Компьютерная Графика

Р.Р.Нигматуллин

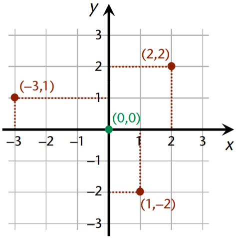
КФУ ИВМиИТ(ВМК)

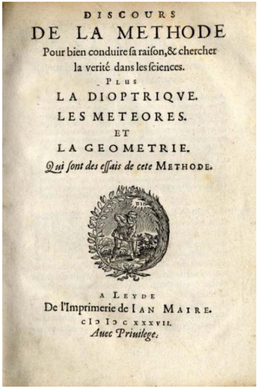
Казань, 2019

Координаты в компьютерной графике

- Декартовы координаты
- Барицентрические координаты
- Проективные координаты

René Descartes
(1596–1650)



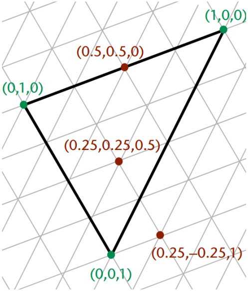


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.
A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
cIↃ IↃ c XXXVII.
Auec Priuilege.

Appendix “La Géométrie”
1637

Барицентрические координаты

August Ferdinand Möbius
(1790–1868)



Der

barycentrische Calcul

ein neues Hülfsmittel

zur

analytischen Behandlung der Geometrie

dargestellt

und insbesondere

auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und
die Entwickelung mehrerer Eigenschaften
der Kegelschnitte

angewendet

von

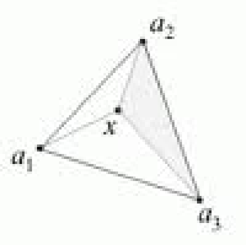
August Ferdinand Möbius
Professor der Astronomie zu Leipzig.

Mit vier Kupfertafeln.

Leipzig,
Verlag von Johann Ambrosius Barth.
1827.

“Der barycentrische Calcul”
1827

Барицентрические координаты ввёл Мебиус в 1827 году. Рассматривалась задача: какие массы нужно поместить в вершины данного треугольника, чтобы данная точка была центром тяжести этих масс.



Барицентрические координаты

Для точек пространства $M_1, M_2, \ldots, M_n$ положение которых определяется радиус-векторами $r_1, r_2, \ldots, r_n$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ соответственно радиус-вектор их центра тяжести находится по формуле

$$r = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \cdots + m_n r_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

Рассмотрим множество точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ и рассмотрим множество точек, которые задаются линейной комбинацией из этих точек:

$$M = a_1 M_1 + a_2 M_2 + \cdots + a_n M_n$$

Для любых $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$.
$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – барицентрические координаты точки M соответсвующие $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

При наложении условия:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$$

Получаеем $n - 1$ степень свободы.

$$a_n = 1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_{n-1}$$

Для описания n-мерного пространства с помощью барицентрических координат необходимо n+1 точка. При использовании более чем n+1 точки для определения барицентрических координат вычисления усложняются.

Барицентрические координаты, удовлетворяющие условию:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1,$$

называют так же абсолютными барицентрическими координатами. В противном случае барицентрические координаты будут однородными и не будут определены однозначно.

Пример для n=2

Прямая:

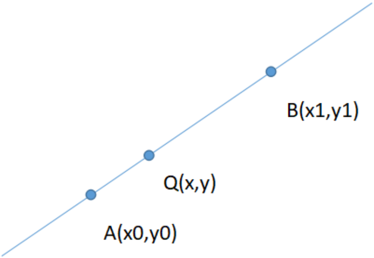
$Q = aA + bB$

$Q = (x, y) = a(x_0, y_0) + b(x_1, y_1)$

$a + b = 1$

$b = 1 - a$

$Q = (x, y) = a(x_0, y_0) + (1 - a)(x_1, y_1)$



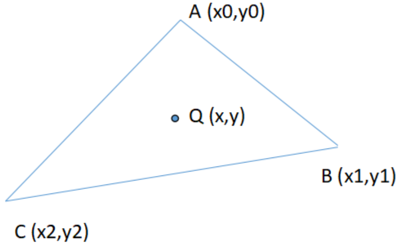
Пример для n=3

Треугольник

$Q = aA + bB + cC$

$Q = (x, y) = a(x_0, y_0) + b(x_1, y_1) + c(x_2, y_2)$

$a + b + c = 1$



Уравнение прямой по двум точкам в барицентрических координатах.
$A(a_0, b_0, c_0), B(a_1, b_1, c_1)$
Барицентрические координаты (a,b,c) множества точек, лежащих на прямой, построенной по этим двум точкам удовлетворяют следующему уравнению:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Барицентрические координаты

Свойства:

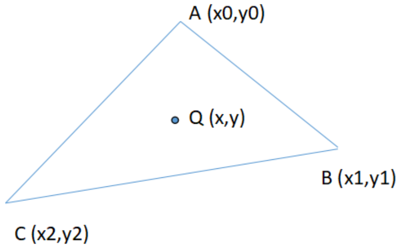
- Барицентрические координаты будут неотрицательными тогда и только тогда, когда точка Q лежит внутри треугольника ABC.
- Барицентрические координаты являются однордными:

$$(a, b, c) = (ka, kb, kc)$$

Примеры координат некоторых точек треугольника

Вершины A, B, C: $(1;0;0),(0;1;0),(0;0;1)$
Центроид (точка пересечения медиан): $(1;1;1)$
Центр описанной окружности:
$(a^2(b^2+c^2-a^2);b^2(c^2+a^2-b^2);c^2(a^2+b^2-c^2))$
Центр вписанной окружности: $(a;b;c)$
Центры вневписанных окружностей:
$(-a;b;c),(a;-b;c),(a;b;-c)$

Задача о принадлежности произвольной точки треугольнику, заданному своими вершинами.

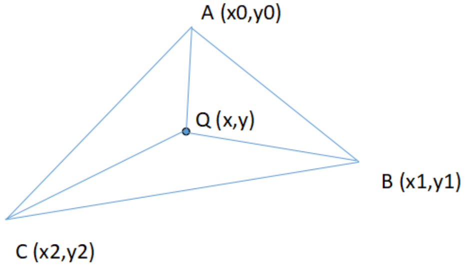


Площадь треугольника (с точностью до знака):

$$2S = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Знак определителя зависит от направления обхода вершин.

Рассматриваются площади треугольников: ABC, ABQ, BCQ, CAQ.



$$Q = (x, y) = a(x_0, y_0) + b(x_1, y_1) + c(x_2, y_2)$$

Площадь треугольника ABC:

$$2S = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Площадь треугольника QBC:

$$2S_{QBC} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} ax_0 + bx_1 + cx_2 & ay_0 + by_1 + cy_2 & a + b + c \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} ax_0 & ay_0 & a \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx_1 & by_1 & b \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} cx_2 & cy_2 & c \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=\mathrm{a} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} =\mathrm{a}2\mathrm{S}$$

Проделывая аналогичные выкладки получаем, что площади треугольников:

$$2S_{QBA} = c \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = c2S$$

$$2S_{CAQ} = b \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = b2S$$

Полученные соотношения позволяют вычислить барицентрические координаты (a,b,c).

Вычисление барицентрических координат (способ 2):

Условия:

$$(x, y) = a(x_0, y_0) + b(x_1, y_1) + c(x_2, y_2)$$

$$a + b + c = 1$$

могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

В матричном виде:

$$TV = X$$

где:

$$T = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Откуда:

$$V = T^{-1}X$$

Вычисление барицентрических координат (способ 3):

Из соотношения:

$$a + b + c = 1$$

имеем:

$$c = 1 - a - b$$

Откуда:

$$(x, y) = a(x_0, y_0) + b(x_1, y_1) + (1 - a - b)(x_2, y_2)$$

Преобразуем:

$$a(x_0, y_0) + b(x_1, y_1) + (1 - a - b)(x_2, y_2) = (x, y)$$

$$a((x_0, y_0) - (x_2, y_2)) + b((x_1, y_1) - (x_2, y_2)) = (x, y) - (x_2, y_2)$$

Полученное выражение может быть представлено с помощью матриц:

$$\begin{pmatrix} x_0 - x_2 & x_1 - x_2 \\ y_0 - y_2 & y_1 - y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_2 \\ y - y_2 \end{pmatrix}$$

В матричном виде:

$$TV = X$$

где:

$$T = \begin{pmatrix} x_0 - x_2 & x_1 - x_2 \\ y_0 - y_2 & y_1 - y_2 \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x - x_2 \\ y - y_2 \end{pmatrix}$$

Откуда:

$$V = T^{-1}X$$

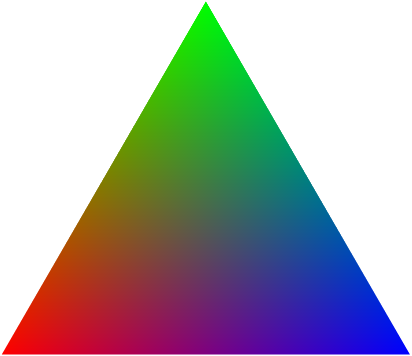
Координата c находится из соотношения $a + b + c = 1$.

По свойству барицентрических координат известно, что если точка лежит внутри треугольника, то все координаты в барицентрической системе положительные.
Т.о. принадлежность точки треугольнику определяется по знаку барицентрических координат. Координаты вычисляются как отношения соответствующих площадей.

Области применения:

- Компьютерная графика
- Геометрическое моделирование
- Геофизика
- Определение локации

Применение в компьютерной графике: - интерполяция цвета, нормалей, координат поверхности.



Рассматривается преобразование следующего вида с невырожденной матрицей:

$$\begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

В матричном виде:

$$X' = AX + B, \quad |A| \neq 0$$

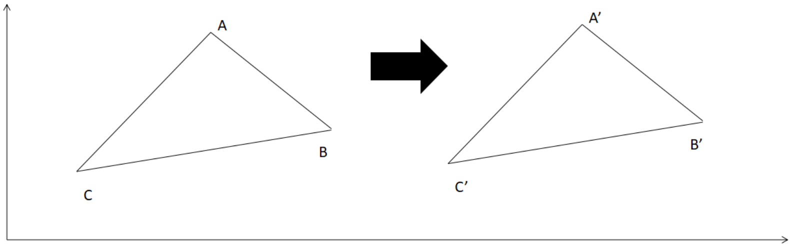
Аффинные преобразования

Аффинное преобразование представляет собой преобразование точек плоскости в себя.

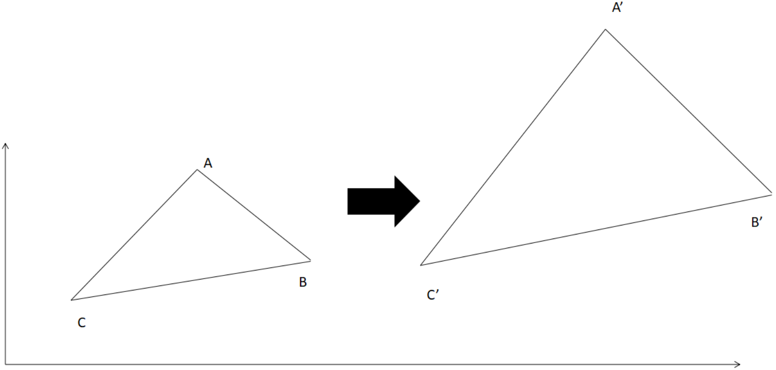
В общем случае имеем последовательность от линейного преобразования и переноса.

В зависимости от вида A и B можем наблюдать различные трансформации точек.

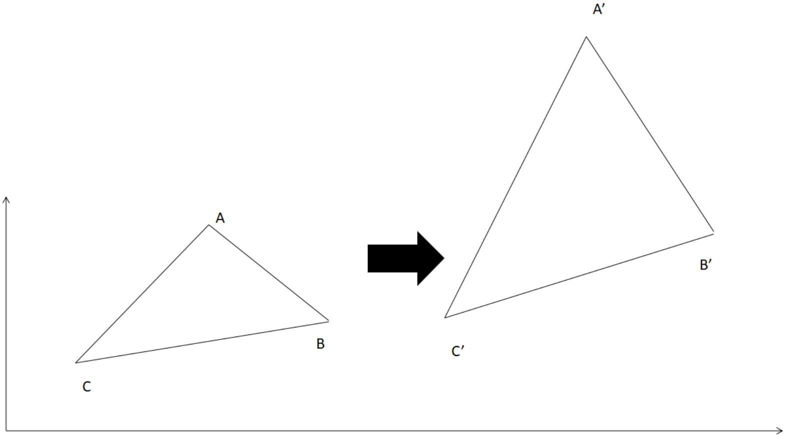
$A = I, \quad B \neq 0$ Параллельный перенос:



$A = diag(a, a), \quad B \neq 0$ Масштабирование в а раз:



$A = diag(a,b), \quad B \neq 0$ Масштабирование в a раз по оси Ox и в b раз по оси Oy:

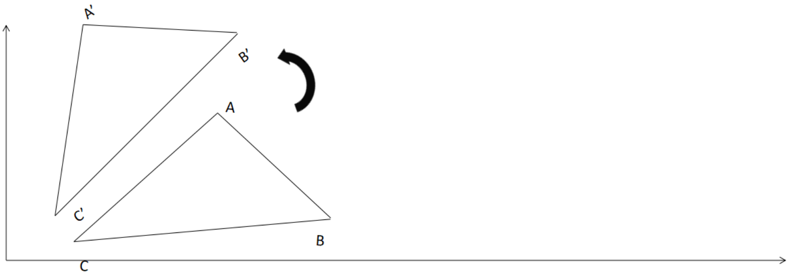


A – ортогональная, $B = 0$

Поворот относительно начала координат.

Матрица поворота:

$$R = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

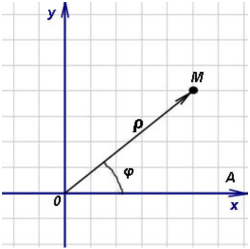


Вывод матрицы поворота.

Возьмём произвольную точку М на плоскости. Координаты точки (x, y). Полярные координаты точки записываются следующим образом:

$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \phi$$



Произведём поворот точки М вокруг начала координат на угол α. Полярные координинаты получившейся точки $M^{'}$ будут следующими:

$$x^{'} = \rho \cos(\phi + \alpha)$$

$$y^{'} = \rho \sin(\phi + \alpha)$$

Используя формулу косинуса суммы двух углов и синуса суммы двух углов получаем

$$x^{'} = \rho(\cos\phi\cos\alpha - \sin\phi\sin\alpha)$$

$$y^{'} = \rho(\sin\phi\cos\alpha + \cos\phi\sin\alpha)$$

Раскроем скобки и воспользуемся полярными координатами точки М: $x = \rho\cos\phi$ и $y = \rho\sin\phi$:

$$x^{'} = \rho\cos\phi\cos\alpha - \rho\sin\phi\sin\alpha = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

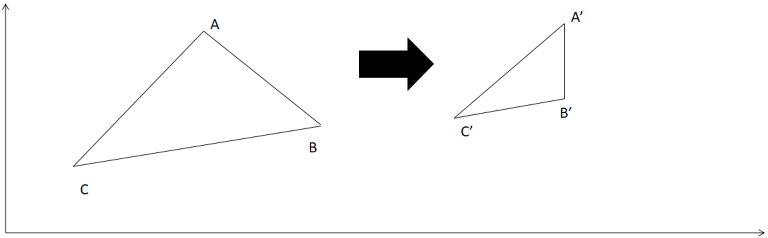
$$y^{'} = \rho\sin\phi\cos\alpha + \rho\cos\phi\sin\alpha = y\cos\alpha + x\sin\alpha$$

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

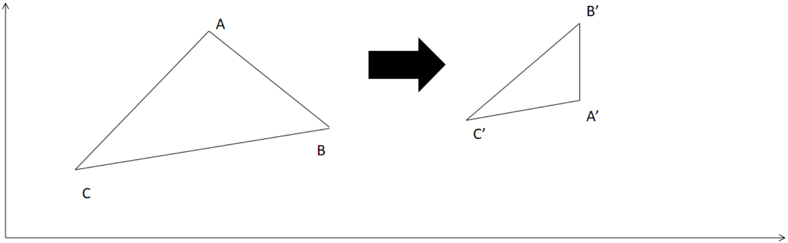
Полученная матрица и есть матрица поворота.

$det(A) > 0, \quad B \neq 0$
Сохранение ориентации:



$det(A) < 0, \quad B \neq 0$

Изменение порядка обхода вершин:



Аффинные преобразования и барицентрические координаты

Пусть

$$X = aX_0 + bX_1 + cX_2, \quad a + b + c = 1$$

Применим к обеим частям аффинное преобразование:

$$X' = AX + B, \quad |A| \neq 0$$

Получим

$$AX + B = a(AX_0 + B) + b(AX_1 + B) + c(AX_2 + B)$$

Аффинные преобразования и барицентрические координаты

$$X = aX_0 + bX_1 + cX_2$$

$$AX + B = a(AX_0 + B) + b(AX_1 + B) + c(AX_2 + B)$$

Барицентрические координаты точки относительно заданных вершин совпадают с барицентрическими координатами образа точки относительно образов этих вершин.

$$(x, y) \to (x_1, x_2, x_3)$$

Переход от обычных (декартовых) координат:

$$(x, y) \to (x, y, 1)$$

Переход от проективных координат к декартовым:

$$(x_1, x_2, x_3) \to (\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}), \quad x_3 \neq 0$$

Если $x_3 = 0$, то точка считается бесконечно удаленной.
Свойство:

$$(x_1, x_2, x_3) = (tx_1, tx_2, tx_3), \quad t \neq 0.$$

Проективные координаты и аффинные преобразования

$$\begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Переходя к проективным координатам получим:

$$\begin{pmatrix} x_1^{'} \\ x_2^{'} \\ x_3^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

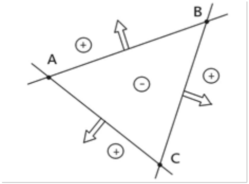
В матричном виде:

$$X^{'} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

Принадлежность точки треугольнику

Заданы три точки $A(A_x, A_y), B(B_x, B_y)$ и $C(C_x, C_y)$ образующие треугольник. Необходимо определить принадлежность произвольной точки заданному треугольнику.
Через каждую пару вершин треугольника можно провести прямую. Если вектор нормали к прямой $n = (L, M)$, то можно записать уравнение прямой на плоскости в виде: $Lx + My + N = 0$. По знаку функции $f(x, y) = Lx + My + N$ можно определить нахождение произвольной точки с координатами в той или иной полуплоскости относительно данной прямой.

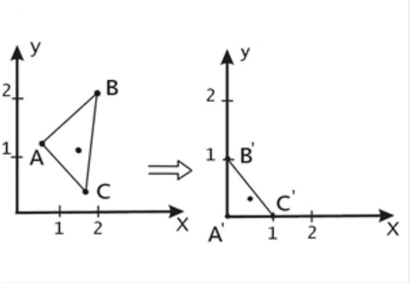
Принадлежность точки треугольнику



Записываем уравнение трех прямых таким образом, чтобы внутренняя область треугольника соответствовала положительным (отрицательным) значениям. Условие проверки: отрицательные (положительные) значения всех трех составленных функций.
Трудность: правильный выбор направления вектора нормали к прямой.

Идея метода заключается в преобразовании вершин треугольника к точкам с координатами
$P(0,0), Q(1,0), R(0,1)$.
Для проверки принадлежности точки данному треугольнику достаточно чтобы координаты рассматриваемой точки были меньше в отрезке (0,1). А их сумма удовлетворяла условию $x + y < 1$

Принадлежность точки треугольнику



С помощью операций переноса и линейного преобразования любой треугольник можно привести к указанному выше единичному.

- Параллельным переносом переводим одну из вершин треугольника в начало координат. Предположим, что это точка C.
- Координаты точек A и B треугольника есть коэффициенты разложения соответствующих векторов по единичному базису. Матрица преобразования от единичного базиса к базису на векторах $\vec{A}$ и $\vec{B}$ составлена из координат этих векторов:

$$M = \begin{pmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{pmatrix}$$

- Матрица обратного преобразования есть:

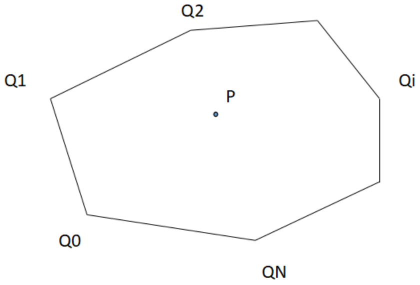
$$M^{-1} = \frac{1}{A_x B_y - A_y B_x} \begin{pmatrix} B_y & -A_y \\ -B_x & A_x \end{pmatrix}$$

  Применив данное преобразование после переноса к точкам на плоскости, мы получим треугольник на единичном базисе.

Эти преобразования применяются к рассматриваемой точке, принадлежность которой к треугольнику необходимо определить. После чего проверка принадлежности сводится к проверке соответствующих условий для треугольника на единичном базисе.

Принадлежность точки замкнутому полигону

Дана произвольная точка P(x,y) и замкнутый полигон $Q_i(x_i, y_i)$. Требуется выяснить лежит ли точка внутри полигона или нет.



Принадлежность точки замкнутому полигону

Метод 1: Можно воспользоваться подходом из задачи о принадлежности точки треугольнику. Разбиваем полигон на треугольники. Для каждого треугольника проводим проверку принадлежности точки по какому-либо из алгоритмов.

Триангуляцию можно произвести всегда.

Принадлежность точки замкнутому полигону

Метод 2: Из точки Р проводим горизонтальный луч и подсчитываем число пересечений луча с линиями границы. Если количество пересечений нечетно, то точка лежит внутри полигона, если четно, то снаружи.
Уравнение луча: $x > x_p, y = y_p$

Точки пересечения (x^*, y_p) отрезка $Q_i Q_{i+1}$ с лучом может быть найдена следующим образом:
Уравнение отрезка:

$$Q(x, y) = (1 - t)Q_i + tQ_{i+1}$$

Точка пересечения:

$$Q(x^*, y_p) = (1 - t^*)Q_i + t^* Q_{i+1}$$

Зная y_p, найдем x_*:

$$y_p = (1 - t^*)y_i + t^* y_{i+1}$$

$$t^* = \frac{y_p - y_i}{y_{i+1} - y_i}$$

$$x^* = (1 - t^*)x_i + t^* x_{i+1}$$

Принадлежность точки замкнутому полигону

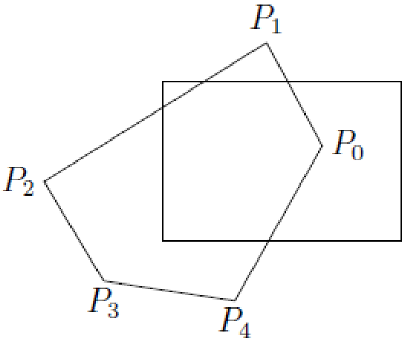
Таким образом, для того, чтобы точка (x, y_p) принадлежала отрезку $Q_i Q_{i+1}$ необходимо выполнение условия:

$$min(y_i, y_{i+1}) \leq y_p \leq max(y_i, y_{i+1})$$

$$x^* > x_p$$

Если попадаем в вершину полигона, то проще всего повернуть объекты на малый угол и повторить вычисления.

Задан полигон и прямоугольный экран. Требуется отобразить на экране видимую часть полигона $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_0$.



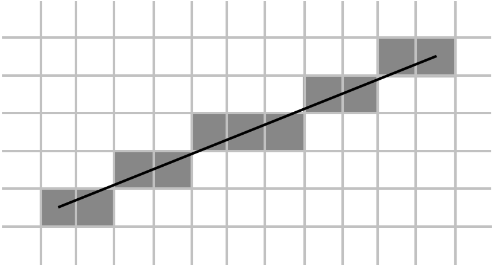
Существует подход, основанный на анализе расположения вершин полигона по отношению к прямоугольнику. Прямоугольник и его окружение кодируются следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} 1001 & 0001 & 0101 \\ 1000 & 0000 & 0100 \\ 1010 & 0010 & 0110 \end{array}$$

Код 0000 означает сам экран.
Установленный бит в соответствующей позиции означает расположение выше, ниже, левее или правее экрана.
Если для звена вершин установлены два одинаковых бита, значит отрезок лежит вне прямоугольника.
Если установленных бит нет – внутри экрана.
В остальных случаях, возможно пересекает экран и нужно найти точку пересечения.

Алгоритм Брезенхема. Рисование отрезка.

Алгоритм предложен в 1962 году Jack Elton Bresenham. Алгоритм Брезенхема предназначен для рисования на изображении отрезка соединяющего две данные точки: (x_0, y_0) и (x_1, y_1).



Алгоритм Брезенхема. Рисование отрезка.

Предположения:

- $x_0 < x_1$ и $y_0 < y_1$
- $x_1 - x_0 > y_1 - y_0$

Если предположения не выполняются, то необходимо переопределить систему координат и точки так (поменять оси местами, поменять местами начальную и конечную точку), чтобы все предположения выполнялись.

Алгоритм на каждом шаге для целочисленного значения x определяет одно значение y. Т.е. для каждого x будет определен только один пиксель вдоль оси y.

Алгоритм Брезенхема. Рисование отрезка.

Рассмотрим уравнение прямой по двум точкам:

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Выражая y получим:

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$$

Из формулы видно, что последовательное увеличение x на 1, дает изменение значения y на величину $\Delta = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

Алгоритм Брезенхема. Рисование отрезка.

Идея алгоритма заключается в отслеживании величины ошибки ϵ между значением y идеальной линии и растеризованной на данный момент.
Изначально y устанавливается равным y_0, а ошибка $\epsilon = 0$.
На каждом шаге (увеличение x на 1) происходит прорисовка пикселя с текущими координатами (x, y) и увеличение значения ошибки $\epsilon = \epsilon + \Delta$. Если ошибка превышает значение 0.5, происходит изменение y на 1 и корректировака ошибки $\epsilon = \epsilon - 1$, в противном случае y и ϵ остаются прежними.

Алгоритм Брезенхема. Рисование отрезка.

input: x_0, y_0, x_1, y_1

> delta $= \text{abs}(y_1 - y_0/x_1 - x_0)$
>
> error $= 0.0$
>
> $y = y_0$
>
> for x from x_0 to x_1
>
> > draw pixel(x,y)
> >
> > error = error + delta
> >
> > if error ≥ 0.5 then
> >
> > > $y = y + \text{sign}(y_1 - y_0) \times 1$
> > >
> > > error = error - 1.0

Можно ускорить алгоритм перейдя к целочисленной версии. Умножножим delta на $(x_1 - x_0)$, а сравнение error ≥ 0.5 на $2 \times (x_1 - x_0)$.
Получаем целочисленный алгоритм Брезенхема:

input: $\mathrm{x}_0, y_0, x_1, y_1$
    delta $= \mathrm{abs}(\mathrm{y}_1 - y_0)$
    error $= 0.0$
    $\mathrm{y} = \mathrm{y}_0$
    for x from x_0 to x_1
        draw pixel(x,y)
        error $=$ error $+ \mathrm{abs}(\mathrm{y}_1 - y_0)$
        if $2 \times error \geq \mathrm{abs}(\mathrm{x}_1 - x_0)$ *then*
            $\mathrm{y} = \mathrm{y} + \mathrm{sign}(\mathrm{y}_1 - y_0) \times 1$
            error $=$ error - $\mathrm{abs}(\mathrm{x}_1 - x_0)$