УДК 519.65 + 517.98

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МАТРИЧНОЙ АППРОКСИМАЦИИ[1)]

Р.Н. ГУМЕРОВ, С.И. ВИДУНОВ

Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: renat.gumerov@kpfu.ru

ON A MATRIX APPROXIMATION PROBLEM

R.N. GUMEROV, S.I. VIDUNOV

Kazan Federal University

Аннотация

В нормированном пространстве всех квадратных матриц над полем действительных (или комплексных) чисел рассматривается задача об одновременной аппроксимации двух произвольных матриц парой обратимых матриц. При этом накладывается дополнительное условие простоты всех собственных значений некоторой матрицы произведения, определяемой в терминах приближающих матриц.

Ключевые слова: Аппроксимация, матрица, норма, простое собственное значение, простой спектр.

Summary

In the normed space of all square matrices over the field of real (or complex) numbers we consider a problem on simultaneous approximation of two arbitrary matrices by a pair of invertible matrices. Moreover, it is required that all eigenvalues of some product matrix which is defined in terms of approximating matrices to be simple.

Key words: Approximation, matrix, norm, simple eigenvalue, simple spectrum.

Введение

Пусть $\mathbb{F}$ обозначает поле действительных чисел $\mathbb{R}$ или поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Линейное пространство $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ всех квадратных матриц порядка n наделяется произвольной нормой. В силу конечномерности этого пространства все нормы на нем эквивалентны и порождают одну и ту же топологию. Через $\mathbb{GL}_n(\mathbb{F})$ обозначается группа обратимых матриц в алгебре $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. Хорошо известно (см., например, [1], Глава 2), что множество $\mathbb{GL}_n(\mathbb{F})$ и множество матриц из $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, которые диагонализуемы в $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, являются всюду плотными множествами в топологическом пространстве $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. В матричном анализе эти факты и операция предельного перехода позволяют переносить некоторые свойства обратимых и диагонализуемых матриц на произвольные матрицы.

Собственное значение матрицы называется *простым*, если его алгебраическая кратность равна единице. Множество всех собственных значений матрицы $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ называется *спектром* матрицы A. Если все собственные значения матрицы A простые, то спектр матрицы A называется *простым*. Другими словами, спектр этой матрицы состоит из n различных комплексных чисел. Очевидно, что матрица с простым спектром является диагонализуемой.

Мы рассматриваем задачу об одновременной аппроксимации двух элементов A и B банахова пространства $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ парой элементов A_ε и B_ε из группы невырожденных матриц $\mathbb{GL}_n(\mathbb{F})$ с точностью до

[1)] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-97016)

$\varepsilon > 0$. При этом на матрицы A_ε и B_ε накладывается следующее дополнительное условие. Пусть изначально задано некоторое отображение

$$f : \mathbb{GL}_n(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{GL}_n(\mathbb{F}).$$

Требуется, чтобы спектр матрицы произведения $A_\varepsilon f(B_\varepsilon)$ был простым.

Мотивацией к постановке указанной задачи послужили доказательства ряда интересных результатов из теории тензорных рангов. Так, случай этой задачи, когда функция f является отображением вычисления обратной матрицы:

$$\mathbb{GL}_n(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{GL}_n(\mathbb{F}) : X \longmapsto X^{-1},$$

то есть требуется простота спектра матрицы $A_\varepsilon B_\varepsilon^{-1}$, возникает в [2] при установлении нетривиальной верхней оценки для тензорного ранга обратной матрицы.

Формулировка результата

Для определенности будем считать, что в пространстве $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ норма матрицы $A = (a_{ij})$ определяется формулой

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

Иногда эта норма называется *нормой Фробениуса*.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть A и B — произвольные матрицы из $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ и $f : \mathbb{GL}_n(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{GL}_n(\mathbb{F})$ — некоторое отображение. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют матрицы A_ε и B_ε из $\mathbb{GL}_n(\mathbb{F})$, удовлетворяющие неравенствам*

$$\|A - A_\varepsilon\| < \varepsilon, \qquad \|B - B_\varepsilon\| < \varepsilon,$$

и такие, что матрица $A_\varepsilon f(B_\varepsilon)$ имеет простой спектр.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. — М: Мир, 1989. — 655 с.
2. **Tyrtyshnikov E.** Tensor ranks for the inversion of tensor-product binomials // J. Comput. Appl. Math. — 2010. — V. 234, № 11. — P. 3170–3174.

REFERENCES

1. **Horn R.A., Johnson C.R.** Matrix Analysis. — Cambridge University Press, Cambridge, England, 1985.
2. **Tyrtyshnikov E.** Tensor ranks for the inversion of tensor-product binomials // J. Comput. Appl. Math. — 2010. — V. 234, no 11. — P. 3170–3174.