УДК 533.9.011(031)

Г.Ю. ДАУТОВ, Н.Ф. КАШАПОВ**, И.И. ФАЙРУШИН**, Е.А. ЕГОРОВА**

ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЫ ДЛЯ НЕВЫРОЖДЕННОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В РАВНОВЕСНОЙ ПЫЛЕВОЙ ПЛАЗМЕ

Рассчитана форма потенциальной ямы для электронов пылеэлектронной плазмы в зависимости от температуры, размеров пылевых частиц, расстояния между ними и рода вещества, из которого они состоят. Установлено, что форма потенциальной ямы существенно отличается от прямоугольного приближения.

Ключевые слова: *пылевая плазма, потенциальная яма, невырожденный электронный газ.*

Пылевая плазма, в которой концентрация ионизованных атомов газа пренебрежимо мала по сравнению с концентрацией электронов, называется пылеэлектронной плазмой [1–6]. Такая плазма образуется в процессах сгорания различных топлив при атмосферном давлении, плазмохимических реакторах, в каналах МГД-генераторов и в ряде процессов получения функциональных покрытий с использованием газовых разрядов [7, 8]. При температуре рабочего газа от 1000 до 2000 К твердые или жидкие пылевые частиц заряжены положительно в результате электронной эмиссии с поверхности, и поэтому газовая фаза содержит свободные электроны. Наличие заряженных пылевых частиц приводит к неравномерному распределению потенциала электрического поля и образованию потенциальных ям для электронов.

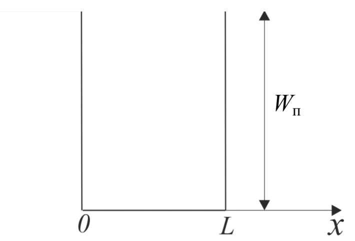

Рис. 1. Схематическое изображение потенциальной ямы

Распределения потенциала и концентрации электронов внутри и в окрестности пылевой частицы зависят от параметров потенциальной ямы. Обычно в приближенных расчетах считают, что потенциальная яма имеет вид, показанный на рис. 1, где L – характерный линейный размер твердой частицы, $W_п$ – глубина потенциальной ямы. Предполагается, что в областях $x < 0$ и $x > L$ концентрация свободных электронов равна нулю.

Покажем, что такое приближение имеет ряд существенных недостатков. Условие статистического равновесия электронного газа записывается в виде [9]

$$\mu - q\varphi = \mathrm{const}\,, \tag{1}$$

где μ – энергия Ферми; q – абсолютное значение заряда электрона; φ – потенциал электрического поля.

Запишем теорему Гаусса для электростатического поля

$$\iint_S E_\psi dS = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}\,, \tag{2}$$

где ε – относительная диэлектрическая проницаемость; ε_0 – электрическая постоянная; S – произвольная замкнутая поверхность; ψ – внешняя нормаль этой поверхности; E – вектор напряженности электрического поля; $E_\psi = E\cos\alpha$ – проекция вектора напряженности электрического поля на внешнюю нормаль ψ; Q – заряд внутри S. Если в качестве S взять поверхность пылевой частицы в виде шара радиусом R, то уравнение (2) принимает вид

$$4\pi R^2 \varepsilon\varepsilon_0 E(R) = Q\,. \tag{3}$$

Если электроны имеются только внутри частицы в области $r \le R$, объемный заряд Q будет равен нулю. Тогда из (3) получим, что $E(R) = 0$.

Из (1) находим

$$\frac{d\mu}{dr} - q\frac{d\varphi}{dr} = 0\,. \tag{4}$$

Энергия Ферми невырожденного электронного газа равна [8]

$$\mu = \theta \cdot \ln\left[\frac{n_e}{2}\left(\frac{h^2}{2\pi m\theta}\right)^{3/2}\right]. \tag{5}$$

Подстановка этого выражения в (4) с учетом связи потенциала с напряженностью поля дает

$$\theta\frac{dn_e}{dr} + n_e qE = 0\,.$$

Отсюда с учетом уравнения состояния для невырожденного электронного газа

$$p = n_e\theta\,, \tag{6}$$

где $\theta = kT$ – статистическая температура; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура, находим

$$\frac{dp}{dr} + n_e eE = 0\,. \tag{7}$$

Величина $\frac{dp}{dr}$ есть сила давления, действующая на единицу объема электронного газа, а $F = n_e qE$ – сила, действующая на единицу объема электронного газа со стороны электрического поля. Если в области $r < R$ концентрация электронов постоянна и равна n_{e0}, а при $r \geq R$ она равна нулю, то при $r = R$ будем иметь $\frac{dp}{dr} = \infty$, а сила $n_e qE\left(R\right)$ равна нулю. Таким образом, уравнение (7) не выполняется. Следовательно, предположение о постоянстве концентрации электронов в области $r < R$ и отсутствие электронов в области $r > R$ ошибочное. Для устранения этой ошибки более подробно рассмотрим параметры потенциальной ямы, распределения потенциала и концентрации электронов внутри пылевой частицы и в ее окрестности.

Рассмотрим эту проблему в случае сферических частиц. Пусть внутренний радиус твердой частицы равен R_1, внешний радиус R, в области $R_1 \leq r \leq R$ концентрация дырок равна n_i и электронный газ в зоне проводимости является невырожденным. Будем считать, что расстояние между пылевыми частицами $2l$ и $l >> R$. В таком случае можно приближенно считать, что распределение параметров сферически-симметричное.

Найдем распределение потенциала $\varphi(r)$ и концентрации электронов $n_e(r)$ в области $0 \leq r \leq l$ при следующих условиях:

$$n_i(r) = \begin{cases} 0, \text{ в области } r < R_1 \text{ и } r > R, \\ \text{const, в области } R_1 \leq r \leq R, \end{cases} \tag{8}$$

$$\varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(l) = 0. \tag{9}$$

Теорему Гаусса (2) для этого случая запишем как

$$\oiint_s \varepsilon\varepsilon_0 E_\psi dS = \iiint_v (n_i - n_e) q dV\,, \tag{10}$$

где V – объем внутри поверхности S.

С учетом распределения Больцмана для электронного газа

$$n_e = n_{e0} e^{\frac{q\varphi}{kT}} \tag{11}$$

из (10) получается уравнение Пуассона – Больцмана

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}\left(n_{e0}e^{\frac{q\varphi}{kT}} - n_i\right). \tag{12}$$

Введением безразмерных величин

$$x = \frac{r}{R}, \quad \phi = \frac{q\varphi}{kT}, \quad \overline{n}_i = \frac{n_i}{n_{e0}}, \quad a^2 = \frac{q^2R^2n_{e0}}{kT\varepsilon\varepsilon_0} \tag{13}$$

из (12) получим

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d\phi}{dr}\right)-a^2\left(e^{\phi}-\overline{n}_i\right)=0.$$

Рассмотрим случай, когда $|\phi|<<1$. Разложим величину e^{ϕ} в ряд Тейлора и ограничимся первыми двумя членами, т.е $e^{\phi}=1+\phi$. С учетом этого выражения получим

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d\phi}{dr}\right)=a^2\left(1+\phi-\overline{n}_i\right). \quad (14)$$

Общим решением уравнения (14) является функция

$$\phi(x)=\overline{n}_i-1+\frac{Ae^{ax}+Be^{-ax}}{x}. \quad (15)$$

В области $0\le x\le\frac{R_1}{R}$ распределение потенциала при условии $\phi_1(l)=0$ и $\overline{n}_i=0$ имеет вид

$$\phi_1(x)=-1+\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2ax}. \quad (16)$$

В области $\frac{R_1}{R}\le x\le 1$ распределение потенциала запишется как

$$\phi_2(x)=\overline{n}_i-1+\frac{C_3e^{ax}+C_4e^{-ax}}{x}, \quad (17)$$

где $C_3=\frac{1}{2a}-\frac{R_1}{2aR}\overline{n}_ie^{-\frac{aR_1}{R}}\left(a+\frac{R}{R_1}\right)$; $C_4=-\frac{1}{2a}-\frac{R_1}{2aR}\overline{n}_ie^{\frac{aR_1}{R}}\left(a-\frac{R}{R_1}\right)$.

Распределение потенциала $\phi_3(x)$ в области $1\le x\le\frac{l}{R}$ имеет вид

$$\phi_3(x)=-1+\frac{C_5e^{ax}+C_6e^{-ax}}{x}. \quad (18)$$

Постоянные C_5 и C_6 определяем из условий $\phi_2(1)=\phi_3(1)$, $\phi_2'(1)=\phi_3'(1)$. Условие $\varphi'(l)=0$ используется для определения концентрации электронов n_{e0} в точке $x=0$, которая входит во все предыдущие формулы.

Для установления формы потенциальной ямы воспользуемся следующим выражением, определяющим распределение потенциальной энергии электронов W от координаты r:

$$W(r)=\varphi(l)-\varphi(r). \quad (19)$$

Результаты расчета по формуле (19) для случая сферических частиц при $T=1000$ K, $R_1=2\cdot10^{-7}$ м, $R=10^{-6}$ м, $n_i=10^{18}$ м$^{-3}$, $l=10^{-5}$ м показаны на рис. 2, *а*. Как видно, в области $r>R$ величина W увеличивается, что объясняется выходом части электронов из пылевой частицы в окружающее пространство.

В частном случае при $R_1=0$ полученные формулы существенно упрощаются. В частности, для распределения потенциала получаются формулы

$$\phi(x)=\frac{e^a(a-1)-\left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1}\right)e^{a(2\lambda-1)}(a+1)}{2a\left(e^a(a-1)-(a+1)\left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1}\right)e^{a(2\lambda-1)}+1+\left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1}\right)e^{2a\lambda}\right)}\left(\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{x}-2a\right) \quad \text{при } 0\le x\le 1,$$

$$\phi(x)=-1+\frac{e^a(a-1)+e^{-a}(a+1)}{2a\left(e^a(a-1)-(a+1)\left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1}\right)e^{a(2\lambda-1)}+1+\left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1}\right)e^{2a\lambda}\right)}\frac{e^{ax}+\left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1}\right)e^{a(2\lambda-x)}}{x} \quad \text{при } 1\le x\le\lambda,$$

где $\lambda=l/R$.

Результаты расчета для случая шара при T =1000 К (кривая *1*) и при T =2000 К (кривая *2*), $R = 10^{-5}$ м, $n_i = 10^{18}$ м$^{-3}$, $l = 10^{-4}$ м представлены на рис. 2, *б*.

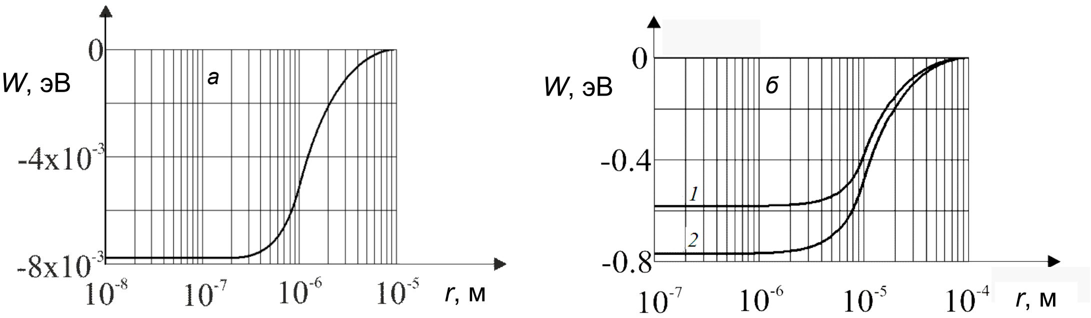

Рис. 2. Результаты расчета распределения потенциальной энергии электронов W от координаты r для двух случаев: сферических частиц (*а*) и шара (*б*)

Как видно, параметры потенциальной ямы зависят от температуры. При повышении температуры глубина потенциальной ямы увеличивается. Данный эффект связан с увеличением давления электронного газа и, как следствие, большим выходом электронов за пределы пылевой частицы с повышением температуры. Таким образом, установлено, что в общем случае потенциальная яма не является прямоугольной, а имеет более сложную геометрию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фортов В.Е., Храпак А.Г., Якубов И.Т. // Физика неидеальной плазмы: учеб. пособие. – М.: Физматлит, 2004. – 528 с.
2. Даутов Г.Ю., Сабитов Ш.Р., Файрушин И.И. // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2007. – № 1. – С. 29–32.
3. Даутов Г.Ю., Даутов И.Г., Файрушин И.И. // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2009. – № 1. – С. 57–59.
4. Даутов И.Г., Марданшин Р.М., Файрушин И.И., Ашрапов Т.Ф. // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2010. – № 3. – С. 143–148.
5. Даутов И.Г., Кашапов Н.Ф., Марданшин Р.М., Файрушин И.И. // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2010. – № 4. – С. 134–136.
6. Vishnyakov V.I. // Phys. Rev. E. – 2012. – V. 85. – P. 026402.
7. Гаврилова В.А., Кашапов Н.Ф., Тукмаков А.Л., Тукмаков Д.А. // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2012. – № 2. – С. 177–182.
8. Солоненко О.П., Гуляев И.П., Смирнов А.В. // Письма в ЖТФ. – 2008. – Т. 34. – № 24. – С. 22–27.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. // Статистическая физика. Сер. Теоретическая физика. Т. V. – М.: Наука, 1976. – 584 с.

*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань, Россия
**Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия
E-mail: fairushin_ilnaz@mail.ru

Поступила в редакцию 30.12.13.

Даутов Гали Юнусович, д.т.н., профессор, профессор;
Кашапов Наиль Фаикович, д.т.н., профессор, профессор;
Файрушин Ильназ Изаилович, к.т.н., ассистент;
Егорова Елена Александровна, аспирантка.