«Математика в высшей школе»

Физико-математические науки

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ КАК МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

Матвеева А.Е., Макарова Н.В., Миронова Ю.Н.

Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета, Елабуга

Один из методов вычисления интегралов, называемый интегрированием по частям, основан на правиле дифференцирования произведения двух функций. Рассмотрим функции

$$u = u(x), v = v(x),$$

дифференцируемые на некотором промежутке X. Согласно свойствам дифференциалов, имеет место следующее равенство:

$$d(uv) = udv + vdu .$$

Взяв неопределенный интеграл от обеих частей этого равенства, получим:

$$\int d(uv) = \int (udv + vdu).$$

Так как:

$$\int (udv + vdu) = \int udv + \int vdu,$$

то получаем:

$$uv + C = \int udv + \int vdu,$$

откуда

$$\int udv = uv + C - \int vdu.$$

Мы получили формулу интегрирования по частям:

$$\int udv = uv + C - \int vdu. \qquad (1)$$

Так как $\int vdu$ существует по условию, то $\int udv$ тоже существует. Метод используется следующим образом. В $\int f(x)dx$ выделяем u и dv, затем находим du, а из dv интегрированием находим v и используем формулу интегрирования по частям. u и dv нужно выбрать так, чтобы:

Из dv легко находилась v; $\int vdu$ вычислялся легче, чем $\int udv$.

З а м е ч а н и е. Иногда интегрирование по частям приходятся применять несколько раз.

Пример 1

Вычислить интеграл $\int \ln xdx$

Решение: Положим

$$u = \ln x, dv = dx .$$

Тогда

$$du = \frac{dx}{x}, v = x .$$

Используя формулу (1), получим:

$$\int \ln xdx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C .$$

Ответ: $\int \ln xdx = x\ln x - x + C$.

Пример 2

Вычислить интеграл $\int x^n \ln xdx$

Решение: Положим

$$u = \ln x, dv = x^n dx.$$

Тогда

$$du = \frac{1}{x}dx, v = \frac{x^{n+1}}{n+1} .$$

Используя формулу (1), получим :

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1}\frac{1}{x}dx =$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1} + C =$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$$

Ответ: $\int x^n \ln xdx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C$.

Пример 3

Вычислить интеграл $\int x^2 \cos dx$.

Решение: Положим

$$u = x^2, dv = \cos xdx.$$

Тогда $du = 2xdx, v = \sin x$.

Используя формулу (1), получим :

$$x^2 \sin x - \int \sin x \cdot 2xdx = x^2 \sin x - 2\int x\sin xdx .$$

Положим

$$u = x, dv = \sin xdx.$$

Тогда

$$du = dx, v = -\cos x .$$

$$x^2 \sin x - 2\int x\sin xdx =$$
$$= x^2 \sin x - 2\left(x(-\cos x) - \cos x\right)dx =$$
$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos xdx =$$
$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C =$$
$$= \left(x^2 - 1\right)\sin x + 2x\cos x + C.$$

Ответ: $\int x^2 cosdx = \left(x^2 - 1\right)\sin x + 2x\cos x + C$

Пример 4

Вычислить интеграл: $\int x^2 \ln^2 x dx$

Решение: Положим

$$u = \ln^2 x, du = \frac{2\ln x dx}{x}.$$

Тогда

$$dv = x^2 dx, v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}.$$

$$\int x^2 \ln^2 x dx = \frac{x^3 \ln^2 x}{3} - \int \frac{2x^3 \ln x dx}{3x} =$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln^2 x - \frac{2}{3} \int x^2 \ln x dx.$$

Положим

$$u = \ln x, dv = x^2 dx.$$

Тогда

$$du = \frac{dx}{x}, v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 \ln^2 x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln^2 x - \frac{2}{3} \int x^2 \ln x dx =$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln^2 x - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} x^3 \ln x - \int \frac{x^3 dx}{3x} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln^2 x - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2}{27} x^3 + C.$$

Ответ:

$$\int x^2 \ln^2 x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln^2 x - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2}{27} x^3 + C.$$

Список литературы

1. Математический анализ: Интегральное исчисление: Учеб. пособие для студентов-заочников 2 курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Н.Я. Виленкин, А.Г. Мордкович, Е.С. Куницкая; Моск. гос. заоч. пед. ин-т. – 2-е изд., перераб. – М.: Просвещение, 1988. – 14 с.

2. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М., 1969. – 125 с.