Математические заметки

Том 87 выпуск 5 май 2010

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Об одной лемме Ф. А. Березина

А. М. Бикчентаев

Пусть $\mathscr{H}$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ – $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов в $\mathscr{H}$, E – тождественный оператор в $\mathscr{H}$.

Пусть A, B – самосопряженные операторы в $\mathscr{H}$, $B-A$ рассматривается как возмущение оператора A, функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Одна из задач теории возмущений состоит в оценке малости $f(B)-f(A)$ (в том или ином смысле) в зависимости от возмущения $B-A$. В [1], [2] методами двойных операторных интегралов Стилтьеса эта задача изучалась для функций f, производная которых принадлежит классу $\operatorname{Lip}\alpha$ при некотором $\alpha>0$ и сепарабельного $\mathscr{H}$. С помощью трансформаторов была получена оценка $\|f(B)-f(A)\|_J\leqslant c_\alpha\|B-A\|_J$; здесь $A,B\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$, J – идеал Шэттена–фон Неймана S_p, $1\leqslant p<\infty$, или идеал компактных операторов $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ с равномерной нормой.

В [3; гл. 3] исследованы операторы в пространстве состояний (бозевском или фермиевском) $\mathscr{H}$, выражающиеся через операторы рождения и уничтожения с помощью многочленов не выше второй степени. При нахождении канонического вида квадратичных операторов использована следующая

Лемма 1 [3; гл. 3, с. 146]. *Пусть C, K – самосопряженные операторы, причем $C\geqslant\mu E$, $C^2+K\geqslant\mu_1^2E$, $\mu,\mu_1>0$. Рассмотрим оператор $X=\sqrt{C^2+K}-C$.*

1) Если $K\in S_1$, то $X\in S_1$.

2) Если $K\in S_2$, то $X\in S_2$.

При доказательстве утверждения 2) Березин применил оригинальный трюк с трансформатором на операторах Гильберта–Шмидта и использовал утверждение 1) (см. [3; с. 146–148]. В этой заметке получено усиление и обобщение (на все идеалы с унитарно-инвариантной нормой [4; гл. 3, § 2]) этой леммы в случае, когда оператор C ограничен.

Пусть $|T|=\sqrt{T^*T}$ для $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ и $C=C^+-C^-$ – разложение самосопряженного оператора $C\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ на положительную и отрицательную части. Через $\mathscr{P}(\mathscr{H})$ обозначим решетку проекторов в $\mathscr{H}$.

Лемма 2. *Пусть $A,B\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ и $p,q\geqslant0$. Если $A+B$ обратим, то $|A|^p+|B|^q$ также обратим.*

Доказательство. *Шаг* 1. Пусть $n\in\mathbb{N}$. Покажем, что оператор $T_n=|A|^{2^n}+|B|^{2^n}$ обратим. Поскольку $(A+B)^*$ также обратим, оператор $C=(A+B)^*(A+B)\geqslant0$ и обратим как произведение обратимых операторов. Поэтому $C\geqslant\mu E$ для некоторого $\mu>0$. Поскольку $D=(A-B)^*(A-B)\geqslant0$, имеем

$$\mu E\leqslant C+D=2A^*A+2B^*B=2T_1.$$

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт № 02.740.11.0193).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Проблемы математической физики*, Вып. 1, Изд-во ЛГУ, Л., 1966, 33–67. **[2]** М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Проблемы математической физики*, Вып. 2, Изд-во ЛГУ, Л., 1967, 26–60. **[3]** Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, 2-е изд., доп., Наука, М., 1986. **[4]** И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965. **[5]** J. J. Koliha, V. Rakočević, *Integral Equations Operator Theory*, **52**:1 (2005), 125–134. **[6]** F. Hiai, H. Kosaki, *Means of Hilbert Space Operators*, Lecture Notes in Math., **1820**, Springer-Verlag, Berlin, 2003. **[7]** Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972. **[8]** М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*. Т. 1. *Функциональный анализ*, Мир, М., 1977. **[9]** М. Г. Крейн, *Первая летняя математическая школа*, Ч. I, Наукова думка, Киев, 1964, 103–187. **[10]** B. Simon, *Mathematical Quantum Theory. II. Schrödinger operators* (Vancouver, BC, 1993), CRM Proc. Lecture Notes, **8**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 109–149. **[11]** H. Kosaki, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **28**:2 (1992), 299–313. **[12]** E. B. Davies, *J. London Math. Soc.* (2), **37**:1 (1988), 148–157.

А. М. Бикчентаев
Научно-исследовательский институт
математики и механики им. Н. Г. Чеботарёва
Казанского государственного университета
E-mail: Airat.Bikchentaev@ksu.ru

Поступило
30.12.2009