Эффективно реализуемые итерационные методы для линейных эллиптических вариационных неравенств с ограничениями на градиент решения[1]

Н.С. Каштанов, А.В. Лапин

Аннотация Строится и исследуется новый итерационный метод для конечномерной седловой задачи с ограничениями. Полученные результаты применяются к обоснованию сходимости различных итерационных методов для сеточных аппроксимаций линейных эллиптических вариационных неравенств с ограничениями на градиент решения. В частности, обосновывается сходимость двухступенчатых итерационных методов. Основным достоинством предлагаемых методов является простота их численной реализации. Результаты численных расчетов демонстрируют высокую скорость сходимости методов.

Ключевые слова: седловая задача с ограничениями, вариационное неравенство, конечно-разностная аппроксимация, итерационные методы.

УДК 519.6

Abstract A new iterative method for a finite dimensional constrained saddle point problem is constructed and investigated. The obtained results are applied to prove the convergence of different iterative methods for the mesh approximations of variational inequalities with constraints to the gradient of solution. In particular, convergence of two-stage iterative methods is proved. The main advantage of the proposed methods is the simplicity of their implementation. The results of the numerical testing demonstrate high convergence rate.

Key words: saddle point problem with constraints, variational inequality, finite difference approximation, iterative methods.

Введение

Развитие численных методов решения вариационных неравенств и задач со свободными границами математической физики остается актуальной задачей несмотря на проведенные в последние несколько десятилетий глубокие исследования в этой области. Особенно важной проблемой является построение быстро сходящихся и эффективно реализуемых итерационных методов решения сеточных вариационных неравенств большой размерности, аппроксимирующих неравенства с дифференциальными операторами.

Для вариационных неравенств с ограничениями на градиент решения (или с не дифференцируемыми функционалами от градиента решения) наиболее известными и хорошо зарекомендовавшими себя методами решения являются методы, основанные на использовании расширенной функции Лагранжа, и их обобщения в случае непотенциальных операторов. Основы теории итерационных методов с использованием расширенной функции Лагранжа изложены в книгах [1] и [2]. Сходимость различных вариантов этих методов обоснована для задач в исходной дифференциальной

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 13-01-00368

постановке с использованием аппарата нелинейных монотонных операторов в гильбертовых и банаховых пространствах. Итерационные методы для наиболее общего класс вариационных неравенств – с обратно сильно монотонными операторами – изучены в [3], [4].

Применение техники расширенной функции Лагранжа к сеточным аппроксимациям вариационных неравенств с ограничениями на градиент решения приводит к конечномерным седловым задачам с ограничениями и "заполненной" оператор-матрицей, действующей на прямые переменные, соответствующие решению и его градиенту. В связи с этим предложенные в цитированных работах итерационные методы основаны на принципах комбинации методов блочной релаксации и градиентного подъема по двойственным переменным.

Другой подход к построению итерационных методов для решения конечномерных седловых задач с ограничениями был предложен в [5] и затем развит в работах [6], [7]. Этот подход состоит в преобразовании исходной седловой задачи к эквивалентной задаче с блочно-треугольной и положительно определенной матрицей, действующей на прямые переменные. Для решения построенной седловой задачи можно применить непосредственно обобщенный метод Узавы (градиентный метод по двойственным переменным).

При решении сеточных вариационных неравенств с линейными операторами любым из упомянутых выше методов на каждой итерации требуется решить систему линейных (сеточных) уравнений и несвязную систему задач минимизации малой размерности, соответствующих точкам сетки. При обосновании сходимости методов считается, что системы линейных сеточных уравнений решаются точно.

В данной работе построен новый итерационный метод для конечномерной седловой задачи с ограничениями и линейными операторами. Доказана теорема о сходимости метода, при этом основным конструктивным условием сходимости является одно операторное неравенство, которое позволяет получить интервал сходимости для итерационного параметра. Предложенный метод включает в себя обобщенный метод Узавы [5] и так называемый алгоритм 2 из [2] как частные случаи. Более того, общая теорема о сходимости итерационного метода для седловой задачи может быть применена и для обоснования сходимости других итерационных методов решения сеточных вариационных неравенств. В частности, в статье доказана сходимость двухступенчатых вариантов методов, в которых системы сеточных уравнений на каждой итерации основного (внешнего) метода решаются с фиксированной точностью внутренним итерационным процессом.

В отсутствие теоретических оценок скорости сходимости основным критерием оценки эффективности итерационных методов становятся численные эксперименты. Проведенные тестовые расчеты для модельных задач показали высокую скорость сходимости предложенных методов, что наряду с простотой их численной реализации является несомненным достоинством предложенных методов.

1 Седловые задачи с ограничениями и итерационные методы их решения

Будем решать седловую задачу

$$\begin{pmatrix} A & -B^T \\ -B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial\psi(x) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix} \tag{1}$$

с заданными векторами $f \in \mathbb{R}^n$ и $g \in \mathbb{R}^s$ в предположении, что

$$\begin{gathered} \text{матрица } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \ \text{ положительно определена,} \\ \text{матрица } B \in \mathbb{R}^{s\times n} \text{ имеет полный ранг: } \operatorname{rank} B = s \leqslant n, \\ \psi : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} \ - \ \text{выпуклая, собственная и полунепрерывная} \\ \text{снизу функция.} \end{gathered} \tag{2}$$

Теорема 1. *([7]) Пусть выполнены условия* (2) *и*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Bx = g\} \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} \psi \neq \emptyset. \tag{3}$$

Тогда задача (1) *имеет непустое множество решений* $X = \{(x, \lambda)\}$ *и* x *определяется однозначно.*

Применим для решения (1) итерационный метод

$$\begin{aligned} Ax^{k+1} + \partial\psi(x^{k+1}) &\ni B^T\lambda^k + f, \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \tau D^{-1}(g - Bx^{k+1}). \end{aligned} \tag{4}$$

В случае симметричной матрицы A метод (4) можно считать обобщенным (предобусловленным) методом Узавы для отыскания седловой точки функции Лагранжа $\mathcal{L}(x, \lambda) = \dfrac{1}{2}(Ax, x) - (f, x) + \psi(x) - (Bx - g, \lambda)$, соответствующей задаче (1). Достаточное условие сходимости итерационного метода (4) приведено в следующей теореме.

Теорема 2. *([5]) Пусть выполнены условия* (2), (3). *Если*

$$(Ax, x) \geqslant \frac{\alpha\tau}{2}(D^{-1}Bx, Bx) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{5}$$

с некоторым $\alpha > 1$, *то итерационный метод* (4) *сходится для любого начального приближения* λ^0: $(x^k, \lambda^k) \to (x^*, \lambda^*) \in X$ *при* $k \to \infty$.

Пусть теперь матрица A расщеплена на сумму матриц:

$$A = A_1 + A_2, \text{ где } A_1 \text{ положительно определена.} \tag{6}$$

Итерационный метод

$$\begin{gathered} A_1x^{k+1} + A_2x^k - B^T\lambda^k + \partial\psi(x^{k+1}) \ni f, \\ \frac{1}{\tau}D(\lambda^{k+1} - \lambda^k) + Bx^{k+1} = g, \tau > 0, \end{gathered} \tag{7}$$

с симметричной и положительной матрицей D назовем методом блочной релаксации-Узавы.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (2), (3) *и* (6). *Если существуют число* $\alpha > 1$ *и непрерывная неотрицательная функция* $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\rho(0) = 0$, *такие что*

$$(A_1x, x) + (A_2y, x) \geqslant \frac{\alpha\tau}{2}(D^{-1}Bx, Bx) + \rho(x) - \rho(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad (8)$$

то итерационный метод (7) *сходится для любого начального приближения* (x^0, λ^0): $(x^k, \lambda^k) \to (x^*, \lambda^*) \in X$ *при* $k \to \infty$..

Доказательство. Отметим, прежде всего, что метод корректно определен, так как включение $A_1x^{k+1} + \partial\psi(x^{k+1}) \ni f - A_2x^k + B^T\lambda^k$ однозначно разрешимо в силу положительной определенности матрицы A_1.

Пусть (x, λ) – решение задачи (1), $z^k = x^k - x$ и $\eta^k = \lambda^k - \lambda$. Умножив соотношения

$$A_1z^{k+1} + A_2z^k + \partial\psi(x^{k+1}) - \partial\psi(x) - B^T\eta^k \ni 0, \ \ \frac{1}{\tau}D(\eta^{k+1} - \eta^k) + Bz^{k+1} = 0$$

на $2\tau z^{k+1}$ и $2\tau\eta^{k+1}$, соответственно, получим

$$2\tau(A_1z^{k+1} + A_2z^k, z^{k+1}) - 2\tau(Bz^{k+1}, \eta^k) \leqslant 0,$$

$$\|\eta^{k+1}\|_D^2 - \|\eta^k\|_D^2 + \|\eta^{k+1} - \eta^k\|_D^2 + 2\tau(Bz^{k+1}, \eta^{k+1}) = 0.$$

Отсюда, после сложения, следует

$$\|\eta^{k+1}\|_D^2 - \|\eta^k\|_D^2 + \|\eta^{k+1} - \eta^k\|_D^2 + 2\tau(Bz^{k+1}, \eta^{k+1} - \eta^k) + 2\tau(A_1z^{k+1} + A_2z^k, z^{k+1}) \leqslant 0.$$

Поскольку

$$2\tau(Bz^{k+1}, \eta^{k+1} - \eta^k) \leqslant (1 - \varepsilon)\|\eta^{k+1} - \eta^k\|_D^2 + \frac{\tau^2}{1 - \varepsilon}\|Bz^{k+1}\|_{D^{-1}}^2,$$

то в силу (8) для достаточно малого положительного ε найдется $\beta > 0$ такое, что

$$2\tau(A_1z^{k+1} + A_2z^k, z^{k+1}) - \frac{\tau^2}{1 - \varepsilon}\|Bz^{k+1}\|_{D^{-1}}^2 \geqslant \beta\tau^2\|Bz^{k+1}\|_{D^{-1}}^2 + \rho(z^{k+1}) - \rho(z^k).$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\big(\|\eta^{k+1}\|_D^2 + 2\tau\rho(z^{k+1})\big) - \big(\|\eta^k\|_D^2 + 2\tau\rho(z^k)\big) &+ \\ + \varepsilon\|\eta^{k+1} - \eta^k\|_D^2 + \beta\tau^2\|Bz^{k+1}\|_{D^{-1}}^2 &\leqslant 0 \qquad (9)\end{aligned}$$

Из неравенства (9) следует, что

- ограниченная снизу нулем последовательность $\{\|\eta^k\|_D^2 + 2\tau\rho(z^k)\}$ монотонно убывает и сходится к конечному числу;
- $\|Bz^{k+1}\|_{D^{-1}}^2 \to 0 \Rightarrow \|z^{k+1}\| = \|x^{k+1} - x\| \to 0$;

- $\|\lambda^{k+1} - \lambda^k\|_D = \|\eta^{k+1} - \eta^k\|_D \to 0$ при $k \to \infty$.

Поскольку $z^k \to 0$, то $\rho(z^k) \to 0$ и вместе с $\{\|\eta^k\|_D^2 + 2\tau\rho(z^k)\}$ сходится последовательность $\{\|\eta^k\|_D\}$, а значит последовательность $\{\lambda^k\}$ ограничена. Пусть $\{\lambda^{k_i}\}$ – ее сходящаяся подпоследовательность: $\lambda^{k_i} \to \lambda^*$ при $k_i \to \infty$. Тогда также $\lambda^{k_i+1} \to \lambda^*$. Поскольку $x^k \to x$ и оператор $\partial\psi$ замкнут, то переходя к пределу при $k_i \to \infty$ в (7), получим, что пара (x, λ^*) является решением (1). Пусть теперь $\lambda = \lambda^*$ во всех предыдущих выкладках. Так как последовательность $\{\|\lambda^k - \lambda^*\|_D\}$ сходится, а ее подпоследовательность $\{\|\lambda^{k_i} - \lambda^*\|_D\}$ стремится к нулю, то $\{\|\lambda^k - \lambda^*\|_D\}$ также стремится к нулю. $\square$

Замечание 1. *Положив $A_2 = 0$ и $\rho = 0$, мы приходим к итерационному методу* (4) *и условию сходимости* (7) *теоремы 2. Таким образом, теорема 3 является обобщением теоремы 2.*

2 Конечно-разностные аппроксимации двух модельных вариационных неравенств

Пусть $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $V = H_0^1(\Omega)$ – пространство Соболева и $K = \{u \in V : |\nabla u(x)| \leqslant 1$ п. вс. в $\Omega\}$ – выпуклое и замкнутое множество. Определим выпуклый и непрерывный на V функционал $I(u) = \int\limits_\Omega |\nabla u|\, dx$ и билинейную и непрерывную на $V \times V$ форму

$$a(u,v) = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int\limits_\Omega \bar{q}(x) \cdot \nabla u\, v\, dx,\ \bar{q}(x) = (q_1(x), q_2(x)),$$

где функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ непрерывны и неотрицательны в $\overline{\Omega}$. Рассмотрим вариационные неравенства

$$u \in K:\ a(u, v-u) \geqslant \int\limits_\Omega f(v-u)\, dx\ \ \forall v \in K, \tag{10}$$

$$u \in V:\ a(u, v-u) + I(v) - I(u) \geqslant \int\limits_\Omega f(v-u)\, dx\ \ \forall v \in V. \tag{11}$$

Обозначим через $q = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} \sqrt{q_1^2(x) + q_2^2(x)}$ и через $\lambda_0 = 2\pi^2$ – минимальное собственное число оператора Лапласа в Ω с однородными условиями Дирихле. При $q < \sqrt{\lambda_0}$ билинейная форма a положительно определена:

$$a(u,u) \geqslant \big(1 - q\lambda_0^{-1/2}\big) \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \big(1 - q\lambda_0^{-1/2}\big)\|u\|_V^2,$$

поэтому вариационные неравенства (10) и (11) однозначно разрешимы для любых $f \in H^{-1}(\Omega)$ (см., например, [9]).

Построим конечно-разностные аппроксимации вариационных неравенств (10) и (11) на равномерной сетке $\bar{\omega} = \{x = (ih, jh) : 0 \leqslant i, j \leqslant m+1,\ (m+1)h = 1\}$. Используем следующие обозначения для сеточных множеств: $\omega = \{x \in \bar{\omega} : 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant m\}$, $\partial\omega = \bar{\omega} \setminus \omega$, $\omega_1^+ = \{x \in \bar{\omega} : 1 \leqslant i \leqslant m+1, 1 \leqslant j \leqslant m\}$, $\omega_2^+ = \{x \in \bar{\omega} : 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant m+1\}$ и $\omega^+ = \omega_1^+ \cup \omega_2^+$. Пусть V_h – это пространство сеточных функций, определенных в узлах сетки $\bar{\omega}$ и равных нулю в граничных узлах $\partial\omega$, а W_{ih} – пространства сеточных функций, определенных в узлах сетки ω_i^+, $i = 1, 2$. Определим конечно-разностные аппроксимации билинейной формы, множеств и функционалов, считая для простоты $f(x)$ непрерывной функцией:

$$a_h(u_h, v_h) = h^2 \sum_{x\in\omega^+} \sum_{i=1}^{2} \overline{\partial}_i u_h(x) \overline{\partial}_i v_h(x) + h^2 \sum_{x\in\omega} \sum_{i=1}^{2} q_i(x) \overline{\partial}_i u_h(x) v_h(x),$$

$$K_h = \left\{u_h \in V_h :\ (\overline{\partial}_1 u_h(x))^2 + (\overline{\partial}_2 u_h(x))^2 \leqslant 1 \quad \forall x \in \omega^+\right\},$$

$$I_h(u_h) = h^2 \sum_{x\in\omega^+} \sqrt{|\overline{\partial}_1 u_h(x)|^2 + |\overline{\partial}_2 u_h(x)|^2},\ f_h(v_h) = h^2 \sum_{x\in\omega} f(x) v_h(x).$$

Здесь $\overline{\partial}_1 u_h(x) = h^{-1}(u_h(ih, jh) - u_h((i-1)h, jh))$ и $\partial_1 u_h(x) = h^{-1}(u_h((i+1)h, jh) - u_h(ih, jh))$ – разностные производные по x_1 в узле сетки $x = (ih, jh)$ и аналогично определены разностные производные по x_2.

Конечно-разностные аппроксимации вариационных неравенств (10) и (11) имеют вид

$$u_h \in K_h :\ a_h(u_h, v_h - u_h) \geqslant f_h(v_h - u_h)\ \forall v_h \in K_h, \tag{12}$$

$$u_h \in V_h :\ \ a_h(u_h, v_h - u_h) + I_h(v_h) - I_h(u_h) \geqslant f_h(v_h - u_h)\ \forall v_h \in V_h. \tag{13}$$

Далее будем использовать формулировку этих сеточных вариационных неравенств в "матрично-векторном" виде. С этой целью определим пространства векторов узловых параметров сеточных функций, а также матрицы, соответствующие сеточным операторам. Пусть $u, v \in \mathbb{R}^n$, $n = m^2$, – векторы узловых параметров сеточных функций u_h, v_h из V_h, а $w_i \in \mathbb{R}^{n+m}$ – векторы узловых параметров сеточных функций $w_{ih} \in W_{ih}$. Определим прямоугольные $(n+m) \times n$ матрицы L_1, L_2, квадратную $n \times n$ матрицу S и вектор $f \in \mathbb{R}^n$ равенствами

$$(L_1 u, w_1) = \sum_{x\in\omega^+} \overline{\partial}_1 u_h(x) w_{1h}(x),\ (L_2 u, w_2) = \sum_{x\in\omega^+} \overline{\partial}_2 u_h(x) w_{2h}(x),$$

$$(Su, v) = \sum_{x\in\omega} \sum_{i=1}^{2} q_i(x) \overline{\partial}_i u_h(x) v_h(x), (f, v) = \sum_{x\in\omega} f(x) v_h(x),$$

считая, что скобки $(,)$ в левой части равенств означают евклидово скалярное произведение в пространстве векторов соответствующей размерности.

По построению $L^TL = L_1^TL_1 + L_2^TL_2$ – это матрица сеточного оператора Лапласа $-\Delta_h = -\overline{\partial}_1\partial_1 - \overline{\partial}_2\partial_2$ в пространстве V_h. Она симметрична и положительно определена: $\|Lu\|^2 \geqslant \mu_{\min}\|u\|^2$, $\mu_{\min} = 8h^{-2}\sin^2(0.5\pi h)$. Для сеточных функций $u_h, v_h \in V_h$ и соответствующих им векторов узловых параметров u и v справедливо неравенство

$$(Su, v) \leqslant \big(\sum_{x\in\omega}\sum_{i=1}^{2}(\overline{\partial}_i u_h(x))^2\big)^{1/2}\big(\sum_{x\in\omega}v_h^2(x)\sum_{i=1}^{2}q_i^2(x)\big)^{1/2} \leqslant q\|Lu\|\|v\|,$$

поэтому матрица $G = L^TL + S$ положительно определена при $q < \mu_{\min}^{1/2}$:

$$(Gu, u) = \|Lu\|^2 + (Su, u) \geqslant \big(1 - q\mu_{\min}^{-1/2}\big)\|Lu\|^2 > 0 \ \forall u \neq 0.$$

Множество ограничений для векторов узловых параметров u сеточных функций $u_h \in K_h$ приобретает вид $\mathcal{K} = \{u \in \mathbb{R}^n : \ (L_1u)_j^2 + (L_2u)_j^2 \leqslant 1 \ \forall j = 1, 2, \ldots, n+m\}$ и его индикаторная функция определяется равенством $\varphi(Lu) = \sum_{j=1}^{n+m} I_1((L_1u)_j, ((L_2u)_j)$, где $I_1(x_1, x_2)$ – индикаторная функция единичного круга $\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$. В свою очередь, функция $\varphi(Lu) = \sum_{j=1}^{n+m}\sqrt{(L_1u)_j^2 + (L_2u)_j^2}$ соответствует $I_h(u_h)$ в сеточном вариационном неравенстве (13).

В результате оба сеточных вариационных неравенства, (12) и (13), могут быть записаны в виде следующего вариационного неравенства для вектора узловых параметров:

$$u \in \mathbb{R}^n : \ (Gu, v-u) + \varphi(Lv) - \varphi(Lu) \geqslant (f, v-u) \ \ \forall v \in \mathbb{R}^n. \tag{14}$$

При $q < \mu_{\min}^{1/2}$ матрица G положительно определена, а функция $\varphi \circ L$ – выпуклая, собственная и полунепрерывная снизу (непрерывная в случае вариационного неравенства (13)), поэтому вариационное неравенство (14) имеет единственное решение. Вектор $u = 0$ таков, что $Lu = 0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$, поэтому справедливо равенство $\partial[\varphi(Lu)] = L^T\partial\varphi(Lu)$ (см., например. [9], стр. 36) и вариационное неравенство (14) может быть записано в форме включения

$$Gu + L^T\partial\varphi(Lu) \ni f, \ G = L^TL + S.$$

Введем в рассмотрение векторы $p = Lu$ и $\lambda \in p + \partial\varphi(p)$. Тогда тройка (u, p, λ) удовлетворяет системе

$$Su + L^T\lambda = f, \quad \lambda \in p + \partial\varphi(p), \quad p = Lu.$$

Иными словами, это седловая задача

$$\begin{pmatrix} S & 0 & L^T \\ 0 & E & -E \\ L & -E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \partial\varphi(p) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Теорема 4. *Задача* (15) *имеет решение* (u, p, λ) *с единственными векторами* (u, p), *при этом* u *– это решение* (14), *а* $p = Lu$.

Доказательство. Преобразуем (15) к эквивалентной задаче, прибавляя к первому уравнению третье, умноженное на rL^T, $r > 0$, и вычитая из второго включения третье уравнение, умноженное на r:

$$\begin{pmatrix} S + rL^T L & -rL^T & L^T \\ -rL & (1+r)E & -E \\ L & -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \partial\varphi(p) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Задача (16) является частным случаем (1) при

$$x = \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix},\ \partial\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial\varphi \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} G + (r-1)L^T L & -rL^T \\ -rL & (1+r)E \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -L & E \end{pmatrix}.$$

Матрица B имеет полный ранг и $0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$, поэтому выполнено условие (3) теоремы 1. Для применения этой теоремы осталось доказать положительную определенность матрицы A при некотором $r > 0$. Обозначив $\sigma = 1 - q\mu_{\min}^{-1/2} > 0$, получим:

$$\begin{aligned} (Ax, x) \geqslant (Gu, u) + (r-1)\|Lu\|^2 + (r+1)\|p\|^2 - 2r\|Lu\|\|p\| \geqslant \\ \geqslant (\sigma + r - 1)\|Lu\|^2 + (r+1)\|p\|^2 - 2r\|Lu\|\|p\|. \end{aligned}$$

При $r > \sigma^{-1}(1-\sigma)$ квадратичная форма $(\sigma + r - 1)t^2 + (r+1)s^2 - 2rts$ положительно определена, пусть $c_0(r) > 0$ – ее минимальное собственное число. Тогда

$$(Ax, x) \geqslant c_0(r)(\|Lu\|^2 + \|p\|^2) > 0\ \forall x \neq 0.$$

□

3 Итерационные методы решения сеточных седловых задач

3.1 Обобщенные методы Узавы и блочной релаксации-Узавы

Рассмотрим вначале частный случай вариационного неравенства (10) с $\bar{q}(x) \equiv 0$, которому соответствует сеточная седловая задача (15) с матрицей $S = 0$. В этом случае матрица A седловой задачи (16) положительно определена при любом положительном r. Применим для решения (16) итерационный метод

$$\begin{gathered} rL^T Lu^{k+1} - rL^T p^k = f - L^T\lambda^k, \\ (1+r)p^{k+1} + \partial\varphi(p^{k+1}) \ni \lambda^k + rLu^{k+1}, \\ \lambda^{k+1} = \lambda^k + \tau(Lu^{k+1} - p^{k+1}) \end{gathered} \tag{17}$$

с начальными приближениями λ^0 и p^0.

Теорема 5. *Метод (17) для задачи (16) сходится для любого начального приближения* $(\lambda^0,\, p^0)$ *при* $0 < \tau < 2\dfrac{1+r}{1+2r}r$.

Доказательство. Итерационный метод (17) является частным случаем (7) с матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} rL^TL & 0 \\ -rL & (1+r)E \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -rL^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } D = E.$$

Положим $x = (u, p)$, $y = (v, s)$ и получим условие на итерационный параметр τ, обеспечивающее справедливость неравенства (8) с каким-либо $\alpha > 1$. Справедливы следующие соотношения:

$$(A_1x, x) + (A_2y, x) = r\|Lu\|^2 + (1+r)\|p\|^2 - r(p, Lu) - r(s, Lu), \; \|Bx\|^2 = \|Lu - p\|^2,$$

$$r|(s, Lu)| \leqslant \frac{1+r}{2}\|s\|^2 + \frac{r^2}{2(1+r)}\|Lu\|^2.$$

В силу этих соотношений

$$(A_1x, x) + (A_2y, x) - \frac{\alpha\tau}{2}\|Bx\|^2 \geqslant (\frac{2r+r^2}{2+2r} - \frac{\alpha\tau}{2})\|Lu\|^2 +$$
$$+ (\frac{1+r}{2} - \frac{\alpha\tau}{2})\|p\|^2 - |\alpha\tau - r|\|p\|\|Lu\| + \frac{1+r}{2}\|p\|^2 - \frac{1+r}{2}\|s\|^2.$$

Положим $\rho(x) = \dfrac{1+r}{2}\|p\|^2$. Тогда неравенство (8) будет справедливым, если неотрицательно определена квадратичная форма $(\dfrac{2r+r^2}{2+2r} - \dfrac{\alpha\tau}{2})\, t^2 + (\dfrac{1+r}{2} - \dfrac{\alpha\tau}{2})\, s^2 - |\alpha\tau - r|\, ts$. Прямые вычисления приводят к неравенству $\alpha\tau \leqslant 2\dfrac{1+r}{1+2r}r$, что соответствует условию теоремы. Все остальные условия теоремы 3 очевидно выполнены, откуда следует сформулированное утверждение о сходимости итерационного метода (17). $\square$

Рассмотрим снова частный случай вариационного неравенства (10) с $q(x) \equiv 0$ и седловую задачу (15) с $S = 0$ преобразуем к эквивалентной задаче

$$\begin{pmatrix} rL^TL & -rL^T & L^T \\ 0 & E & -E \\ L & -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \partial\varphi(p) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

с блочно треугольной матрицей $A = \begin{pmatrix} rL^TL & -rL^T \\ 0 & E \end{pmatrix}$. Легко проверить, что A положительно определена при $0 < r < 4$. В этом случае для решения задачи (18) можно применить обобщенный метод Узавы (4) с предобусловливателем $D = E$:

$$\begin{gathered} p^{k+1} = (E + \partial\varphi)^{-1}(\lambda^k); \\ rL^TLu^{k+1} = f + rL^Tp^{k+1} - L^T\lambda^k; \\ \lambda^{k+1} = \lambda^k + \tau(Lu^{k+1} - p^{k+1}). \end{gathered} \tag{19}$$

Теорема 6. *Итерационный метод* (19) *решения задачи* (18) *сходится для любого начального приближения* λ^0 *при* $0 < \tau < 2r - \dfrac{r^2}{2}$ $(0 < r < 4)$.

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условия (5) теоремы 2, которое в рассматриваемом случае приобретает вид

$$(Ax,x) - \frac{\alpha\tau}{2}\|Bx\|^2 = r\|Lu\|^2 + \|p\|^2 - r(Lu,p) - \frac{\alpha\tau}{2}\|Lu-p\|^2 =$$
$$= (r - \frac{\alpha\tau}{2})\|Lu\|^2 + (1-\frac{\alpha\tau}{2})\|p\|^2 - |\alpha\tau - r|(Lu,p) \geqslant 0$$

при некотором $\alpha > 1$. Данное неравенство выполнено, если неотрицательно определена квадратичная форма $f(t,s) = (r - \dfrac{\alpha\tau}{2})t^2 + (1-\dfrac{\alpha\tau}{2})s^2 - |r-\alpha\tau|ts$, т.е. при $0 < \alpha\tau \leqslant 2r - \dfrac{r^2}{2}$. □

Применим обобщенный метод Узавы к сеточной аппроксимации вариационного неравенства (10) в общем случае $\bar{q}(x) \neq 0$. Проведем эквивалентное преобразование соответствующей седловой задачи (15), прибавляя к первому уравнению третье, умноженное на rL, $r > 0$, и вычитая из второго включения третье уравнение, умноженное на r:

$$\begin{pmatrix} S + rL^TL & -rL^T & L^T \\ 0 & E & -E \\ L & -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \partial\varphi(p) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Получим условия, обеспечивающее положительную определенность матрицы $A = \begin{pmatrix} S + rL^TL & -rL^T \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G + (r-1)L^TL & -rL^T \\ 0 & E \end{pmatrix}$.

Пусть $x = (u,p)^T$. Будем использовать неравенство $(Gu,u) \geqslant \sigma\|u\|^2$, $\sigma = 1 - q\mu_{\min}^{-1/2} > 0$. Тогда

$$(Ax,x) \geqslant (\sigma + r - 1)\|Lu\|^2 + \|p\|^2 - r\|Lu\|\|p\|$$

и матрица A положительно определена, если положительно определена квадратичная форма $f(t,s) = (\sigma + r - 1)t^2 + s^2 - rts$. Отсюда следует условие на параметр r: $2(1-\sqrt{\sigma}) < r < 2(1+\sqrt{\sigma})$.

Применим для решения седловой задачи (20) итерационный метод

$$\begin{gathered} p^{k+1} = (E + \partial\varphi)^{-1}(\lambda^k); \\ rL^TLu^{k+1} = -Su^k + rL^Tp^{k+1} - L^T\lambda^k + f; \\ \lambda^{k+1} = \lambda^k + \tau(Lu^{k+1} - p^{k+1}), \end{gathered} \tag{21}$$

который является частным случаем (7) с матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} rL^TL & -rL^T \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } D = E.$$

Теорема 7. *Итерационный метод* (21) *для решения седловой задачи* (20) *с* $r \in (2(1-\sqrt{\sigma}), 2(1+\sqrt{\sigma}))$ *сходится, если*

$$\tau < \frac{1}{\sigma}(2\sigma + 2r - 2 - \frac{r^2}{2}), \text{ где } \sigma = 1 - q\mu_{\min}^{-1/2} > 0.$$

В частности, при $r = 2$ *метод* (21) *сходится, если* $\tau < 2$.

Доказательство. Поскольку $\|Bx\|^2 = \|Lu - p\|^2$ и $\|Lu\|^2 \geqslant \mu_{\min}\|u\|^2$, то

$$(A_1x, x) + (A_2y, x) - \frac{\alpha\tau}{2}\|Bx\|^2 = r\|Lu\|^2 + \|p\|^2 - r(Lu, p) + (Sv, u) - \frac{\alpha\tau}{2}\|Lu - p\|^2 =$$
$$= (r - \frac{\alpha\tau}{2})\|Lu\|^2 + (1 - \frac{\alpha\tau}{2})\|p\|^2 - (r - \alpha\tau)(Lu, p) + (Sv, u) \geqslant$$
$$\geqslant (r - \frac{\alpha\tau}{2})\|Lu\|^2 + (1 - \frac{\alpha\tau}{2})\|p\|^2 - |r - \alpha\tau|\|Lu\|\|p\| - \frac{k}{\mu_{\min}^{1/2}}\|Lv\|\|Lu\| \geqslant$$
$$\geqslant (r - \frac{\alpha\tau}{2} - \frac{k}{\mu_{\min}^{1/2}})\|Lu\|^2 + (1 - \frac{\alpha\tau}{2})\|p\|^2 - |r - \alpha\tau|\|Lu\|\|p\| + \frac{k}{\mu_{\min}^{1/2}}(\|Lu\|^2 - \|Lv\|\|Lu\|).$$

При выполнении условия теоремы на параметр τ справедливо неравенство $\frac{\alpha\tau}{2} \leqslant \frac{1}{\sigma}(\sigma + r - 1 - \frac{r^2}{4})$ с некоторым $\alpha > 1$. В свою очередь, это неравенство обеспечивает неотрицательную определенность квадратичной формы $f(s,t) = (r - \frac{\alpha\tau}{2} - \frac{k}{\mu_{\min}^{1/2}})s^2 + (1 - \frac{\alpha\tau}{2})t^2 - |r - \alpha\tau|st$, поэтому неравенство вида (8) теоремы 3 выполнено с функцией $\rho(x) = \frac{q}{\mu_{\min}^{1/2}}\|Lu\|^2$:

$$(A_1x, x) + (A_2y, x) - \frac{\alpha\tau}{2}\|Bx\|^2 \geqslant \frac{q}{\mu_{\min}^{1/2}}(\|Lu\|^2 - \|Lv\|^2).$$

Отсюда в силу теоремы 3 следует сходимость итерационного метода. $\square$

3.2 Двухступенчатые итерационные методы

Рассмотрим метод (19), в котором для определенности возьмем параметр $r = 1$:

$$\begin{gathered} p^{k+1} = (E + \partial\varphi)^{-1}(\lambda^k); \\ L^TLu^{k+1} = f + L^Tp^{k+1} - L^T\lambda^k; \\ \lambda^{k+1} = \lambda^k + \tau(Lu^{k+1} - p^{k+1}). \end{gathered}$$

Пусть уравнение $L^TLu^{k+1} = f + L^Tp^{k+1} - L^T\lambda^k$ решается с помощью какого-либо внутреннего итерационного метода, при этом в качестве начального приближения берется u^k. Обозначим m-ую итерацию этого метода через u_m и пусть T_m – разрешающий оператор (матрица) m-ого шага:

$$u_m - u^{k+1} = T_m(u^k - u^{k+1}) \Rightarrow u^{k+1} = (E - T_m)^{-1}(u_m - T_m u^k).$$

Отсюда следует, что u_m удовлетворяет уравнению

$$L^T L(E - T_m)^{-1}(u_m - T_m u^k) = f + L^T p^{k+1} - L^T \lambda^k.$$

Примем m-ую итерацию внутреннего итерационного процесса u_m за новое, $k+1$-ое, приближение в основном итерационном методе, тогда он приобретет вид:

$$\begin{gathered} p^{k+1} = (E + \partial\varphi)^{-1}(\lambda^k); \\ L^T L(E - T_m)^{-1} u^{k+1} - L^T L(E - T_m)^{-1} T_m u^k = f + L^T p^{k+1} - L^T \lambda^k; \\ \lambda^{k+1} = \lambda^k + \tau(L u^{k+1} - p^{k+1}). \end{gathered} \tag{22}$$

Теорема 8. *Пусть выполнено условие*

$$\|L(E - T_m)^{-1} T_m u\|^2 \leqslant \gamma \|Lu\|^2, \tag{23}$$

где $\gamma > 0$ *достаточно малое число. Тогда метод* (22) *для задачи* (18) *сходится с любого начального приближения* $(\lambda^0,\, p^0)$ *при*

$$0 < \tau < \frac{3 - 8\gamma^{1/2}}{2 - 4\gamma^{1/2}}.$$

Доказательство. Итерационный метод (22) является частным случаем (7) с матрицами $D = E$ и

$$A_1 = \begin{pmatrix} L^T L(E - T_m)^{-1} & -L^T \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -L^T L(E - T_m)^{-1} T_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим условие на итерационный параметр τ, обеспечивающее справедливость неравенства (8). Положим $x = (u, p)^T$, $y = (v, s)^T$. Тогда

$$\begin{aligned} (A_1 x, x) + (A_2 y, x) = (L^T L u, (E - T_m)^{-1} u) + \|p\|^2 - (Lu, p) - \\ - (L^T L u, (E - T_m)^{-1} T_m v) = \|Lu\|^2 + (L^T L u, (E - T_m)^{-1} T_m u) - \\ - (L^T L u, (E - T_m)^{-1} T_m v) + \|p\|^2 - (Lu, p) = \|Lu\|^2 + \|p\|^2 - \\ - (Lu, p) + (Lu, L(E - T_m)^{-1} T_m u) - (Lu, L(E - T_m)^{-1} T_m v). \end{aligned}$$

Применив ε-неравенство к двум последним слагаемым в правой части неравенства, получим

$$\begin{aligned} (A_1 x, x) + (A_2 y, x) \geqslant (1 - \varepsilon)\|Lu\|^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|L(E - T_m)^{-1} T_m u\|^2 - \\ - \frac{1}{2\varepsilon}\|L(E - T_m)^{-1} T_m v\|^2 + \|p\|^2 - (Lu, p) = (1 - \varepsilon)\|Lu\|^2 - \frac{1}{\varepsilon}\|L(E - T_m)^{-1} T_m u\|^2 + \\ + \frac{1}{2\varepsilon}\|L(E - T_m)^{-1} T_m u\|^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|L(E - T_m)^{-1} T_m v\|^2 + \|p\|^2 - (Lu, p). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\rho(\varepsilon, x) = \frac{1}{2\varepsilon}\|L(E-T_m)^{-1}T_m u\|^2,\ \rho(\varepsilon, y) = \frac{1}{2\varepsilon}\|L(E-T_m)^{-1}T_m v\|^2.$$

Тогда

$$(A_1x, x) + (A_2y, x) \geqslant (1 - \varepsilon - \frac{\gamma}{\varepsilon})\|Lu\|^2 + \|p\|^2 - (Lu, p) + \rho_\varepsilon(x) - \rho_\varepsilon(y).$$

Выбрав $\varepsilon = \gamma^{1/2}$, получим неравенство

$$(A_1x, x) + (A_2y, x) \geqslant (1 - 2\gamma^{1/2})\|Lu\|^2 + \|p\|^2 - (Lu, p) + \rho(x) - \rho(y),$$

где $\rho(x) = \rho(\gamma^{1/2}, x)$, $\rho(y) = \rho(\gamma^{1/2}, y)$. Теперь для произвольного $\alpha > 1$

$$(A_1x, x) + (A_2y, x) - \frac{\alpha\tau}{2}\|Bx\|^2 \geqslant (1 - 2\gamma^{1/2} - \frac{\alpha\tau}{2})\|Lu\|^2 + \\ + (1 - \frac{\alpha\tau}{2})\|p\|^2 - |1-\alpha\tau|\|Lu\|\|p\| + \rho(x) - \rho(y).$$

Условие неотрицательной определенности квадратичной формы $f(t,s) = (1 - 2\gamma^{1/2} - \frac{\alpha\tau}{2})t^2 + (1 - \frac{\alpha\tau}{2})s^2 - |1-\alpha\tau|ts$ приводит к ограничению $\alpha\tau \leqslant (3 - 8\gamma^{1/2})(2 - 4\gamma^{1/2})^{-1}$, что соответствует условию на параметр τ в формулировке теоремы. □

Замечание 2. *При $\gamma = 0$, т.е. в случае точного решения системы уравнений, условие сходимости $\tau < \dfrac{3 - 8\gamma^{1/2}}{2 - 4\gamma^{1/2}}$ совпадает с условием $\tau < \dfrac{3}{2}$ из теоремы 6 (при $r = 1$).*

Замечание 3. *Предположим, что матрица T_m коммутирует с матрицей $A_0 = L^TL$ (например, T_m – разрешающая матрица в методе сопряженных градиентов). В этом случае условие (23) выполнено, если*

$$\|T_m\| \leqslant \frac{\gamma}{1+\gamma}. \tag{24}$$

Действительно, при выполнении условия (24) справедливо неравенство

$$\|(E - T_m)^{-1}T_m\| \leqslant \|T_m\|(1 - \|T_m\|)^{-1} \leqslant \gamma.$$

Обозначив $A_0 = L^TL$ и воспользовавшись данной оценкой, получим

$$\|L(E-T_m)^{-1}T_m u\|^2 = (A_0(E-T_m)^{-1}T_m u, (E-T_m)^{-1}T_m u) = \\ = ((E-T_m)^{-1}T_m A_0^{1/2}u, (E-T_m)^{-1}T_m A_0^{1/2}u) \leqslant \gamma\|A_0^{1/2}u\|^2 = \gamma\|Lu\|^2.$$

Предположим теперь, что в методе (17) уравнение для u^{k+1} решается с помощью внутреннего итерационного процесса. Тогда аналогично предыдущему случаю получим итерационный метод

$$\begin{gathered}
L^T L(E-T_m)^{-1}u^{k+1} - L^T L(E-T_m)^{-1}T_m u^k - L^T p^k = f - L^T\lambda^k,\\
2p^{k+1} + \partial\varphi(p^{k+1}) \ni \lambda^k + Lu^{k+1},\\
\lambda^{k+1} = \lambda^k + \tau(Lu^{k+1} - p^{k+1}).
\end{gathered} \tag{25}$$

Заданными считаются начальные приближения λ^0, p^0 u^0.

Теорема 9. *Пусть выполнено условие* (23). *Тогда метод* (25) *для задачи* (16) *сходится для любого начального приближения при*

$$0 < \tau < \frac{4-16\gamma^{1/2}}{3-8\gamma^{1/2}}.$$

Доказательство. Итерационный метод (25) является частным случаем (7) с матрицами $D = E$ и

$$A_1 = \begin{pmatrix} L^T L(E-T_m)^{-1} & 0\\ -L & 2E\end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -L^T L(E-T_m)^{-1}T_m & -L^T\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Положим $x = (u,p)^T$, $y = (v,s)^T$. Тогда

$$\begin{gathered}
(A_1x,x) + (A_2y,x) = (L^T Lu, (E-T_m)^{-1}u) + 2\|p\|^2 - (Lu,p) -\\
(L^T Lu, (E-T_m)^{-1}T_m v) - (s, Lu) = \|Lu\|^2 + (L^T Lu, (E-T_m)^{-1}T_m u) -\\
-(L^T Lu, (E-T_m)^{-1}T_m v) + 2\|p\|^2 - (Lu,p) - (s,Lu) = \|Lu\|^2 + 2\|p\|^2 -\\
-(Lu,p) - (s,Lu) + (Lu, L(E-T_m)^{-1}T_m u) - (Lu, L(E-T_m)^{-1}T_m v).
\end{gathered}$$

Применив ε-неравенство к двум последним слагаемым в правой части неравенства и неравенство $|(s,Lu)| \leqslant \|s\|^2 + \dfrac{1}{4}\|Lu\|^2$, получим

$$\begin{gathered}
(A_1x,x) + (A_2y,x) \geqslant (\frac{3}{4} - \varepsilon)\|Lu\|^2 - \frac{1}{\varepsilon}\|L(E-T_m)^{-1}T_m u\|^2 + \|p\|^2 - (Lu,p) +\\
+ (\|p\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|L(E-T_m)^{-1}T_m u\|^2) - (\|s\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|L(E-T_m)^{-1}T_m v\|^2).
\end{gathered}$$

Обозначим

$$\rho(\varepsilon,x) = \|p\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|L(E-T_m)^{-1}T_m u\|^2,\ \rho(\varepsilon,y) = \|s\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|L(E-T_m)^{-1}T_m v\|^2.$$

Тогда при $\varepsilon = \gamma^{1/2}$ в силу условия (23) получим неравенство

$$(A_1x,x) + (A_2y,x) \geqslant (\frac{3}{4} - 2\gamma^{1/2})\|Lu\|^2 + \|p\|^2 - (Lu,p) + \rho(x) - \rho(y),$$

с $\rho(x) = \rho(\gamma^{1/2}, x)$, $\rho(y) = \rho(\gamma^{1/2}, y)$. Теперь

$$(A_1x, x) + (A_2y, x) - \frac{\alpha\tau}{2}\|Bx\|^2 \geqslant (\frac{3}{4} - 2\gamma^{1/2} - \frac{\alpha\tau}{2})\|Lu\|^2 + \\ + (1 - \frac{\alpha\tau}{2})\|p\|^2 - |1-\alpha\tau|\|Lu\|\|p\| + \rho(x) - \rho(y).$$

Условие неотрицательной определенности квадратичной формы $(\frac{3}{4} - 2\gamma^{1/2} - \frac{\alpha\tau}{2})t^2 + (1 - \frac{\alpha\tau}{2})s^2 - |1-\alpha\tau|ts$ приводит к ограничению $\alpha\tau \leqslant (4 - 16\gamma^{1/2})(3 - 8\gamma^{1/2})^{-1/2}$ при некотором $\alpha > 1$. □

4 Результаты численных экспериментов

Решались конечно-разностные аппроксимации (12), (13) вариационных неравенств (10) и (11), называемые далее задача 1 и задача 2, соответственно. Коэффициент при конвективном члене выбирался равным $\bar{q}(x) = (q, 0)$, $q = \text{const} \geqslant 0$. Правая часть в задаче 1 $f(x) \equiv C = \text{const}$. В задаче 2 правая часть $f(x) = c\delta_{i_1j_1}(x) - c\delta_{i_2j_2}(x)$, где $\delta_{i_1j_1}(x)$ – сеточная δ-функция, равная h^{-2} в точке сетки $x_{i_1j_1}$ и нулю в остальных, $c = \text{const}$. Были выбраны $x_{i_1j_1} = (0.1, 0.1)$ и $x_{i_2j_2} = (0.9, 0.9)$.

Для решения соответствующих седловых сеточных задач были использованы следующие методы:

седловая задача (15) с матрицей $S = 0$ (коэффициент при конвективном члене $k = 0$) при выборе $r = 1$ решалась методом блочной релаксации-Узавы (17),

седловая задача (18) с матрицей $S = 0$ при выборе $r = 1$ решалась обобщенным методом Узавы (19),

седловая задача (18) с матрицей $S \neq 0$ (коэффициент при конвективном члене $k > 0$) при выборе $r = 1$ решалась обобщенным методом Узавы с вычислением конвективного слагаемого на предыдущей итерации (21).

Были реализованы также двухступенчатые процедуры, при этом в качестве внутреннего итерационного метода для решения систем уравнений с сеточным оператором Лапласа выбирался метод верхней релаксации (SOR-метод).

Осуществлялся контроль L_2-нормы невязки на k-ой итерации $\|r^k\|_{L_2} = h\big(\sum\limits_{i=1}^{n^2}(r_i^k)^2\big)^{\frac{1}{2}}$, где вектор невязки определен равенством $r^k = Lu^k - p^k$.

Результаты расчетов представлены в следующих таблицах и графиках.

$n \simeq h^{-1}$	$\|r^N\|_{L_2} < h$ в методе (19)	$\|r^N\|_{L_2} < h$ в методе (17)	$\|r^N\|_{L_2} < 0.01$ в методе (19)	$\|r^N\|_{L_2} < 0.01$ в методе (17)
100	26	27	26	27
300	44	48	26	28
500	55	62	26	28


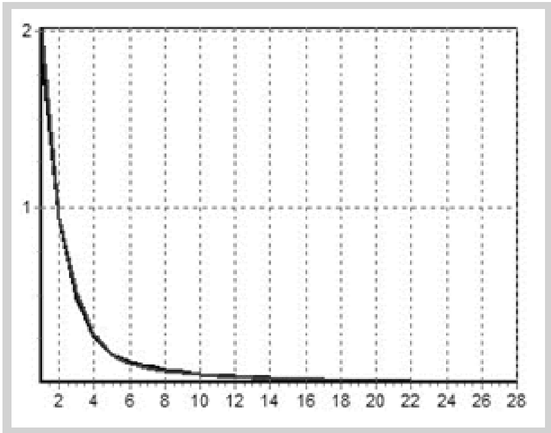

Таблица 1: Решение задачи 1 при $q = 0$, $C = 10$, итерационный параметр выбран $\tau = 0.5$. В таблице приведено число итераций N для достижения указанной точности. На графике приведено поведение нормы невязки для обоих методов (графики практически совпадают). На рисунке черным закрашена часть области, в которой значение модуля сеточного градиента меньше 1.

$k = 0$	$k = 1$	$k = 3$
26	37	41

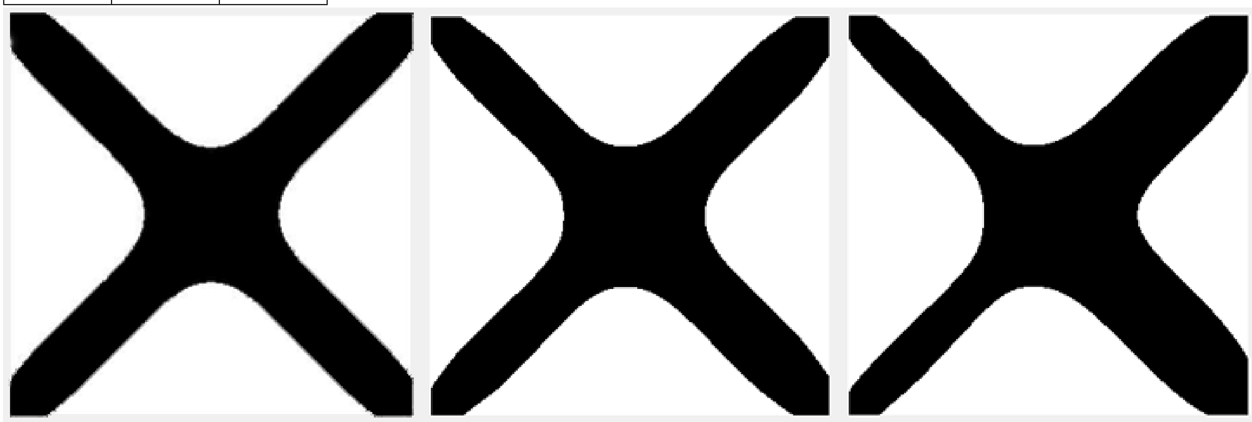

Таблица 2: Решение задачи 1 методом (21) при $C = 10$ и различных коэффициентах q при конвективном члене. В таблице приведено число итераций N для достижения точности $\|r^N\|_{L_2} < 0.01$.

$n \simeq h^{-1}$	$\|r^N\|_{L_2} < h$ в методе (19)	$\|r^N\|_{L_2} < h$ в методе (17)	$\|r^N\|_{L_2} < 0.01$ в методе (19)	$\|r^N\|_{L_2} < 0.01$ в методе (17)
100	9	13	9	13
300	11	13	9	13
500	13	15	9	13

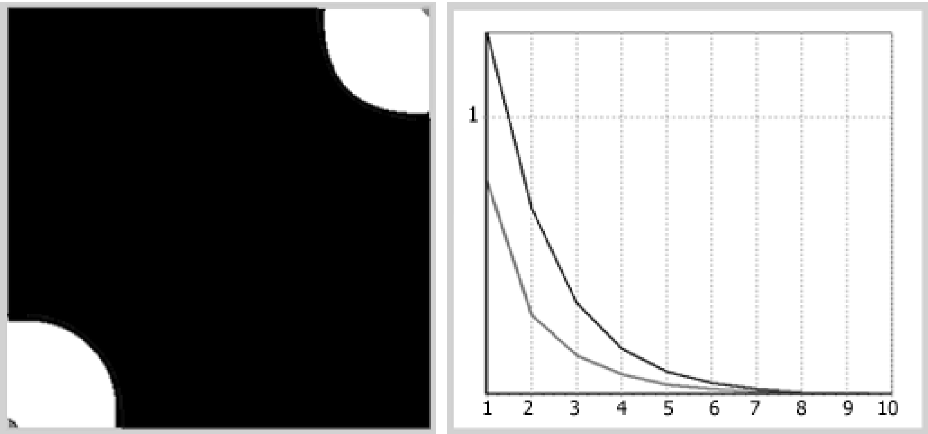

Таблица 3: Решение задачи 2 при $q = 0$, $c = 1$, итерационный параметр выбран $\tau = 0.5$. В таблице приведено число итераций N для достижения указанной точности. На графике приведено поведение нормы невязки для обоих методов (метод (19) быстрее). На рисунке черным закрашена часть области, в которой сеточный градиент равен 0.

$q = 0$	$q = 1$	$q = 5$
9	11	13

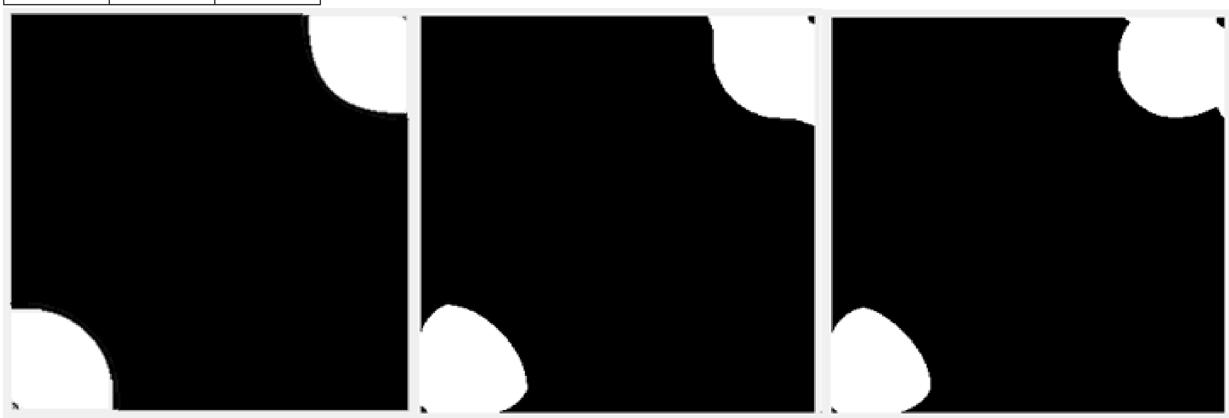

Таблица 4: Решение задачи 2 методом (21) при $c = 1$ и различных коэффициентах при конвективном члене. В таблице приведено число итераций N для достижения точности $\|r^N\|_{L_2} < 0.01$.

Число итераций SOR-метода	N в задаче 1	N в задаче 2
100	27	83
500	26	9
1000	26	9

Таблица 5: Зависимость числа N внешних итераций от числа внутренних итераций для достижения точности $\|r^N\|_{L_2} < h$ при решении задач двухступенчатым методом: внешние итерации – метод (19) и внутренние итерации – SOR-метод.

Из расчетов следует, что методы (19) и (17), использованные в случае $q = 0$, сравнимы между собой по скорости сходимости при точном обращении сеточного оператора Лапласа и скорость сходимости обоих методов не зависит от шага сетки. Решение задачи при $q > 0$ методом (21) несущественно снижает скорость сходимости метода по сравнению со случаем $q = 0$. Влияние точности приближенного обращения внутренним итерационным процессом сеточного оператора Лапласа на скорость сходимости внешнего метода во многом зависит от решаемой задачи.

Список литературы

[1] Fortin M., Glowinski R. *Augmented Lagrangian methods* (North-Holland, Amsterdam, 1983).

[2] Glowinski R., LeTallec P. *Augmented Lagrangian and operator-splitting methods in nonlinear mechanics* (SIAM studies in applied mathematics, Philadelphia, PA, 1989).

[3] Badriev, I.B., Zadvornov, O.A. A decomposition method for variational inequalities of the second kind with strongly inverse-monotone operators // Differential Equations. - 2003. V. 39, № 7. - P. 936-944.

[4] Badriev, I.B., Zadvornov, O.A. On the convergence of the dual-type iterative method for mixed variational inequalities // Differential Equations. - 2006. - V. 42, № 8. - P. 1180-1188

[5] Lapin A. *Preconditioned Uzawa type methods for finite-dimensional constrained saddle point problems,* Lobachevskii J. Math., **31** (4), 309-322 (2010).

[6] Laitinen E., Lapin A. *Iterative Solution Methods for the Large-Scale Constrained Saddle Point Problems* "Numerical Methods for Differential Equations, Optimization, and Technological Problems Comp. Meth. Appl. Sc., **27**, 19-39 (2013).

[7] Laitinen E., Lapin A., Lapin S. *Iterative solution methods for variational inequalities with nonlinear main operator and constraints to gradient of solution,* Lobachevskii J. Math., **33** (4), 364-371 (2012).

[8] Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. *Численное исследование вариационных неравенств* (Мир, М., 1979).

[9] Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы* (Мир, М., 1979).

А.В. Лапин (A. Lapin)

профессор, кафедра математической статистики, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 18. Казань.

e-mail: avlapine@mail.ru

Н.С. Каштанов (N. Kashtanov)

аспирант, кафедра математической статистики, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 18. Казань.

e-mail: