§3. Образ оператора. Ядро оператора. Ранг ма...

Пусть $A: X \to Y$. Линейный оператор. Множество всех векторов y из пространства Y таких, что $y = Ax$ для некоторого $x \in X$, называется областью значений или образом оператора и обозначается через $Im(A)$. Множество $Im(A)$ линейное подпространство пространства Y. Размерность подпространства $Im(A)$ называется рангом оператора A и обозначается через $rank(A)$.

Множество всех векторов $x \in X$ таких, что $Ax = 0$, называется ядром оператора A и обозначается через $Ker(A)$. Это множество линейное подпространство пространства X. Размерность под-ва $Ker(A)$ называется дефектом оператора A и обозначается через $def(A)$.

Для любого линейного оператора $A: X_n \to Y_m$

$$rank(A) + def(A) = n.$$

Пусть в пр-ве X дана нек. сис-а в-в $\{a^i\}_{i=1}^m$. Будем считать, что не все в-ы этой системы нулевые. Тогда указанная система обяз-о содержит линейно независимую подсис-у в-в. В частности, она сама может быть линейно независимой.

Подсистема в-в $\{a^{i_k}\}_{k=1}^r \subset \{a^i\}_{i=1}^m$, состоящая из линейно независимых в-в, называется максимальной, если добавление к ней любого нового вектора из $\{a^i\}_{i=1}^m$ приводит к линейно зависимой системе.

Любые две максимальные линейно независимые подсистемы данной системы содержат одно и то же количество в-в. Рангом системы в-о называется кол-во в-в в макс. линей. незав. подсистемы.

Пусть $A(m,n)$ произв. прямоуг. мат-ца. Будем трактовать ее столбцы как систему векторов про-ва C^m. Ранг этой системы векторов назовем рангом матрицы $A(m,n)$. Ранг мат-цы A будем обозначать через $\operatorname{rank}(A)$.

Мат-у $A(m,n)$ можно трактовать и как систему строк из прос-ва C^n. Для любой мат-цы $A(m,n)$ ранг этой системы строк равен рангу системы ее столбцов.

Пусть $A: X_n \to Y_m$, A_{eq} матрица оператора A относительно произвольным образом фиксированных базисов $\{e_k\}_{k=1}^{n} \in X_n$ и $\{q_k\}_{k=1}^{m} \subset Y_m$. Тогда $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A_{eq})$

Ранг мат-цы оператора инвариантен по отношению к выбору базисов, выбираемых при ее построении, и можно было бы дать эквивалент. опр. ранга оператора как ранга его матрицы.

Упр. 15 16 17 18

1. Согласно определению $\operatorname{Ker}(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$. Пусть x, y произвольные векторы из $\operatorname{Ker}(A)$, α, β любые числа. Тогда $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = 0$, т.е. линейная комбинация $\alpha x + \beta y$ принадлежит множеству $\operatorname{Ker}(A)$.

2. Обозначим $C = AB$. Столбцы матрицы C линейно выражаются через столбцы матрицы A, которые в свою очередь линейно выражаются через максимальную подсистему линейно независимых столбцов матрицы A. Число столбцов в этой подсистеме равно $\operatorname{rank}(A)$. Назовем столбцы этой подсистемы базисными.

Можно считать, что столбцы матрицы C принадлежат подпространству, натянутому на базисные столбцы матрицы. Следовательно, число линейно независимых столбцов матр. C не может превышать $\operatorname{rank}(A)$. С другой стороны, строки матрицы C линейно выражаются через строки матрицы. Проводя аналогичные рассуждения, заключаем, что $\operatorname{rank}(C) \le \operatorname{rank}(B)$

3. Рассмотрим систему векторов

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

пространства $\mathbb{R}^3$. Векторы a^1, a^2 линейно независимы. Они образуют максимальную линейно независимую подсистему, так как определители, составленные из компонент векторов a^1, a^2, a^3 и a^1, a^2, a^4 соответственно, равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ векторы a^1, a^2, a^3 и a^1, a^2, a^4 линейно зависимы. Это не единственная максимальная линейно независимая подсистема. Таким же свойством обладают, например, пары векторов a^1, a^3 и a^1, a^4. Любая из указанных пар линейно независимых векторов образует базис подпространства, натянутого на векторы a^1, a^2, a^3, a^4. Ранг этой системы векторов $= 2$

(4) Пусть $y \in \operatorname{Im}(A)$. Тогда $y = Ax$ для некоторого вектора $x \in X_n$, т.е.

$$y = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) \in L(Ae^1, \dots, Ae^n).$$

С другой стороны, если $y \in L(Ae^1, \dots, Ae^n)$, то

$$y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = Ax,$$

где $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i$, т.е. $y \in \operatorname{Im}(A)$. Значит $\operatorname{Im}(A) = L(Ae^1, \dots, Ae^n)$.

(6) Каждому элементу пространства P_n оператор D ставит в соответствие полином из P_{n-1}. Поэтому $\operatorname{Im}(D) = P_{n-1}$, и можно считать, что $D: P_n \to P_{n-1}$. Любой полином нулевой степени (вещ. число) оператор D обращает в ноль. Полиномы более высоких степеней в результате дифференцирования не могут обратиться в функцию, тождественно равную нулю. Поэтому $\operatorname{Ker}(D) = P_0$.

(12) Иногда при вычислении ранга матрицы бывает удобно предварительно выполнить элементарные преобразования.

Найдем ранг матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}.$$

После преобразований получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в получившейся матрице минор третьего порядка

$$d = \begin{vmatrix} 24 & 19 & 36 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix}$$ отличен от нуля.

Оба окаймляющих его минора 4 порядка $= 0$, так как 4 строка преобразованной матрицы состоит из нулей. Таким образом, ранг матрицы $A = 3$ ■

(5) a) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)$

$Ax^1 = x^1 + x^2 + x^3$

$Ax^2 = x^1 + x^2 + x^3$

$Ax^3 = x^1 + x^2 + x^3$

$$Ae = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Базис образа состоит из одного вектора $(1,1,1)$ ■

$\mathrm{rank}(A) = 1$, $\mathrm{def}(A) = 3$

b) $Ax^1 = 2x^1 - x^2 - x^3$

$Ax^2 = x^1 - 2x^2 + x^3$

$Ax^3 = x^1 + x^2 - 2x^3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(A) = 2$, $\mathrm{def}(A) = 1$

базис Ax^1 и Ax^2.

c) $Ax^1 = -x^1 + x^2 + x^3$

$Ax^2 = x^1 - x^2 + x^3$

$Ax^3 = x^1 + x^2 - x^3$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(A) = 3$, $\mathrm{def}(A) = 0$, базис Ax^1, Ax^2, Ax^3 ■

8) $P: X \to L_1$, $X = L_1 \dot{+} L_2$

P ст. в соответствии вектору x векторов из L_1, т.е.

$Im(P) = L_1$,

пусть L_1 имеет размер l_1, L_2 – размер l_2.

$x = x^1 + x^2$, где $x^1 \in L_1$, $x \in L_2$

$Px = x^1$

$Px^2 = 0 \Rightarrow Ker(x) \subset L_2$ ▪

9) $Ax = [x, a]$ a – фикс. ненулевой вектор.

Результатом векторного произведения двух векторов является вектор перпендикулярный и ним обоим при $x \in V_3$ $Ax \subset V_2$.

Im – множ. вект., перпендикулярных $A: V_3 \to V_3$, т.е.

$Im(A) = (x, a) = 0$.

в о опр-ся векторном пространстве двух коллинеарных неполмен. векторов, т.е. $Ker(A) =$ прямая $[x, a] = 0$.

10) $def(A) = n - x \Rightarrow n - $ с послед. столбцы/строки матрицы будут ~~нулевыми~~ нулевыми ▪

11)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$rank(A) = 2$.

13) a)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & & \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

rank(A) = 2

в) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$ $\quad \begin{vmatrix} 6 & -7 & 4 \\ 3 & -8 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 3 & -8 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \begin{vmatrix} -7 & 4 & 2 \\ -8 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \begin{vmatrix} -8 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ -1 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$

rank(A) = 2

14) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ k & 4 \end{vmatrix} = k - 12 = 0$ при $k = 12$

$\begin{vmatrix} k & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 7k - 4 = 0$ при $k = \frac{4}{7}$

rank(A) не м.б. = 1.

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ k & 4 & 10 \\ 1 & 7 & 17 \end{vmatrix} = -10k = 0$ при $k = 0$

при $k = 0$, rank(A) = 2

при $k \neq 0$, rank(A) > 2.