Дорогие студенты, вы зашли в так называемую “Виртуальную аудиторию,” в которой к каждому вторнику и каждой пятнице я буду заносить материал новых занятий (необходимые определения и формулы, примеры решения задач и номера примеров для выполнения домашних заданий). Эти задания вы, как обычно, выполняете в ваших тетрадях, потом фотографируете их и высылает фотографии по адресу

volodinstudent@gmail.com

Естественно, вам придется, оформлять результаты решений в более пристойней форме (указывать номер задания, обводить или подчеркивать номера задач, писать формулы и текст разборчиво). Особенно следует оставлять большие пространства сверху и снизу фотографируемого листа. В этих же посланиях вы можете задавать мне вопросы, на которые я буду отвечать вам reply'ем.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Занятие 57

Замена переменных (II).

3^0. Замена независимых переменных и функции в выражениях, содержащих частные производные.

Как и в конце прошлого занятия, рассмотрим выражение, содержащее частные производные:

$$A = \Phi(x, y, z;\ z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy},\ \ldots),$$

где $z = z(x, y)$ – некоторая функция. Будем решать задачу замены не только независимых переменных x и y на u и v, но также функции z на другую функцию w.

1). Прямая замена:

$$x = f(u, v, w),\ y = g(u, v, w),\ z = h(u, v, w).$$

определяет новую функцию $w = w(u, v)$ от независимых переменных u и v. Задача состоит в замене частных производных $z\,(x, y)$ по x и y в выражении A на производные функции $w = w(u, v)$ по u и v.

Метод замены основан на равенстве двух выражений для функции $z\,(x, y)$. Подставим в эту функцию вместо аргументов x и y их запись через новые переменные u и v, то есть определим функцию $z = z\left(f(u,v,w), g(u,v,w)\right)$ от независимых переменных u, v и w. В силу того, что, по условию замены, $z = h(u,v,w)$, то имеет место равенство

$$z\left(f(u,v,w), g(u,v,w)\right) = h(u,v,w). \tag{1}$$

Дифференцирование этого равенства позволит нам выразить производные функции $z\,(x,y)$ по x и y через производные $w = w(u,v)$ по u и v.

Итак, дифференцируем обе части равенства (1) по u и v, учитывая, что $x = f(u,v,w),\ y = g(u,v,w)$ и $w = w(u,v)$.

$$\text{по u:}\quad \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\right)\ +\ \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial u},$$

$$\text{по v:}\quad \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\right)\ +\ \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\right)=\frac{\partial h}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Из этой системы находим $z'_x,\ z'_y$ и подставляем в A.

Вздрогнув, представим себе повторное дифференцирование этой системы уравнений по u и v и поймем, что в конкретных примерах вторые производные легче вычислять по найденным z'_x и z'_y.

Рассмотрим теперь другой способ введения замены независимых переменных и функции.

2). Обратная замена:

$$u = u(x,y,z),\ \ v = v(x,y,z), w = w(x,y,z).$$

Эта замена также определяет новую функцию $w = w(u,v)$ от независимых переменных u и v. Подставим в эту функцию вместо u и v их выражение в замене $u = u(x,y,z),\ v = v(x,y,z)$ и запишем аналог уравнения (1):

$$w\left(u(x,y,z), v(x,y,z)\right) = w(x,y,z). \tag{2}$$

Как и в случае прямой замены дифференцируем обе части равенства (2), но не по u и v, а по x и y, учитывая, что $u = u(x,y,z),\ v = v(x,y,z)$ и $z = z(x,y)$.

$$\text{по x:}\quad \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)\ +\ \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}.$$

$$\text{по y:}\quad \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\ +\ \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Из этой системы находим z'_x, z'_y и подставляем в A.

Решим несколько примеров на применение этих формул к конкретным дифференциальным уравнениям в частных производных.

Пример 1. *Перейти к новым переменным* u, v *и* w, *где* $w = w(u, v)$, *в уравнении*

$$y\,\frac{\partial z}{\partial x} + x\,\frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z,$$

если

$$u = x^2 + y^2, \quad v = x^{-1} + y^{-1}, \quad w = \ln z - (x + y). \tag{3}$$

Решение. Имеем обратную замену, поэтому используем формулы дифференцирования по x и y. Сначала дифференцируем

$$\text{по x:}\quad \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x},$$

и в случае замены(3)

$$\text{по x:}\quad \frac{\partial w}{\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - 1.$$

Из этого уравнения получаем производную z по x :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(1 + 2x\cdot\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\right)\cdot z.$$

Теперь дифференцируем

$$\text{по y:}\quad \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}.$$

и в случае замены(3)

$$\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 2y + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} - 1.$$

Из этого уравнения получаем производную z по y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(1 + 2y\cdot\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\right)\cdot z.$$

Подставим найденные производные в исходное дифференциальное уравнение:

$$yz\left(2x \cdot \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} + 1\right) - xz\left(2y \cdot \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} + 1\right) = (y-x)z.$$

Сокращая одинаковые, но разные по знаку слагаемые, получаем, что

$$\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{yz}{x^2} - \frac{xz}{y^2}\right) = 0,$$

откуда следует, что исходное дифференциальное уравнение после замены (3) принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

Пример 2. *Преобразовать*

$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

принял x за функцию, а y и z – за независимые переменные.

Решение. В стандартных обозначениях замены в этом примере следует положить

$$u = y, \quad v = z, \quad w = x.$$

Уравнение для вывода формулы производной $\partial z/\partial x$

$$\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

при такой замене имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^{-1}. \tag{4}$$

Поскольку по условию задачи следует делать замену в терминах функции $x = x(y,z)$, то в правой части (4) следует записать производную от этой функции, то есть произвести замену

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{-1}.$$

Теперь найдем $\partial z/\partial y$, используя уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Вычисляя соответствующие производные, приводим это уравнение к виду

$$\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

из которого получаем

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial w}{\partial u}\bigg/\frac{\partial w}{\partial v}. \tag{5}$$

В терминах функции $x=x(y,z)$ это уравнение определяет замену

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial x}{\partial y}\bigg/\frac{\partial x}{\partial z}. \tag{6}$$

Итак, в исходном уравнении

$$(x-z)\,\frac{\partial z}{\partial x}+y\,\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

не трогаем свободные x, y и z, а вместо производных подставляем правые части уравнений (5) и (6):

$$(x-z)\bigg/\frac{\partial x}{\partial z}-y\,\frac{\partial x}{\partial y}\bigg/\frac{\partial x}{\partial z}=0.$$

Таким образом, после замены уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{x-z}{y}.$$

Пример 3. *Перейти к новым переменным u, v и w, где $w=w(u,v)$, в уравнении*

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\,\frac{\partial z}{\partial x}+y\,\frac{\partial z}{\partial y},$$

если

$$x=\sin u,\quad y=\sin v,\quad z=\mathrm{e}^w.$$

Решение. Имеем прямую «разнесенную» замену: переменной x соответствует только одна переменная u, переменной x – одна переменная v и функции z – только функция w. Иными словами,

$$x = f(u) = \sin u,\ \ y = g(v) = \sin v,\ \ z = h(w) = \mathrm{e}^w.$$

Это вселяет надежду, что добраться до замен вторых производных будет достаточно просто.

Итак, запишем общую формулу дифференцирования по u и реализуем ее для нашей замены.

$$\text{по u:}\quad \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}.$$

В первой скобки остается только производная по u, вторая скобка обнуляется полностью, в правой части первое слагаемое равно нулю. Таким образом, реализация производной по u имеет вид

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos u = \mathrm{e}^w\frac{\partial w}{\partial u}, \tag{7}$$

откуда имеем готовую замену

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\mathrm{e}^w}{\cos u}\,\frac{\partial w}{\partial u}$$

Чтобы заменить $\partial z/\partial y$ обратимся к производной

$$\text{по v:}\quad \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\right)=\frac{\partial h}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Реализация этих уравнений для нашей замены приводит к уравнению только для $\partial z/\partial y$, поскольку содержание первой скобки обнуляется полностью:

$$\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\cos v = \mathrm{e}^w\frac{\partial w}{\partial v}. \tag{8}$$

Итак, готовая замена:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\mathrm{e}^w}{\cos v}\,\frac{\partial w}{\partial u}.$$

Для нахождения формул замены вторых производных более удобно дифференцировать уравнения (7) и (8):

$$\text{по uu:}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2 u - \frac{\partial z}{\partial x}\sin u = \mathrm{e}^w\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \mathrm{e}^w\frac{\partial^2 w}{\partial u^2},$$

$$\text{по vv:}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2 v - \frac{\partial z}{\partial x}\sin v = \mathrm{e}^w\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + \mathrm{e}^w\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

Подставляя в эти производные готовые формулы для $\partial z/\partial x$ и $\partial z/\partial y$, находим формулы для замены вторых производных.

Все полученные формулы замены заносим в исходное уравнение

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y},$$

и производя соответствующие выкладки с сокращением и приведением подобных, получаем окончательный вид уравнения после замены:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = 0.$$

Задание 57

Решение следующих задач, взятых из задачника Демидовича, высылаются по электронной почте volodinstudent@gmail.com в виде фотографий с большими полями вверху и внизу. Некоторые из этих задач могут показаться достаточно сложными, особенно та, что отмечена звездочкой, но, зато, их решение оцениваются более высоким баллом.

3471. *Преобразовать уравнение*

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

приняв x за функцию, а $u = y - z$ и $v = y + z$ за независимые переменные.

3476. *Перейти к новым переменным в уравнении*

$$(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x} + (1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y} = x + yz,$$

если

$$u = yz - x,\quad v = xz - y,\quad w = xy - z.$$

3515. *Преобразовать уравнение*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

к новым переменным $u = x + y,\ v = x - y,\ w = xy - z$.

3517. *Преобразовать уравнение*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \frac{y}{z}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

к новым переменным $u = x,\ v = x + y,\ w = x + y + z$.

3523**. *В уравнении*

$$q(1+q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (1 + p + q + 2pq)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + p(1+p)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

перейти к новым переменным $u = x + y,\ v = y + z,\ w = x + y + z;\ \ w = w(u, v)$.