в следствии 2.1 используются только строчные суммы $r_i(A)$, $i = 1, \dots, n$, и шаблон разреженности матрицы A, а поэтому оценки (2.9) справедливы для всех неотрицательных матриц, имеющих те же строчные суммы и шаблон разреженности, что и A.

Следующий результат улучшает оценки (2.3) и (2.5) за счет более сложного выбора сопрягающих диагональных матриц D. В то же самое время он обобщает теорему 1.1 на случай конечных наборов неотрицательных матриц.

Теорема 2.2. *Пусть $\Sigma = \{A^{(x)}\}_{x \in X}$ – конечное множество неотрицательных матриц $A^{(x)} = (a_{ij}^{(x)})$ порядка $n \geqslant 1$. Положим*

$$\begin{aligned} C(\Sigma) &= \max_{(i_1,\dots,i_s,i_{s+1}) \in \mathfrak{C}(\bar{A})} \left\{ \prod_{j=1}^{s} \max_{x:\, a_{i_j i_{j+1}}^{(x)}>0} r_{i_j}(A^{(x)}) \right\}^{1/s}, \\ c(\Sigma) &= \min_{(i_1,\dots,i_s,i_{s+1}) \in \mathfrak{C}(\bar{A})} \left\{ \prod_{j=1}^{s} \min_{x:\, a_{i_j i_{j+1}}^{(x)}>0} r_{i_j}(A^{(x)}) \right\}^{1/s}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Если матрица $\bar{A}$, определенная в (2.1), не имеет нулевых строк, то при $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$, где

$$d_i = \max_{(i_1,\dots,i_r,i_{r+1}) \in \mathfrak{S}\mathfrak{P}_i(\bar{A})} \prod_{j=1}^{r} \max_{x:\, a_{i_j i_{j+1}}^{(x)}>0} \left\{ r_{i_j}(A^{(x)})/C(\Sigma) \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.11}$$

справедлива верхняя оценка

$$\max_{x\in X}\max_{i\in\langle n\rangle} r_i(D^{-1}A^{(x)}D)\leqslant C(\Sigma), \tag{2.12}$$

а если ни одна из матриц $A^{(x)}$, $x\in X$, *не имеет нулевых строк, то при* $D=\operatorname{diag}(d_1,\ldots,d_n)$, *где*

$$d_i=\min_{(i_1,\ldots,i_r,i_{r+1})\in\mathfrak{S}\mathfrak{P}_i(\bar{A})}\prod_{j=1}^{r}\min_{x:\,a^{(x)}_{i_j i_{j+1}}>0}\left\{r_{i_j}(A^{(x)})/c(\Sigma)\right\}, \quad i=1,\ldots,n, \tag{2.13}$$

справедлива нижняя оценка

$$\min_{x\in X}\min_{i\in\langle n\rangle} r_i(D^{-1}A^{(x)}D)\geqslant c(\Sigma). \tag{2.14}$$

Доказательство. Для доказательства оценки (2.12) рассмотрим множество отмасштабированных матриц $\Sigma'=\left\{C(\Sigma)^{-1}A^{(x)}\right\}$. Как легко убедиться, для набора Σ' справедливо равенство

$$C(\Sigma')=1. \tag{2.15}$$

Из определения матрицы D следует, что для каждого $x\in X$ и произвольного $i\in\langle n\rangle$ мы имеем:

$$\sum_j C(\Sigma)^{-1}a^{(x)}_{ij}\,d_j\leqslant C(\Sigma)^{-1}r_i(A^{(x)})\max_{j:\,a^{(x)}_{ij}>0}d_j=C(\Sigma)^{-1}r_i(A^{(x)})\,d_{j_0},$$

где j_0 – вершина, для которой $d_{j_0}=\max\limits_{j:\,a^{(x)}_{ij}>0}d_j$. Но тогда, учитывая равенство (2.15), мы получаем

$$\sum_j C(\Sigma)^{-1}a^{(x)}_{ij}\,d_j\leqslant d_i,\quad i=1,\ldots,n,\quad x\in X,$$

откуда немедленно вытекает, что

$$r_i(D^{-1}A^{(x)}D)\leqslant C(\Sigma),\quad i=1,\ldots,n,\quad x\in X.$$

Тем самым неравенство (2.12) доказано.

Доказательство нижней оценки (2.14) проводится аналогично, но в качестве масштабирующего множителя следует взять $c(\Sigma)$. □

Заметим, что в том случае когда множество состоит из единственной матрицы A, результаты теоремы 2.2 сводятся к результатам теоремы 1.1.

Замечание 2.1. Как легко видеть, оценки (2.12) и (2.14) по крайней мере не хуже, чем оценки (2.3) и (2.5). Это следует из очевидных соотношений

$$\min_{1\leqslant i\leqslant s}\left\{a_i^{\alpha}\ a_{i+1}^{1-\alpha}\right\}\leqslant(a_1\cdots a_s)^{1/s}$$

$$=\left(\prod_{i=1}^{s}a_i^{\alpha}\ a_{i+1}^{1-\alpha}\right)^{1/s}\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant s}\left\{a_i^{\alpha}\ a_{i+1}^{1-\alpha}\right\},$$

где мы полагаем $a_{s+1}=a_1$, которые справедливы для произвольных $a_i>0$, $i=1,\ldots,s$, и $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Однако, вычислить оценки (2.3) и (2.5) намного легче, чем оценки (2.12) и (2.14). Заметим также, что если все матрицы $A^{(x)}$, $x\in X$, имеют один и тот же шаблон разреженности, причем этот шаблон симметричен, т.е. $a_{ij}^{(x)}>0 \iff a_{ji}^{(x)}>0$, $i\neq j$, $x\in X$, то оценки (2.12) и (2.14) совпадают соответственно с оценками (2.6) и (2.7), где $\alpha\in[0,\ 1]$. Это утверждение следует из того факта, что если $a_{ij}^{(x)}>0$, то $(i,j,i)\in\mathfrak{C}(A^{(x)})=\mathfrak{C}(\bar{A})$.

3. Приложения

В этом разделе представлены некоторые приложения теорем 2.1 и 2.2.

3.1. Совместные оценки для перроновских корней

Ввиду оценок Фробениуса (1.1), из теоремы 2.1 немедленно следуют совместные двусторонние оценки для перроновских корней неотрицательных матриц из заданного конечного набора, представленные в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Пусть* $\Sigma=\{A^{(x)}\}_{x\in X}$ *– конечное множество неотрицательных матриц* $A^{(x)}=(a_{ij}^{(x)})$ *порядка* $n\geqslant 1$, *не имеющих нулевых строк, и пусть* $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. *Пусть матрица* $\bar{A}=(\bar{a}_{ij})$ *определена* *в соответствии с* (2.1). *Тогда*

$$\begin{gathered}\min_{i,j:\,\bar a_{ij}>0}\left\{\left[\min_{x:\,a_{ij}^{(x)}>0} r_i(A^{(x)})\right]^{\alpha}\left[\min_{x\in X} r_j(A^{(x)})\right]^{1-\alpha}\right\}\\ \leqslant \rho(A^{(x)}) \leqslant \\ \max_{i,j:\,\bar a_{ij}>0}\left\{\left[\max_{x:\,a_{ij}^{(x)}>0} r_i(A^{(x)})\right]^{\alpha}\left[\max_{x\in X} r_j(A^{(x)})\right]^{1-\alpha}\right\},\quad x\in X.\end{gathered}\tag{3.1}$$

Кроме того, если матрица $A^{(x)}$, $x\in X$, *неприводима, то равенство*

$$\rho(A^{(x)}) = \max_{i,j:\,\bar a_{ij}>0}\left\{\left[\max_{x:\,a_{ij}^{(x)}>0} r_i(A^{(x)})\right]^{\alpha}\left[\max_{x\in X} r_j(A^{(x)})\right]^{1-\alpha}\right\}\tag{3.2}$$

имеет место тогда и только тогда, когда для всех $i,j\in\langle n\rangle$ *таких, что* $a_{ij}^{(x)}>0$, *справедливо равенство*

$$\begin{gathered}r_i(A^{(x)})^{\alpha}\, r_j(A^{(x)})^{1-\alpha}\\ = \max_{i,j:\,\bar a_{ij}>0}\left\{\left[\max_{x:\,a_{ij}^{(x)}>0} r_i(A^{(x)})\right]^{\alpha}\left[\max_{x\in X} r_j(A^{(x)})\right]^{1-\alpha}\right\},\end{gathered}\tag{3.3}$$

а равенство

$$\rho(A^{(x)}) = \min_{i,j:\,\bar a_{ij}>0}\left\{\left[\min_{x:\,a_{ij}^{(x)}>0} r_i(A^{(x)})\right]^{\alpha}\left[\min_{x\in X} r_j(A^{(x)})\right]^{1-\alpha}\right\}\tag{3.4}$$

имеет место тогда и только тогда, когда для всех $i,j\in\langle n\rangle$ *таких, что* $a_{ij}^{(x)}>0$, *справедливо равенство*

$$\begin{gathered}r_i(A^{(x)})^{\alpha}\, r_j(A^{(x)})^{1-\alpha}\\ = \min_{i,j:\,\bar a_{ij}>0}\left\{\left[\min_{x:\,a_{ij}^{(x)}>0} r_i(A^{(x)})\right]^{\alpha}\left[\min_{x\in X} r_j(A^{(x)})\right]^{1-\alpha}\right\}.\end{gathered}\tag{3.5}$$

Доказательство. Доказательства требуют только утверждения, касающиеся равенств (3.2) и (3.4). Предположим, что матрица $A^{(x)}$ неприводима и что равенство (3.2) имеет место. Тогда мы имеем

$$\rho(A^{(x)}) \geqslant \max_{i,j:\,a_{ij}^{(x)}>0}\left\{r_i(A^{(x)})^{\alpha}\, r_j(A^{(x)})^{1-\alpha}\right\}.\tag{3.6}$$

С другой стороны, в силу оценок Фробениуса (1.1) и следствия 2.1 (или же следствия 5.1 из работы [3]), справедливо противоположное неравенство

$$\rho(A^{(x)}) \leqslant \max_{i,j:\, a_{ij}^{(x)}>0} \left\{ r_i(A^{(x)})^{\alpha}\, r_j(A^{(x)})^{1-\alpha} \right\},$$

которое, в сочетании с (3.6), приводит к равенству

$$\rho(A^{(x)}) = \max_{i,j:\, a_{ij}^{(x)}>0} \left\{ r_i(A^{(x)})^{\alpha}\, r_j(A^{(x)})^{1-\alpha} \right\}. \tag{3.7}$$

Но, в силу следствия 5.1 из статьи [3], для неприводимой матрицы $A^{(x)}$ равенство (3.7) выполняется тогда и только тогда, когда

$$r_i(A^{(x)})^{\alpha}\, r_j(A^{(x)})^{1-\alpha} = \rho(A^{(x)}) \text{ для всех } i,j \text{ таких, что } a_{ij}^{(x)} > 0.$$

Последние равенства в сочетании с (3.2) доказывают (3.3).

Обратно, если для всех i, j таких, что $a_{ij}^{(x)} > 0$ справедливо равенство (3.3), то равенство (3.2) немедленно вытекает из следствия 2.1 и оценок Фробениуса (1.1).

Случай равенства (3.4) рассматривается аналогично. □

Замечание 3.1. Поскольку верхняя оценка теоремы 2.1 справедлива при более слабом предположении о том, что матрица $\bar{A}$ не имеет нулевых строк, верхняя оценка в (3.1) справедлива при том же предположении. Кроме того, как легко убедиться, она справедлива и для произвольного множества неотрицательных матриц таких, что матрица $\bar{A}$ имеет главную подматрицу без нулевых строк. Если же такой подматрицы не существует, то, очевидно, $\rho(\bar{A}) = 0$, откуда следует, что $\rho(A^{(x)}) = 0,\ x \in X$.

Что же касается нижней оценки в (3.1), то ее можно обобщить на произвольное множество неотрицательных матриц таких, что для некоторого непустого подмножества $S \subseteq \langle n \rangle$ ни одна из главных подматриц $A^{(x)}[S] = (a_{ij}^{(x)})_{i,j \in S}$ не имеет нулевых строк. Ввиду свойства монотонности перроновского корня относительно перехода к главным подматрицам, для этого достаточно перейти к минимуму по всем $i, j \in S$ таким, что $\bar{a}_{ij} > 0$.

В случае единственной неотрицательной матрицы A, не имеющей нулевых строк, теорема 3.1 и следствие 5.1 из работы [3] дают следующий более точный результат, впервые полученный в статье [3].

Следствие 3.1. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$, не имеющая нулевых строк. Тогда*

$$\min_{i,j:\, a_{ij}>0} \left\{ r_i(A)^\alpha \, r_j(A)^{1-\alpha} \right\} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{i,j:\, a_{ij}>0} \left\{ r_i(A)^\alpha \, r_j(A)^{1-\alpha} \right\}. \tag{3.8}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то оба неравенства в (3.8) являются равенствами тогда и только тогда, когда

- *либо $r_i(A) = \rho(A)$, $i = 1, \ldots, n$,*
- *либо одновременно выполняются следующие условия:*

(i) $\alpha = 1/2$;

(ii) $\langle n \rangle = S_1 \cup S_2$, *где для некоторого* $\xi > 1$

$$S_1 = \{ i \in \langle n \rangle : \; r_i(A) = \xi \rho(A) \}, \quad S_2 = \{ i \in \langle n \rangle : \; r_i(A) = \xi^{-1} \rho(A) \};$$

(iii) *обе главные подматрицы $A[S_1]$ и $A[S_2]$ нулевые;*

в противном случае оба неравенства в (3.8) являются строгими.

Совместные двусторонние оценки для перроновских корней, представленные ниже, легко следуют из теоремы 2.2 и обобщают контурные оценки теоремы 1.1 на наборы неотрицательных матриц.

Теорема 3.2. *Пусть $\Sigma = \{A^{(x)}\}_{x \in X}$ – конечное множество неотрицательных матриц $A^{(x)} = (a_{ij}^{(x)})$ порядка $n \geqslant 1$. Если матрицы $A^{(x)}$, $x \in X$, не имеют нулевых строк, то*

$$c(\Sigma) \equiv \min_{(i_1,\ldots,i_s,i_{s+1}) \in \mathfrak{C}(\bar{A})} \left\{ \prod_{j=1}^{s} \min_{x:\, a^{(x)}_{i_j i_{j+1}}>0} r_{i_j}(A^{(x)}) \right\}^{1/s}$$

$$\leqslant \rho(A^{(x)}) \leqslant \tag{3.9}$$

$$C(\Sigma) \equiv \max_{(i_1,\ldots,i_s,i_{s+1}) \in \mathfrak{C}(\bar{A})} \left\{ \prod_{j=1}^{s} \max_{x:\, a^{(x)}_{i_j i_{j+1}}>0} r_{i_j}(A^{(x)}) \right\}^{1/s}, \quad x \in X,$$

где матрица $\bar{A}$ определена в соответствии с (2.1). Кроме того, если матрица $A^{(x)}$, $x \in X$, неприводима, то равенство

$$\rho(A^{(x)}) = C(\Sigma) \tag{3.10}$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\left(\prod_{i\in\bar\gamma} r_i(A^{(x)})\right)^{1/|\gamma|} = C(\Sigma) \quad \text{для всех} \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A^{(x)}), \tag{3.11}$$

а равенство

$$\rho(A^{(x)}) = c(\Sigma) \tag{3.12}$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\left(\prod_{i\in\bar\gamma} r_i(A^{(x)})\right)^{1/|\gamma|} = c(\Sigma) \quad \text{для всех} \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A^{(x)}). \tag{3.13}$$

Доказательство. Оценки (3.9) немедленно следуют из теоремы 2.2 и оценок Фробениуса (1.1). Утверждения, относящиеся к равенствам (3.10) и (3.12), доказываются таким же способом, как и утверждения, относящиеся к равенствам (3.2) и (3.4) в теореме 3.1. Единственное отличие состоит в том, что вместо следствия 5.1 из работы [3] нужно воспользоваться теоремой 1.1. □

Замечание 3.2. Заметим, что верхняя оценка в (3.9) справедлива и в том случае, когда матрица $\bar{A}$ не имеет нулевых строк. Если же матрица $\bar{A}$ приводима (в частности, если она содержит нулевые строки), целесообразно сначала определить ее неприводимые компоненты, а затем применить теорему 3.2 к соответствующим подматрицам матриц $A^{(x)}$, $x \in X$. Заметим также, что если множество $\mathfrak{C}(\bar{A})$ пусто, то, в силу теоремы 16.3 из работы [14], матрица $\bar{A}$ и, следовательно, также и все матрицы $A^{(x)}$, $x \in X$, перестановочно подобны верхним треугольным матрицам с нулевой главной диагональю, так что $\rho(A^{(x)}) = 0$, $x \in X$.

В заключение этого подраздела мы приведем блочные обобщения теорем 3.1 и 3.2. Эти обобщения основаны на следующих двухсторонних оценках для перроновского корня неотрицательной матрицы, представленной в блочном виде.

Теорема 3.3 [5]. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и пусть*

$$\langle n\rangle = \bigcup_{i=1}^{N} M_i, \quad 1 \leqslant N \leqslant n, \tag{3.14}$$

– *фиксированное разбиение множества индексов на непересекающиеся подмножества. Предположим, что неотрицательные матрицы*

$$\hat{A} = (\hat{a}_{ij})_{i,j=1}^N, \quad \check{A} = (\check{a}_{ij})_{i,j=1}^N,$$

удовлетворяют условиям

$$\hat{a}_{ij} \geqslant \max_{k \in M_i} \sum_{l \in M_j} a_{kl}, \quad \check{a}_{ij} \leqslant \min_{k \in M_i} \sum_{l \in M_j} a_{kl}, \quad i, j = 1, \ldots, N. \tag{3.15}$$

Тогда для перроновского корня матрицы A справедливы двусторонние оценки

$$\rho(\check{A}) \leqslant \rho(A) \leqslant \rho(\hat{A}). \tag{3.16}$$

Пусть теперь дано конечное множество $\Sigma = \{A^{(x)}\}_{x \in X}$ неотрицательных матриц порядка $n \geqslant 1$. Зафиксируем разбиение (3.14) индексного множества и определим множества

$$\hat{\Sigma} = \{\hat{A}^{(x)}\}_{x \in X} \quad \text{и} \quad \check{\Sigma} = \{\check{A}^{(x)}\}_{x \in X}$$

неотрицательных $N \times N$ матриц по формулам

$$\hat{A}^{(x)} = (\hat{a}_{ij}^{(x)}), \quad \hat{a}_{ij}^{(x)} = \max_{k \in M_i} \sum_{l \in M_j} a_{kl}^{(x)}, \quad i, j = 1, \ldots, N, \quad x \in X, \tag{3.17}$$

и

$$\check{A}^{(x)} = (\check{a}_{ij}^{(x)}), \quad \check{a}_{ij}^{(x)} = \min_{k \in M_i} \sum_{l \in M_j} a_{kl}^{(x)}, \quad i, j = 1, \ldots, N, \quad x \in X. \tag{3.18}$$

По теореме 3.3 мы имеем

$$\rho(\check{A}^{(x)}) \leqslant \rho(A^{(x)}) \leqslant \rho(\hat{A}^{(x)}), \quad x \in X. \tag{3.19}$$

Применив верхнюю и нижнюю оценки теорем 3.1 и 3.2 к множествам матриц $\hat{\Sigma}$ и $\check{\Sigma}$ и воспользовавшись неравенствами (3.19), мы приходим к обещанным блочным обобщениям двусторонних оценок (3.1) и (3.9), в которых используются следующие обозначения:

$$\bar{A} = (\bar{a}_{ij}), \quad \text{где} \quad \bar{a}_{ij} = \max_{x \in X} \hat{a}_{ij}^{(x)}, \quad i, j = 1, \ldots, N, \tag{3.20}$$

$$\underline{A} = (\underline{a}_{ij}), \quad \text{где} \quad \underline{a}_{ij} = \max_{x \in X} \check{a}_{ij}^{(x)}, \quad i, j = 1, \ldots, N. \tag{3.21}$$

Теорема 3.4. *Пусть* $\{A^{(x)}\}_{x\in X}$ – *конечное множество неотрицательных матриц порядка* $n \geqslant 1$ *и пусть фиксировано некоторое разбиение* (3.14) *множества индексов. Пусть матрицы* $\hat{A}^{(x)}$ *и* $\check{A}^{(x)}$, $x \in X$, *определены в соответствии с формулами* (3.17) *и* (3.18). *Если ни одна из матриц* $\check{A}^{(x)}$, $x \in X$, *не имеет нулевых строк, то*

$$\min_{i,j:\ \underline{a}_{ij}>0}\left\{\left[\min_{x:\ \check{a}_{ij}^{(x)}>0} r_i(\check{A}^{(x)})\right]^{\alpha}\left[\min_{x\in X} r_j(\check{A}^{(x)})\right]^{1-\alpha}\right\}$$
$$\leqslant \rho(A^{(x)}) \leqslant \tag{3.22}$$
$$\max_{i,j:\ \bar{a}_{ij}>0}\left\{\left[\max_{x:\ \hat{a}_{ij}^{(x)}>0} r_i(\hat{A}^{(x)})\right]^{\alpha}\left[\max_{x\in X} r_j(\hat{A}^{(x)})\right]^{1-\alpha}\right\}, \quad x \in X,$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *и*

$$\min_{(i_1,\dots,i_s,i_{s+1})\in\mathfrak{C}(\underline{A})}\left\{\prod_{j=1}^{s}\min_{x:\ \check{a}_{i_j i_{j+1}}^{(x)}>0} r_{i_j}(\check{A}^{(x)})\right\}^{1/s}$$
$$\leqslant \rho(A^{(x)}) \leqslant \tag{3.23}$$
$$\max_{(i_1,\dots,i_s,i_{s+1})\in\mathfrak{C}(\bar{A})}\left\{\prod_{j=1}^{s}\max_{x:\ \hat{a}_{i_j i_{j+1}}^{(x)}>0} r_{i_j}(\hat{A}^{(x)})\right\}^{1/s}, \quad x \in X.$$

Замечание 3.3. Ввиду замечаний 3.1 и 3.2, верхние оценки в (3.22) и (3.23) справедливы при более слабом предположении, что матрица $\bar{A}$, определенная в (3.20), не имеет нулевых строк.

Замечание 3.4. Заметим, что в случае точечного разбиения

$$\langle n\rangle = \bigcup_{i=1}^{n}\{i\}$$

мы очевидно имеем $A^{(x)} = \hat{A}^{(x)} = \check{A}^{(x)}$, $x \in X$, так что в этом случае оценки (3.22) и (3.23) теоремы 3.4 совпадают соответственно с оценками (3.1) и (3.9) теорем 3.1 и 3.2. С другой стороны, в противоположном крайнем случае, когда $N = 1$ и $M_1 = \langle n\rangle$, мы имеем

$$\hat{A}^{(x)} = \max_{i\in\langle n\rangle} r_i(A^{(x)}), \quad \check{A}^{(x)} = \min_{i\in\langle n\rangle} r_i(A^{(x)}), \quad x \in X,$$

а значит оценки (3.22) и (3.23) сводятся к тривиальным следствиям

$$\min_{x\in X}\min_{i\in\langle n\rangle} r_i(A^{(x)}) \leqslant \rho(A^{(x)}) \leqslant \max_{x\in X}\max_{i\in\langle n\rangle} r_i(A^{(x)}), \quad x\in X,$$

оценок Фробениуса.

3.2. Совместные верхние оценки для спектральных радиусов комплексных матриц

Пусть $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$. Определим неотрицательную матрицу $|A|=(|a_{ij}|)$. Хорошо известная лемма Виландта (см., напр., [2, с. 358]) утверждает, что спектральный радиус $\rho(A)$ матрицы A удовлетворяет верхней оценке

$$\rho(A)\leqslant\rho(|A|). \tag{3.24}$$

Следовательно, для заданного набора $\Sigma=\{A^{(x)}\}_{x\in X}$ комплексных матриц порядка $n\geqslant 1$ мы имеем

$$\max_{x\in X}\rho(A^{(x)})\leqslant\max_{x\in X}\rho(|A^{(x)}|). \tag{3.25}$$

Ввиду (3.25), значение $\max\limits_{x\in X}\rho(A^{(x)})$ можно ограничить сверху, используя любую из верхних совместных оценок для перроновских корней матриц $|A^{(x)}|$, $x\in X$, представленных в разделе 3.1. В частности, применяя теорему 3.4 к множеству $\{|A^{(x)}|\}_{x\in X}$ и учитывая замечание 3.3, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3.5. *Пусть $\{A^{(x)}\}_{x\in X}$ – конечное множество комплексных матриц порядка $n\geqslant 1$ и пусть разбиение (3.14) множества индексов $\langle n\rangle$ фиксировано. Обозначим*

$$\hat{A}^{(x)}=(\hat{a}^{(x)}_{ij}),\quad \hat{a}^{(x)}_{ij}=\max_{k\in M_i}\sum_{l\in M_j}|a^{(x)}_{kl}|,\quad i,j=1,\ldots,N,\quad x\in X, \tag{3.26}$$

и предположим, что матрица

$$\bar{A}=(\bar{a}_{ij}),\quad \text{где}\quad \bar{a}_{ij}=\max_{x\in X}\{\hat{a}^{(x)}_{ij}\},\quad i,j=1,\ldots,N, \tag{3.27}$$

не имеет нулевых строк. Тогда справедливы следующие совместные верхние оценки:

$$\max_{x\in X}\rho(A^{(x)})\leqslant\max_{i,j:\,\bar{a}_{ij}>0}\left\{\left[\max_{x:\,\hat{a}^{(x)}_{ij}>0} r_i(\hat{A}^{(x)})\right]^{\alpha}\left[\max_{x\in X} r_j(\hat{A}^{(x)})\right]^{1-\alpha}\right\} \tag{3.28}$$

и

$$\max_{x\in X}\rho(A^{(x)})\leqslant \max_{(i_1,\dots,i_s,i_{s+1})\in\mathfrak{C}(\bar{A})}\left\{\prod_{j=1}^{s}\max_{x:\ \hat{a}_{i_j}^{(x)}>0} r_{i_j}(\hat{A}^{(x)})\right\}^{1/s}. \tag{3.29}$$

3.3. Устойчивость по Шуру выпуклых комбинаций матриц

Для заданного набора $\Sigma=\{A^{(x)}\}_{x\in X}$ комплексных матриц порядка $n\geqslant 1$ их выпуклыми комбинациями являются матрицы вида

$$\sum_{x\in X}\alpha^{(x)}\,A^{(x)}, \tag{3.30}$$

где $\alpha^{(x)}\geqslant 0,\ x\in X$, и $\sum\limits_{x\in X}\alpha^{(x)}=1$.

Естественным вопросом относительно выпуклых комбинаций является следующий. При каких условиях на множество Σ все матрицы вида (3.30) устойчивы по Шуру? Напомним, что матрица называется устойчивой по Шуру, если ее спектральный радиус строго меньше единицы. Этот вопрос рассматривался в работе [12], где устойчивость по Шуру всех выпуклых комбинаций заданных $k\geqslant 2$ матриц была охарактеризована в терминах так называемых блочных P-матриц. Ранее задача об устойчивости по Шуру для выпуклых комбинаций двух и трех матриц рассматривалась соответственно в работах [18] и [11].

Следуя работе [15], мы рассмотрим более общее множество матриц, строки которых являются независимыми выпуклыми комбинациями соответствующих строк матриц из Σ. Точнее говоря, мы рассмотрим множество

$$R(\Sigma)=\left\{C:\ C=\sum_{x\in X}T^{(x)}A^{(x)}\right\}, \tag{3.31}$$

где $T^{(x)}=\operatorname{diag}(t_1^{(x)},\dots,t_n^{(x)}),\ t_i^{(x)}\geqslant 0,\ i=1,\dots,n,\ x\in X$, и

$$\sum_{x\in X}T^{(x)}=I_n \tag{3.32}$$

(I_n – единичная матрица порядка n).

Для произвольной диагональной матрицы D с положительными диагональными элементами, используя лемму Виландта, оценки Фробениуса (1.1) и условие (3.32), мы выводим:

$$\begin{aligned}
&\rho\left(\sum_{x\in X} T^{(x)}A^{(x)}\right) = \rho\left(\sum_{x\in X} T^{(x)}D^{-1}A^{(x)}D\right)\\
&\leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} r_i\left(\sum_{x\in X} T^{(x)}D^{-1}A^{(x)}D\right) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle}\sum_{x\in X} t_i^{(x)} r_i(D^{-1}A^{(x)}D)\\
&\leqslant \max_{i\in\langle n\rangle}\max_{x\in X} r_i(D^{-1}A^{(x)}D).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Ввиду (3.33), применение теорем 2.1 и 2.2 немедленно приводит к следующим условиям, достаточным для того, чтобы все матрицы из $R(\Sigma)$ были устойчивы по Шуру.

Теорема 3.6. *Пусть $\Sigma = \{A^{(x)}\}_{x\in X}$ – конечное множество комплексных матриц порядка $n \geqslant 1$. Положим*

$$\bar{A} = (\bar{a}_{ij}), \quad \bar{a}_{ij} = \max_{x\in X}|a_{ij}^{(x)}|, \quad i,j = 1,\ldots,n, \tag{3.34}$$

и предположим, что матрица $\bar{A}$ не имеет нулевых строк. Если при некотором α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, выполнено условие

$$\max_{i,j\,:\,\bar{a}_{ij}>0}\left\{\left[\max_{x\,:\,a_{ij}^{(x)}\neq 0} r_i(A^{(x)})\}\right]^{\alpha}\left[\max_{x\in X} r_j(A^{(x)})\}\right]^{1-\alpha}\right\} < 1 \tag{3.35}$$

или справедливо неравенство

$$\max_{(i_1,\ldots,i_s,i_{s+1})\in\mathfrak{C}(\bar{A})}\left\{\prod_{j=1}^{s}\max_{x\,:\,a_{i_j i_{j+1}}^{(x)}\neq 0} r_{i_j}(A^{(x)})\right\}^{1/s} < 1, \tag{3.36}$$

то каждая матрица из множества $R(\Sigma)$ является устойчивой по Шуру.

3.4. Оценки для совместного и нижнего спектральных радиусов набора матриц

Пусть $\Sigma = \{A^{(x)} \in \mathbb{C}^{n\times n}\}_{x\in X}$ – множество матриц. *Совместный спектральный радиус* $\bar{\rho}(\Sigma)$ был введен в работе [17] с помощью формулы

$$\bar{\rho}(\Sigma) = \limsup_{k\to\infty}\sup_{\omega\in X^k}\left\{\|A^{(\omega)}\|^{1/k}\right\}, \tag{3.37}$$

где $\|\cdot\|$ – (субмультипликативная) матричная норма и для $\omega = x_1 \dots x_k$ мы используем обозначение $A^{(\omega)} = A^{(x_1)} \cdots A^{(x_k)}$. Элементы множества X принято называть буквами, а конечные последовательности букв – словами. Множество всех слов длины k обозначается через X^k.

Как было показано в работе [9], совместный спектральный радиус не зависит от матричной нормы, используемой в (3.37), и справедливы равенства [16]

$$\bar{\rho}(\Sigma) = \liminf_{k\to\infty} \sup_{\omega\in X^k} \left\{\|A^{(\omega)}\|^{1/k}\right\} = \lim_{k\to\infty} \sup_{\omega\in X^k} \left\{\|A^{(\omega)}\|^{1/k}\right\}. \quad (3.38)$$

Заменяя в (3.37) норму на спектральный радиус, мы приходим к так называемому *обобщенному спектральному радиусу* множества матриц Σ,

$$\rho(\Sigma) = \limsup_{k\to\infty} \sup_{\omega\in X^k} \{\rho(A^{(\omega)})^{1/k}\}, \quad (3.39)$$

введенному в работе [9]. Как было предположено в работе [9] и доказано в работе [6] (см. также [10] и [20]), для конечного (или ограниченного) множества вещественных матриц совместный спектральный радиус равен обобщенному спектральному радиусу, т.е.

$$\rho(\Sigma) = \bar{\rho}(\Sigma), \quad (3.40)$$

откуда следует (см. [10]), что равенство (3.40) справедливо также и в комплексном случае. Заметим, что из определения (3.39) и равенства (3.40) следует, что совместный спектральный радиус инвариантен относительно преобразований подобия. В частности, для любой невырожденной диагональной матрицы D мы имеем

$$\bar{\rho}(\Sigma) = \bar{\rho}(D^{-1}\Sigma D). \quad (3.41)$$

Нижний спектральный радиус (называемый также совместным спектральным субрадиусом) $\underline{\rho}(\Sigma)$ был определен в работе [13] по формуле

$$\underline{\rho}(\Sigma) = \liminf_{k\to\infty} \inf_{\omega\in X^k} \left\{\|A^{(\omega)}\|^{1/k}\right\}. \quad (3.42)$$

Нижний спектральный радиус так же, как и совместный спектральный радиус, не зависит от матричной нормы, используемой в его определении (см. [13]); при этом, очевидно, справедливо неравенство

$$\underline{\rho}(\Sigma) \leqslant \bar{\rho}(\Sigma). \tag{3.43}$$

В работе [13] было также показано, что для конечного множества Σ имеет место равенство

$$\underline{\rho}(\Sigma) = \liminf_{k\to\infty} \min_{\omega\in X^k} \left\{\rho(A^{(\omega)})^{1/k}\right\}, \tag{3.44}$$

аналогичное равенству (3.40), из которого следует, что нижний спектральный радиус инвариантен относительно преобразований подобия. В частности, для любой невырожденной диагональной матрицы D мы имеем

$$\underline{\rho}(\Sigma) = \underline{\rho}(D^{-1}\Sigma D). \tag{3.45}$$

Заметим, что ввиду хорошо известного равенства

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \{\|A^k\|^{1/k}\}, \quad A \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

в том случае, когда множество Σ состоит из единственной матрицы, имеют место соотношения

$$\underline{\rho}(A) = \bar{\rho}(A) = \rho(A).$$

Таким образом, для одной матрицы ее совместный, обобщенный и нижний спектральный радиусы все совпадают с обычным спектральным радиусом.

Совместный и нижний спектральные радиусы набора матриц естественно возникают в целом ряде ситуаций (см., напр., [19]), но их вычисление и аппроксимация являются сложными задачами и требуют дорогостоящих вычислений (см., напр., [19]). Поэтому представляют интерес нижние и верхние оценки для спектральных радиусов. В работе [9] были установлены следующие неравенства:

$$\sup_{\omega\in X^k} \left\{\rho(A^{(\omega)})^{1/k}\right\} \leqslant \rho(\Sigma) \leqslant \bar{\rho}(\Sigma) \leqslant \sup_{\omega\in X^k} \left\{\|A^{(\omega)}\|^{1/k}\right\}, \quad k \geqslant 1. \tag{3.46}$$

Указанные оценки могут быть вычислены для возрастающих значений k и дают сколь угодно точные аппроксимации совместного спектрального радиуса. В частности, при $k = 1$ для конечного набора Σ мы имеем оценки

$$\max_{x\in X}\{\rho(A^{(x)})\} \leqslant \rho(\Sigma) = \bar{\rho}(\Sigma) \leqslant \max_{x\in X}\{\|A^{(x)}\|\}, \tag{3.47}$$

справедливые для произвольной матричной нормы.

Начиная с этого места, на $\mathbb{C}^{n\times n}$ мы фиксируем строчную норму

$$\|A\| = \|A\|_\infty = \max_{i\in\langle n\rangle} r_i(A) = \max_{i\in\langle n\rangle}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|. \tag{3.48}$$

Для этой нормы из (3.41) и правого неравенства в (3.47) следует, что для любой невырожденной диагональной матрицы D имеет место оценка

$$\bar{\rho}(\Sigma) \leqslant \max_{x\in X}\ \max_{i\in\langle n\rangle}\ r_i\left(D^{-1}A^{(x)}D\right). \tag{3.49}$$

Ввиду (3.49), верхние оценки теорем 2.1 и 2.2 немедленно приводят к следующим верхним оценкам для совместного спектрального радиуса набора матриц.

Теорема 3.7. *Пусть* $\Sigma = \{A^{(x)}\}_{x\in X}$ *– конечное множество матриц* $A^{(x)} = (a_{ij}^{(x)}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *и предположим, что матрица* $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$, *где* $\bar{a}_{ij} = \max_{x\in X}|a_{ij}^{(x)}|$, $i, j = 1, \dots, n$, *не имеет нулевых строк. Тогда справедливы верхние оценки*

$$\bar{\rho}(\Sigma) \leqslant \max_{i,j:\ \bar{a}_{ij}>0}\left\{\left[\max_{x:\ a_{ij}^{(x)}>0} r_i(A^{(x)})\right]^{\alpha}\ \left[\max_{x\in X} r_j(A^{(x)})\right]^{1-\alpha}\right\} \tag{3.50}$$

и

$$\bar{\rho}(\Sigma) \leqslant \max_{(i_1,\dots,i_s,i_{s+1})\in\mathfrak{C}(\bar{A})}\left\{\prod_{j=1}^{s}\ \max_{x:\ a_{i_j i_{j+1}}^{(x)}>0} r_{i_j}(A^{(x)})\right\}^{1/s}. \tag{3.51}$$

Очевидно, условие, что матрица $\bar{A}$ не имеет нулевых строк, выполнено, если она является неприводимой. Если же матрица $\bar{A}$ приводима, то симметричной перестановкой строк и столбцов ее можно привести к верхней блочно треугольной форме, диагональные блоки которой являются неприводимыми компонентами матрицы $\bar{A}$. Ясно, что тем же преобразованием подобия все матрицы $A^{(\omega)}$, $\omega \in X^k$, $k \geqslant 1$, приводятся к той же самой блочно треугольной форме. Поэтому из определения (3.39) следует, что

$$\rho(\Sigma) = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \rho(\Sigma[M_i]),$$

где $M_i \subseteq \langle n \rangle$, $i = 1, \dots, N$, – непересекающиеся подмножества множества индексов $\langle n \rangle$, соответствующие неприводимым компонентам матрицы $\bar{A}$. Здесь мы использовали обозначение $\Sigma[M_i] = \left\{A^{(x)}[M_i]\right\}_{x \in X}$. Таким образом, случай приводимой матрицы $\bar{A}$ сводится к неприводимому случаю.

Для того, чтобы вывести нижние оценки для нижнего спектрального радиуса набора неотрицательных матриц, мы установим сперва следующую простую нижнюю оценку.

Лемма 3.1. *Пусть* $\Sigma = \left\{A^{(x)}\right\}_{x \in X}$ *– конечное множество неотрицательных матриц. Тогда*

$$\underline{\rho}(\Sigma) \geqslant \min_{x \in X} \min_{i \in \langle n \rangle} r_i(A^{(x)}). \tag{3.52}$$

Доказательство. Пусть $\omega = x_1 \dots x_k$. Тогда

$$\|A^{(\omega)}\|_\infty = \|A^{(x_1)} \cdots A^{(x_k)}\|_\infty \geqslant \min_{i \in \langle n \rangle} r_i(A^{(x_1)} \cdots A^{(x_k)}). \tag{3.53}$$

Но, поскольку для неотрицательных $n \times n$ матриц B и C мы имеем

$$r_i(BC) = (BCe)_i \geqslant \min_{j \in \langle n \rangle} \{r_j(C)\}\, (Be)_i = r_i(B) \min_{j \in \langle n \rangle} \{r_j(C)\},$$
$$i = 1, \dots, n,$$

где $e = [1, \dots, 1]^T$, то

$$\min_{i \in \langle n \rangle} r_i(A^{(x_1)} \cdots A^{(x_k)}) \geqslant \prod_{j=1}^{k} \min_{i \in \langle n \rangle} r_i(A^{(x_j)}) \geqslant \left[\min_{x \in X} \min_{i \in \langle n \rangle} r_i(A^{(x)})\right]^k. \tag{3.54}$$

Из неравенств (3.53) и (3.54) следует, что

$$\|A^{(\omega)}\|_\infty^{1/k} \geqslant \min_{x \in X} \min_{i \in \langle n \rangle} r_i(A^{(x)}), \quad \omega \in X^k, \quad k \geqslant 1, \tag{3.55}$$

и оценка (3.52) немедленно вытекает из неравенства (3.55), определения (3.42) нижнего спектрального радиуса и его независимости от выбора нормы. □

Ввиду равенства (3.45), из леммы 3.1 следует, что для произвольной невырожденной диагональной матрицы D имеет место следующий нижний аналог верхней оценки (3.49):

$$\underline{\rho}(\Sigma) \geqslant \min_{x\in X} \min_{i\in\langle n\rangle} r_i(D^{-1}A^{(x)}D). \tag{3.56}$$

Теперь, как и в случае верхней оценки для совместного спектрального радиуса, нижние оценки для нижнего спектрального радиуса множества неотрицательных матриц можно получить, применяя нижние оценки теорем 2.1 и 2.2. Тем самым мы приходим к следующему результату.

Теорема 3.8. *Пусть* $\Sigma = \{A^{(x)}\}_{x\in X}$ – *конечное множество неотрицательных матриц порядка* $n \geqslant 1$. *Если ни одна из матриц* $A^{(x)}$, $x \in X$, *не имеет нулевых строк, то нижний спектральный радиус* $\underline{\rho}(\Sigma)$ *удовлетворяет нижним оценкам*

$$\underline{\rho}(\Sigma) \geqslant \min_{i,j\colon \bar a_{ij}>0} \left\{ \left[\min_{x\colon a_{ij}^{(x)}>0} r_i(A^{(x)}) \right]^{\alpha} \left[\min_{x\in X} r_j(A^{(x)}) \right]^{1-\alpha} \right\} \tag{3.57}$$

и

$$\underline{\rho}(\Sigma) \geqslant \min_{(i_1,\dots,i_s,i_{s+1})\in\mathfrak{C}(\bar A)} \left\{ \prod_{j=1}^{s} \min_{x\colon a_{i_j i_{j+1}}^{(x)}>0} r_{i_j}(A^{(x)}) \right\}^{1/s}. \tag{3.58}$$

Здесь матрица $\bar A = (\bar a_{ij})$ *определена, как в теореме* 3.7.

В заключение этого подраздела для полноты изложения мы рассмотрим альтернативный подход к выводу верхних оценок для совместного спектрального радиуса множества комплексных матриц и нижних оценок для нижнего спектрального радиуса множества неотрицательных матриц.

Пусть задано конечное множество $\Sigma = \{A^{(x)}\}_{x\in X}$ комплексных матриц порядка $n \geqslant 1$. Определим неотрицательные матрицы $\bar A = (\bar a_{ij})$ и $\underline{A} = (\underline{a}_{ij})$ с помощью соотношений

$$\bar a_{ij} = \max_{x\in X} |a_{ij}^{(x)}|, \quad \underline{a}_{ij} = \min_{x\in X} |a_{ij}^{(x)}|, \quad i,j = 1,\dots,n. \tag{3.59}$$

Тогда из очевидных покомпонентных матричных неравенств

$$\underline{A} \leqslant |A^{(x)}| \leqslant \bar A, \quad x \in X,$$

следует, что

$$\underline{A}^k \leqslant |A^{(x_1)}| \cdots |A^{(x_k)}| \leqslant \bar{A}^k, \quad x_1, \ldots, x_k \in X, \quad k \geqslant 1. \qquad (3.60)$$

В силу леммы Виландта (см., напр., [2, с. 358]), из правого неравенства в (3.60) вытекает, что

$$\rho(A^{(\omega)})^{1/k} \leqslant \rho(\bar{A}), \quad \omega \in X^k, \quad k \geqslant 1,$$

а в силу определения (3.39) мы имеем

$$\rho(\Sigma) \leqslant \rho(\bar{A}). \qquad (3.61)$$

Заметим, что оценка (3.61), впервые полученная в работе [8], улучшает ранее предложенную оценку [7]

$$\rho(\Sigma) \leqslant \rho\left(\sum_{x \in X} A^{(x)}\right).$$

Аналогично, для конечного набора неотрицательных матриц Σ, основываясь на равенстве (3.44), из левого неравенства в (3.60) мы выводим

$$\underline{\rho}(\Sigma) \geqslant \rho(\underline{A}). \qquad (3.62)$$

Ввиду (3.61) и (3.62), естественный способ получить верхнюю оценку для $\bar{\rho}(\Sigma)$ и нижнюю оценку для $\underline{\rho}(\Sigma)$ состоит в том, чтобы использовать известные верхние и нижние оценки для перроновского корня одной неотрицательной матрицы. Так применение следствия 3.1 и теоремы 1.1 приводит нас к оценкам

$$\begin{gathered} \bar{\rho}(\Sigma) \leqslant \max_{i,j:\, \bar{a}_{ij}>0} \left\{ r_i(\bar{A})^{\alpha}\, r_j(\bar{A})^{1-\alpha} \right\}, \\ \bar{\rho}(\Sigma) \leqslant \max_{\gamma \in \mathfrak{C}(\bar{A})} \left\{ \prod_{i \in \bar{\gamma}} r_i(\bar{A}) \right\}^{1/|\gamma|}; \end{gathered} \qquad (3.63)$$

и

$$\begin{gathered} \underline{\rho}(\Sigma) \geqslant \min_{i,j:\, \bar{a}_{ij}>0} \left\{ r_i(\underline{A})^{\alpha}\, r_j(\underline{A})^{1-\alpha} \right\}, \\ \underline{\rho}(\Sigma) \geqslant \min_{\gamma \in \mathfrak{C}(\bar{A})} \left\{ \prod_{i \in \bar{\gamma}} r_i(\underline{A}) \right\}^{1/|\gamma|}. \end{gathered} \qquad (3.64)$$

Оценки (3.63) справедливы для любого конечного множества комплексных матриц, для которого матрицы $\bar{A}$ не имеет нулевых строк, а оценки (3.64) верны для любого конечного множества неотрицательных матриц таких, что матрица $\underline{A}$ не имеет нулевых строк.

Сравнивая оценки (3.63) и (3.64) с оценками теорем 3.7 и 3.8, мы легко видим, что первые из них являются следствиями последних. К тому же оценки (3.57) и (3.58) применимы при несколько более слабых предположениях, чем оценки (3.64).

Более того, как показывает следующий пример, в некоторых случаях оценки теорем 3.7 и 3.8 лучше чем даже оценки (3.61) и (3.62). Действительно, при $n \geqslant 2$ определим матрицу $A = (a_{ij})$, положив

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i+1,\ 1 \leqslant i \leqslant n-1 \ \text{ или } \ i = n\ , j = 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и рассмотрим множество $\Sigma = \{A, A^2, \ldots, A^n\}$. Как нетрудно убедиться, все оценки (3.50), (3.51), (3.57) и (3.58) применимы и сводятся к неравенствам

$$1 \leqslant \underline{\rho}(\Sigma) \leqslant \bar{\rho}(\Sigma) \leqslant 1,$$

из которых следует, что

$$\underline{\rho}(\Sigma) = \bar{\rho}(\Sigma) = 1.$$

Таким образом, все оценки теорем 3.7 и 3.8 выполняются с равенствами.

С другой стороны, нетрудно удостовериться, что

$$\underline{A} = 0, \qquad \bar{A} = e\, e^T,$$

а значит

$$\rho(\underline{A}) = 0, \qquad \rho(\bar{A}) = n.$$

Таким образом, для рассматриваемого примера нижняя оценка (3.62) всегда тривиальна, тогда как верхняя оценка (3.61) становится с ростом n все менее и менее точной.

Литература

1. Ю. А. Альпин, *Границы для перронова корня неотрицательной матрицы, учитывающие свойства ее графа.* — Матем. заметки **58** (1995), 635–637.
2. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* Наука, М., 1967.
3. Л. Ю. Колотилина, *Оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 77–122.

4. Л. Ю. Колотилина, *Оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **296** (2003), 60–88.
5. В. П. Чистяков, *К оценке перронова корня неотрицательных матриц.* — Докл. АН СССР **246** (1979), 548–550.
6. M. A. Berger, Y. Wang, *Bounded semigroups of matrices.* — Linear Algebra Appl. **166** (1992), 21–27.
7. V. D. Blondel, Yu. Nesterov, *Computationally efficient approximations of the joint spectral radius.* — SIAM J. Matrix Anal. Appl. **27** (2005), 256–272.
8. V. D. Blondel, Yu. Nesterov, J. Theys, *Computing the joint spectral radius of a set of matrices.* — Proceedings of the 23rd Benelux Meeting on Systems and Control, Helvoirt, The Netherlands, paper FrP06-3, March 17-19, 2004.
9. I. Daubechies, J. C. Lagarias, *Sets of matrices all infinite products of which converge.* — Linear Algebra Appl. **162** (1992), 227–263.
10. L. Elsner, *The generalized spectral-radius theorem: An analytic-geometric proof.* — Linear Algebra Appl. **220** (1995), 151–159.
11. L. Elsner, T. Szulc, *Convex combinations of matrices – nonsingularity and Schur stability.* — Proceedings of the First Workshop on Numerical Analysis and Applications, Rousse, Bulgaria, 1996, L. Vulkov, J. Wasniewski, and P. Yalamov (Eds.), Springer-Verlag (1997), pp. 170–175.
12. L. Elsner, T. Szulc, *Convex combinations of matrices – nonsingularity and Schur stability characterizations.* — Linear Multilinear Algebra **44** (1998), 301–312.
13. L. Gurwits, *Stability of discrete linear inclusion.* — Linear Algebra Appl. **231** (1995), 47–85.
14. F. Harary, *Graph Theory.* Addison–Wesley Publ. Co., 1969.
15. C. R. Johnson, M. J. Tsatsomeros, *Convex sets of nonsingular and P-matrices.* — Linear Multilinear Algebra **38** (1995), 233–240.
16. J. C. Lagarias, Y. Wang, *The finiteness conjecture for the generalized spectral radius of a set of matrices.* — Linear Algebra Appl. **214** (1995), 17–42.
17. G.-C. Rota, W. G. Strang, *A note on the joint spectral radius.* — Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A, **LXIII** (1960), 379–381.
18. C. B. Soh, *Schur stability of convex combinations of matrices.* — Linear Algebra Appl. **128** (1990), 159–168.
19. J. N. Tsitsiklis, V. D. Blondel, *The Lyapunov exponent and joint spectral radius of pairs of matrices are hard – when not impossible – to compute and to approximate.* — Math. Control, Signals, Syst. **10** (1997), 17–42.
20. A. A. Vladimirov, L. Elsner, W.-J. Beyn, *Stability and paracontractivity of discrete linear inclusions.* — Linear Algebra Appl. **312** (2000), 125–134.

Al'pin A. Yu., Kolotilina L. Yu., Korneeva N. N. Joint bounds for the Perron roots of nonnegative matrices with applications.

Given a finite set $\{A^{(x)}\}_{x\in X}$ of nonnegative matrices, we derive joint upper and lower bounds for the row sums of the matrices $D^{-1}A^{(x)}D$, $x \in X$, where D is a specially chosen nonsingular diagonal matrix. These bounds, depending only on the sparsity patterns of the matrices $A^{(x)}$

and their row sums, are used to obtain joint two-sided bounds for the Perron roots of given nonnegative matrices, joint upper bounds for the spectral radii of given complex matrices, bounds for the joint and lower spectral radii of a matrix set, and conditions sufficient for all convex combinations of given matrices to be Schur stable.

Казанский государственный
университет

E-mail: Yuri.Alpin@ksu.ru

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: liko@pdmi.ras.ru

Поступило 29 мая 2006 г.