ГЛАВА 16. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§1. ПРИВЕДЕНИЕ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Отнесем трехмерное евклидово пространство $\mathbf{V}_3$ к декартовой системе координат. ***Поверхностью второго порядка*** называется множество всех точек $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих уравнению

$$(Ax, x) + 2(a, x) + a_0 = 0,$$

где заданы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0, \quad a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3, \quad a_0 \in \mathbb{R}.$$

Простейший пример: уравнение сферы радиуса R с центром в точке $c = (c_1, c_2, c_3)$, как известно, имеет вид

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + (x_3 - c_3)^2 = R^2.$$

Преобразуем это уравнение:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1c_1 - 2x_2c_2 - 2x_3c_3 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - R^2 = 0,$$

$$(x, x) - 2(c, x) + |c|^2 - R^2 = 0,$$

т. е. в данном случае

$$(Ax, x) + 2(a, x) + a_0 = 0,$$

где

$$A = I, \quad a = -c, \quad a_0 = |c|^2 - R^2.$$

Упрощение уравнения

$$(Ax, x) + 2(a, x) + a_0 = 0$$

опирается на общую теорию квадратичных функций. Оно основано на замене переменных

$$x = x^0 + Ty,$$

где T — некоторая ортогональная матрица.

.

Геометрически замена переменных

$$x = x^0 + Ty$$

состоит в переносе начала координат в точку x^0, повороте системы координат вокруг некоторой оси и, возможно, последующем изменении направления этой координатной оси.

.

Из общей теорией квадратичных функций вытекает, что, выбирая соответствующим образом начало x^0 новой декартовой системы координат и ортогональную матрицу T, уравнение

$$(Ax, x) + 2(a, x) + a_0 = 0$$

поверхности второго порядка можно преобразовать к одному из следующих пяти видов.

.

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \widehat{a}_0 = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0,$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\widehat{a}_3 x_3 = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\ \ \lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \widehat{a}_{0,1} = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\ \ \lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_1 x_1^2 + 2\widehat{a}_2 x_2 = 0, \qquad \lambda_1 \neq 0,\ \ \lambda_2, \lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \widehat{a}_{0,2} = 0, \qquad \lambda_1 \neq 0,\ \ \lambda_2, \lambda_3 = 0.$$

Коэффициенты этих уравнений могут быть однозначно выражены через коэффициенты исходного уравнения

$$(Ax, x) + 2(a, x) + a_0 = 0.$$

Введем в рассмотрение наряду с матрицей A матрицу

$$B = \begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}.$$

.

В уравнении

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \widehat{a}_0 = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0,$$

коэффициент $\widehat{a}_0$ вычисляется по формуле

$$\widehat{a}_0 = \frac{\mathcal{I}_4(B)}{\mathcal{I}_3(A)} = \frac{\det(B)}{\det(A)},$$

$$B = \begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}.$$

В уравнении

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \widehat{a}_{0,1} = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \;\; \lambda_3 = 0,$$

имеем

$$\widehat{a}_{0,1} = \frac{\mathcal{I}_3(B)}{\mathcal{I}_2(A)},$$

$$\mathcal{I}_2(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{I}_3(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

В формуле для $\mathcal{I}_3(B)$ **мы опустили нулевое слагаемое, учитывая, что** $\operatorname{rank}(A) = 2$ **и, следовательно,** $\det(A) = 0$.

В уравнении

$$\lambda_1 x_1^2 + \widehat{a}_{0,2} = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2, \lambda_3 = 0,$$

имеем

$$\widehat{a}_{0,2} = \frac{\mathcal{I}_2(B)}{\mathcal{I}_1(A)},$$

$$\mathcal{I}_1(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$\mathcal{I}_2(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

В формуле для $\mathcal{I}_2(B)$, мы опустили нулевые слагаемые, учитывая, что $\mathrm{rank}(A) = 1$ и, следовательно, все миноры второго порядка матрицы A равны нулю.

.

В уравнении

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\widehat{a}_3 x_3 = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \;\; \lambda_3 = 0,$$

имеем

$$\widehat{a}_3 = \sqrt{-\frac{\mathcal{I}_4(B)}{\mathcal{I}_2(A)}},$$

$$\mathcal{I}_4(B) = \det(B),$$

$$\mathcal{I}_2(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

В уравнении

$$\lambda_1 x_1^2 + 2\widehat{a}_2 x_2 = 0, \qquad \lambda_1 \neq 0,\ \ \lambda_2, \lambda_3 = 0,$$

имеем

$$\widehat{a}_2 = \sqrt{-\frac{\mathcal{I}_3(B)}{\mathcal{I}_1(A)}},$$

$$\mathcal{I}_1(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$\mathcal{I}_3(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

В формуле для $\mathcal{I}_3(B)$ мы опустили нулевое слагаемое, учитывая, что $\operatorname{rank}(A) = 1$ и, следовательно, $\det(A) = 0$.

§2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Нам предстоит исследовать поверхности, описываемые следующими уравнениями:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0,$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,$$

$$y^2 = 2px,$$

$$y^2 + d = 0.$$

Для удобства здесь очевидным образом изменены обозначения декартовых координат и некоторых коэффициентов.

Начнем с уравнения

$$y^2 + d = 0.$$

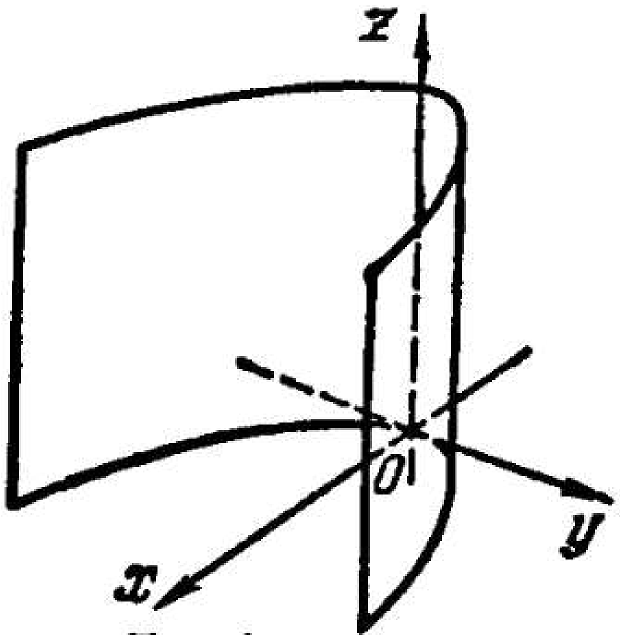
Здесь возможны три случая:

1) $\underline{d < 0}$, поверхность распадается на две параллельные плоскости

$$y = \sqrt{-d}, \quad y = -\sqrt{-d};$$

2) $\underline{d = 0}$, поверхность представляет собой плоскость $y = 0$;

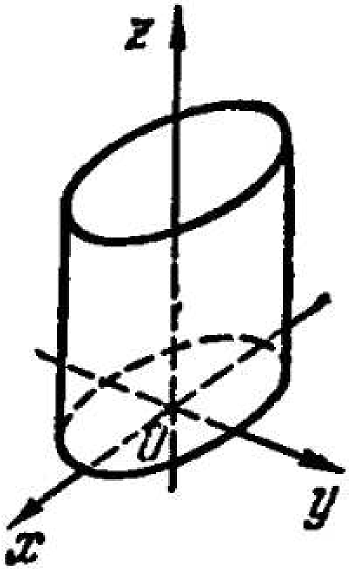
3) $\underline{d > 0}$, нет ни одной точки пространства, удовлетворяющей уравнению, говорят, что уравнение описывает пару параллельных ***мнимых плоскостей***.



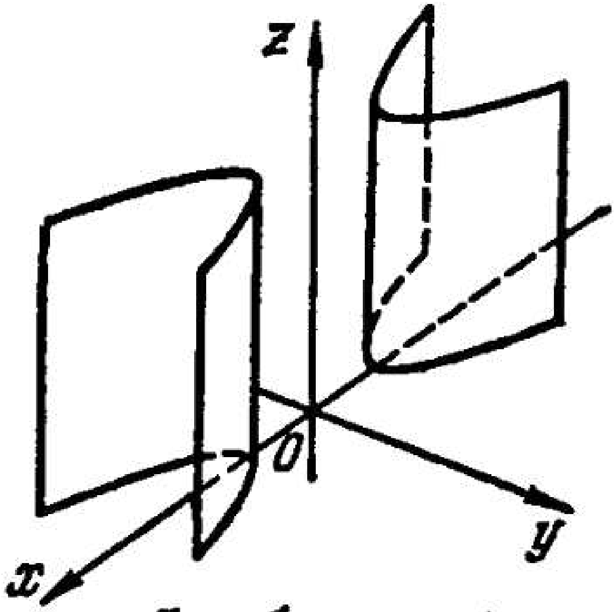
Как показано в предыдущей главе, уравнение

$$y^2 = 2px$$

описывает параболу на плоскости переменных (x, y), поэтому эта поверхность есть так называемый ***параболический цилиндр*** с образующей, параллельной оси z. Любое сечение этой поверхности плоскостью $z = \text{const}$ — парабола.



Эллиптический цилиндр



Гиперболический цилиндр

Уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,$$

в зависимости от знаков λ_1, λ_2, d может описывать эллипс или гиперболу в декартовой плоскости x, y. Соответствующие поверхности — ***эллиптический*** или ***гиперболический цилиндр***. Понятно, что здесь возможны случаи вырождения.

.

Обратимся к уравнению

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0.$$

Здесь нужно различать два случая.

1) Числа λ_1, λ_2 имеют одинаковые знаки. Для определенности будем считать, что они положительны. Будем считать, что $b_3 < 0$. Если принять, что $b_3 > 0$, то получим, очевидно такую же, поверхность, но симметричную относительно плоскости x, y. Если $b_3 = 0$, то мы приходим к одной из поверхностей, рассмотренных в предыдущем пункте.

Уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0, \quad b_3 < 0,$$

можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z.$$

Здесь

$$a^2 = 2|b_3|/\lambda_1, \quad b^2 = 2|b_3|/\lambda_2.$$

.

При

$$z < 0$$

уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

противоречиво, т. е. вся поверхность расположена в полупространстве

$$z \geqslant 0.$$

Начало координат — единственная точка плоскости $z = 0$, принадлежащая поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z.$$

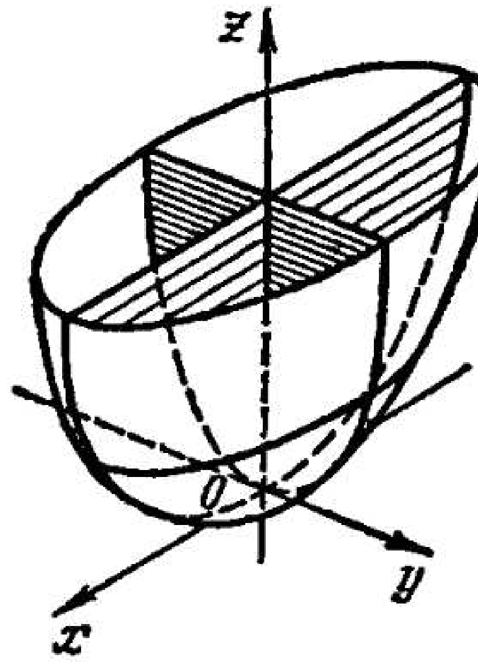
Координатные плоскости $x = 0$, $y = 0$ являются плоскостями симметрии, ось z является осью симметрии так как если точка

$$(x, y, z)$$

принадлежит поверхности, то точки

$$(-x, y, z), \quad (x, -y, z), \quad (-x, -y, z)$$

также принадлежат поверхности.



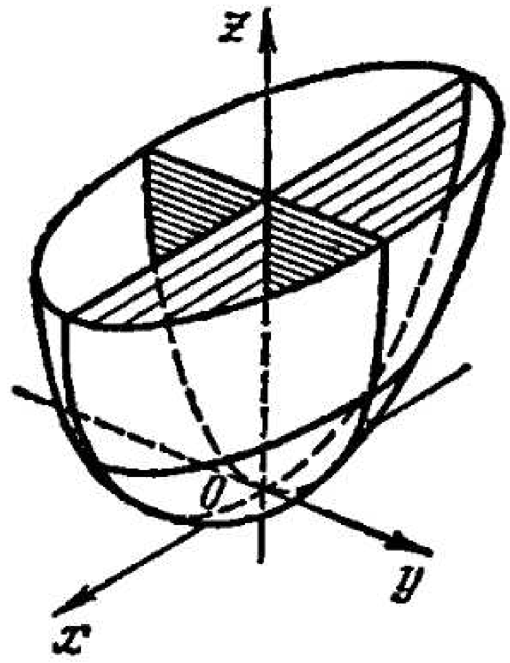
Записывая уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z.$$

при $z > 0$ в виде

$$\frac{x^2}{za^2} + \frac{y^2}{zb^2} = 1,$$

получаем, что сечения поверхности плоскостями $z = \text{const} > 0$ есть эллипсы, полуоси которых увеличиваются с ростом z.



Сечения поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

плоскостям $x = \mathrm{const}$ или $y = \mathrm{const}$ есть параболы. Описанную поверхность называют ***эллиптическим параболоидом***

2) В уравнении

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$$

числа λ_1, λ_2 имеют разные знаки. Будем считать что

$$\lambda_1 > 0,\ \ \lambda_2 < 0,\ \ b_3 < 0.$$

Любое другое допустимое сочетание знаков рассматривается полностью аналогично.

Уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z = 0, \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0, \quad b_3 < 0,$$

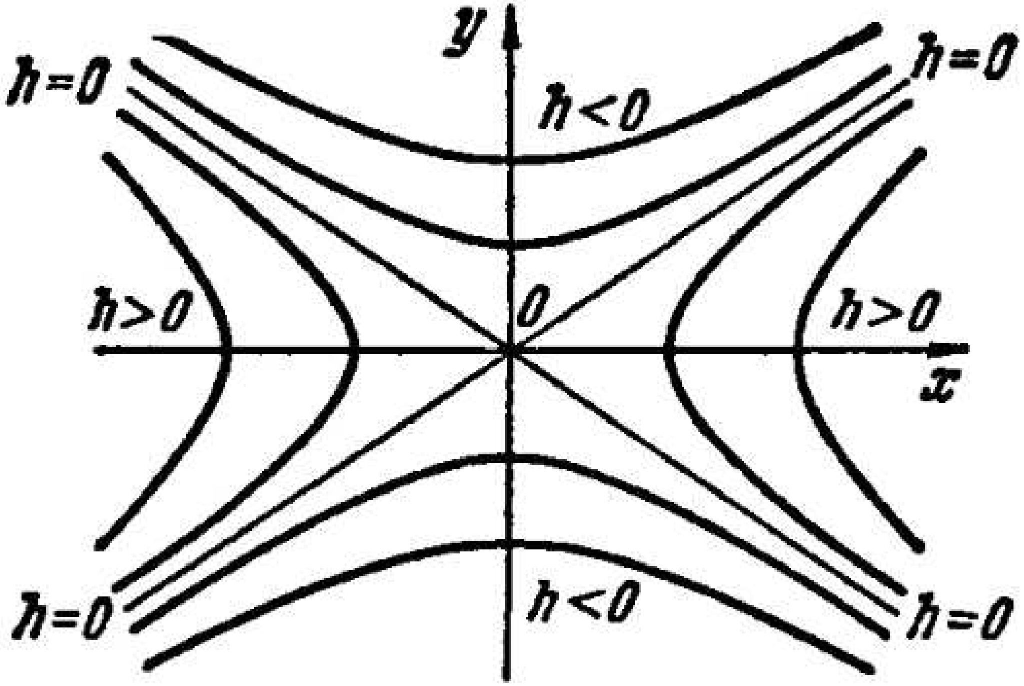
можно записать а виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$$

Здесь

$$a^2 = 2|b_3|/\lambda_1, \quad b^2 = 2|b_3|/|\lambda_2|.$$

Вновь, координатные плоскости $x = 0$, $y = 0$ являются плоскостями симметрии, ось z является осью симметрии.

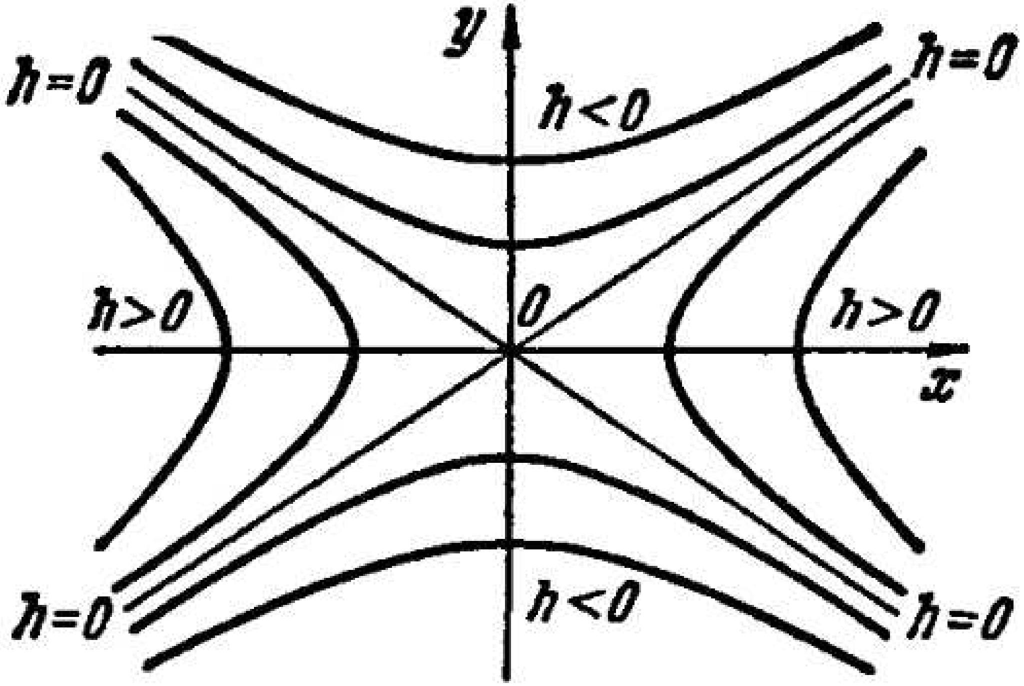


Проанализируем сечения поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

плоскостями $z = h$. При $h = 0$ получаем уравнение $b^2x^2 - a^2y^2 = 0$, т. е. сечение поверхности плоскостью $z = 0$ есть пара прямых

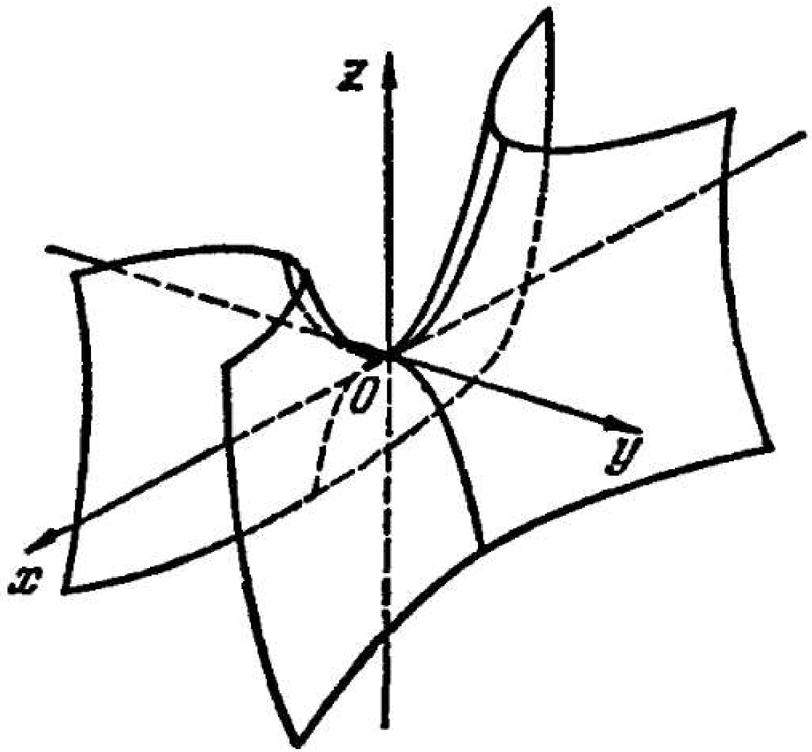
$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$



При $z = h \neq 0$ запишем уравнение в виде

$$\frac{x^2}{ha^2} - \frac{y^2}{hb^2} = 1.$$

При $h > 0$ это уравнение гиперболы, ветви которой вытянуты вдоль оси x. При $h < 0$ получаем гиперболу, ветви которой вытянуты вдоль оси y.



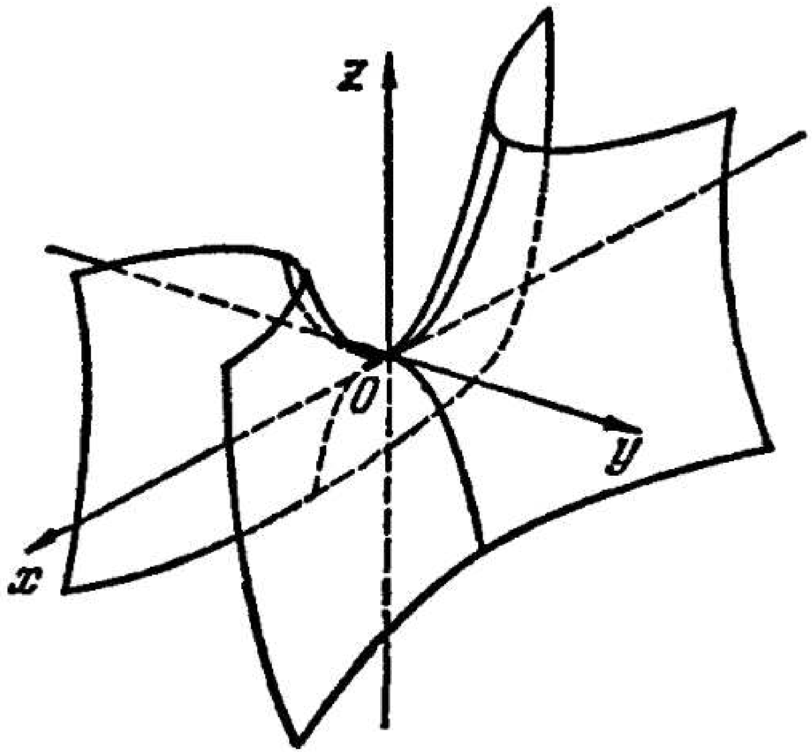
Пересекая поверхность

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

плоскостью $x = h$, получаем параболу

$$\frac{h^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z,$$

ветви которой направлены противоположно оси z.



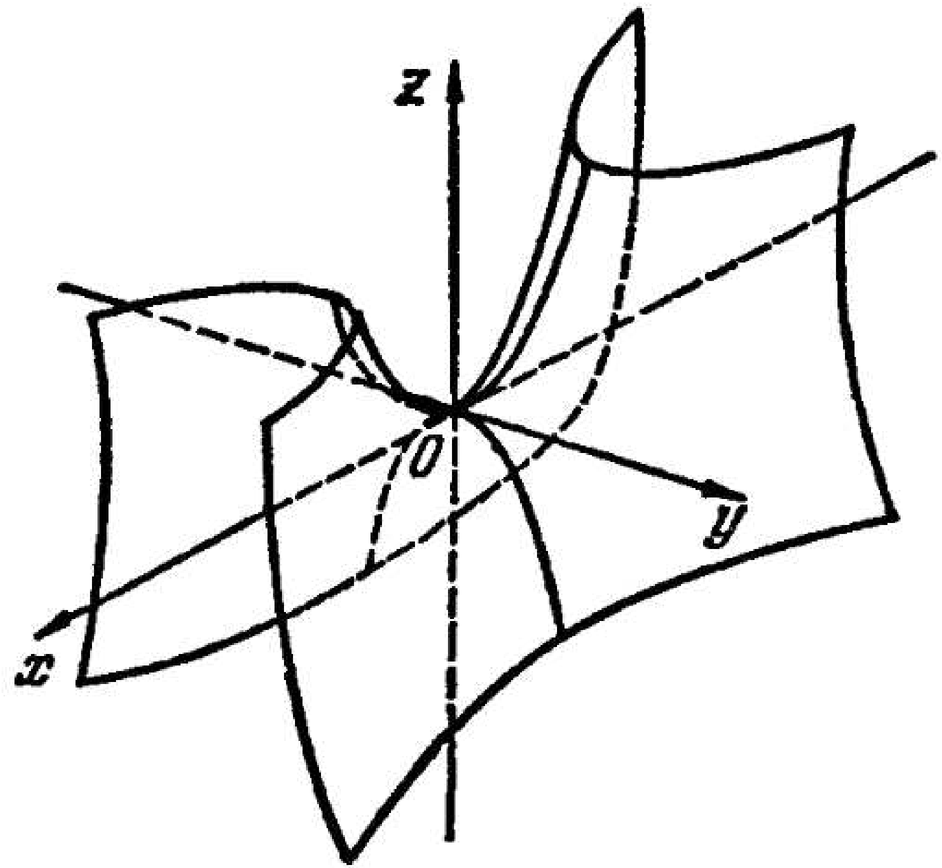
Пересекая поверхность

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

плоскостью $y = h$, получаем параболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{h^2}{b^2} = z,$$

ветви которой направлены вдоль оси z.



Описанную седлообразную поверхность называют

<u>*гиперболическим параболоидом*</u>.

Обратимся, наконец, к уравнению

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^3 + d = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0.$$

Не ограничивая общности, здесь можно различать два случая:

1) $\underline{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 > 0}$, это условие эквивалентно условию положительной определенности матрицы A;

2) $\underline{\lambda_1,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 < 0}$.

.

В случае 1) возможны три ситуации:

<u>$d = 0$</u>, единственная точка, удовлетворяющая уравнению

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0,$$

есть начало координат;

<u>$d > 0$</u>, нет ни одной точки пространства, удовлетворяющей этому уравнению;

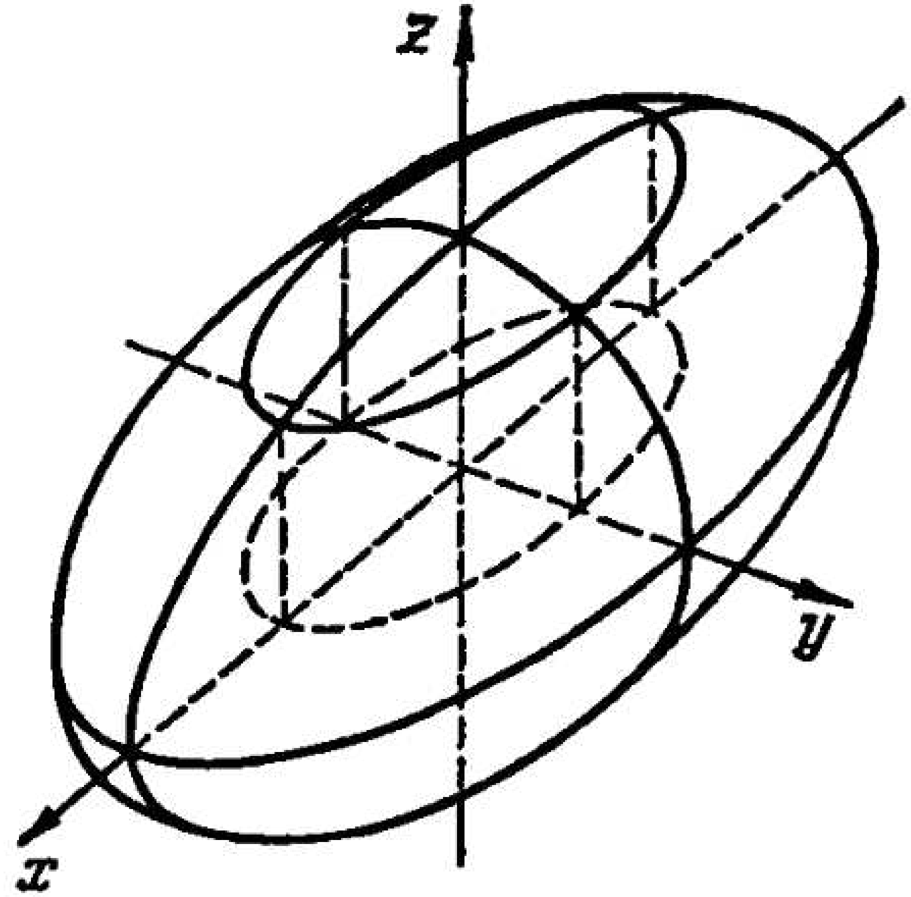
<u>$d < 0$</u>. Уравнение запишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Здесь

$$a^2 = -d/\lambda_1, \quad b^2 = -d/\lambda_2, \quad c^2 = -d/\lambda_3.$$

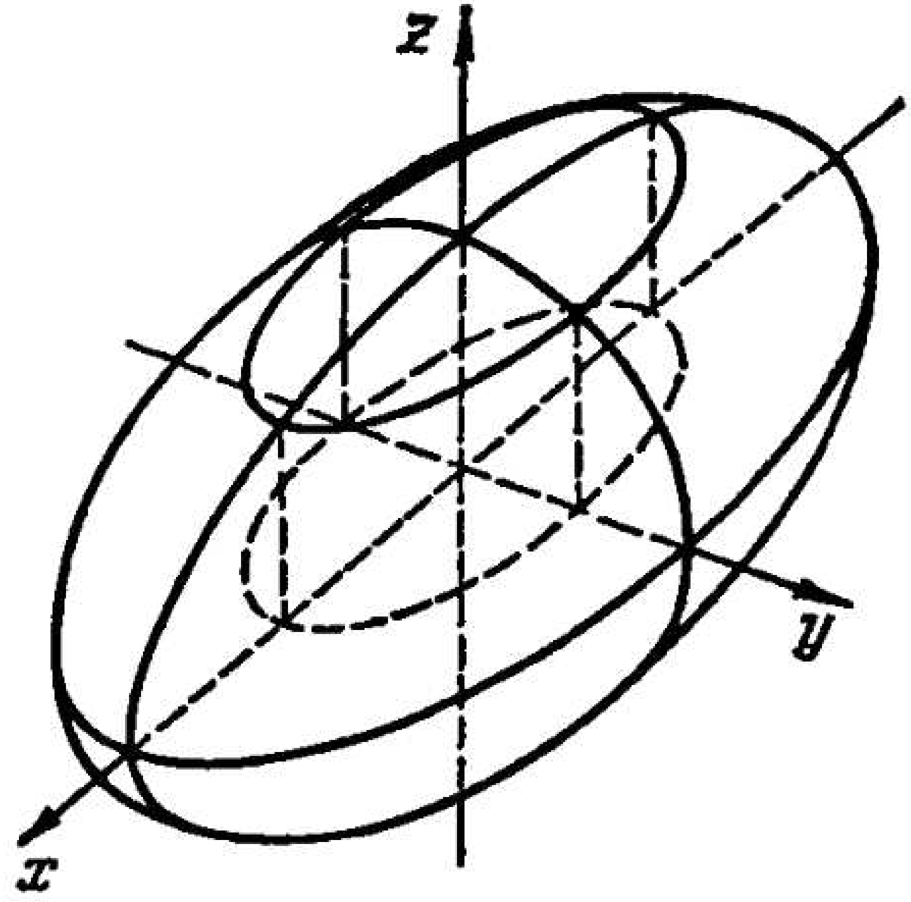
Эта поверхность называется <u>***эллипсоидом***</u>.



Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

очевидно, симметричен относительно всех трех координатных плоскостей и начала координат.



Вся поверхность

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

заключена в параллелепипеде $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, $|z| \leqslant c$ и, следовательно, ограничена.

Изучим сечения эллипсоида плоскостями, параллельным координатным. Вследствие симметрии поверхности достаточно ограничиться, например, плоскостями параллельным плоскости x, y.

Нетрудно убедиться, что кривая, получающуюся при пересечении эллипсоида

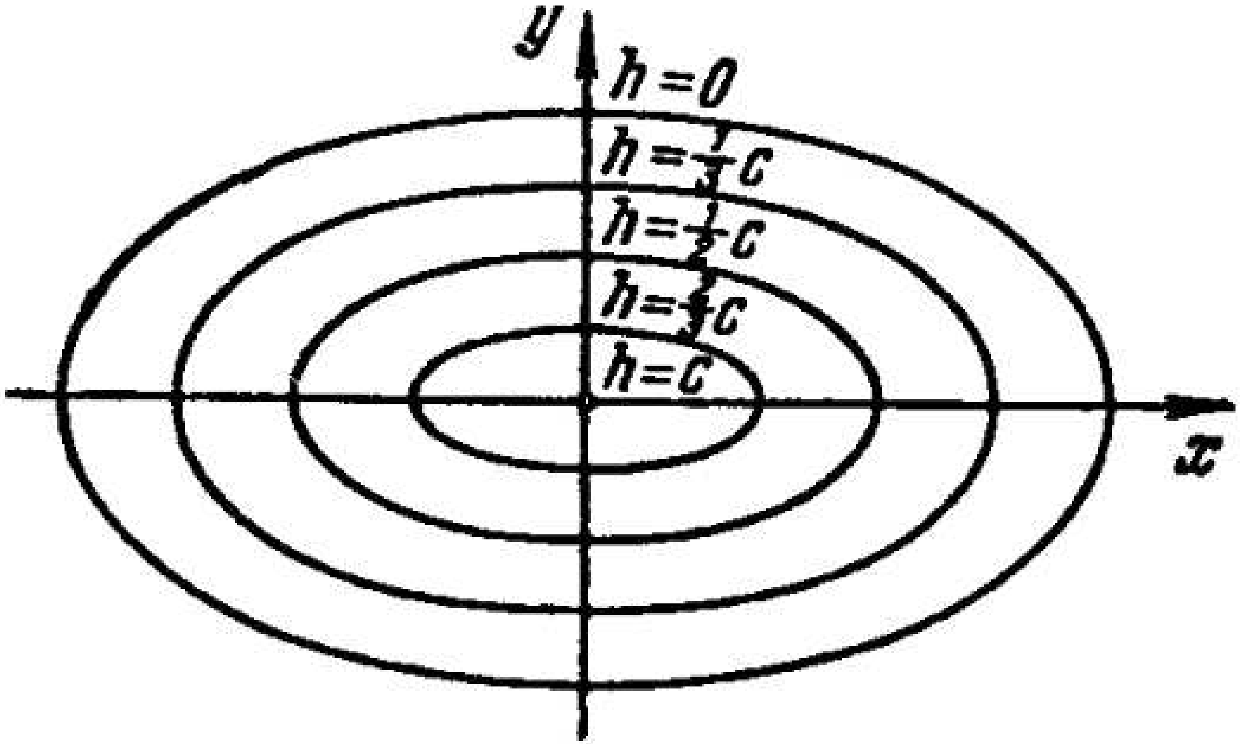
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

с плоскостью

$$z = h, \quad |h| \le c,$$

является эллипсом с полуосями

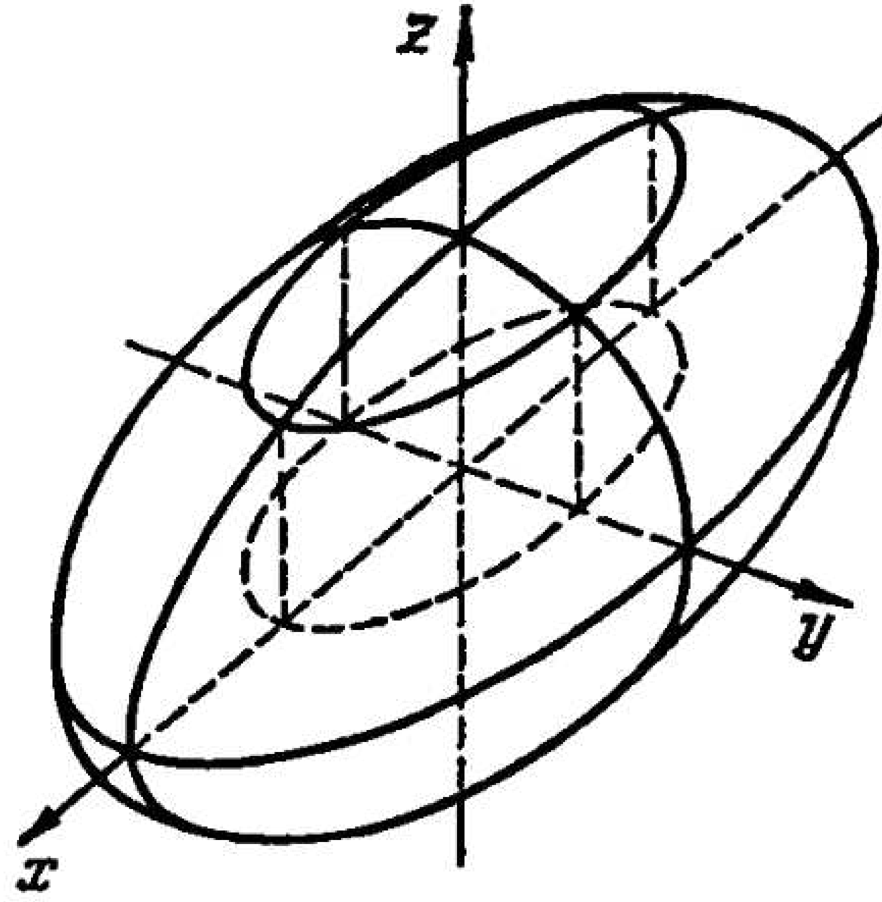
$$a_1 = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad b_1 = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}.$$



При возрастании h от 0 до c, полуоси

$$a_1 = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad b_1 = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$$

убывают. При $h = \pm c$ эллипс вырождается в точку.



Полезно отметить, что сечение эллипсоида любой плоскостью дает эллипс. В самом деле, это сечение — кривая второго порядка. Она ограничена, так как эллипсоид ограничен, но единственной ограниченной кривой второго порядка является эллипс.

Обратимся к случаю 2). Пусть при этом $\underline{d = 0}$. Запишем уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0, \quad \lambda_1,\ \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 < 0,$$

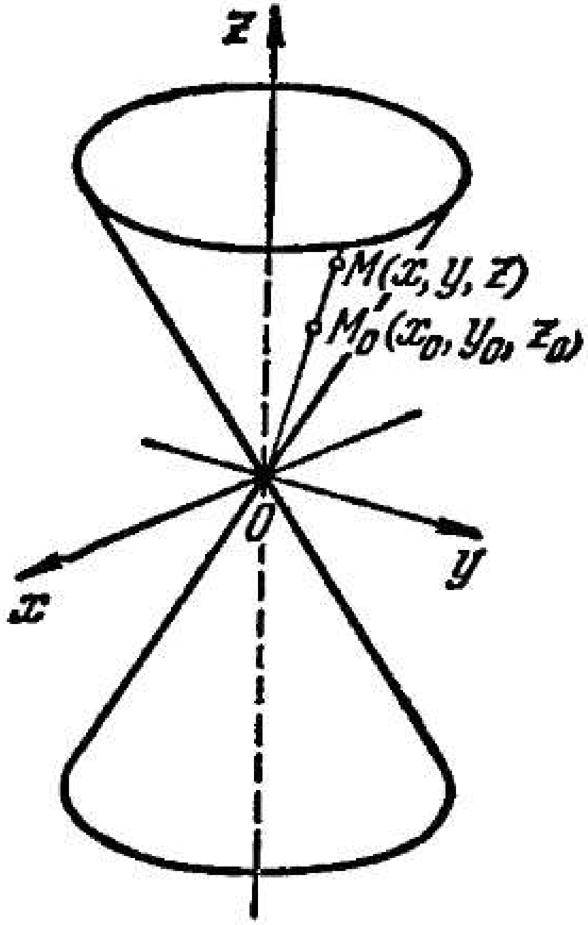
в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Здесь

$$a^2 = 1/\lambda_1, \quad b^2 = 1/\lambda_2, \quad c^2 = -1/\lambda_3.$$

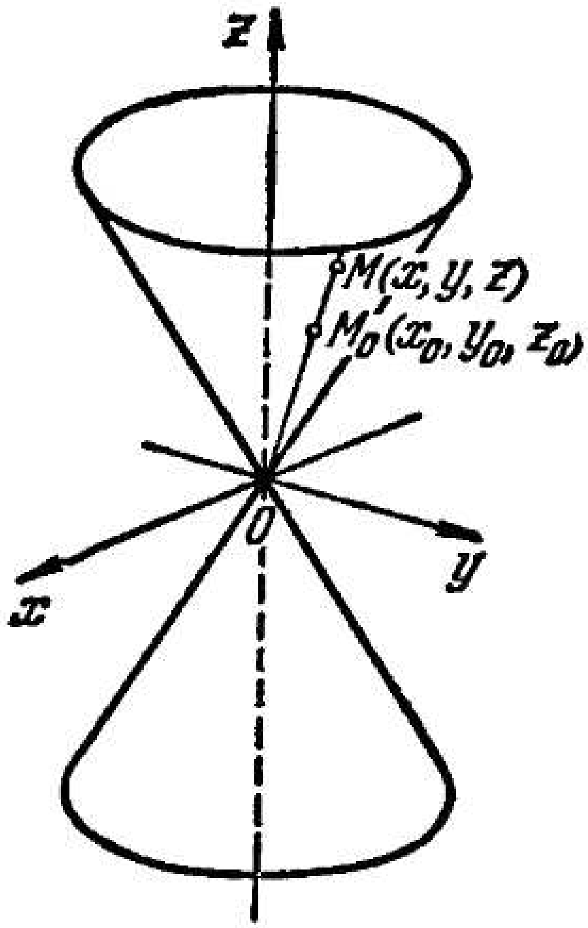
Эта поверхность называется ***эллиптическим конусом***.



Поверхность

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

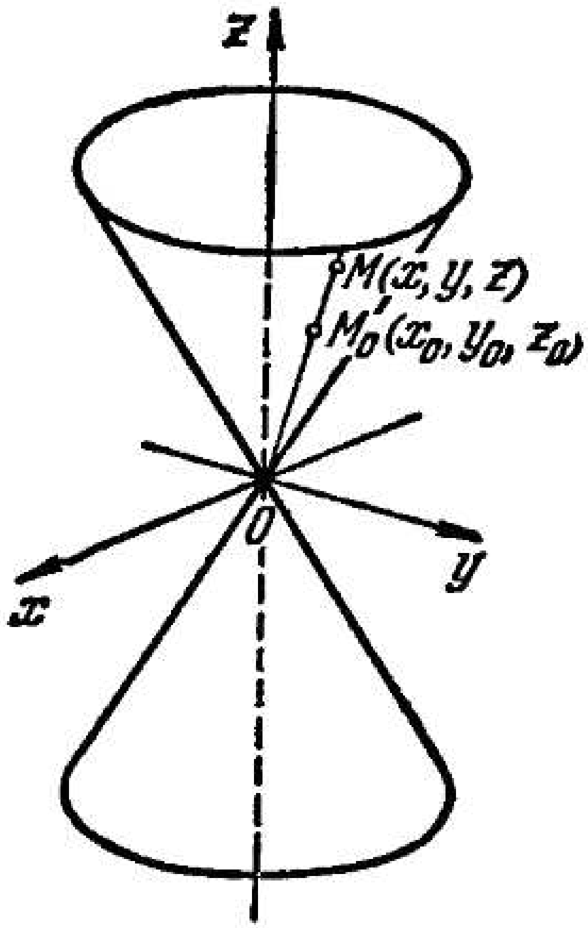
симметрична относительно всех трех координатных плоскостей и начала координат.



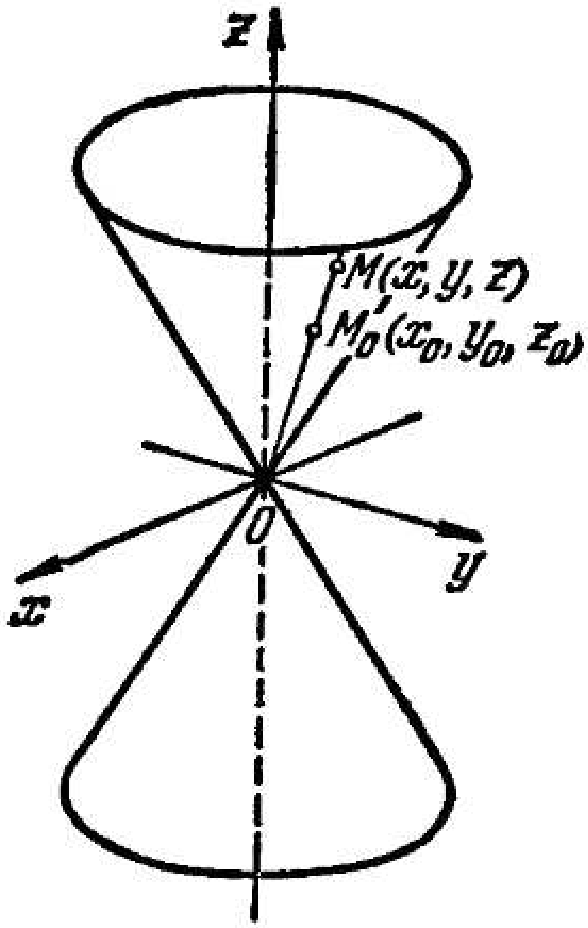
Сечение поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

плоскостью $z = h$ — эллипс с полуосями $a_1 = a|h|/c$, $b_1 = b|h|/c$. При $a = b$ получаем прямой круговой конус.



Заметим, что если точка (x, y, z) лежит на конусе, то и точка $(x_0, y_0, z_0) = (tx, ty, tz)$ при любом $t \in (-\infty, \infty)$ лежит на конусе, т. е. вместе с любой точкой (x, y, z), лежащей на конусе, конусу принадлежит и вся прямая проходящая через 0 и эту точку.



Можно сказать, таким образом, что эллиптический конус получается при движении прямой (образующей), закрепленной в одной точке, по эллиптической направляющей.

Пусть теперь $\underline{d < 0}$. Запишем уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0, \quad \lambda_1,\ \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 < 0,$$

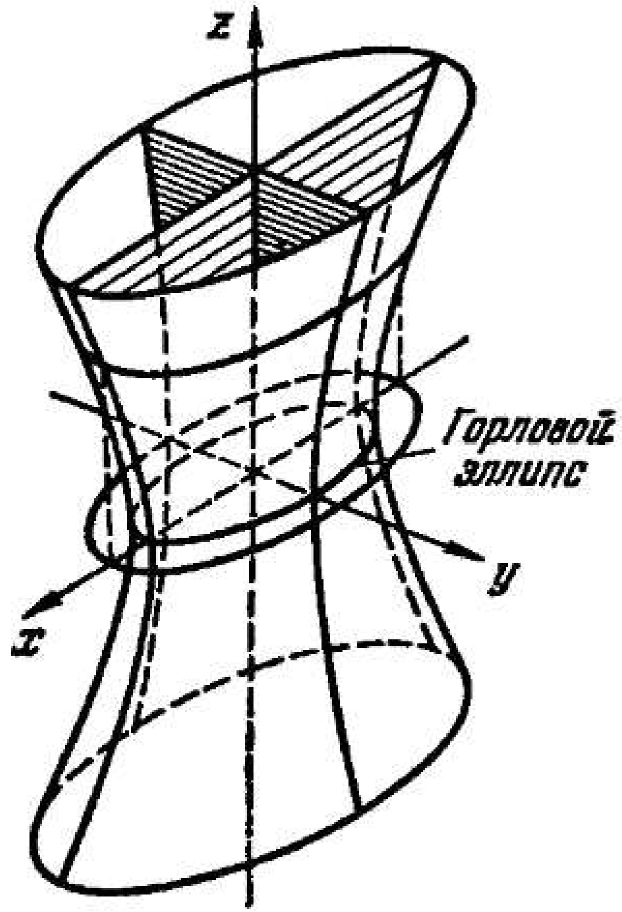
в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Здесь

$$a^2 = -d/\lambda_1, \quad b^2 = -d/\lambda_2, \quad c^2 = -d/|\lambda_3|.$$

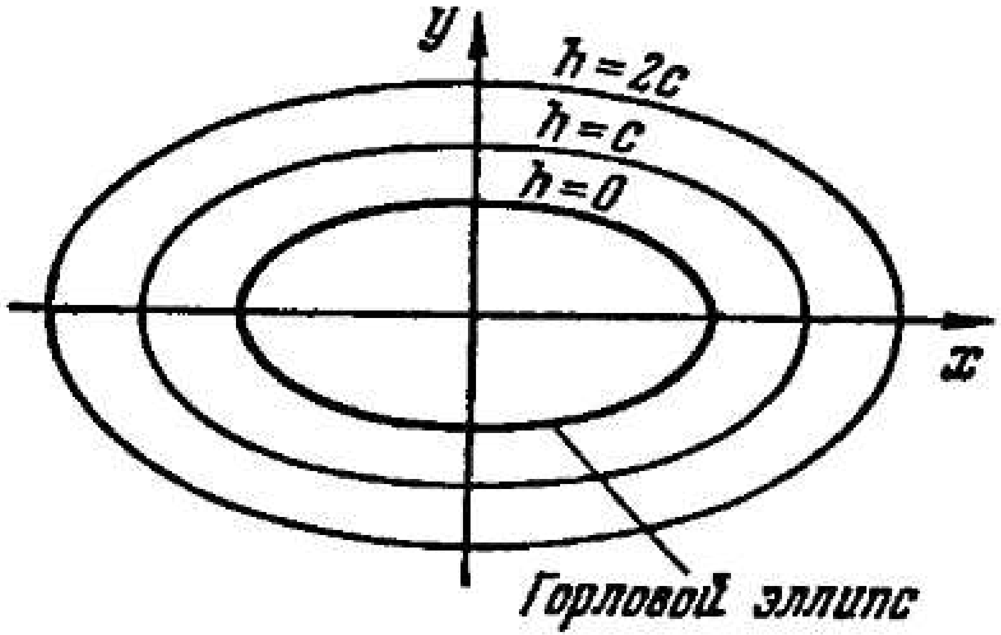
Эта поверхность, называется *однополостным гиперболоидом*.



Поверхность

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

симметрична относительно всех трех координатных плоскостей и начала координат.



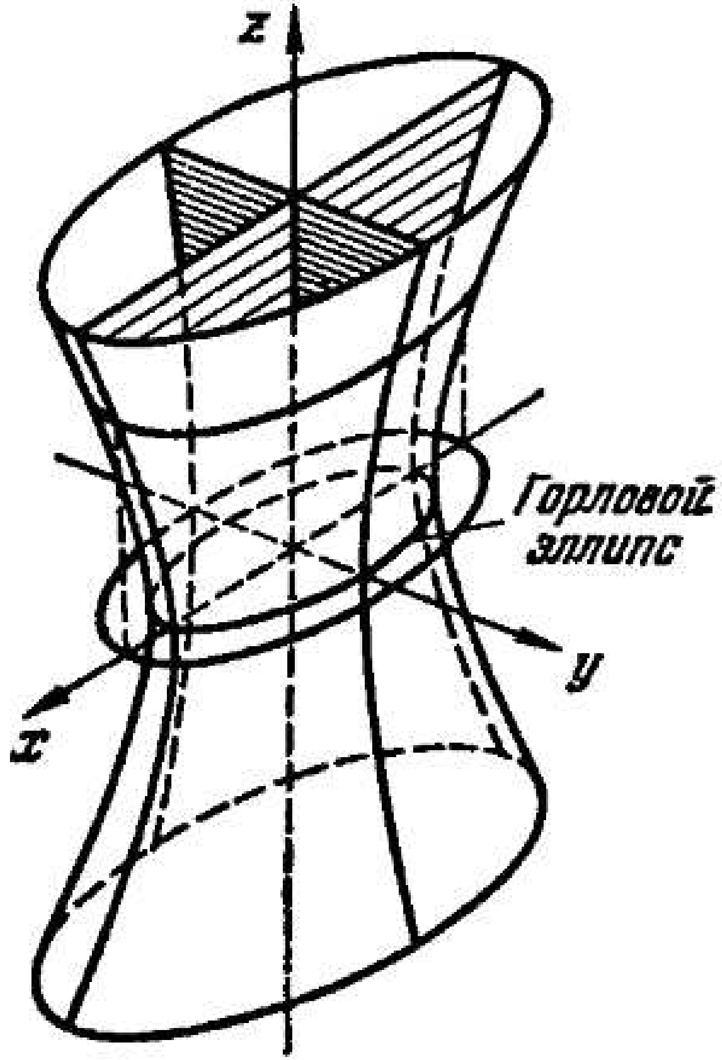
Сечением поверхности

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

плоскостью $z=h$ является эллипс с полуосями

$$a_1=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},\quad b_1=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}.$$

При $h=0$ получаем, так называемый, <u>***горловой эллипс.***</u>



Сечение поверхности плоскостями $x = h$, $y = h$ дает гиперболы.

.

Рассмотрим, наконец, случай $\underline{d > 0}$. Уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0, \quad \lambda_1,\ \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 < 0,$$

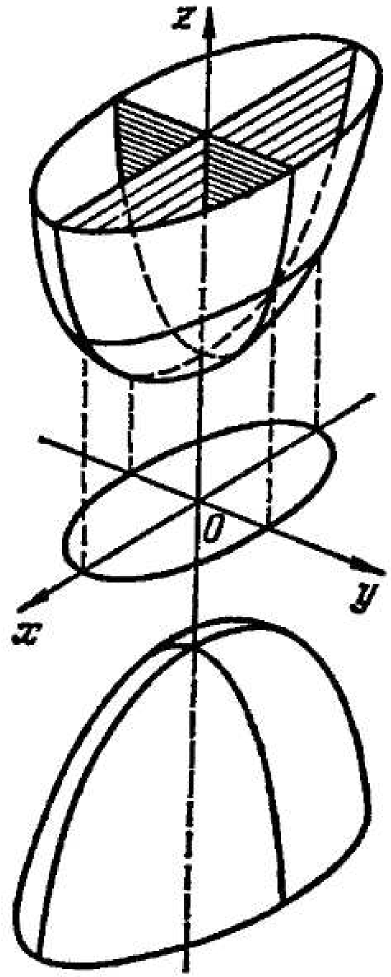
представим в следующей форме:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

где

$$a^2 = d/\lambda_1, \quad b^2 = d/\lambda_2, \quad c^2 = d/|\lambda_3|.$$

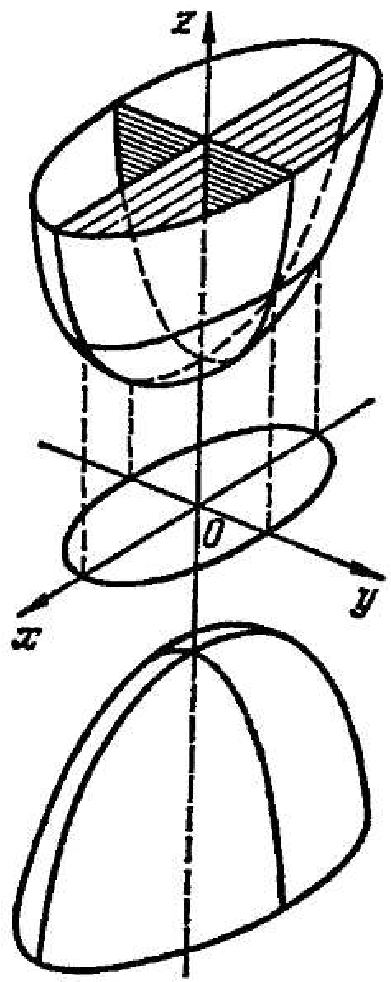
Это уравнение описывает <u>***двуполостный гиперболоид.***</u>



Поверхность

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

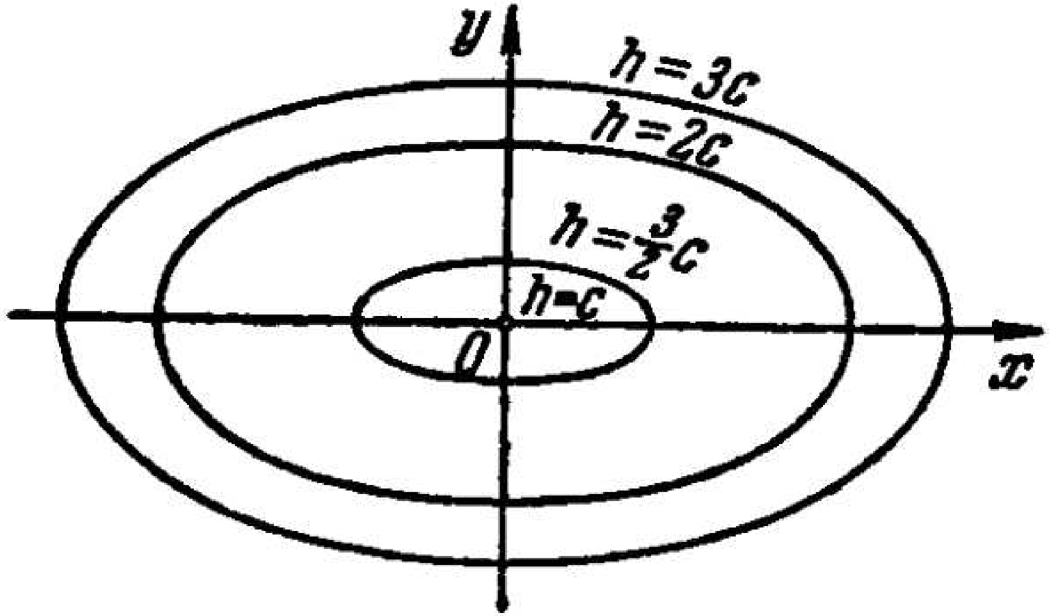
симметрична относительно всех трех координатных плоскостей и начала координат.



При $|z| < c$ не существует вещественных x, y, удовлетворяющих

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

т. е. поверхность лежит вне плоского слоя $|z| < c$.

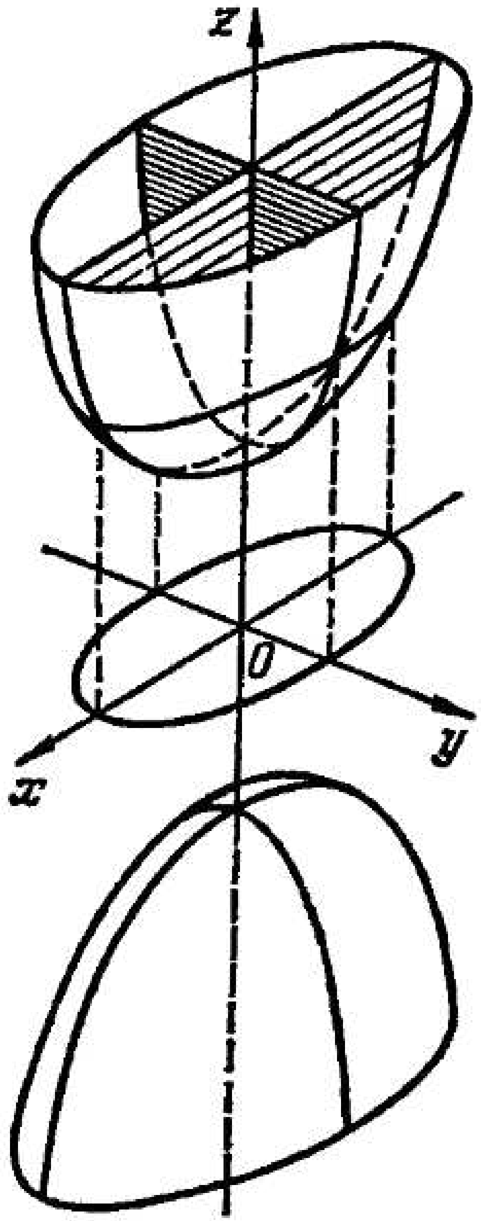


Сечениями поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

плоскостями $z = \pm h$ при $h > c$ являются эллипсы с полуосями

$$a_1 = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad b_1 = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}.$$



Сечение поверхности плоскостями $x = h$, $y = h$ дает гиперболы.

Название	Каноническое уравнение
Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Эллиптический конус	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
Однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
Двуполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
Эллиптический параболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$
Гиперболический параболоид	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$

.

Эллиптический цилиндр	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
Гиперболический цилиндр	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
Параболический цилиндр	$y^2 = 2px$