

Математические модели теоретической физики

(математика и компьютерные науки)

Математические основы физики

(математика и информатика)

профессор Игнатьев Юрий Геннадиевич



Казанский федеральный университет
Институт математики и механики
им. Н.И. Лобачевского
Кафедра высшей математики и математического моделирования

Казань, VI семестр, 2015 г.

Лекция XV: Принципы релятивистской теории гравитации

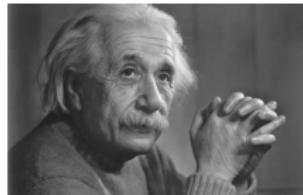
Содержание лекции

- ▶ Принцип эквивалентности и геометрический характер гравитационного поля
- ▶ Ковариантное дифференцирование и тензор Римана
- ▶ Свойства тензора Римана
- ▶ Уравнения Эйнштейна

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука – 1966. – 496 с.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция IV. Принцип наименьшего действия на примере геодезических; Лекция VIII. Движение в центрально-симметрическом поле.
4. Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетика неравновесных процессов в гравитационных полях. Казань: «Фолиант», – 2010. – 506 с.;

Информация



В 2015 году исполнилось 100 лет создания Альбертом Эйнштейном общей теории относительности. Основные идеи этой теории были опубликованы в статьях A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 44, 2, 778-786; A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. (Nachtrag). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 46, 2, 799-801; A. Einstein, Erklärung der Perihelbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 47, 2, 831-839. См. на русском языке: Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Том I. Наука:М. – 1965. – 700 с.

Лекция XV: Принципы релятивистской теории гравитации

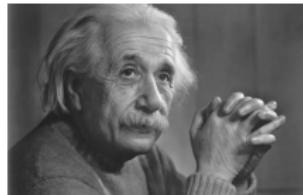
Содержание лекции

- ▶ Принцип эквивалентности и геометрический характер гравитационного поля
- ▶ Ковариантное дифференцирование и тензор Римана
- ▶ Свойства тензора Римана
- ▶ Уравнения Эйнштейна

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука – 1966. – 496 с.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция IV. Принцип наименьшего действия на примере геодезических; Лекция VIII. Движение в центрально-симметрическом поле.
4. Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетика неравновесных процессов в гравитационных полях. Казань: «Фолиант», – 2010. – 506 с.;

Информация



В 2015 году исполнилось 100 лет создания Альбертом Эйнштейном общей теории относительности. Основные идеи этой теории были опубликованы в статьях A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 44, 2, 778–786; A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. (Nachtrag). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 46, 2, 799–801; A. Einstein, Erklärung der Perihelbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 47, 2, 831–839. См. на русском языке: Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Том I. Наука:М. – 1965. – 700 с.

Лекция XV: Принципы релятивистской теории гравитации

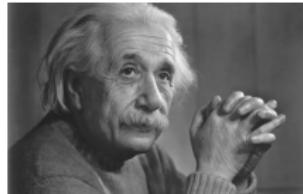
Содержание лекции

- ▶ Принцип эквивалентности и геометрический характер гравитационного поля
- ▶ Ковариантное дифференцирование и тензор Римана
- ▶ Свойства тензора Римана
- ▶ Уравнения Эйнштейна

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука – 1966. – 496 с.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция IV. Принцип наименьшего действия на примере геодезических; Лекция VIII. Движение в центрально-симметрическом поле.
4. Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетика неравновесных процессов в гравитационных полях. Казань: «Фолиант», – 2010. – 506 с.;

Информация



В 2015 году исполнилось 100 лет создания Альбертом Эйнштейном общей теории относительности. Основные идеи этой теории были опубликованы в статьях: A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 44, 2, 778-786; A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. (Nachtrag). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 46, 2, 799-801; A. Einstein, Erklärung der Perihelbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 47, 2, 831-839. См. на русском языке: Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Том I. Наука:М. – 1965. – 700 с.

Лекция XV: Принципы релятивистской теории гравитации

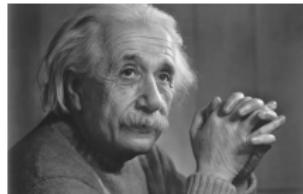
Содержание лекции

- ▶ Принцип эквивалентности и геометрический характер гравитационного поля
- ▶ Ковариантное дифференцирование и тензор Римана
- ▶ Свойства тензора Римана
- ▶ Уравнения Эйнштейна

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука – 1966. – 496 с.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция IV. Принцип наименьшего действия на примере геодезических; Лекция VIII. Движение в центрально-симметрическом поле.
4. Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетика неравновесных процессов в гравитационных полях. Казань: «Фолиант», – 2010. – 506 с.;

Информация



В 2015 году исполнилось 100 лет создания Альбертом Эйнштейном общей теории относительности. Основные идеи этой теории были опубликованы в статьях A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 44, 2, 778-786; A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. (Nachtrag). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 46, 2, 799-801; A. Einstein, Erklärung der Perihelbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 47, 2, 831-839. См. на русском языке: Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Том I. Наука:М. – 1965. – 700 с.

Лекция XV: Принципы релятивистской теории гравитации

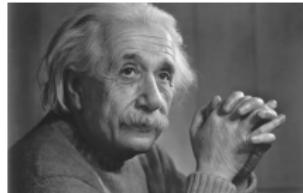
Содержание лекции

- ▶ Принцип эквивалентности и геометрический характер гравитационного поля
- ▶ Ковариантное дифференцирование и тензор Римана
- ▶ Свойства тензора Римана
- ▶ Уравнения Эйнштейна

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука – 1966. – 496 с.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция IV. Принцип наименьшего действия на примере геодезических; Лекция VIII. Движение в центрально-симметрическом поле.
4. Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетика неравновесных процессов в гравитационных полях. Казань: «Фолиант», – 2010. – 506 с.;

Информация



В 2015 году исполнилось 100 лет создания Альбертом Эйнштейном общей теории относительности. Основные идеи этой теории были опубликованы в статьях A. Einstein, Zar allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 44, 2, 778-786; A. Einstein, Zar allgemeinen Relativitätstheorie. (Nachtrag). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 46, 2, 799-801; A. Einstein, Erklärung der Perihelbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 47, 2, 831-839. См. на русском языке: Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Том I. Наука:М. – 1965. – 700 с.

Лекция XV: Принципы релятивистской теории гравитации

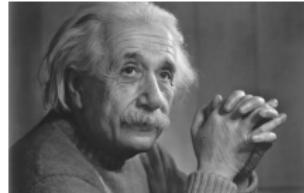
Содержание лекции

- ▶ Принцип эквивалентности и геометрический характер гравитационного поля
 - ▶ Ковариантное дифференцирование и тензор Римана
 - ▶ Свойства тензора Римана
 - ▶ Уравнения Эйнштейна
-

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука – 1966. – 496 с.
 2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета.
 3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция IV. Принцип наименьшего действия на примере геодезических; Лекция VIII. Движение в центрально-симметрическом поле.
 4. Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетика неравновесных процессов в гравитационных полях. Казань: «Фолиант», – 2010. – 506 с.
-

Информация



В 2015 году исполнилось 100 лет создания Альбертом Эйнштейном общей теории относительности. Основные идеи этой теории были опубликованы в статьях: A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 44, 2, 778-786; A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. (Nachtrag). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 46, 2, 799-801; A. Einstein, Erklärung der Perihelbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 47, 2, 831-839. См. на русском языке: Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Том I. Наука:М. – 1965. – 700 с.

Лекция XV: Принципы релятивистской теории гравитации

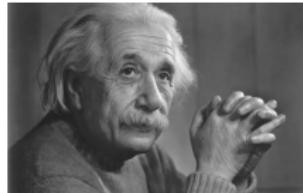
Содержание лекции

- ▶ Принцип эквивалентности и геометрический характер гравитационного поля
- ▶ Ковариантное дифференцирование и тензор Римана
- ▶ Свойства тензора Римана
- ▶ Уравнения Эйнштейна

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука – 1966. – 496 с.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция IV. Принцип наименьшего действия на примере геодезических; Лекция VIII. Движение в центрально-симметрическом поле.
4. Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетика неравновесных процессов в гравитационных полях. Казань: «Фолиант». – 2010. – 506 с.;

Информация



В 2015 году исполнилось 100 лет создания Альбертом Эйнштейном общей теории относительности. Основные идеи этой теории были опубликованы в статьях: A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 44, 2, 778-786; A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. (Nachtrag). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 46, 2, 799-801; A. Einstein, Erklärung der Perihelbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 47, 2, 831-839. См. на русском языке: Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Том I. Наука:М. – 1965. – 700 с.

Лекция XV: Принципы релятивистской теории гравитации

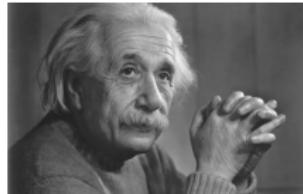
Содержание лекции

- ▶ Принцип эквивалентности и геометрический характер гравитационного поля
- ▶ Ковариантное дифференцирование и тензор Римана
- ▶ Свойства тензора Римана
- ▶ Уравнения Эйнштейна

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука – 1966. – 496 с.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция IV. Принцип наименьшего действия на примере геодезических; Лекция VIII. Движение в центрально-симметрическом поле.
4. Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетика неравновесных процессов в гравитационных полях. Казань: «Фолиант». – 2010. – 506 с.;

Информация



В 2015 году исполнилось 100 лет создания Альбертом Эйнштейном общей теории относительности. Основные идеи этой теории были опубликованы в статьях: A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 44, 2, 778-786; A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. (Nachtrag). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 46, 2, 799-801; A. Einstein, Erklärung der Perihelbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 47, 2, 831-839. См. на русском языке: Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Том I. Наука:М. – 1965. – 700 с.

Лекция XV: Принципы релятивистской теории гравитации

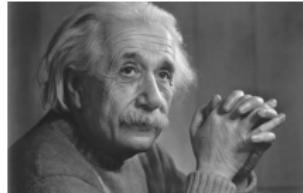
Содержание лекции

- ▶ Принцип эквивалентности и геометрический характер гравитационного поля
- ▶ Ковариантное дифференцирование и тензор Римана
- ▶ Свойства тензора Римана
- ▶ Уравнения Эйнштейна

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука – 1966. – 496 с.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция IV. Принцип наименьшего действия на примере геодезических; Лекция VIII. Движение в центрально-симметрическом поле.
4. Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетика неравновесных процессов в гравитационных полях. Казань: «Фолиант». – 2010. – 506 с.;

Информация



В 2015 году исполнилось 100 лет создания Альбертом Эйнштейном общей теории относительности. Основные идеи этой теории были опубликованы в статьях: A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 44, 2, 778-786; A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. (Nachtrag). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 46, 2, 799-801; A. Einstein, Erklärung der Perihelbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 47, 2, 831-839. См. на русском языке: Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Том I. Наука:М. – 1965. – 700 с.

Лекция XV: Принципы релятивистской теории гравитации

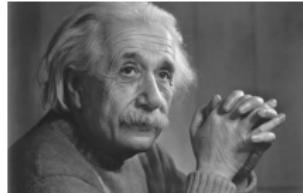
Содержание лекции

- ▶ Принцип эквивалентности и геометрический характер гравитационного поля
- ▶ Ковариантное дифференцирование и тензор Римана
- ▶ Свойства тензора Римана
- ▶ Уравнения Эйнштейна

Литература

1. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука – 1966. – 496 с.
2. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве: учебное пособие. IV семестр: курс лекций для студентов математического факультета.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция IV. Принцип наименьшего действия на примере геодезических; Лекция VIII. Движение в центрально-симметрическом поле.
4. Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетика неравновесных процессов в гравитационных полях. Казань: «Фолиант». – 2010. – 506 с.;

Информация



В 2015 году исполнилось 100 лет создания Альбертом Эйнштейном общей теории относительности. Основные идеи этой теории были опубликованы в статьях: A. Einstein, Zar allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 44, 2, 778-786; A. Einstein, Zar allgemeinen Relativitätstheorie. (Nachtrag). Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 46, 2, 799-801; A. Einstein, Erklärung der Perihelbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., **1915**, 47, 2, 831-839.

См. на русском языке: Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Том I. Наука:М. – 1965. – 700 с.

Основные принципы

- ▶ Все тела падают в гравитационном поле с одинаковым ускорением:
 $\cancel{m}a = F = \cancel{m}g \Rightarrow a = g$

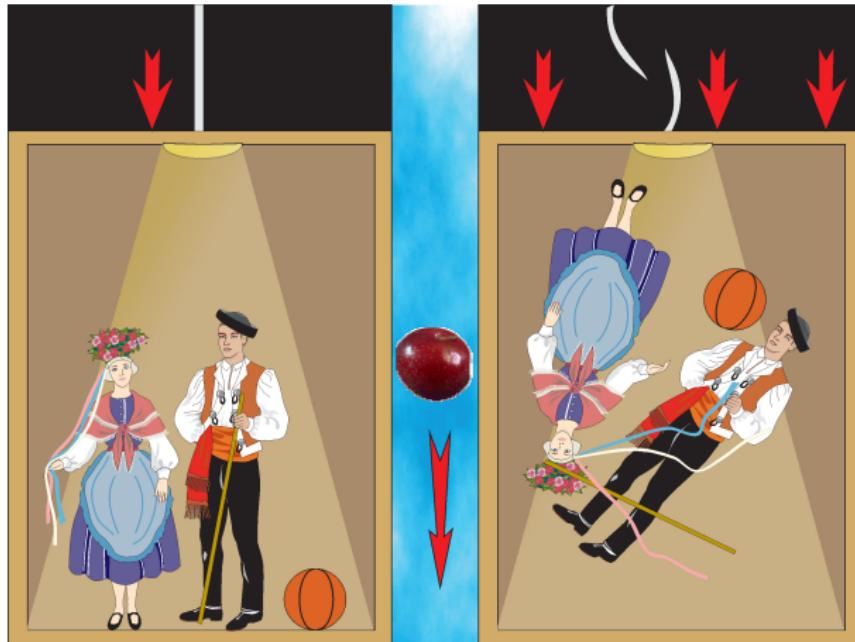


Figure 1.

Мысленный эксперимент с падающим лифтом. Тяготение исчезает? – Ускоренная система отсчета эквивалентна тяготению? \Rightarrow Принцип эквивалентности.

Основные принципы

- ▶ Все тела падают в гравитационном поле с одинаковым ускорением:
 $m\ddot{a} = F = m\ddot{g} \Rightarrow \ddot{a} = g$

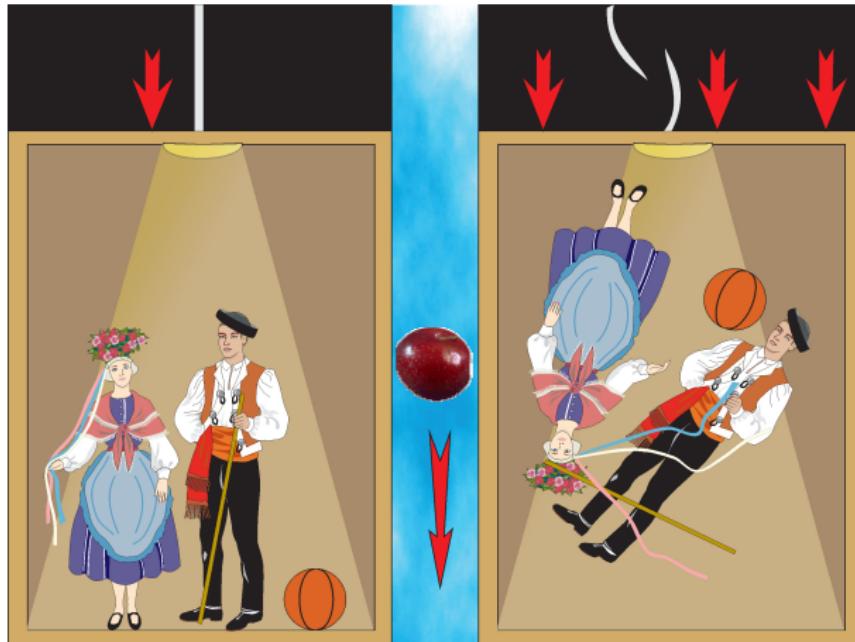


Figure 1.

Мысленный эксперимент с падающим лифтом. Тяготение исчезает? – Ускоренная система отсчета эквивалентна тяготению? \Rightarrow Принцип эквивалентности.

Основные принципы

- ▶ Все тела падают в гравитационном поле с одинаковым ускорением:
 $m/a = F/mg \Rightarrow a = g$

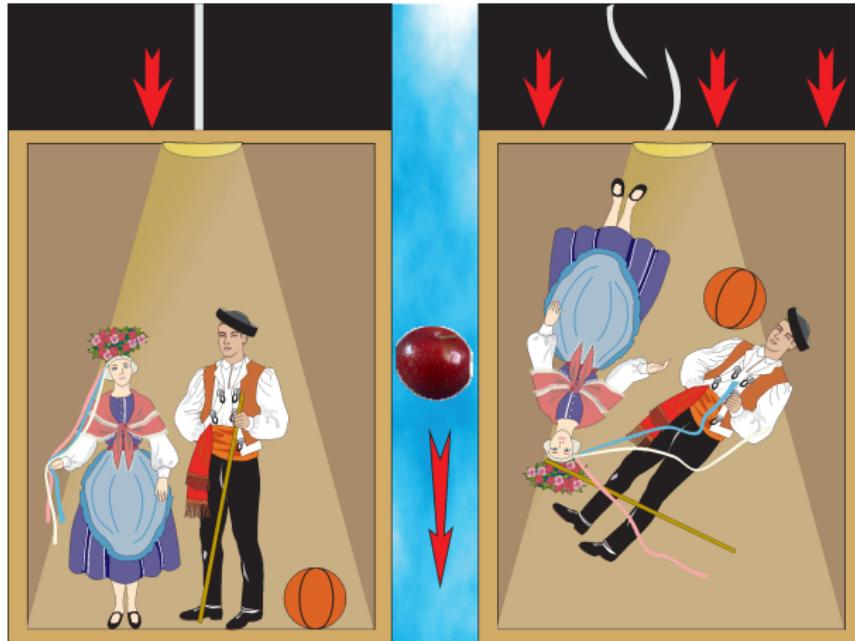


Figure 1.

Мысленный эксперимент с падающим лифтом. Тяготение исчезает? – Ускоренная система отсчета эквивалентна тяготению? \Rightarrow Принцип эквивалентности.

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

1. Ускоренная система отсчета локально эквивалентна полю тяготения.
2. Но при этом согласно специальной теории относительности в падающей системе отсчета пространство - время должно иметь метрику Минковского:

где $\frac{*}{\cdot}$ – здесь и далее обозначение того, что метрика записывается в специальной системе отсчета, в окрестности некоторой точки.

3. В произвольной системе отсчета метрика четырехмерного пространства - времени примет общий вид:

4. Если отождествить метрику (2) с «потенциалами» гравитационного поля, то очевидно, что «сила» будет выражаться через первые производные метрики, т.е., через символы Кристоффеля Γ_{jk}^i :

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}$$

5. Но единственная возможность построить общековариантные уравнения движения частицы — это взять в качестве их уравнения геодезической линии (при $m = 0$ вместо нулевого канонического параметра s используется ненулевой параметр $\tau = s/m$):

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

1. Ускоренная система отсчета локально эквивалентна полю тяготения.
2. Но при этом согласно специальной теории относительности в падающей системе отсчета пространство - время должно иметь метрику Минковского:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (1)$$

где $\frac{*}{-}$ – здесь и далее обозначение того, что метрика записывается в специальной системе отсчета, в окрестности некоторой точки.

3. В произвольной системе отсчета метрика четырехмерного пространства - времени примет общий вид:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (2)$$

4. Если отождествить метрику (2) с «потенциалами» гравитационного поля, то очевидно, что «сила» будет выражаться через первые производные метрики, т.е., через символы Кристоффеля Γ_{jk}^i :

$$g_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu V^i = g_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \left(\frac{1}{2} g^{ij} g_{jl} \partial_i V^l \right) = g_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \left(\frac{1}{2} g^{ij} \partial_i V^j \right) = g_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu V^i - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \left(g^{ij} \right) \partial_i V^j = g_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu V^i - R_{\mu\nu}^i \quad (3)$$

5. Но единственная возможность построить общековариантные уравнения движения частицы — это взять в качестве их уравнения геодезической линии (при $m = 0$ вместо нулевого канонического параметра s используется ненулевой параметр $\tau = s/m$):

$$m \ddot{x}^\mu = -m g_{\mu\nu} \partial_\nu V^i \dot{x}^i \quad (4)$$

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

1. Ускоренная система отсчета локально эквивалентна полю тяготения.
2. Но при этом согласно специальной теории относительности в падающей системе отсчета пространство - время должно иметь метрику Минковского:

$$ds^2 \stackrel{*}{=} c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv \eta_{ik} dx^i dx^k, \quad (1)$$

где $\stackrel{*}{=}$ – здесь и далее обозначение того, что метрика записывается в специальной системе отсчета, в окрестности некоторой точки.

3. В произвольной системе отсчета метрика четырехмерного пространства - времени примет общий вид:

4. Если отождествить метрику (2) с «потенциалами» гравитационного поля, то очевидно, что «сила» будет выражаться через первые производные метрики, т.е., через символы Кристоффеля Γ_{jk}^i :

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = c^2 dt^2 - g_{ij} dx^i dx^j = c^2 dt^2 - g_{ij}^{ab} \frac{\partial x^a}{\partial t} \frac{\partial x^b}{\partial t} - g_{ij}^{ab} \frac{\partial x^a}{\partial x^k} \frac{\partial x^b}{\partial x^l} \Gamma_{kl}^t dx^i dx^j$$

5. Но единственная возможность построить общековариантные уравнения движения частицы — это взять в качестве их уравнения геодезической линии (при $m = 0$ вместо нулевого канонического параметра s используется ненулевой параметр $\tau = s/m$):

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

1. Ускоренная система отсчета локально эквивалентна полю тяготения.
2. Но при этом согласно специальной теории относительности в падающей системе отсчета пространство - время должно иметь метрику Минковского:

$$ds^2 \stackrel{*}{=} c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv \eta_{ik} dx^i dx^k, \quad (1)$$

где $\stackrel{*}{=}$ – здесь и далее обозначение того, что метрика записывается в специальной системе отсчета, в окрестности некоторой точки.

3. В произвольной системе отсчета метрика четырехмерного пространства - времени примет общий вид:

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b, \quad \sigma(g_{ab}) = (- + + +) = -2. \quad (2)$$

4. Если отождествить метрику (2) с «потенциалами» гравитационного поля, то очевидно, что «сила» будет выражаться через первые производные метрики, т.е., через символы Кристоффеля Γ_{jk}^i :

$$g_{ab} \partial_a \partial_b = g_{ab} \partial_a \partial_b + g_{ab} \Gamma_{jk}^i \partial_a x^j \partial_b x^k = -2.$$

5. Но единственная возможность построить общековариантные уравнения движения частицы — это взять в качестве их уравнения геодезической линии (при $m = 0$ вместо нулевого канонического параметра s используется ненулевой параметр $\tau = s/m$):

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

1. Ускоренная система отсчета локально эквивалентна полю тяготения.
2. Но при этом согласно специальной теории относительности в падающей системе отсчета пространство - время должно иметь метрику Минковского:

$$ds^2 \stackrel{*}{=} c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv \eta_{ik} dx^i dx^k, \quad (1)$$

где $\stackrel{*}{=}$ – здесь и далее обозначение того, что метрика записывается в специальной системе отсчета, в окрестности некоторой точки.

3. В произвольной системе отсчета метрика четырехмерного пространства - времени примет общий вид:

$$ds^2 = g_{ik}(x) dx^i dx^k, \quad \sigma(g_{ik}) = (- + + +) = -2. \quad (2)$$

4. Если отождествить метрику (2) с «потенциалами» гравитационного поля, то очевидно, что «сила» будет выражаться через первые производные метрики, т.е., через символы Кристоффеля Γ^i_{jk} :

5. Но единственная возможность построить общековариантные уравнения движения частицы — это взять в качестве их уравнения геодезической линии (при $m = 0$ вместо нулевого канонического параметра s используется ненулевой параметр $\tau = s/m$):

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

1. Ускоренная система отсчета локально эквивалентна полю тяготения.
2. Но при этом согласно специальной теории относительности в падающей системе отсчета пространство - время должно иметь метрику Минковского:

$$ds^2 \stackrel{*}{=} c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv \eta_{ik} dx^i dx^k, \quad (1)$$

где $\stackrel{*}{=}$ – здесь и далее обозначение того, что метрика записывается в специальной системе отсчета, в окрестности некоторой точки.

3. В произвольной системе отсчета метрика четырехмерного пространства - времени примет общий вид:

$$ds^2 = g_{ik}(x) dx^i dx^k, \quad \sigma(g_{ik}) = (- + + +) = -2. \quad (2)$$

4. Если отождествить метрику (2) с «потенциалами» гравитационного поля, то очевидно, что «сила» будет выражаться через первые производные метрики, т.е., через символы Кристоффеля Γ_{jk}^i :

$$\Gamma_{kl}^i = g^{ij} \Gamma_{jl}, \quad \Gamma_{kl}^j = \frac{1}{2} (\partial_{l} g_{jk} + \partial_{k} g_{jl} - \partial_{j} g_{lk}) \quad (3)$$

5. Но единственная возможность построить общековариантные уравнения движения частицы — это взять в качестве их уравнения геодезической линии (при $m = 0$ вместо нулевого канонического параметра s используется ненулевой параметр $\tau = s/m$):

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

1. Ускоренная система отсчета локально эквивалентна полю тяготения.
2. Но при этом согласно специальной теории относительности в падающей системе отсчета пространство - время должно иметь метрику Минковского:

$$ds^2 \stackrel{*}{=} c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv \eta_{ik} dx^i dx^k, \quad (1)$$

где $\stackrel{*}{=}$ – здесь и далее обозначение того, что метрика записывается в специальной системе отсчета, [в окрестности некоторой точки](#).

3. В произвольной системе отсчета метрика четырехмерного пространства - времени примет общий вид:

$$ds^2 = g_{ik}(x) dx^i dx^k, \quad \sigma(g_{ik}) = (- + + +) = -2. \quad (2)$$

4. Если отождествить метрику (2) с «потенциалами» гравитационного поля, то очевидно, что «сила» будет выражаться через первые производные метрики, т.е., через символы Кристоффеля Γ_{jk}^i :

$$\Gamma_{kl}^i = g^{ij} \Gamma_{kl,j}; \quad \Gamma_{kl,i} = \frac{1}{2} (\partial_k g_{li} + \partial_l g_{ki} - \partial_i g_{kl}). \quad (3)$$

5. Но единственная возможность построить общековариантные уравнения движения частицы — это взять в качестве их уравнения геодезической линии (при $m = 0$ вместо нулевого канонического параметра s используется ненулевой параметр $\tau = s/m$):

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

- Ускоренная система отсчета локально эквивалентна полю тяготения.
- Но при этом согласно специальной теории относительности в падающей системе отсчета пространство - время должно иметь метрику Минковского:

$$ds^2 \stackrel{*}{=} c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv \eta_{ik} dx^i dx^k, \quad (1)$$

где $\stackrel{*}{=}$ – здесь и далее обозначение того, что метрика записывается в специальной системе отсчета, в окрестности некоторой точки.

- В произвольной системе отсчета метрика четырехмерного пространства - времени примет общий вид:

$$ds^2 = g_{ik}(x) dx^i dx^k, \quad \sigma(g_{ik}) = (- + + +) = -2. \quad (2)$$

- Если отождествить метрику (2) с «потенциалами» гравитационного поля, то очевидно, что «сила» будет выражаться через первые производные метрики, т.е., через символы Кристоффеля Γ_{jk}^i :

$$\Gamma_{kl}^i = g^{ij} \Gamma_{kl,j}; \quad \Gamma_{kl,i} = \frac{1}{2} (\partial_k g_{li} + \partial_l g_{ki} - \partial_i g_{kl}). \quad (3)$$

- Но единственная возможность построить общековариантные уравнения движения частицы — это взять в качестве их уравнения геодезической линии (при $m = 0$ вместо нулевого канонического параметра s используется ненулевой параметр $\tau = s/m$):

$$\frac{d\tau^2}{ds^2} + \Gamma_{ij}^{\tau} \frac{ds^i}{ds} \frac{ds^j}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d\tau^2}{ds^2} = 0 \Rightarrow \tau^2 ds^2 = 0. \quad (4)$$

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

- Ускоренная система отсчета локально эквивалентна полю тяготения.
- Но при этом согласно специальной теории относительности в падающей системе отсчета пространство - время должно иметь метрику Минковского:

$$ds^2 \stackrel{*}{=} c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv \eta_{ik} dx^i dx^k, \quad (1)$$

где $\stackrel{*}{=}$ – здесь и далее обозначение того, что метрика записывается в специальной системе отсчета, в окрестности некоторой точки.

- В произвольной системе отсчета метрика четырехмерного пространства - времени примет общий вид:

$$ds^2 = g_{ik}(x) dx^i dx^k, \quad \sigma(g_{ik}) = (- + + +) = -2. \quad (2)$$

- Если отождествить метрику (2) с «потенциалами» гравитационного поля, то очевидно, что «сила» будет выражаться через первые производные метрики, т.е., через символы Кристоффеля Γ_{jk}^i :

$$\Gamma_{kl}^i = g^{ij} \Gamma_{kl,j}; \quad \Gamma_{kl,i} = \frac{1}{2} (\partial_k g_{li} + \partial_l g_{ki} - \partial_i g_{kl}). \quad (3)$$

- Но единственная возможность построить общековариантные уравнения движения частицы — это взять в качестве их уравнения геодезической линии (при $m = 0$ вместо нулевого канонического параметра s используется ненулевой параметр $\tau = s/m$):

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \Leftrightarrow \frac{Du^i}{ds} = 0 \Leftrightarrow u_{,k}^i u^k = 0. \quad (4)$$

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

- Ускоренная система отсчета локально эквивалентна полю тяготения.
- Но при этом согласно специальной теории относительности в падающей системе отсчета пространство - время должно иметь метрику Минковского:

$$ds^2 \stackrel{*}{=} c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv \eta_{ik} dx^i dx^k, \quad (1)$$

где $\stackrel{*}{=}$ – здесь и далее обозначение того, что метрика записывается в специальной системе отсчета, [в окрестности некоторой точки](#).

- В произвольной системе отсчета метрика четырехмерного пространства - времени примет общий вид:

$$ds^2 = g_{ik}(x) dx^i dx^k, \quad \sigma(g_{ik}) = (- + + +) = -2. \quad (2)$$

- Если отождествить метрику (2) с «потенциалами» гравитационного поля, то очевидно, что «сила» будет выражаться через первые производные метрики, т.е., через символы Кристоффеля Γ_{jk}^i :

$$\Gamma_{kl}^i = g^{ij} \Gamma_{kl,j}; \quad \Gamma_{kl,i} = \frac{1}{2} (\partial_k g_{li} + \partial_l g_{ki} - \partial_i g_{kl}). \quad (3)$$

- Но единственная возможность построить общековариантные уравнения движения частицы — это взять в качестве их уравнения геодезической линии (при $m = 0$ вместо нулевого канонического параметра s используется ненулевой параметр $\tau = s/m$):

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \Leftrightarrow \frac{Du^i}{ds} = 0 \Leftrightarrow u_{,k}^i u^k = 0. \quad (4)$$

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

5. Как при этом удовлетворить принципу эквивалентности? Всегда можно выбрать систему координат таким образом, чтобы в окрестности наперед заданной точки P риманова пространства V_4 символы Кристоффеля обращались в нуль (А.З. Петров):

$$\Gamma_{jk}^i|_P = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} \right|_P = 0 \Rightarrow g^{ij} = g_{\mu\nu} + u^\mu u^\nu \quad (\text{окрестность } P) \quad (5)$$

6. Согласно принципу соответствия все закономерности более общей теории должны переходить в закономерности теории низшего порядка в предельном значении параметров теории. Первым таким параметром релятивистской теории гравитации является скорость света. В классической теории гравитации $c \rightarrow \infty$. Проведем, как мы делали в предыдущем курсе (МОФ) «3+1» разбиение уравнений (4) с учетом интеграла геодезических (Игнатьев):

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{ik}(x)dx^i dx^k &\Rightarrow 1 = g_{ik}u^i u^k; u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{cdt} \frac{dx^4}{ds} \equiv \frac{v^\alpha}{c} u^4 \\ &\Rightarrow 1 = (u^4)^2 \left(g_{44} + 2g_{\alpha 4} \frac{v^\alpha}{c} + g_{\alpha\beta} \frac{v^\alpha v^\beta}{c^2} \right), \quad u^4 \approx \frac{1}{\sqrt{g_{44}}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

5. Как при этом удовлетворить принципу эквивалентности? Всегда можно выбрать систему координат таким образом, чтобы в окрестности наперед заданной точки P риманова пространства V_4 символы Кристоффеля обращались в нуль (А.З. Петров):

$$\Gamma_{jk}^i \Big|_P = 0 \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} \Big|_P = 0 \Rightarrow x^i = x_P^i + u_P^i s \text{ (прямые вблизи } P\text{).} \quad (5)$$

6. Согласно **принципу соответствия** все закономерности более общей теории должны переходить в закономерности теории низшего порядка в предельном значении параметров теории. Первым таким параметром релятивистской теории гравитации является скорость света. В классической теории гравитации $c \rightarrow \infty$. Проведем, как мы делали в предыдущем курсе (МОФ) «3+1» разбиение уравнений (4) с учетом интеграла геодезических (Игнатьев):

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ik}(x)dx^i dx^k \Rightarrow 1 = g_{ik}u^i u^k; u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{cdt} \frac{dx^4}{ds} \equiv \frac{v^\alpha}{c} u^4 \\ &\Rightarrow 1 = (u^4)^2 \left(g_{44} + 2g_{\alpha 4} \frac{v^\alpha}{c} + g_{\alpha \beta} \frac{v^\alpha v^\beta}{c^2} \right), \quad u^4 \approx \frac{1}{\sqrt{g_{44}}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

5. Как при этом удовлетворить принципу эквивалентности? Всегда можно выбрать систему координат таким образом, чтобы в окрестности наперед заданной точки P риманова пространства V_4 символы Кристоффеля обращались в нуль (А.З. Петров):

$$\Gamma_{jk}^i \Big|_P = 0 \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} \Big|_P = 0 \Rightarrow x^i = x_P^i + u_P^i s \text{ (прямые вблизи } P\text{).} \quad (5)$$

6. Согласно **принципу соответствия** все закономерности более общей теории должны переходить в закономерности теории низшего порядка в предельном значении параметров теории. Первым таким параметром релятивистской теории гравитации является скорость света. В классической теории гравитации $c \rightarrow \infty$. Проведем, как мы делали в предыдущем курсе (МОФ) «3+1» разбиение уравнений (4) с учетом интеграла геодезических (Игнатьев):

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ik}(x)dx^i dx^k \Rightarrow 1 = g_{ik}u^i u^k; u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{cdt} \frac{dx^4}{ds} \equiv \frac{v^\alpha}{c} u^4 \\ &\Rightarrow 1 = (u^4)^2 \left(g_{44} + 2g_{\alpha 4} \frac{v^\alpha}{c} + g_{\alpha \beta} \frac{v^\alpha v^\beta}{c^2} \right), \quad u^4 \approx \frac{1}{\sqrt{g_{44}}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

5. Как при этом удовлетворить принципу эквивалентности? Всегда можно выбрать систему координат таким образом, чтобы в окрестности наперед заданной точки P риманова пространства V_4 символы Кристоффеля обращались в нуль (А.З. Петров):

$$\Gamma_{jk}^i \Big|_P = 0 \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} \Big|_P = 0 \Rightarrow x^i = x_P^i + u_P^i s \text{ (прямые вблизи } P\text{).} \quad (5)$$

6. Согласно **принципу соответствия** все закономерности более общей теории должны переходить в закономерности теории низшего порядка в предельном значении параметров теории. Первым таким параметром релятивистской теории гравитации является скорость света. В классической теории гравитации $c \rightarrow \infty$. Проведем, как мы делали в предыдущем курсе (МОФ) «3+1» разбиение уравнений (4) с учетом интеграла геодезических (Игнатьев):

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ik}(x)dx^i dx^k \Rightarrow 1 = g_{ik}u^i u^k; u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{cdt} \frac{dx^4}{ds} \equiv \frac{v^\alpha}{c} u^4 \\ &\Rightarrow 1 = (u^4)^2 \left(g_{44} + 2g_{\alpha 4} \frac{v^\alpha}{c} + g_{\alpha \beta} \frac{v^\alpha v^\beta}{c^2} \right), \quad u^4 \approx \frac{1}{\sqrt{g_{44}}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

7. Вторым параметром является малость отклонения метрики от псевдоевклидовой в локально лоренцевой системе отсчета, т.е. $\mu \ll \nu \ll c$. (7)
8. Разлагая пространственные компоненты уравнений геодезических по этим параметрам, найдем (Вычислить!):

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = \frac{u^4}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^\alpha}{c} u^4 \right) \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \frac{u^4}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^\alpha}{c} u^4 \right) + (u^4)^2 \left(\Gamma_{44}^\alpha + 2\Gamma_{\beta 4}^\alpha \frac{v^\beta}{c} + \Gamma_{\beta \gamma}^\alpha \frac{v^\beta v^\gamma}{c^2} \right) = 0. \quad (8)$$

- ▶ Пренебрегая квадратами малых величин типа $v^\beta v^\gamma/c^2$ и $v^\alpha/c \partial_\beta g_{ik}$, приведем уравнения (8) к виду:

- ▶ Для того, чтобы эти уравнения совпадали с уравнениями движения нерелятивистской частицы в классическом ньютоновом поле с потенциалом $\phi(\mathbf{r}, t)$:

- ▶ необходимо и достаточно, чтобы в линейном приближении компонента g_{44} метрики была связана с потенциалом классического гравитационного поля следующим образом:

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

7. Вторым параметром является малость отклонения метрики от псевдоевклидовой в локально лоренцевой системе отсчета, т.е.:

$$g_{ik} \approx \eta_{ik} + \delta g_{ik}; \quad \delta g_{ik} \ll 1. \quad (7)$$

8. Разлагая пространственные компоненты уравнений геодезических по этим параметрам, найдем (**Вычислить!**):

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} &= \frac{u^4}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^\alpha}{c} u^4 \right) \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \\ \frac{u^4}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^\alpha}{c} u^4 \right) + (u^4)^2 &\left(\Gamma_{44}^\alpha + 2\Gamma_{\beta 4}^\alpha \frac{v^\beta}{c} + \Gamma_{\beta \gamma}^\alpha \frac{v^\beta v^\gamma}{c^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

▶ Пренебрегая квадратами малых величин типа $v^\beta v^\gamma/c^2$ и $v^\alpha/c \partial_\beta g_{ik}$, приведем уравнения (8) к виду:

▶ Для того, чтобы эти уравнения совпадали с уравнениями движения нерелятивистской частицы в классическом ньютонаовом поле с потенциалом $\phi(\mathbf{r}, t)$:

необходимо и достаточно, чтобы в линейном приближении компонента g_{44} метрики была связана с потенциалом классического гравитационного поля следующим образом:

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

7. Вторым параметром является малость отклонения метрики от псевдоевклидовой в локально лоренцевой системе отсчета, т.е.:

$$g_{ik} \approx \eta_{ik} + \delta g_{ik}; \quad \delta g_{ik} \ll 1. \quad (7)$$

8. Разлагая пространственные компоненты уравнений геодезических по этим параметрам, найдем (Вычислить!):

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} &= \frac{u^4}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^\alpha}{c} u^4 \right) \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \\ \frac{u^4}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^\alpha}{c} u^4 \right) + (u^4)^2 &\left(\Gamma_{44}^\alpha + 2\Gamma_{\beta 4}^\alpha \frac{v^\beta}{c} + \Gamma_{\beta \gamma}^\alpha \frac{v^\beta v^\gamma}{c^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

▶ Пренебрегая квадратами малых величин типа $v^\beta v^\gamma/c^2$ и $v^\alpha/c \partial_\beta g_{ik}$, приведем уравнения (8) к виду:

▶ Для того, чтобы эти уравнения совпадали с уравнениями движения нерелятивистской частицы в классическом ньютонаовом поле с потенциалом $\phi(\mathbf{r}, t)$:

необходимо и достаточно, чтобы в линейном приближении компонента g_{44} метрики была связана с потенциалом классического гравитационного поля следующим образом:

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

7. Вторым параметром является малость отклонения метрики от псевдоевклидовой в локально лоренцевой системе отсчета, т.е.:

$$g_{ik} \approx \eta_{ik} + \delta g_{ik}; \quad \delta g_{ik} \ll 1. \quad (7)$$
8. Разлагая пространственные компоненты уравнений геодезических по этим параметрам, найдем (**Вычислить!**):

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = \frac{u^4}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^\alpha}{c} u^4 \right) \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} =$$

$$\frac{u^4}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^\alpha}{c} u^4 \right) + (u^4)^2 \left(\Gamma_{44}^\alpha + 2\Gamma_{\beta 4}^\alpha \frac{v^\beta}{c} + \Gamma_{\beta \gamma}^\alpha \frac{v^\beta v^\gamma}{c^2} \right) = 0. \quad (8)$$

- ▶ Пренебрегая квадратами малых величин типа $v^\beta v^\gamma/c^2$ и $v^\alpha/c \partial_\beta g_{ik}$, приведем уравнения (8) к виду:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (9)$$

- ▶ Для того, чтобы эти уравнения совпадали с уравнениями движения нерелятивистской частицы в классическом ньютонаевом поле с потенциалом $\phi(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = -\nabla \phi \cdot \dot{\mathbf{x}}. \quad (10)$$

- ▶ необходимо и достаточно, чтобы в линейном приближении компонента g_{44} метрики была связана с потенциалом классического гравитационного поля следующим образом:

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

7. Вторым параметром является малость отклонения метрики от псевдоевклидовой в локально лоренцевой системе отсчета, т.е.:

$$g_{ik} \approx \eta_{ik} + \delta g_{ik}; \quad \delta g_{ik} \ll 1. \quad (7)$$
8. Разлагая пространственные компоненты уравнений геодезических по этим параметрам, найдем (**Вычислить!**):

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = \frac{u^4}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^\alpha}{c} u^4 \right) \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} =$$

$$\frac{u^4}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^\alpha}{c} u^4 \right) + (u^4)^2 \left(\Gamma_{44}^\alpha + 2\Gamma_{\beta 4}^\alpha \frac{v^\beta}{c} + \Gamma_{\beta \gamma}^\alpha \frac{v^\beta v^\gamma}{c^2} \right) = 0. \quad (8)$$

- ▶ Пренебрегая квадратами малых величин типа $v^\beta v^\gamma/c^2$ и $v^\alpha/c \partial_\beta g_{ik}$, приведем уравнения (8) к виду:

$$\frac{1}{c^2} \frac{dv^\alpha}{dt} + \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{44} = 0. \quad (9)$$

- ▶ Для того, чтобы эти уравнения совпадали с уравнениями движения нерелятивистской частицы в классическом ньютонаовом поле с потенциалом $\phi(\mathbf{r}, t)$:

- ▶ необходимо и достаточно, чтобы в линейном приближении компонента g_{44} метрики была связана с потенциалом классического гравитационного поля следующим образом:

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

7. Вторым параметром является малость отклонения метрики от псевдоевклидовой в локально лоренцевой системе отсчета, т.е.:

$$g_{ik} \approx \eta_{ik} + \delta g_{ik}; \quad \delta g_{ik} \ll 1. \quad (7)$$
8. Разлагая пространственные компоненты уравнений геодезических по этим параметрам, найдем (**Вычислить!**):

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} &= \frac{u^4}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^\alpha}{c} u^4 \right) \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \\ \frac{u^4}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^\alpha}{c} u^4 \right) + (u^4)^2 &\left(\Gamma_{44}^\alpha + 2\Gamma_{\beta 4}^\alpha \frac{v^\beta}{c} + \Gamma_{\beta \gamma}^\alpha \frac{v^\beta v^\gamma}{c^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

- ▶ Пренебрегая квадратами малых величин типа $v^\beta v^\gamma/c^2$ и $v^\alpha/c \partial_\beta g_{ik}$, приведем уравнения (8) к виду:

$$\frac{1}{c^2} \frac{dv^\alpha}{dt} + \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{44} = 0. \quad (9)$$

- ▶ Для того, чтобы эти уравнения совпадали с уравнениями движения нерелятивистской частицы в классическом ньютонаовом поле с потенциалом $\phi(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla \phi. \quad (10)$$

- ▶ необходимо и достаточно, чтобы в линейном приближении компонента g_{44} метрики была связана с потенциалом классического гравитационного поля следующим образом:

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

7. Вторым параметром является малость отклонения метрики от псевдоевклидовой в локально лоренцевой системе отсчета, т.е.:

$$g_{ik} \approx \eta_{ik} + \delta g_{ik}; \quad \delta g_{ik} \ll 1. \quad (7)$$
8. Разлагая пространственные компоненты уравнений геодезических по этим параметрам, найдем (**Вычислить!**):

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = \frac{u^4}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^\alpha}{c} u^4 \right) \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} =$$

$$\frac{u^4}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^\alpha}{c} u^4 \right) + (u^4)^2 \left(\Gamma_{44}^\alpha + 2\Gamma_{\beta 4}^\alpha \frac{v^\beta}{c} + \Gamma_{\beta \gamma}^\alpha \frac{v^\beta v^\gamma}{c^2} \right) = 0. \quad (8)$$

- ▶ Пренебрегая квадратами малых величин типа $v^\beta v^\gamma/c^2$ и $v^\alpha/c \partial_\beta g_{ik}$, приведем уравнения (8) к виду:

$$\frac{1}{c^2} \frac{dv^\alpha}{dt} + \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{44} = 0. \quad (9)$$

- ▶ Для того, чтобы эти уравнения совпадали с уравнениями движения нерелятивистской частицы в классическом ньютонаевом поле с потенциалом $\phi(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \phi, \quad (10)$$

- ▶ необходимо и достаточно, чтобы в линейном приближении компонента g_{44} метрики была связана с потенциалом классического гравитационного поля следующим образом:
-

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

7. Вторым параметром является малость отклонения метрики от псевдоевклидовой в локально лоренцевой системе отсчета, т.е.:

$$g_{ik} \approx \eta_{ik} + \delta g_{ik}; \quad \delta g_{ik} \ll 1. \quad (7)$$
8. Разлагая пространственные компоненты уравнений геодезических по этим параметрам, найдем (**Вычислить!**):

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = \frac{u^4}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^\alpha}{c} u^4 \right) \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} =$$

$$\frac{u^4}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^\alpha}{c} u^4 \right) + (u^4)^2 \left(\Gamma_{44}^\alpha + 2\Gamma_{\beta 4}^\alpha \frac{v^\beta}{c} + \Gamma_{\beta \gamma}^\alpha \frac{v^\beta v^\gamma}{c^2} \right) = 0. \quad (8)$$

- ▶ Пренебрегая квадратами малых величин типа $v^\beta v^\gamma/c^2$ и $v^\alpha/c \partial_\beta g_{ik}$, приведем уравнения (8) к виду:

$$\frac{1}{c^2} \frac{dv^\alpha}{dt} + \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{44} = 0. \quad (9)$$

- ▶ Для того, чтобы эти уравнения совпадали с уравнениями движения нерелятивистской частицы в классическом ньютонаевом поле с потенциалом $\phi(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \phi, \quad (10)$$

- ▶ необходимо и достаточно, чтобы в линейном приближении компонента g_{44} метрики была связана с потенциалом классического гравитационного поля следующим образом:

$$\delta g_{44} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \rightarrow g_{44} = 1 - \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

(11)

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

7. Вторым параметром является малость отклонения метрики от псевдоевклидовой в локально лоренцевой системе отсчета, т.е.:

$$g_{ik} \approx \eta_{ik} + \delta g_{ik}; \quad \delta g_{ik} \ll 1. \quad (7)$$
8. Разлагая пространственные компоненты уравнений геодезических по этим параметрам, найдем (**Вычислить!**):

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = \frac{u^4}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^\alpha}{c} u^4 \right) \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} =$$

$$\frac{u^4}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^\alpha}{c} u^4 \right) + (u^4)^2 \left(\Gamma_{44}^\alpha + 2\Gamma_{\beta 4}^\alpha \frac{v^\beta}{c} + \Gamma_{\beta \gamma}^\alpha \frac{v^\beta v^\gamma}{c^2} \right) = 0. \quad (8)$$

- ▶ Пренебрегая квадратами малых величин типа $v^\beta v^\gamma/c^2$ и $v^\alpha/c \partial_\beta g_{ik}$, приведем уравнения (8) к виду:

$$\frac{1}{c^2} \frac{dv^\alpha}{dt} + \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{44} = 0. \quad (9)$$

- ▶ Для того, чтобы эти уравнения совпадали с уравнениями движения нерелятивистской частицы в классическом ньютонаевом поле с потенциалом $\phi(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \phi, \quad (10)$$

- ▶ необходимо и достаточно, чтобы в линейном приближении компонента g_{44} метрики была связана с потенциалом классического гравитационного поля следующим образом:

$$\delta g_{44} = \frac{2\phi}{c^2} \Rightarrow g_{44} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}. \quad (11)$$

Последовательность идей ОТО: движение частиц в гравитационном поле

7. Вторым параметром является малость отклонения метрики от псевдоевклидовой в локально лоренцевой системе отсчета, т.е.:

$$g_{ik} \approx \eta_{ik} + \delta g_{ik}; \quad \delta g_{ik} \ll 1. \quad (7)$$
8. Разлагая пространственные компоненты уравнений геодезических по этим параметрам, найдем (**Вычислить!**):

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = \frac{u^4}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^\alpha}{c} u^4 \right) \Rightarrow \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} =$$

$$\frac{u^4}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^\alpha}{c} u^4 \right) + (u^4)^2 \left(\Gamma_{44}^\alpha + 2\Gamma_{\beta 4}^\alpha \frac{v^\beta}{c} + \Gamma_{\beta \gamma}^\alpha \frac{v^\beta v^\gamma}{c^2} \right) = 0. \quad (8)$$

- ▶ Пренебрегая квадратами малых величин типа $v^\beta v^\gamma/c^2$ и $v^\alpha/c \partial_\beta g_{ik}$, приведем уравнения (8) к виду:

$$\frac{1}{c^2} \frac{dv^\alpha}{dt} + \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{44} = 0. \quad (9)$$

- ▶ Для того, чтобы эти уравнения совпадали с уравнениями движения нерелятивистской частицы в классическом ньютонаевом поле с потенциалом $\phi(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \phi, \quad (10)$$

- ▶ необходимо и достаточно, чтобы в линейном приближении компонента g_{44} метрики была связана с потенциалом классического гравитационного поля следующим образом:

$$\delta g_{44} = \frac{2\phi}{c^2} \Rightarrow g_{44} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}. \quad (11)$$

Последовательность идей ОТО: уравнения поля

Уравнения движения в гравитационном поле в форме уравнений геодезических были сформулированы Эйнштейном в достаточно ранних работах. В том числе им была установлена и связь между компонентной метрики g_{44} и ньютоновским потенциалом. Однако, процесс нахождения уравнений гравитационного поля, т.е., дифференциальных уравнений на компоненты метрического тензора, затянулся почти на десятилетие. Затормозила этот процесс именно ошибочная идея общей теории относительности как теории более общих преобразований, чем преобразования Лоренца - Пуанкаре. Первоначальной мыслью Эйнштейна была следующая: поскольку тяготение устраниется выбором системы отсчета, то нельзя ли найти такие преобразования, которые полностью бы описывали гравитационные поля? Неверным оказалось обобщение связи между частным случаем постоянного и однородного поля тяжести ($\mathbf{g} = \overrightarrow{\text{Const}}$) и принципом эквивалентности. Как мы отмечали выше, принцип эквивалентности носит локальный характер, т.е., имеет место быть в окрестности точки. В неоднородном поле тяжести Земли ускорение свободного падения зависит от расстояния до центра Земли по закону Ньютона, поэтому в каждой точке возникает разное ускорение.

8. Поэтому для нахождения уравнений гравитационного поля мы должны построить ковариантные дифференциальные операторы 2-го порядка относительно компонент метрического тензора. Но ковариантные производные от метрического тензора тождественно равны нулю. Далее, объекты, состоящие из частных производных метрического тензора, символы Кристоффеля Ω^i_{jk} не являются компонентами тензора. При координатных преобразованиях эти объекты преобразуются по закону см. Игнатьев, доказать самостоятельно:

$$\Gamma^i_{\mu\nu} = \Gamma^i_{\mu\lambda} \partial_\nu A^\lambda + \frac{\partial}{\partial x^\lambda} A^\lambda \Gamma^i_{\mu\nu} \quad (3)$$

Последовательность идей ОТО: уравнения поля

Уравнения движения в гравитационном поле в форме уравнений геодезических были сформулированы Эйнштейном в достаточно ранних работах. В том числе им была установлена и связь между компонентной метрики g_{44} и ньютоновским потенциалом. Однако, процесс нахождения уравнений гравитационного поля, т.е., дифференциальных уравнений на компоненты метрического тензора, затянулся почти на десятилетие. Затормозила этот процесс именно ошибочная идея общей теории относительности как теории более общих преобразований, чем преобразования Лоренца - Пуанкаре. Первоначальной мыслью Эйнштейна была следующая: поскольку тяготение устраниется выбором системы отсчета, то нельзя ли найти такие преобразования, которые полностью бы описывали гравитационные поля? Неверным оказалось обобщение связи между частным случаем постоянного и однородного поля тяжести ($\mathbf{g} = \overrightarrow{\text{Const}}$) и принципом эквивалентности. Как мы отмечали выше, принцип эквивалентности носит локальный характер, т.е., имеет место быть в окрестности точки. В неоднородном поле тяжести Земли ускорение свободного падения зависит от расстояния до центра Земли по закону Ньютона, поэтому в каждой точке возникает разное ускорение.

8. Поэтому для нахождения уравнений гравитационного поля мы должны построить ковариантные дифференциальные операторы 2-го порядка относительно компонент метрического тензора. Но ковариантные производные от метрического тензора тождественно равны нулю. Далее, объекты, состоящие из частных производных метрического тензора, символы Кристоффеля Ω^i_{jk} не являются компонентами тензора. При координатных преобразованиях эти объекты преобразуются по закону см. Игнатьев, доказать самостоятельно:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^i_{jk} A^{i'}_i A^j_{j'} A^k_{k'} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} A^{i'}_i \quad (12)$$

Последовательность идей ОТО: уравнения поля

Уравнения движения в гравитационном поле в форме уравнений геодезических были сформулированы Эйнштейном в достаточно ранних работах. В том числе им была установлена и связь между компонентной метрики g_{44} и ньютоновским потенциалом. Однако, процесс нахождения уравнений гравитационного поля, т.е., дифференциальных уравнений на компоненты метрического тензора, затянулся почти на десятилетие. Затормозила этот процесс именно ошибочная идея общей теории относительности как теории более общих преобразований, чем преобразования Лоренца - Пуанкаре. Первоначальной мыслью Эйнштейна была следующая: поскольку тяготение устраниется выбором системы отсчета, то нельзя ли найти такие преобразования, которые полностью бы описывали гравитационные поля? Неверным оказалось обобщение связи между частным случаем постоянного и однородного поля тяжести ($\mathbf{g} = \overrightarrow{\text{Const}}$) и принципом эквивалентности. Как мы отмечали выше, принцип эквивалентности носит локальный характер, т.е., имеет место быть в окрестности точки. В неоднородном поле тяжести Земли ускорение свободного падения зависит от расстояния до центра Земли по закону Ньютона, поэтому в каждой точке возникает разное ускорение.

8. Поэтому для нахождения уравнений гравитационного поля мы должны построить ковариантные дифференциальные операторы 2-го порядка относительно компонент метрического тензора. Но ковариантные производные от метрического тензора тождественно равны нулю. Далее, объекты, состоящие из частных производных метрического тензора, символы Кристоффеля Ω^i_{jk} не являются компонентами тензора. При координатных преобразованиях эти объекты преобразуются по закону см. Игнатьев, доказать самостоятельно:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^i_{jk} A^{i'}_i A^{j'}_{j'} A^{k'}_{k'} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} A^{i'}_i \quad (12)$$

Последовательность идей ОТО: уравнения поля

8. При этом можно доказать следующее утверждение см. Игнатьев кинетика, доказать самостоятельно. Пусть V_n и \bar{V}_n – римановы пространства в общей координации $\{x\}$ с метриками g_{ik} и \bar{g}_{ik} . Тогда объекты

$$D_{ijk} = R_{ijk} - \Gamma_{ijk} * D_{jk} = D_{jk} - \Gamma_{jk} \quad (13)$$

являются компонентами тензоров валентности (3,0) и (2,1).

9. Можно также показать см. Петров, доказать самостоятельно, что из символов Кристоффеля и их первых производных можно построить тензор валентности (3,1):

где $a_{[ik]} \equiv \frac{1}{2}(a_{ik} - a_{ki})$ – операция альтернирования тензора a по индексам i, k . Тензор R_{ijkl} называется тензором кривины или тензором Римана. Он обладает следующими алгебраическими свойствами см. Петров, доказать самостоятельно:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}; \quad (15)$$

$$R_{ijkl} = R_{klji}; \quad (16)$$

$$R_{i(jkl)} \equiv \frac{1}{3!}(R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj}) = 0, \quad (17)$$

круглыми скобками обозначена операция симметризации. Кроме того, тензор Римана удовлетворяет некоторым дифференциальным тождествам, которые называются тождествами Бианки (см. Петров):

$$R_{ijkl} + R_{jikl} + R_{iklj} = 0. \quad (18)$$

Последовательность идей ОТО: уравнения поля

8. При этом можно доказать следующее утверждение см. Игнатьев кинетика, доказать самостоятельно. Пусть V_n и \bar{V}_n – римановы пространства в общей координации $\{x\}$ с метриками g_{ik} и \bar{g}_{ik} . Тогда объекты

$$\Omega_{ij,k} = \bar{\Gamma}_{ij,k} - \Gamma_{ij,k} \text{ и } \Omega_{jk}^i = \bar{\Gamma}_{jk}^i - \Gamma_{jk}^i \quad (13)$$

являются компонентами тензоров валентности (3,0) и (2,1).

9. Можно также показать см. Петров, доказать самостоятельно, что из символов Кристоффеля и их первых производных можно построить тензор валентности (3,1):

где $a_{[ik]} \equiv \frac{1}{2}(a_{ik} - a_{ki})$ – операция альтернирования тензора a по индексам i, k . Тензор R_{ijkl} называется тензором кривины или тензором Римана. Он обладает следующими алгебраическими свойствами см. Петров, доказать самостоятельно:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}; \quad (15)$$

$$R_{ijkl} = R_{klji}; \quad (16)$$

$$R_{i(jkl)} \equiv \frac{1}{3!}(R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj}) = 0, \quad (17)$$

круглыми скобками обозначена операция симметризации. Кроме того, тензор Римана удовлетворяет некоторым дифференциальным тождествам, которые называются тождествами Бианки (см. Петров):

Последовательность идей ОТО: уравнения поля

8. При этом можно доказать следующее утверждение см. Игнатьев кинетика, доказать самостоятельно. Пусть V_n и \bar{V}_n – римановы пространства в общей координации $\{x\}$ с метриками g_{ik} и \bar{g}_{ik} . Тогда объекты

$$\Omega_{ij,k} = \bar{\Gamma}_{ij,k} - \Gamma_{ij,k} \text{ и } \Omega^i_{jk} = \bar{\Gamma}^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} \quad (13)$$

являются компонентами тензоров валентности (3,0) и (2,1).

9. Можно также показать см. Петров, доказать самостоятельно, что из символов Кристоффеля и их первых производных можно построить тензор валентности (3,1):

$$R^k_{ijkl} = 2a_{[ik]}T^k_{lj} + 2a_{[jl]}T^k_{ki}, \quad (14)$$

где $a_{[ik]} \equiv \frac{1}{2}(a_{ik} - a_{ki})$ – операция альтернирования тензора a по индексам i, k . Тензор R_{ijkl} называется тензором кривины или тензором Римана. Он обладает следующими алгебраическими свойствами см. Петров, доказать самостоятельно:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}; \quad (15)$$

$$R_{ijkl} = R_{klji}; \quad (16)$$

$$R_{i(jkl)} \equiv \frac{1}{3!}(R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj}) = 0, \quad (17)$$

круглыми скобками обозначена операция симметризации. Кроме того, тензор Римана удовлетворяет некоторым дифференциальным тождествам, которые называются тождествами Бианки (см. Петров):

Последовательность идей ОТО: уравнения поля

8. При этом можно доказать следующее утверждение см. Игнатьев кинетика, доказать самостоятельно. Пусть V_n и \bar{V}_n – римановы пространства в общей координации $\{x\}$ с метриками g_{ik} и \bar{g}_{ik} . Тогда объекты

$$\Omega_{ij,k} = \bar{\Gamma}_{ij,k} - \Gamma_{ij,k} \text{ и } \Omega^i_{jk} = \bar{\Gamma}^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} \quad (13)$$

являются компонентами тензоров валентности (3,0) и (2,1).

9. Можно также показать см. Петров, доказать самостоятельно, что из символов Кристоффеля и их первых производных можно построить тензор валентности (3,1):

$$R^i_{jkl} = 2\partial_{[k}\Gamma^i_{l]j} + 2\Gamma^m_{j[l}\Gamma^i_{k]m}, \quad (14)$$

где $a_{[ik]} \equiv \frac{1}{2}(a_{ik} - a_{ki})$ – операция альтернирования тензора a по индексам i, k . Тензор R_{ijkl} называется тензором кривины или тензором Римана. Он обладает следующими алгебраическими свойствами см. Петров, доказать самостоятельно:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}; \quad (15)$$

$$R_{ijkl} = R_{klji}; \quad (16)$$

$$R_{i(jkl)} \equiv \frac{1}{3!}(R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj}) = 0, \quad (17)$$

круглыми скобками обозначена операция симметризации. Кроме того, тензор Римана удовлетворяет некоторым дифференциальным тождествам, которые называются тождествами Бианки (см. Петров):

$$R^i_{j[kl,m]} = 0 \Rightarrow R^i_{jkl,m} + R^i_{jmkl} + R^i_{jlmk} = 0; \quad (, i \equiv \nabla_i). \quad (18)$$

Последовательность идей ОТО: уравнения поля

8. При этом можно доказать следующее утверждение см. Игнатьев кинетика, доказать самостоятельно. Пусть V_n и \bar{V}_n – римановы пространства в общей координации $\{x\}$ с метриками g_{ik} и \bar{g}_{ik} . Тогда объекты

$$\Omega_{ij,k} = \bar{\Gamma}_{ij,k} - \Gamma_{ij,k} \text{ и } \Omega^i_{jk} = \bar{\Gamma}^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} \quad (13)$$

являются компонентами тензоров валентности (3,0) и (2,1).

9. Можно также показать см. Петров, доказать самостоятельно, что из символов Кристоффеля и их первых производных можно построить тензор валентности (3,1):

$$R^i_{jkl} = 2\partial_{[k} \Gamma^i_{l]j} + 2\Gamma^m_{j[l} \Gamma^i_{k]m}, \quad (14)$$

где $a_{[ik]} \equiv \frac{1}{2}(a_{ik} - a_{ki})$ – операция альтернирования тензора a по индексам i, k . Тензор R_{ijkl} называется тензором кривины или тензором Римана. Он обладает следующими алгебраическими свойствами см. Петров, доказать самостоятельно:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}; \quad (15)$$

$$R_{ijkl} = R_{klji}; \quad (16)$$

$$R_{i(jkl)} \equiv \frac{1}{3!}(R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj}) = 0, \quad (17)$$

круглыми скобками обозначена операция симметризации. Кроме того, тензор Римана удовлетворяет некоторым дифференциальным тождествам, которые называются тождествами Бианки (см. Петров):

$$R^i_{j[kl,m]} = 0 \Rightarrow R^i_{jkl,m} + R^i_{jmkl} + R^i_{jlmk} = 0; \quad (, i \equiv \nabla_i). \quad (18)$$

Последовательность идей ОТО: уравнения поля

8. При этом можно доказать следующее утверждение см. Игнатьев кинетика, доказать самостоятельно. Пусть V_n и \bar{V}_n – римановы пространства в общей координации $\{x\}$ с метриками g_{ik} и \bar{g}_{ik} . Тогда объекты

$$\Omega_{ij,k} = \bar{\Gamma}_{ij,k} - \Gamma_{ij,k} \text{ и } \Omega^i_{jk} = \bar{\Gamma}^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} \quad (13)$$

являются компонентами тензоров валентности (3,0) и (2,1).

9. Можно также показать см. Петров, доказать самостоятельно, что из символов Кристоффеля и их первых производных можно построить тензор валентности (3,1):

$$R^i_{jkl} = 2\partial_{[k} \Gamma^i_{l]j} + 2\Gamma^m_{j[l} \Gamma^i_{k]m}, \quad (14)$$

где $a_{[ik]} \equiv \frac{1}{2}(a_{ik} - a_{ki})$ – операция альтернирования тензора a по индексам i, k . Тензор R_{ijkl} называется тензором кривины или тензором Римана. Он обладает следующими алгебраическими свойствами см. Петров, доказать самостоятельно:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}; \quad (15)$$

$$R_{ijkl} = R_{klji}; \quad (16)$$

$$R_{i(jkl)} \equiv \frac{1}{3!}(R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj}) = 0, \quad (17)$$

круглыми скобками обозначена операция симметризации. Кроме того, тензор Римана удовлетворяет некоторым дифференциальным тождествам, которые называются тождествами Бианки (см. Петров):

$$R^i_{j[kl,m]} = 0 \Rightarrow R^i_{jkl,m} + R^i_{jmkl} + R^i_{jlmk} = 0; \quad (,i \equiv \nabla_i). \quad (18)$$

Последовательность идей ОТО: уравнения поля

10. Сверткой тензора Римана по первому и третьему индексам можно получить симметричный тензор валентности (2,0) – тензор Риччи, последующей сверткой которого получим скалярную кривизну:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (19)$$

Из этих двух объектов и метрического тензора можно образовать симметричный тензор валентности (2,0), обычно называемый **тензором Эйнштейна**, хотя он был известен геометрам и ранее:

11. Вследствие тождества Бианки (18) ковариантная дивергенция тензора Эйнштейна тождественно равна нулю см. Петров, доказать самостоятельно:



12. Учитывая, что у нас имеется симметричный материальный тензор второй валентности, дивергенция которого должна быть равна нулю – тензор энергии - импульса T_{ik} , запишем уравнения Эйнштейна, полученные им в 1915 году:



13. При анализе космологической модели Эйнштейн предложил добавить в левую часть уравнений (22) так называемый **космологический член**, ковариантная производная от которого автоматически равна нулю, Λg_{ik} , где Λ – новая универсальная постоянная, так называемая **космологическая постоянная**:

Последовательность идей ОТО: уравнения поля

10. Сверткой тензора Римана по первому и третьему индексам можно получить симметричный тензор валентности $(2,0)$ – **тензор Риччи**, последующей сверткой которого получим **скалярную кривизну**:

$$R_{ik} = R^j_{ijk}; \quad R = g^{ik} R_{ik}. \quad (19)$$

Из этих двух объектов и метрического тензора можно образовать симметричный тензор валентности $(2,0)$, обычно называемый **тензором Эйнштейна**, хотя он был известен геометрам и ранее:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R. \quad (20)$$

11. Вследствие тождества Бианки (18) ковариантная дивергенция тензора Эйнштейна тождественно равна нулю см. Петров, доказать самостоятельно:



12. Учитывая, что у нас имеется симметричный материальный тензор второй валентности, дивергенция которого должна быть равна нулю – тензор энергии-импульса T_{ik} , запишем уравнения Эйнштейна, полученные им в 1915 году:



13. При анализе космологической модели Эйнштейн предложил добавить в левую часть уравнений (22) так называемый **космологический член**, ковариантная производная от которого автоматически равна нулю, Λg_{ik} , где Λ – новая универсальная постоянная, так называемая **космологическая постоянная**:

Последовательность идей ОТО: уравнения поля

10. Сверткой тензора Римана по первому и третьему индексам можно получить симметричный тензор валентности $(2,0)$ – **тензор Риччи**, последующей сверткой которого получим **скалярную кривизну**:

$$R_{ik} = R^j{}_{ijk}; \quad R = g^{ik} R_{ik}. \quad (19)$$

Из этих двух объектов и метрического тензора можно образовать симметричный тензор валентности $(2,0)$, обычно называемый **тензором Эйнштейна**, хотя он был известен геометрам и ранее:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R. \quad (20)$$

11. Вследствие тождества Бианки (18) ковариантная дивергенция тензора Эйнштейна тождественно равна нулю см. Петров, доказать самостоятельно:



12. Учитывая, что у нас имеется симметричный материальный тензор второй валентности, дивергенция которого должна быть равна нулю – тензор энергии-импульса T_{ik} , запишем уравнения Эйнштейна, полученные им в 1915 году:



13. При анализе космологической модели Эйнштейн предложил добавить в левую часть уравнений (22) так называемый **космологический член**, ковариантная производная от которого автоматически равна нулю, Λg_{ik} , где Λ – новая универсальная постоянная, так называемая **космологическая постоянная**:

Последовательность идей ОТО: уравнения поля

10. Сверткой тензора Римана по первому и третьему индексам можно получить симметричный тензор валентности $(2,0)$ – **тензор Риччи**, последующей сверткой которого получим **скалярную кривизну**:

$$R_{ik} = R^j{}_{ijk}; \quad R = g^{ik} R_{ik}. \quad (19)$$

Из этих двух объектов и метрического тензора можно образовать симметричный тензор валентности $(2,0)$, обычно называемый **тензором Эйнштейна**, хотя он был известен геометрам и ранее:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R. \quad (20)$$

11. Вследствие тождества Бианки (18) ковариантная дивергенция тензора Эйнштейна тождественно равна нулю см. Петров, доказать самостоятельно:

$$\nabla_i G^{ij} = 0. \quad (21)$$

12. Учитывая, что у нас имеется симметричный материальный тензор второй валентности, дивергенция которого должна быть равна нулю – тензор энергии-импульса T_{ik} , запишем уравнения Эйнштейна, полученные им в 1915 году:

$$\nabla_i G^{ij} = -\Lambda g^{ij} + T^{ij}, \quad (22)$$

13. При анализе космологической модели Эйнштейн предложил добавить в левую часть уравнений (22) так называемый **космологический член**, ковариантная производная от которого автоматически равна нулю, Λg_{ik} , где Λ – новая универсальная постоянная, так называемая **космологическая постоянная**:

Последовательность идей ОТО: уравнения поля

10. Сверткой тензора Римана по первому и третьему индексам можно получить симметричный тензор валентности $(2,0)$ – **тензор Риччи**, последующей сверткой которого получим **скалярную кривизну**:

$$R_{ik} = R^j_{\quad ijk}; \quad R = g^{ik} R_{ik}. \quad (19)$$

Из этих двух объектов и метрического тензора можно образовать симметричный тензор валентности $(2,0)$, обычно называемый **тензором Эйнштейна**, хотя он был известен геометрам и ранее:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R. \quad (20)$$

11. Вследствие тождества Бианки (18) ковариантная дивергенция тензора Эйнштейна тождественно равна нулю **см. Петров, доказать самостоятельно**:

$$\nabla_k G_i^k \equiv 0. \quad (21)$$

12. Учитывая, что у нас имеется симметричный материальный тензор второй валентности, дивергенция которого должна быть равна нулю – тензор энергии-импульса T_{ik} , запишем уравнения Эйнштейна, полученные им в 1915 году:

13. При анализе космологической модели Эйнштейн предложил добавить в левую часть уравнений (22) так называемый **космологический член**, ковариантная производная от которого автоматически равна нулю, Λg_{ik} , где Λ – новая универсальная постоянная, так называемая **космологическая постоянная**:

Последовательность идей ОТО: уравнения поля

10. Сверткой тензора Римана по первому и третьему индексам можно получить симметричный тензор валентности $(2,0)$ – **тензор Риччи**, последующей сверткой которого получим **скалярную кривизну**:

$$R_{ik} = R^j_{\quad ijk}; \quad R = g^{ik} R_{ik}. \quad (19)$$

Из этих двух объектов и метрического тензора можно образовать симметричный тензор валентности $(2,0)$, обычно называемый **тензором Эйнштейна**, хотя он был известен геометрам и ранее:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R. \quad (20)$$

11. Вследствие тождества Бианки (18) ковариантная дивергенция тензора Эйнштейна тождественно равна нулю **см. Петров, доказать самостоятельно**:

$$\nabla_k G_i^k \equiv 0. \quad (21)$$

12. Учитывая, что у нас имеется симметричный материальный тензор второй валентности, дивергенция которого должна быть равна нулю – тензор энергии - импульса T_{ik} , запишем уравнения Эйнштейна, полученные им в 1915 году:

$$G_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}G_{kk} = -T_{ik} \quad \text{или} \quad \text{также коэффициент пропорциональности} \quad (22)$$

13. При анализе космологической модели Эйнштейн предложил добавить в левую часть уравнений (22) так называемый **космологический член**, ковариантная производная от которого автоматически равна нулю, Λg_{ik} , где Λ – новая универсальная постоянная, так называемая **космологическая постоянная**:

Последовательность идей ОТО: уравнения поля

10. Сверткой тензора Римана по первому и третьему индексам можно получить симметричный тензор валентности $(2,0)$ – **тензор Риччи**, последующей сверткой которого получим **скалярную кривизну**:

$$R_{ik} = R^j_{\quad ijk}; \quad R = g^{ik} R_{ik}. \quad (19)$$

Из этих двух объектов и метрического тензора можно образовать симметричный тензор валентности $(2,0)$, обычно называемый **тензором Эйнштейна**, хотя он был известен геометрам и ранее:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R. \quad (20)$$

11. Вследствие тождества Бианки (18) ковариантная дивергенция тензора Эйнштейна тождественно равна нулю **см. Петров, доказать самостоятельно**:

$$\nabla_k G_i^k \equiv 0. \quad (21)$$

12. Учитывая, что у нас имеется симметричный материальный тензор второй валентности, дивергенция которого должна быть равна нулю – тензор энергии - импульса T_{ik} , запишем уравнения Эйнштейна, полученные им в 1915 году:

$$G_{ik} = \varkappa T_{ik}, \quad \varkappa - \text{некий коэффициент пропорциональности.} \quad (22)$$

13. При анализе космологической модели Эйнштейн предложил добавить в левую часть уравнений (22) так называемый **космологический член**, ковариантная производная от которого автоматически равна нулю, Λg_{ik} , где Λ – новая универсальная постоянная, так называемая **космологическая постоянная**:

Последовательность идей ОТО: уравнения поля

10. Сверткой тензора Римана по первому и третьему индексам можно получить симметричный тензор валентности $(2,0)$ – **тензор Риччи**, последующей сверткой которого получим **скалярную кривизну**:

$$R_{ik} = R^j_{\quad ijk}; \quad R = g^{ik} R_{ik}. \quad (19)$$

Из этих двух объектов и метрического тензора можно образовать симметричный тензор валентности $(2,0)$, обычно называемый **тензором Эйнштейна**, хотя он был известен геометрам и ранее:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R. \quad (20)$$

11. Вследствие тождества Бианки (18) ковариантная дивергенция тензора Эйнштейна тождественно равна нулю **см. Петров, доказать самостоятельно**:

$$\nabla_k G_i^k \equiv 0. \quad (21)$$

12. Учитывая, что у нас имеется симметричный материальный тензор второй валентности, дивергенция которого должна быть равна нулю – тензор энергии - импульса T_{ik} , запишем уравнения Эйнштейна, полученные им в 1915 году:

$$G_{ik} = \varkappa T_{ik}, \quad \varkappa - \text{ некий коэффициент пропорциональности.} \quad (22)$$

13. При анализе космологической модели Эйнштейн предложил добавить в левую часть уравнений (22) так называемый **космологический член**, ковариантная производная от которого автоматически равна нулю, Λg_{ik} , где Λ – новая универсальная постоянная, так называемая **космологическая постоянная**:

$$G_{ik} + \Lambda g_{ik} = \varkappa T_{ik}.$$

Последовательность идей ОТО: уравнения поля

10. Сверткой тензора Римана по первому и третьему индексам можно получить симметричный тензор валентности (2,0) – **тензор Риччи**, последующей сверткой которого получим **скалярную кривизну**:

$$R_{ik} = R^j_{\quad ijk}; \quad R = g^{ik} R_{ik}. \quad (19)$$

Из этих двух объектов и метрического тензора можно образовать симметричный тензор валентности (2,0), обычно называемый **тензором Эйнштейна**, хотя он был известен геометрам и ранее:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R. \quad (20)$$

11. Вследствие тождества Бианки (18) ковариантная дивергенция тензора Эйнштейна тождественно равна нулю **см. Петров, доказать самостоятельно**:

$$\nabla_k G_i^k \equiv 0. \quad (21)$$

12. Учитывая, что у нас имеется симметричный материальный тензор второй валентности, дивергенция которого должна быть равна нулю – тензор энергии - импульса T_{ik} , запишем уравнения Эйнштейна, полученные им в 1915 году:

$$G_{ik} = \varkappa T_{ik}, \quad \varkappa - \text{некий коэффициент пропорциональности.} \quad (22)$$

13. При анализе космологической модели Эйнштейн предложил добавить в левую часть уравнений (22) так называемый **космологический член**, ковариантная производная от которого автоматически равна нулю, Λg_{ik} , где Λ – новая универсальная постоянная, так называемая **космологическая постоянная**:

$$G_{ik} + \Lambda g_{ik} = \varkappa T_{ik}. \quad (23)$$

Последовательность идей ОТО: уравнения поля

10. Сверткой тензора Римана по первому и третьему индексам можно получить симметричный тензор валентности $(2,0)$ – **тензор Риччи**, последующей сверткой которого получим **скалярную кривизну**:

$$R_{ik} = R^j_{\quad ijk}; \quad R = g^{ik} R_{ik}. \quad (19)$$

Из этих двух объектов и метрического тензора можно образовать симметричный тензор валентности $(2,0)$, обычно называемый **тензором Эйнштейна**, хотя он был известен геометрам и ранее:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R. \quad (20)$$

11. Вследствие тождества Бианки (18) ковариантная дивергенция тензора Эйнштейна тождественно равна нулю **см. Петров, доказать самостоятельно**:

$$\nabla_k G_i^k \equiv 0. \quad (21)$$

12. Учитывая, что у нас имеется симметричный материальный тензор второй валентности, дивергенция которого должна быть равна нулю – тензор энергии - импульса T_{ik} , запишем уравнения Эйнштейна, полученные им в 1915 году:

$$G_{ik} = \kappa T_{ik}, \quad \kappa - \text{некий коэффициент пропорциональности.} \quad (22)$$

13. При анализе космологической модели Эйнштейн предложил добавить в левую часть уравнений (22) так называемый **космологический член**, ковариантная производная от которого автоматически равна нулю, Λg_{ik} , где Λ – новая универсальная постоянная, так называемая **космологическая постоянная**:

$$G_{ik} + \Lambda g_{ik} = \kappa T_{ik}. \quad (23)$$