

Краткое сообщение

А.М. БИКЧЕНТАЕВ

**НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СЛЕДА И ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ,  
ПРИСОЕДИНЕННЫХ К АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА**

**Аннотация.** Пусть  $\varphi$  — след на алгебре фон Неймана  $\mathcal{M}$ ,  $A, B \in \mathcal{M}$  и  $\|B\| < 1$ ,  $[A, B] = AB - BA$ . Тогда  $\varphi(|[A, B]|) \leq 2\varphi(|A|)$ . Пусть  $\tau$  — точный нормальный полуконечный след на  $\mathcal{M}$ ,  $S(\mathcal{M}, \tau)$  —  $*$ -алгебра всех  $\tau$ -измеримых операторов. Если  $A \in L_2(\mathcal{M}, \tau)$  и  $\operatorname{Re} A = \lambda|A|$  с  $\lambda \in \{-1, 1\}$ , то  $A = \lambda|A|$ . Оператор  $A \in L_2(\mathcal{M}, \tau)$  является эрмитовым тогда и только тогда, когда  $\tau(A^2) = \tau(A^*A)$ . Пусть положительные операторы  $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$  обратимы в  $S(\mathcal{M}, \tau)$  и  $Y := (A^{-1} - B^{-1})(A - B)$ . Если  $Y, A^{1/2}YA^{-1/2} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ , то  $\tau(Y) \leq 0$ . Пусть оператор  $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$  гипонормален и  $A = B + iC$  — его декартово разложение. Если  $BC \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$  или  $C = C^3 \in \mathcal{M}$  и  $[B, C] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ , то  $A$  нормален.

**Ключевые слова:** гильбертово пространство, линейный оператор, алгебра фон Неймана, след, гипонормальный оператор, неравенство, проектор.

УДК: 517.983: 517.986

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-1-99-104

ВВЕДЕНИЕ

Перечислим полученные результаты. Пусть  $\varphi$  — след на алгебре фон Неймана  $\mathcal{M}$ ,  $A, B \in \mathcal{M}$  и  $\|B\| < 1$ . Тогда  $\varphi(|[A, B]|) \leq 2\varphi(|A|)$  (следствие 3). Пусть  $\tau$  — точный нормальный полуконечный след на  $\mathcal{M}$ ,  $S(\mathcal{M}, \tau)$  —  $*$ -алгебра всех  $\tau$ -измеримых операторов,  $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ ,  $0 < p < +\infty$ , — некоммутативное  $L_p$ -пространство Лебега на  $(\mathcal{M}, \tau)$ . След  $\tau$  корректно продолжается по линейности до функционала на  $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ , обозначаемого той же буквой  $\tau$ . Если  $A \in L_2(\mathcal{M}, \tau)$  и  $\operatorname{Re} A = \lambda|A|$  с  $\lambda \in \{-1, 1\}$ , то  $A = \lambda|A|$  (теорема 2). Оператор  $A \in L_2(\mathcal{M}, \tau)$  является эрмитовым тогда и только тогда, когда  $\tau(A^2) = \tau(A^*A)$  (теорема 3). Пусть операторы  $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$  обратимы в  $S(\mathcal{M}, \tau)$  и  $Y := (A^{-1} - B^{-1})(A - B)$ . Если  $Y, A^{1/2}YA^{-1/2} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ , то  $\tau(Y) \leq 0$  (теорема 4). Пусть оператор  $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$  гипонормален и  $A = B + iC$  — его декартово разложение с эрмитовыми  $B, C \in S(\mathcal{M}, \tau)$ . Если  $BC \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$  или  $C = C^3 \in \mathcal{M}$  и  $[B, C] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ , то  $A$  нормален (теорема 6). Большинство результатов являются новыми и в случае алгебры  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  всех линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ , снабженной каноническим следом  $\operatorname{tr}$ .

---

Поступила в редакцию 16.12.2024, после доработки 16.12.2024. Принята к публикации 18.12.2024.

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2024-1438).

## 1. ОБОЗНАЧЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для алгебры фон Неймана  $\mathcal{M}$  операторов в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  через  $\mathcal{M}^u$ ,  $\mathcal{M}^{\text{id}}$ ,  $\mathcal{M}^+$  и  $\mathcal{M}^{\text{pr}}$  будем обозначать ее подмножества унитарных операторов, идемпотентов, положительных операторов и проекторов соответственно. Пусть  $I$  — единица алгебры  $\mathcal{M}$  и  $P^\perp = I - P$  для  $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ ,  $\mathcal{M}_1 = \{X \in \mathcal{M} : \|X\| \leq 1\}$  — единичный шар алгебры  $\mathcal{M}$ .

Следом на алгебре фон Неймана  $\mathcal{M}$  называется такое отображение  $\varphi : \mathcal{M}^+ \rightarrow [0, +\infty]$ , что  $\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$ ,  $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$  для всех  $X, Y \in \mathcal{M}^+$ ,  $\lambda \geq 0$  (при этом  $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$ );  $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$  для всех  $Z \in \mathcal{M}$ . Для следа  $\varphi$  определим множества  $\mathfrak{M}_\varphi^+ = \{X \in \mathcal{M}^+ : \varphi(X) < +\infty\}$ ,  $\mathfrak{M}_\varphi = \text{lin}_\mathbb{C} \mathfrak{M}_\varphi^+$ . Ограничение  $\varphi|_{\mathfrak{M}_\varphi^+}$  корректно продолжается по линейности до функционала на  $\mathfrak{M}_\varphi$ , обозначаемого той же буквой  $\varphi$ . След  $\varphi$  на алгебре фон Неймана  $\mathcal{M}$  называется ([1], гл. V, §2)

- *конечным*, если  $\varphi(X) < +\infty$  для всех  $X \in \mathcal{M}^+$ ;
- *точным*, если  $\varphi(X) = 0$  ( $X \in \mathcal{M}^+$ )  $\implies X = 0$ ;
- *нормальным*, если  $X_i \nearrow X$  ( $X_i, X \in \mathcal{M}^+$ )  $\implies \varphi(X) = \sup \varphi(X_i)$ ;
- *полуконечным*, если  $\varphi(A) = \sup\{\varphi(B) : B \in \mathcal{M}^+, B \leq A, \varphi(B) < +\infty\}$ ,  $A \in \mathcal{M}^+$ .

Оператор в  $\mathcal{H}$  (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана  $\mathcal{M}$* , если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта  $\mathcal{M}'$  алгебры  $\mathcal{M}$ . Далее всюду  $\tau$  — точный нормальный полуконечный след на  $\mathcal{M}$ . Замкнутый оператор  $X$ , присоединенный к  $\mathcal{M}$ , имеющий всюду плотную в  $\mathcal{H}$  область определения  $\mathcal{D}(X)$ , называется  *$\tau$ -измеримым*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой  $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ , что  $P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X)$  и  $\tau(P^\perp) < \varepsilon$ . Множество  $S(\mathcal{M}, \tau)$  всех  $\tau$ -измеримых операторов является  $*$ -алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций ([2], гл. 2, §2.3; [3], гл. 8, §8.3). Для семейства  $\mathcal{L} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$  обозначим через  $\mathcal{L}^+$  и  $\mathcal{L}^h$  его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в  $S(\mathcal{M}, \tau)^h$ , порожденный собственным конусом  $S(\mathcal{M}, \tau)^+$ , будем обозначать через  $\leq$ . Если  $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ , то  $|A| = \sqrt{A^*A} \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ . Через  $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ ,  $0 < p < +\infty$ , будем обозначать некоммутативное  $L_p$ -пространство Лебега на  $(\mathcal{M}, \tau)$ . След  $\tau$  корректно продолжается по линейности до функционала на  $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ , обозначаемого той же буквой  $\tau$ . Оператор  $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$  называется *гипонормальным*, если  $A^*A \geq AA^*$ , *когипонормальным*, если оператор  $A^*$  гипонормален.

## 2. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СЛЕДА НА АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

**Теорема 1.** Пусть  $\varphi$  — след на алгебре фон Неймана  $\mathcal{M}$ ,  $A \in \mathcal{M}$  и  $W \in \mathcal{M}^u$ . Тогда  $\varphi(|[A, W]|) \leq 2\varphi(|A|)$ .

В силу ([4], теорема 2.2) найдутся такие частичные изометрии  $U, V \in \mathcal{M}$ , что

$$|[A, W]| = |AW - WA| \leq U|AW|U^* + V|WA|V^*. \quad (1)$$

Поскольку

$$|AW| = \sqrt{W^*|A|^2W} = \sqrt{(W^*|A|W)^2} = W^*|A|W \text{ и } |WA| = \sqrt{A^*W^*WA} = \sqrt{A^*A} = |A|,$$

неравенство (1) перепишется в виде

$$|[A, W]| \leq UW^*|A|WU^* + V|A|V^*.$$

Следовательно, в силу монотонности следа  $\varphi$  на конусе  $\mathcal{M}^+$  получаем

$$\varphi(|[A, W]|) = \varphi(\sqrt{|A|WU^*UW^*|A|}) + \varphi(\sqrt{|A|V^*V|A|}) \leq 2\varphi(|A|).$$

**Следствие 1.** Пусть  $\varphi$  — след на алгебре фон Неймана  $\mathcal{M}$ ,  $A \in \mathcal{M}$  и  $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ . Тогда  $\varphi(|[A, P]|) \leq \varphi(|A|)$ .

Заметим, что  $W := 2P - I \in \mathcal{M}^{\text{u}}$ . Для  $A \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$  утверждение следствия 1 было установлено другим методом в теореме 2 ([5]). Легко видеть, что  $|PAP^{\perp} \pm P^{\perp}AP|^2 = P^{\perp}A^*PAP^{\perp} + PA^*P^{\perp}AP = |[A, P]|^2$ . В силу единственности положительного квадратного корня имеем  $|PAP^{\perp} \pm P^{\perp}AP| = |[A, P]|$ .

**Следствие 2.** Пусть  $\varphi$  — след на алгебре фон Неймана  $\mathcal{M}$ , операторы  $A, B \in \mathcal{M}$  с  $\|B\| < 1$ . Тогда  $\varphi(|[A, B]|) \leq 2\varphi(|A|)$ .

Напомним, что если  $\|B\| < (n-2)n^{-1}$ , то оператор  $B$  является арифметическим средним  $n$  унитарных операторов  $W_1, \dots, W_n$  из  $\mathcal{M}$  ([6]). Тогда  $[A, B] = n^{-1}([A, W_1] + \dots + [A, W_n])$  и  $n$  раз последовательно применяя операторное неравенство треугольника ([4], теорема 2.2), получаем

$$|[A, B]| \leq n^{-1}(X_1|[A, W_1]|X_1^* + \dots + X_n|[A, W_n]|X_n^*)$$

для некоторых  $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{M}_1$ .

**Следствие 3.** Пусть  $\varphi$  — конечный след на алгебре фон Неймана  $\mathcal{M}$ , операторы  $A \in \mathcal{M}$  и  $B \in \mathcal{M}_1$ . Тогда  $\varphi(|[A, B]|) \leq 2\varphi(|A|)$ .

Конечный след продолжается до положительного линейного функционала на алгебре фон Неймана  $\mathcal{M}$ , который автоматически  $\|\cdot\|$ -непрерывен. Если  $\|B\| = 1$ , то операторы  $B_n = \frac{n}{n+1}B$  имеют нормы, меньшие единицы и  $\|B_n - B\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Отображение  $X \mapsto |X|$  ( $X \in \mathcal{M}$ )  $\|\cdot\|$ -непрерывно, поскольку  $|||X||| = \|X\|$  ( $X \in \mathcal{M}$ ).

### 3. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СЛЕДА И ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

**Лемма** ([7], теорема 17). Имеем  $\tau(ST) = \tau(TS)$  для всех операторов  $S, T \in S(\mathcal{M}, \tau)$  с  $ST, TS \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ .

**Предложение** (ср. с [8], лемма 1). Если числа  $p, q, r > 0$  с  $1/p + 1/q = 1/r$  и  $A \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ ,  $B \in L_q(\mathcal{M}, \tau)$ ,  $X \in \mathcal{M}$ , то  $AXB \in L_r(\mathcal{M}, \tau)$  и  $\|AXB\|_r \leq \|X\| \|A\|_p \|B\|_q$ .

**Следствие 4.** Если  $p > 0$  и  $A \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ , то  $A^n \in L_{p/n}(\mathcal{M}, \tau)$  и  $\|A^n\|_{p/n} \leq \|A\|_p^n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

В частности, если  $A = A^2 \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ , то  $A \in L_{p/n}(\mathcal{M}, \tau)$  и  $\|A\|_{p/n} \leq \|A\|_p^n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 2.** Если  $A \in L_2(\mathcal{M}, \tau)$  и  $\text{Re } A = \lambda|A|$  с  $\lambda \in \{-1, 1\}$ , то  $A = \lambda|A|$ .

*Схема доказательства.* Легко видеть, что  $A^*A, AA^* \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$  и

$$(A + A^*)^2 = 4\lambda^2|A|^2 = 4A^*A.$$

Поэтому  $A^2 + A^{*2} = 3A^*A - AA^*$  и в силу линейности продолжения  $\tau$  на все пространство  $L_1(\mathcal{M}, \tau)$  получаем

$$\begin{aligned} \|A - A^*\|_2^2 &= \tau((A - A^*)^*(A - A^*)) = \tau(A^*A - A^{*2} - A^2 + AA^*) = \\ &= \tau(A^*A - 3A^*A + AA^* + AA^*) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку  $\|\cdot\|_2$  является нормой на  $L_2(\mathcal{M}, \tau)$ , имеем  $A^* = A$  и  $A = \text{Re } A = \lambda|A|$ . В частности, если  $\lambda = 1$ , то  $A \geq 0$ .

**Следствие 5.** Если  $B \in L_2(\mathcal{M}, \tau)$  и  $\text{Im } B = \lambda|B|$  с  $\lambda \in \{-1, 1\}$ , то  $B = i\lambda|B|$ .

Для  $A = -iB$  имеем  $B = iA$  и  $A^*A \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ . Очевидно,

$$\operatorname{Re} A = \frac{-iB + iB^*}{2} = \frac{B - B^*}{2i} = \operatorname{Im} B = \lambda|B| = \lambda|A|.$$

Поэтому  $A = \lambda|A|$  и  $B = iA = i\lambda|A| = i\lambda|B|$ .

**Теорема 3.** *Оператор  $A \in L_2(\mathcal{M}, \tau)$  является эрмитовым тогда и только тогда, когда  $\tau(A^2) = \tau(A^*A)$ .*

*Схема доказательства.* Имеем  $A^2 \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$  в силу следствия 3 с  $p = 1$ ,  $n = 2$ . Импликация “ $\Rightarrow$ ” очевидна. Проверим импликацию “ $\Leftarrow$ ”.

Шаг 1. Пусть  $A \in L_2(\mathcal{M}, \tau)^h$  и  $\tau(A^2) = 0$ . Так как  $A^2 \in L_1(\mathcal{M}, \tau)^+$  и след  $\tau$  точен, то  $A^2 = 0$ . Поэтому  $A = 0$ .

Шаг 2. Пусть  $A \in L_2(\mathcal{M}, \tau)$  — произвольный оператор и  $\tau(A^2) = \tau(A^*A)$ . Пусть

$$A = \frac{A + A^*}{2} + i \frac{A - A^*}{2i}$$

— его декартово разложение. Для элемента  $B = \frac{A - A^*}{2i} \in L_2(\mathcal{M}, \tau)^h$  имеем  $B^2 \in L_1(\mathcal{M}, \tau)^+$  и

$$\tau(B^2) = \tau\left(\frac{A^2 - AA^* - A^*A + A^{*2}}{-4}\right) = 0,$$

поскольку  $C^{*2} = C^{2*}$  для всех  $C \in S(\mathcal{M}, \tau)$  и  $\tau(T^*) = \overline{\tau(T)}$  для всех  $T \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ . Поэтому в силу шага 1 получаем  $B = 0$  и  $A \in L_2(\mathcal{M}, \tau)^h$ .

**Теорема 4.** *Пусть операторы  $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$  обратимы в  $S(\mathcal{M}, \tau)$  и*

$$Y := (A^{-1} - B^{-1})(A - B).$$

*Если  $Y, A^{1/2}YA^{-1/2} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ , то  $\tau(Y) \leq 0$ .*

*Схема доказательства.* Применим функциональное исчисление к обратимому в алгебре  $S(\mathcal{M}, \tau)$  оператору  $X \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ . Имеем  $2I - X - X^{-1} = -(X^{1/2} - X^{-1/2})^2 \leq 0$ . Поэтому для  $X^{1/2} - X^{-1/2} \in L_2(\mathcal{M}, \tau)$  получаем  $\tau(2I - X - X^{-1}) \leq 0$ . Поскольку  $Y = 2I - A^{-1}B - B^{-1}A$  и для  $X = A^{-1/2}BA^{-1/2}$  имеем  $X^{-1} = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$ , в силу предположения  $Y, A^{1/2}YA^{1/2} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$  и леммы получаем

$$\begin{aligned} \tau(Y) &= \tau((2I - A^{-1}B - B^{-1}A)A^{-1} \cdot A^{1/2}) = \tau(A^{1/2}(2I - A^{-1}B - B^{-1}A)A^{-1/2}) = \\ &= \tau(2I - A^{-1/2}BA^{-1/2} - A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}) \leq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что теорема 4 в этом частном случае уточняет теорему 2.1 из [9], из последней следует лишь  $\tau(Y) \in \mathbb{R}$ . Об обратимости в алгебре  $S(\mathcal{M}, \tau)$  см. [10]–[12]. Для  $\mathcal{M} = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  и  $\tau = \operatorname{tr}$  теорема 4 была установлена в ([3], теорема 2.1.19).

**Теорема 5.** *Пусть  $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$ ,  $P, Q \in \mathcal{M}^{\operatorname{id}}$  и  $PQ = QP = 0$ . Если оператор*

$$C = PA + BQ$$

*лежит в  $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ , то  $PAP, QBQ \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$  и  $\tau(C) = \tau(PAP + QBQ)$ .*

*Схема доказательства.* Операторы  $PAP = CP$ ,  $QBQ = QC$  и  $P^\perp BQ = P^\perp C$  лежат в  $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ . Для симметрии  $S = 2P - I = P - P^\perp$  имеем

$$C + SCS = 2(PCP + P^\perp CP^\perp) = 2(PAP + P^\perp BQ).$$

Поэтому в силу линейности продолжения  $\tau$  на все пространство  $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ , леммы и равенства  $QP^\perp = Q$  получаем

$$\begin{aligned}\tau(C) &= \tau(SCS) = \tau(PAP + P^\perp BQ) = \tau(PAP) + \tau(P^\perp BQ \cdot Q) = \\ &= \tau(PAP) + \tau(Q \cdot P^\perp BQ) = \tau(PAP) + \tau(QBQ) = \tau(PAP + QBQ).\end{aligned}$$

**Следствие 6.** Пусть  $P, Q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ . Тогда если  $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)^h$ , то  $PAP + QBQ \in L_1(\mathcal{M}, \tau)^h$  и  $\tau(C) \in \mathbb{R}$ ; если  $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ , то  $PAP + QBQ \in L_1(\mathcal{M}, \tau)^+$  и  $\tau(C) \in \mathbb{R}^+$ .

**Теорема 6.** Пусть оператор  $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$  гипонормален и  $A = B + iC$  — его декартово разложение с  $B, C \in S(\mathcal{M}, \tau)^h$ . Если

1)  $BC \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$

или

2)  $C = C^3 \in \mathcal{M}$  и  $[B, C] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ ,

то  $A$  нормален.

*Схема доказательства.* Поскольку  $(B - iC)(B + iC) \geq (B + iC)(B - iC)$ , имеем

$$i(BC - CB) \geq 0. \quad (2)$$

1) Пусть  $BC \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ . Тогда  $CB = (BC)^* \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$  и

$$\begin{aligned}\|BC - CB\|_1 &= \|i(BC - CB)\|_1 = \tau(i(BC - CB)) = i\tau(BC - CB) = \\ &= i(\tau(BC) - \tau(CB)) = 0\end{aligned}$$

в силу линейности продолжения следа  $\tau$  на все пространство  $L_1(\mathcal{M}, \tau)$  и леммы. Следовательно,  $[B, C] = 0$  и оператор  $A$  нормален.

2) Пусть  $C = C^3 \in \mathcal{M}$  и  $[B, C] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ . В силу теоремы 2 из [13] и линейности продолжения следа  $\tau$  на все пространство  $L_1(\mathcal{M}, \tau)$  имеем  $\tau([B, C]) = 0 = i\tau([B, C]) = \tau(i[B, C])$ . Отсюда с учетом (2) получаем

$$\|BC - CB\|_1 = \|i(BC - CB)\|_1 = \tau(i(BC - CB)) = \tau(i[B, C]) = 0.$$

Значит,  $[B, C] = 0$  и оператор  $A$  нормален.

**Следствие 7.** Пусть оператор  $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$  когипонормален и  $A = B + iC$  — его декартово разложение с  $B, C \in S(\mathcal{M}, \tau)^h$ . Если  $BC \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$  или  $C = C^3 \in \mathcal{M}$  и  $[B, C] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ , то  $A$  нормален.

О других случаях нормальности гипонормальных операторов см., например, [14]–[16] и ([17], задача 207).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Takesaki M. *Theory of operator algebras*. I. Encycl. Math. Sci., **124**. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 5 (Springer-Verlag, Berlin, 2002).
- [2] Dodds P.G., de Pagter B., Sukochev F.A. *Noncommutative integration and operator theory*. Progress in Math., 349 (Birkhäuser, Cham, 2023).
- [3] Bikhentaev A.M., Kittaneh F., Moslehian M.S., Seo Y. *Trace inequalities: for matrices and Hilbert space operators*. Forum for Interdisciplinary Math. (Springer, 2024).
- [4] Akemann C.A., Anderson J., Pedersen G.K. *Triangle inequalities in operator algebras*, Linear Multilinear Algebra **11** (2), 167–178 (1982).
- [5] Бикчентаев А.М. *След и разности идемпотентов в  $C^*$ -алгебрах*, Матем. заметки **105** (5), 647–655 (2019).
- [6] Haagerup U., Kadison R.V., Pedersen G.K. *Means of unitary operators, revisited*, Math. Scand. **100** (2), 193–197 (2007).

- [7] Brown L.G., Kosaki H. *Jensen's inequality in semi-finite von Neumann algebras*, J. Operator Theory **23** (1), 3–19 (1990).
- [8] Kosaki H. *On the continuity of the map  $\varphi \mapsto |\varphi|$  from the predual of a  $W^*$ -algebra*, J. Funct. Anal. **59** (1), 123–131 (1984).
- [9] Бикчентаев А.М. *К теории  $\tau$ -измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана*, Матем. заметки **98** (3), 337–348 (2015).
- [10] Tembo I.D. *Invertibility in the algebra of  $\tau$ -measurable operators*, in: Operator algebras, operator theory and applications, 245–256, Oper. Theory Adv. Appl. **195** (Birkhäuser Verlag, Basel, 2010).
- [11] Бикчентаев А.М. *Существенно обратимые измеримые операторы, присоединенные к полуконечной алгебре фон Неймана, и коммутаторы*, Сиб. матем. журн. **63** (2), 272–282 (2022).
- [12] Бикчентаев А.М. *Оператор блочно-проектирования в алгебре измеримых операторов*, Изв. вузов. Матем. (10), 77–82 (2023).
- [13] Бикчентаев А.М. *След и интегрируемые коммутаторы измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана*, Сиб. матем. журн. **65** (3), 455–468 (2024).
- [14] Бикчентаев А.М. *О нормальных  $\tau$ -измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана*, Матем. заметки **96** (3), 350–360 (2014).
- [15] Bikchentaev A. *Hyponormal measurable operators, affiliated to a semifinite von Neumann algebra*, Adv. Operator Theory **9** (4), article 83 (2024).
- [16] Dehimi S., Mortad M.H. *Unbounded operators having self-adjoint, subnormal, or hyponormal powers*, Math. Nachr. **296** (9), 3915–3928 (2023).
- [17] Halmos P.R. *A Hilbert space problem book*, 2nd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1982).

Айрат Мицхатович Бикчентаев

Казанский федеральный университет,  
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

A.M. Bikchentaev

### Trace inequalities for measurable operators affiliated to a von Neumann algebra

*Abstract.* Let  $\varphi$  be a trace on von Neumann algebra  $\mathcal{M}$ ,  $A, B \in \mathcal{M}$  and  $\|B\| < 1$ ,  $[A, B] = AB - BA$ . Then  $\varphi(|[A, B]|) \leq 2\varphi(|A|)$ . Let  $\tau$  be a faithful normal semifinite trace on  $\mathcal{M}$ ,  $S(\mathcal{M}, \tau)$  be the  $*$ -algebra of all  $\tau$ -measurable operators. If  $A \in L_2(\mathcal{M}, \tau)$  and  $\operatorname{Re} A = \lambda|A|$  with  $\lambda \in \{-1, 1\}$ , then  $A = \lambda|A|$ . An operator  $A \in L_2(\mathcal{M}, \tau)$  is Hermitian if and only if  $\tau(A^2) = \tau(A^*A)$ . Let positive operators  $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$  be invertible in  $S(\mathcal{M}, \tau)$  and  $Y := (A^{-1} - B^{-1})(A - B)$ . If  $Y, A^{1/2}YA^{-1/2} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ , then  $\tau(Y) \leq 0$ . Let an operator  $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$  be hyponormal and  $A = B + iC$  be its Cartesian decomposition. If 1)  $BC \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ , or 2)  $C = C^3 \in \mathcal{M}$  and  $[B, C] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ , then  $A$  is normal.

*Keywords:* Hilbert space, linear operator, von Neumann algebra, trace, hyponormal operator, inequality, projection.

Airat Midkhatovich Bikchentaev

Kazan Federal University,  
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru