Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ПРИБЛИЖЕНИЙ

Салехова И.Г.

Уравнения математической физики, II. Курс лекций.

Казань, 2019.

Салехова И.Г.

Уравнения математической физики, II: Курс лекций // Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет. - 2019. - 159 с.

Рецензенты:
Д.ф.-м.н., профессор КФУ Бикчантаев И.А.

Во второй части учебного пособия "Уравнения математической физики, II"(направление подготовки: Механика и математическое моделирование) изложены двадцать две лекции курса. Это пособие является продолжением учебного пособия "Уравнения математической физики, I"(2016 г.). Пособие предназначено для студентов и аспирантов. Оно может быть рекомендовано как механикам, так и математикам, интересующимся приложениями.

Содержание

IV Формулы Грина для самосопряженного дифференциального оператора. Задача на собственные значения.

IV.1 Лекция 11. Формулы Грина для самосопряженного дифференциального оператора.

IV.1.1 Определение самосопряженного оператора.

Пусть Ω - конечная область n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n_x$, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью $\partial\Omega$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Пусть $a_{ij}(x)$, $b_j(x)$, $c(x)$ - заданные функции, причем, $a_{ij}(x)$, $b_j(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $c(x) \in C(\overline{\Omega})$.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$LU \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_j}) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial U}{\partial x_j} + c(x)U. \qquad (1.1)$$

Тогда оператор

$$L^*U \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_j}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(b_j(x)U) + c(x)U \qquad (1.2)$$

называется сопряженным к оператору L.

Заметим, что сопряженность есть свойство взаимное, т.е. оператор, сопряженный к L^*, есть L ($(L^*)^* \equiv L$).

Оператор называется самосопряженным, если $L^* \equiv L$. Из (1.1) и (1.2) видно, что операторы L и L^* отличаются только средними членами, поэтому ясно, что оператор L будет самосопряженным тогда и только тогда, когда $b_j = 0\,(j = \overline{1,n})$. Отсюда следует, что самосопряженный оператор можно привести к виду

$$LU \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_j}) + c(x)U, \qquad (1.3)$$

причем $a_{ij} = a_{ji}$.

IV.1.2 Формулы Грина.

1. Пусть $U(x),\, V(x) \in C^2(\overline{\Omega})$. Рассмотрим выражение

$$VLU = \sum_{i,j=1}^{n} V \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_j}) + c(x)VU =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} V \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_j}) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} + c(x)VU =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_j}V) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} + c(x)VU. \tag{1.4}$$

Проинтегрируем (1.4) по области Ω

$$\int\limits_{\Omega} VLU dx = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_j}V) dx - \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} dx + \int\limits_{\Omega} c(x)VU dx. \tag{1.5}$$

Применим к первому слагемому правой части (1.5) формулу Остроградского-Гаусса по индексу i

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_j}V) dx = \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} V a_{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_j}\cos(n, x_i) dS. \tag{1.6}$$

Тогда из (1.5) с учетом (1.6) имеем первую формулу Грина для самосопряженного оператора L

$$\int\limits_{\Omega} VLU dx = \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} V a_{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_j}\cos(n, x_i) dS - \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} dx + \int\limits_{\Omega} c(x)VU dx. \tag{1.7}$$

2. Запишем формулу (1.7), поменяв местами U и V

$$\int\limits_{\Omega} ULV dx = \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} U a_{ij}(x)\frac{\partial V}{\partial x_j}\cos(n, x_i) dS - \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_j} dx + \int\limits_{\Omega} c(x)UV dx. \tag{1.8}$$

Вычтем из (1.7) (1.8), тогда, учитывая, что $a_{ij} = a_{ji}$, имеем вторую формулу Грина

$$\int\limits_{\Omega} (VLU - ULV)dx = \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(V\frac{\partial U}{\partial x_j} - U\frac{\partial V}{\partial x_j}) \cos(n, x_i) dS. \tag{1.9}$$

IV.1.3 Частные случаи формулы Грина.

1. Рассмотрим частный случай оператора (1.3)

$$LU \equiv -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(p(x)\frac{\partial U}{\partial x_i}) + q(x)U, \tag{1.10}$$

который входит в уравнение колебаний, диффузии, стационарное уравнение, причем $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $p(x) \in C^1(\overline{\Omega}), q(x)C(\overline{\Omega})$.

В (1.10) $a_{ij}(x) = \begin{cases} -p(x),\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases}$, $c(x) = q(x)$

Тогда формула (1.7) примет вид

$$\int\limits_{\Omega} VLUdx = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} p(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_i}dx + \int\limits_{\Omega} q(x)VUdx - \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} p(x)V\frac{\partial U}{\partial x_i} \cos(n, x_i)dS. \tag{1.11}$$

Но $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \cos(n, x_i) = \frac{\partial U}{\partial n}$, поэтому из (1.11) имеем

$$\int\limits_{\Omega} VLUdx = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} p(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_i}dx + \int\limits_{\Omega} q(x)VUdx - \int\limits_{\partial\Omega} p(x)V\frac{\partial U}{\partial n}dS. \tag{1.12}$$

Формула (1.9) примет вид

$$\int\limits_{\Omega} (VLU - ULV)dx = -\int\limits_{\partial\Omega} p(x)(V\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial V}{\partial n})dS. \tag{1.13}$$

Пусть в (1.10) $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, тогда $LU = -\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i} = -\Delta U$ и формулы (1.12) и (1.13) имеют соответственно вид

$$\int\limits_{\Omega} V\Delta Udx = \int\limits_{\partial\Omega} V\frac{\partial U}{\partial n}dS - \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}dx,$$

$$\int\limits_{\Omega}(VLU-ULV)dx=\int\limits_{\partial\Omega}(V\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial V}{\partial n})dS.$$

Замечание. Все вышеприведенные формулы остаются в силе, если U, $V \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$, при этом интегралы в левых частях понимаются как несобственные.

IV.2 Лекция 12-13. Задача на собственные значения.

IV.2.1 Постановка задачи.

Пусть L - линейный оператор с областью опеределения M_L, т.е. переводящий элементы множества M_L в элементы множества N_L. Рассмотрим линейное уравнение

$$LU = \lambda U, \tag{2.1}$$

где λ - комплексный параметр, т.е. $\lambda \in \mathbb{C}$. Это уравнение имеет нулевое решение при всех λ. Может случиться, что при некоторых λ оно имеет ненулевое решение из M_L.

Определение. Те комплексные значения λ, при которых уравнение (2.1) имеет ненулевое решение из M_L, называются собственными значениями оператора L, а соответствующие решения - собственными функциями, соответствующими этому собственному значению. Полное число r линейно независимых собственных функций, соответствующих данному собственному значению, называется кратностью собственного значения. Множество всех собственных значений называется спектром оператора.

Заметим,что если кратность r значения λ конечна, а U_1, U_2, ... U_r - соответствующие линейно независимые собственные функции, то любая их линейная комбинация $U = \sum\limits_{k=1}^{r} c_k U_k$, $c_k - const$, является собственной функцией, и эта комбинация дает общее решение уравнения (2.1).

Рассмотрим следующую линейную одродную задачу. Пусть дано уравнение

$$LX = \lambda\rho(x)X,\ x \in \Omega,\ \Omega \subset \mathbb{R}^n_x,\ \lambda - const, \tag{2.2}$$

$$\text{где } LX \equiv -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(p(x)\frac{\partial X}{\partial x_i}) + q(x)X, \tag{2.3}$$

и граничное условие

$$\left[\alpha(x)X + \beta(x)\frac{\partial X}{\partial n}\right]\Bigg|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.4}$$

Здесь $p(x)$, $\rho(x)$, $q(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ - заданные функции, причем

$$p(x) \in C^1(\overline{\Omega}),\ \rho(x),\ q(x) \in C(\overline{\Omega}),\ \rho,\ p > 0,\ q \geq 0,\ \alpha(x),\ \beta(x) \in C(\partial\Omega),\ \alpha,\ \beta \geq 0,$$

$$\alpha(x) + \rho(x) > 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{2.5}$$

Требуется найти функцию $X(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (2.2) при $x \in \Omega$ и граничному словию (2.4) на $\partial\Omega$.

Такая задача всегда имеет нулевое решение. Это решение не представляет интереса. Ненулевое решение она имеет только при некоторых значениях λ, поэтому задачу (2.2), (2.4) необходимо рассматривать как задачу на собственные знаения для оператора (2.3):

Найти знаения λ, при которых уравнение (2.2) имеет ненулевые решения $X(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющие граничному условию (2.4), и найти эти решения.

При $n = 1$ задача (2.2), (2.4) называется задачей Штурма-Лиувилля.

IV.2.2 Свойства собственных значений и собственных функций.

Сформуллируем эти свойства в виде теорем.

Теорема 1. Собственные значения задачи (2.2), (2.4) вещественны и неотрицательны.

Доказательство. Пусть λ - собственное значение задачи (2.2), (2.4), т.е.

$$LX = \lambda \rho(x) X. \tag{2.6}$$

Умножим обе части (2.6) на функцию $\overline{X(x)}$, т.е. на функцию, комплексно сопряженную к функции $X(x)$. Полученное соотношение проинтегрируем по области Ω

$$\int\limits_{\Omega} \overline{X} LX dx = \lambda \int\limits_{\Omega} \rho X \overline{X} dx = \lambda \int\limits_{\Omega} \rho |X|^2 dx, \tag{2.7}$$

откуда

$$\lambda = \frac{\int\limits_{\Omega} \overline{X} LX dx}{\int\limits_{\Omega} \rho |X|^2 dx}. \tag{2.8}$$

Так как $\rho > 0$, $|X|^2 > 0$, то

$$\int\limits_{\Omega} \rho |X|^2 dx > 0. \tag{2.9}$$

Покажем теперь, что

$$\int\limits_{\Omega} \overline{X} LX dx \geq 0. \tag{2.10}$$

Применим к $\int\limits_{\Omega}\overline{X}LXdx$ первую формулу Грина (1.12) для оператора (2.3)

$$\int\limits_{\Omega}\overline{X}LXdx=\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}p(x)\frac{\partial\overline{X}}{\partial x_i}\frac{\partial X}{\partial x_i}dx+\int\limits_{\Omega}q(x)X\overline{X}dx-\int\limits_{\partial\Omega}p(x)\overline{X}\frac{\partial X}{\partial n}dS=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}p(x)\left|\frac{\partial X}{\partial x_i}\right|^2dx+\int\limits_{\Omega}q(x)|X|^2dx-\int\limits_{\partial\Omega}p(x)\overline{X}\frac{\partial X}{\partial n}dS. \tag{2.11}$$

Первые два слагаемых правой части (2.11) вещественны и неотрицательны. Остановимся на последнем слагаемом. Разобъем границу $\partial\Omega$ на две части $\partial\Omega=S_1\cup S_2$, где $S_1=\{x|\beta=0\}$, $S_2=\{x|\beta>0\}$. Тогда $\int\limits_{\partial\Omega}=\int\limits_{S_1}+\int\limits_{S_2}$. Так как на S_1 $\beta=0$, то (2.4) запишется в виде $\alpha(x)X(x)|_{S_1}=0$, откуда $X(x)|_{S_1}=0$, так как $\alpha>0$. Тогда $\overline{X}(x)|_{S_1}=0$, поэтому последнее слагаемое в правой части (2.11) равно нулю. Так как на S_2 $\beta>0$, то из (2.4) имеем

$$\left.\left[\frac{\partial X}{\partial n}=-\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}X\right]\right|_{S_2}, \tag{2.12}$$

причем $\frac{\partial X}{\partial n}\Big|_{S_2}=0$, если $\alpha=0$. Если же $\alpha>0$, то, учитывая (2.12), имеем

$$-\int\limits_{\partial\Omega}p(x)\overline{X}\frac{\partial X}{\partial n}dS=\int\limits_{S_2}p(x)\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}X\overline{X}dS=\int\limits_{S_2}p(x)\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}|X|^2dS>0.$$

Таким образом, имеет место неравенство (2.10). Учитывая (2.9) и (2.10), из (2.8) получаем $\lambda\geq0$.

$\square$

Заметим, что существует необходимый и достаточны признак, устанавливающий, когда $\lambda=0$ будет собственным значением задачи (2.2), (2.4), а именно имеет место

Лемма. Для того, чтобы $\lambda=0$ было собственным значением задачи (2.2), (2.4), необходимо и достаточно, чтобы $q(x)\equiv0$, $\alpha(x)\equiv0$. При этом значению $\lambda=0$ соответствует функция $X_0(x)\equiv const$.

Теорема 2. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны с весом $\rho(x)$ по области Ω, т.е.

$$(X_k,X_j)_\rho=0,\ k\neq j, \tag{2.13}$$

где $(X_k,X_j)_\rho=\int\limits_{\Omega}\rho(x)X_kX_jdx$, $||X_k||_\rho^2=\int\limits_{\Omega}\rho(x)X_k^2dx$.

Доказательство. Пусть $\lambda_k \to X_k(x)$, $\lambda_j \to X_j(x)$, причем $\lambda_k \neq \lambda_j$.

Тогда имеем

$$LX_k = \lambda_k \rho X_k, \tag{2.14}$$

$$LX_k = \lambda_j \rho X_j. \tag{2.15}$$

Умножим (2.14) и (2.15) соответственно на X_j и X_k и вычтем из первого соотношения второе, а затем проинтегрируем по Ω. Тогда получим

$$\int\limits_{\Omega} (X_j L X_k - X_k L X_j) dx = (\lambda_k - \lambda_j) \int\limits_{\Omega} \rho X_k X_j dx. \tag{2.16}$$

Покажем, что левая часть (2.16) равна нулю. Применим к левой части (2.16) вторую формулу Грина (1.19) для оператора L

$$\int\limits_{\Omega} (X_j L X_k - X_k L X_j) dx = -\int\limits_{\partial\Omega} \rho(x)(X_j \frac{\partial X_k}{\partial n} - X_k \frac{\partial X_j}{\partial n}) dS. \tag{2.17}$$

Докажем, что правая часть (2.17) равна нулю. Функции X_k и X_j удовлетворяют условию (2.4), поэтому

$$\begin{cases} \left[\alpha(x) X_j + \beta(x) \frac{\partial X_j}{\partial n}\right]\Big|_{\partial\Omega} = 0, \\ \left[\alpha(x) X_k + \beta(x) \frac{\partial X_k}{\partial n}\right]\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Будем рассматривать (2.18) как систему уравнений отностительно неизвестных $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. На основании (2.5) система (2.18) имеет ненулевое решение в каждой точке, поэтому определитель системы равен нулю, т.е.

$$X_j \frac{\partial X_k}{\partial n} - X_k \frac{\partial X_j}{\partial n} = 0, \; \forall x \in \partial\Omega$$

Таким образом, правая часть (2.17) равна нулю, а значит, и левая часть (2.17) равна нулю. Так как $\lambda_k \neq \lambda_j$, то из (2.16) следут (2.13).

□

Теорема 3. Множество собственных значений задачи (2.2), (2.4) счетно и не имеет конечных предельных точек. Каждое собственное значение имеет конечную кратность.

Доказательство теоремы будет дано позже при $n = 1$. Суть доказательства в том, что задача (2.2), (2.4) приводится к эквивалентному интегральному уравнению с симметричным ядром. При этом собственые значения задачи (2.2), (2.4) связаны с характеристическими числами уравнения, а соответствующие им собственные функции совпадают. Учитывая, что для задачи (2.2), (2.4) справедливы все положения теории интегральных уравнений, получим соответствующие результаты для задачи, в частности, теорему 3.

На основании теоремы 3 можно построить спектр задачи (2.2), (2.4) и максимальную систему собственных функций.

Пусть λ_k - сосбтвенное значение кратности q_k, т.е. ему соответствеут q_k собственных функций

$$\lambda_k \to X_{k1},\, X_{k2},\, ...,\, X_{kq_k}.$$

На основании теоремы 3 множество собственных значений счетно, поэтому можно из λ_k составить такую последовательность $\{\lambda_j\}_1^\infty$, в которой λ_k повторяется столько раз, какова кратность λ_k, т.е. q_k раз.

$$\underbrace{\lambda_1,\, \lambda_1,\, ...,\, \lambda_1}_{q_1 \text{ раз}},\, \underbrace{\lambda_2,\, \lambda_2,\, ...,\, \lambda_2}_{q_2 \text{ раз}},\, ...,\, \underbrace{\lambda_k,\, \lambda_k,\, ...,\, \lambda_k}_{q_k \text{ раз}},\, ... \tag{2.19}$$

Теперь перенумеруем члены последовательности (2.19) по порядку, тогда получим последовательность

$$\lambda_1,\, \lambda_2,\, ...,\, \lambda_k,\, ..., \tag{2.20}$$

причем

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_k \le ...,\, \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty.$$

Перенумеруем последовательность собственных функций одним индексом, тогда получим последовательность собственных функций

$$X_1,\, X_2,\, ...,\, X_k,\, ..., \tag{2.21}$$

причем в (2.20) каждому λ_k соответствует одна собственная функция X_k в (2.21).

Последовательность (2.20) называется собственным спектром задачи (2.2), (2.4). Последовательность (2.21) называется максимальной системой собственных функций, так как любая собственная функция задачи (2.2), (2.4.) может быть выражена как линейная комбинация конечного числа собственных функций этой системы.

Теорема 4. Максимальную систему собственных функций $\{X_j\}_1^\infty$ задачи (2.2), (2.4) всегда можно выбрать ортогональной с весом $\rho(x)$ по области Ω, т.е. $(X_k, X_j)_\rho = 0,\, k \ne j$.

Доказательство. Если X_k и X_j соответствуют различным собственным значениям, то на основании теоремы 2 они ортогональны.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = ..\lambda_p$, причем этим собственным значениям соответствуют функции

$$X_1,\ X_2,\ ...,\ X_p. \tag{2.22}$$

Функции (2.22) линейно независимы. Но всякую систему линейно независимых функций всегда можно ортогонализировать. Из функций X_k, $k = \overline{1,p}$ образуют функции Y_k, $k = \overline{1,p}$, являющиеся линейной комбинацией функций X_k с постоянными коэффициентами, причем Y_k будут собственными функциями задачи (2.2), (2.4). Постоянные всегда можно выбрать так, что функции будут ортогональными с весом $\rho(x)$.

Действительно, пусть $Y_1 = X_1$. Возьмем

$$Y_2 = A_{21}Y_1 + X_2. \tag{2.23}$$

Подберем A_{21} так, чтобы $(Y_1, Y_2)_\rho = 0$. Для этого умножим (2.23) скалярно на Y_1, т.е.

$$(Y_1, Y_2)_\rho = A_{21}(Y_1, Y_1)_\rho + (X_2, Y_1)\rho = 0,$$

откуда

$$A_{21} = -\frac{(X_2, Y_1)\rho}{||Y_1||^2_\rho}.$$

Расуждая аналогично, берем $Y_p = \sum\limits_{k=1}^{p-1} A_{pk}Y_k + X_p$. Постоянные A_{pk} подберем так, чтобы Y_p была ортогональнвсем Y_k, $k = \overline{1, p-1}$, т.е. чтобы выполнялись условия

$$(Y_k, Y_p)_\rho = 0,\ A_{pk} = -\frac{(X_p, Y_k)\rho}{||Y_k||^2_\rho},\ k = \overline{1, p-1}.$$

□

Прежде, чем сформуллировать следующую теорему, остановимся на понятии ряда Фурье по ортогональной системе функций.

Пусть $\mathcal{F}(x) \in C(\overline{\Omega})$ и дана бесконечная система функций $\{X_k(x)\}_1^\infty$ ортогональная с весом $\rho(x)$ по области Ω. Поставим задачу о представлении функций $\mathcal{F}(x)$ в виде ряда по системе $\{X_k(x)\}_1^\infty$.

Предположим, что это возможно, т.е.

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x), \tag{2.24}$$

причем ряд (2.24) сходится равномерно. Умножим обе части (2.24) на $\rho(x)X_j(x)$ и проинтегрируем по области Ω

$$(\mathcal{F}, X_j)_\rho = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (X_k, X_j)_\rho = a_j ||X_j||_\rho^2, \tag{2.25}$$

так как $(X_k, X_j)_\rho = 0$, $k \neq j$. Из (2.25) имеем

$$a_j = \frac{(\mathcal{F}, X_j)_\rho}{||X_j||_\rho^2}. \tag{2.26}$$

Ряд (2.24), где коэффициенты a_k определяются по формуле (2.26), называется рядом Фурье по системе $\{X_k(x)\}_1^\infty$. Если ряд (2.24) сходится и совпадает с $\mathcal{F}(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, то говорят, что функция $\mathcal{F}(x)$ разлагается в ряд Фурье по системе $\{X_k(x)\}_1^\infty$.

Имеет место теорема, доказательство которой будет дано позже при $n = 1$.

Теорема 5. (Теорема Стеклова о разложимости). Всякая функция $\mathcal{F}(x) \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющая граничному условию (2.4), разлагается в регулярно-сходящийся ряд по максимальной системе собственных функций задачи (2.2), (2.4).

Рад сходится регулярно означает, что равномерно сходится ряд, составленный из абсолютных величин ряда.

Замечание. Все свойства задачи (2.2), (2.4) остаются справедливы для функций $X(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, так как справедливы соответствующие формулы Грина.

Остановимся на вопросе решения задачи (2.2), (2.4). Рассмотрим задачу при $n = 1$ (задачу Штурма-Лиувилля).

В данном случае $\Omega = (0, l)$, $\partial\Omega = \{x = 0, x = l\}$. Уравнение (2.2) примет вид

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX(x)}{dx}\right) + q(x)X(x) = \lambda\rho(x)X(x). \tag{2.27}$$

Условие (2.4) запишется в виде двух условий в точках $x = 0$ и $x = l$, причем $\frac{d}{dn}\Big|_{x=0} = -\frac{d}{dx}\Big|_{x=0}$, $\frac{d}{dn}\Big|_{x=l} = \frac{d}{dx}\Big|_{x=l}$,

$$\begin{cases} \alpha_0 X(0) - \beta_0 X'(0) = 0, \\ \alpha_l X(l) + \beta_l X'(l) = 0, \end{cases} \tag{2.28}$$

где α_0, β_0, α_l, $\beta_l > 0$.

Уравнение (2.27) - обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, поэтому общее решение запишется в виде

$$X(x, \lambda) = C_1 X_1(x, \lambda) + C_2 X_2(x, \lambda), \tag{2.29}$$

где $X_i(x,\lambda)$ – линейно независимые решения уравнения (2.27), $C_i - const$, $i = 1,2$.

Определим постоянные C_i так, чтобы выполнялись условия (2.28)

$$\begin{cases} \alpha_0[C_1X_1(0,\lambda)+C_2X_2(0,\lambda)] - \beta_0[C_1X_1'(0,\lambda)+C_2X_2'(0,\lambda)] = 0, \\ \alpha_l[C_1X_1(l,\lambda)+C_2X_2(l,\lambda)] + \beta_l[C_1X_1'(l,\lambda)+C_2X_2'(l,\lambda)] = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Или перепишем (2.30) в виде

$$\begin{cases} C_1[\alpha_0X_1(0,\lambda) - \beta_0X_1'(0,\lambda)] + C_2[\alpha_0X_2(0,\lambda) - \beta_0X_2'(0,\lambda)] = 0, \\ C_1[\alpha_lX_1(l,\lambda) + \beta_lX_1'(l,\lambda)] + C_2[\alpha_lX_2(l,\lambda) + \beta_lX_2'(l,\lambda)] = 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

Относительно $C_i\,(i = 1,2)$ получили однородную систему алгебраических уравнений. Система (2.31) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, т.е.

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_0X_1(0,\lambda) - \beta_0X_1'(0,\lambda) & \alpha_0X_2(0,\lambda) - \beta_0X_2'(0,\lambda) \\ \alpha_lX_1(l,\lambda) + \beta_lX_1'(l,\lambda) & \alpha_lX_2(l,\lambda) + \beta_lX_2'(l,\lambda) \end{vmatrix}. = 0 \quad (2.32)$$

(2.32) дает уравнение для определения тех значений λ, при которых система (2.31) имеет ненулевое решение, т.е. значения λ, при которых задача (2.27), (2.28) имеет ненулевое решение, а значит, дает нам собственные значения λ_k, $k = \overline{1,\infty}$.

Подставляя найденные значения λ_k в (2.31), получаем $C_i\,(i = 1,2)$, причем одно из C_i остается произвольным, так как ранг матрицы системы равен единице, т.е. одно уравнение является следствием другого. Подставляя найденные значения C_i в (2.29) получаем собственные функции, определенные с точностью до множителя. Выбирая одно из C_i равным единице, получаем собственные функции.

При произвольных $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ и произвольной области Ω задачу (2.2), (2.4) в явном виде решить нельзя.

Рассмотрим частный случай задачи (2.27), (2.28), когда можно получить решение в явном виде. Пусть в задаче (2.27), (2.28) $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, $\rho(x) \equiv 1$, $\alpha_0 = \alpha_l = 1$, $\beta_0 = \beta_l = 0$.

$$X'' = -\lambda X, \quad (2.33)$$

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (2.34)$$

Учитывая, что на основании теоремы 1 $\lambda \geq 0$, рассмотрим два случая:

1. $\lambda_0 = 0$, тогда уравнение (2.33) примет вид $X_0'' = 0$, $X_0 = C_1X + C_2$. Из условия (2.34) следует, что $C_1 = C_2 = 0$, т.е. $\lambda_0 = 0$ не является собственным значением. Задача не имеет решений.

2. $\lambda > 0$. Уравнение (2.33) - линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Для решения составим характеристическое уравнение $p^2+\lambda = 0$, откуда $p_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$. Тогда общее решение уравнения (2.33) запишется в виде

$$X(x, \lambda) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x. \tag{2.35}$$

Запишем для (2.35) условие (2.34)

$$\begin{cases} C_1 \cos\sqrt{\lambda}0 + C_2 \sin\sqrt{\lambda}0 = 0, \\ C_1 \cos\sqrt{\lambda}l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0, \end{cases} \tag{2.36}$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\sqrt{\lambda}l & \sin\sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = \sin\sqrt{\lambda}l = 0,$$

откуда $\sqrt{\lambda_k}l = \pi k$, $k = \pm1$, ±2, ..., $\lambda_k = (\frac{\pi k}{l})^2$ ($\lambda_0 = 0$ решений не дает). Тогда $X_k(x) = \sin\frac{\pi k}{l}x$, $k \in \mathbb{N}$, при этом положим $C_2 = 1$. Мы ограничились только натуральными значениями k, так как отрицательные значения k дают решения, линейно зависимые с первыми.

V Уравнения гиперболического типа. Смешанная задача для уравнения колебаний.

V.1 Лекция 14-15. Постановка смешанной задачи. Общая схема решения смешанной задачи для однородного уравнения колебаний методом Фурье.

Рассмотрим наиболее общее уравнение гиперболического типа - уравнение колебаний.

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -LU + f(x,t), \tag{1.1}$$

где $LU \equiv -\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(p(x)\frac{\partial U}{\partial x_i}) + q(x)U$, $U(x,t)$ - искомая функция.

Определим область задания уравнения (1.1). Пусть $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n_x$, $\partial\Omega$ - граница Ω.

1) Пусть $n = 1$, тогда $\Omega = (0,l)$ - интервал вещественной оси, $\partial\Omega = \{x = 0, l = 0\}$.

2) Пусть $n = 2$, тогда Ω - область на плоскости $\mathbb{R}^2_x$, $\partial\Omega$ – кривая, причем в общем виде кусочно-гладкая.

3) Пусть $n = 3$, тогда Ω - объем в $\mathbb{R}^3_x$, $\partial\Omega$ – кусочно-гладкая поверхность.

Удобно интерпретировать t как пространственную координату, тогда $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$. Иначе, если $x \in \Omega$, $t \in (0,\infty)$, то областью задания уравнения (1.1) будем считать цилиндр бесконечной высоты с основанием Ω: $Ц_\infty = \Omega \times (0,\infty)$, где декартово произведение $A \times B$ означает множество пар (a,b) таких. что $a \in A$, $b \in B$.

1) При $n = 1$ $Ц_\infty = (0,l) \times (0,\infty)$ - полуполоса на плоскости (x,t).

2) При $n = 2$ $Ц_\infty = \Omega \times (0,\infty)$ - обычный цилиндр в трехмерном пространстве.

Обозначим $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Граница $\partial Ц_\infty$ цилиндра $Ц_\infty$ состоит из боковой поверхности: $\partial\Omega \times [0,\infty)$ и нижнего основания: $\overline{\Omega} \times (t = 0)$, т.е. $\partial Ц_\infty = \{\partial\Omega \times [0,\infty)\} \cup \{\overline{\Omega} \times (t = 0)\}$. Обозначи через $\overline{Ц}_\infty = Ц_\infty \cup \partial Ц_\infty$.

V.1.1 Постановка смешанной задачи.

Найти функцию $U(x,t) \in C^2(Ц_\infty) \cap C^1(\overline{Ц}_\infty)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) при $(x,t) \in Ц_\infty$, начальному условию

$$\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \end{cases}, \ x \in \overline{\Omega} \tag{1.2}$$

на нижнем осонвании цилиндра и граничному условию

$$\left[\alpha(x)U + \beta(x)\frac{\partial U}{\partial n}\right]\bigg|_{\partial\Omega\times[0,\infty)} = \gamma(x,t) \tag{1.3}$$

на боковой поверхности цилиндра $Ц_\infty$. Здесь $\overrightarrow{n}$ - внешняя норма к $\partial\Omega$, $\rho(x)$, $p(x)$, $q(x)$, - заданные функции, причем

1) $\rho(x)$, $q(x)$, $\psi(x) \in C(\overline{\Omega})$;
2) $p(x)$, $\varphi(x) \in C^1(\overline{\Omega})$;
3) $f(x,t) \in C(Ц_\infty)$;
4) $\alpha(x)$, $\beta(x) \in C(\partial\Omega)$;
5) $\gamma(x,t) \in C\{\partial\Omega \times [0,\infty)\}$.

Кроме того, из физического смысла следует, что $\rho(x), p(x) > 0, q(x) \geq 0, \alpha(x), \beta(x) \geq 0, \alpha(x) + \beta(x) > 0$.

Далее предполагаем, что должно выполняться условие согласованности

$$\left[\alpha(x)\varphi(x) + \beta(x)\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right]\bigg|_{\partial\Omega} = \gamma(x,0). \tag{1.4}$$

Условие (1.4) необходимо для существования решения в заданном классе функций. Оно обеспечивает непротиворечивость краевых условий (1.2) и (1.3) при $t = 0$.

V.1.2 Общая схема решения задачи методом Фурье (методом разделения переменных).

Метод разделения переменых из наиболее почтенных по возрасту методов решения смешаной задачи и применяется когда:

1) Уравнение является линейным (не обязательно с постоянными коэффициентами).

2) Граничные условия являются линейными и однородными.

Метод был создан во времена Фурье (1822 г.) и , по-видимому, в настоящее время является одним из наиболее популярных (в тех случаях, когда он применим). Общим принципом метода Фурье является поиск решений вида $U(x,t) = X(x)T(t)$, где $X(x)$ - функция, зависящая только от x, и $T(t)$ - функция, зависящая только от t. Такое решение является в каком-то смысле простейшим, так как функция $U(x,t)$ представимая в таком виде, будет сохранять "форму"профиля в различные моменты. Действительно, если, например, рассматривать функцию $U(x,t)$, которая в случае струны дает отклонение сечения x в момент t, то при фиксированном t функция $U(x,t)$ дает форму струны в момент t, а $U(x,0)$ - форму струны в начальный момент $t = 0$. Говорят, что если $\frac{U(x,t)}{U(x,0)}$ не зависит от x, то $U(x.t)$ сохраняет форму. Таким образом, всякая функция, сохраняющая форму, представима в виде $U(x,t) = X(x)T(t) = U(x,0)T(t)$.

Колебание, описываемое такой функцией, называется стоячей волной. При таком колебании график функции $U(x,t)$ совпадает с графиком $U(x,0)$ с отчностью до множителя, зависящего только от t.

Общая идея метода Фурье заключается в том, чтобы найти бесконечное число таких решений уравнения, причем удовлетворяющих граничным условиям. Эти простейшие решения $U_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$, $k = \overline{1,\infty}$ (называемые фундаментальными решениями) являются как бы элементарными кирпичиками. из которых строится решение нашей задачи. Решение задачи $U(x,t)$ ищется в виде линейной комбинации фундаментальных решений $U(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k(x,t)$, причем результирующая сумма должна удовлетворять начальным условиям. Поскольку эта сумма удовлетворяет уравнению и граничным условиям, то она является решением исходной задачи.

Многие студенты испытывают разочарование, когда видят, как сложно выглядит полученное решение. Однако это решение не будет казаться таким сложным, если мы рассматриваем решение конкретной задачи о колебаниях гитарной струны, закрепленной на концах. Действительно, более сложная форма решения означает его большую информативность.

Рассмотрим случай однородного уравнения и однородных граничных условий, т.е. задачу

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -LU, \tag{1.5}$$

$$\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \end{cases}, \ x \in \overline{\Omega} \tag{1.6}$$

$$\left[\alpha(x)U + \beta(x)\frac{\partial U}{\partial n}\right]\bigg|_{\partial\Omega\times[0,\infty)} = 0. \tag{1.7}$$

1. Будем сначала искать решение уравнения (1.5), не равное тождественно нулю, удовлетворяющее (1.7) и представимое в виде

$$U(x,t) = X(x)T(t). \tag{1.8}$$

Подставим (1.8) в (1.5), тогда получим

$$\rho(x)X(x)T''(t) = -T(t)LX(x). \tag{1.9}$$

Умножим обе части(1.9) на $\frac{1}{\rho(x)X(x)T(t)}$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\frac{LX(x)}{\rho(x)X(x)} = -\lambda. \tag{1.10}$$

Чтобы функция (1.8) была решением уравнения (1.5) (1.10) должно быть тождеством для $x \in \Omega$, $t \in (0,\infty)$. В (1.20) левая часть - функция только от t, правая часть - только от x, поэтому тождество (1.10) возможно, если каждая из частей будет постоянной. Обозначим эту послоянную $-\lambda$, причем знак минус берется для удобства дальнейших выкладок. О знаке λ пока ничего не предполагаем.

Из (1.10) приходим к двум независимым уравнениям для определения $X(x)$, $T(t)$ и λ.

$$T'' + \lambda T = 0, \tag{1.11}$$

$$LX = \lambda\rho(x)X, \tag{1.12}$$

т.е. уравнение (1.5) распалось на два уравнения (1.11) и (1.12) с меньшим числом независимых переменных, т.е. говорят, что переменные разделились.

Подставим теерь (1.8) в (1.7), тогда получим

$$\left[\alpha(x)X + \beta(x)\frac{\partial X}{\partial n}\right]\Bigg|_{\partial\Omega} T(t)|_{[0,\infty)} = 0, \tag{1.13}$$

так как дифференцирование по нормали берется по переменной x.

Но $T(t) \not\equiv 0$, так как мы ищем ненулевое решение уравнения (1.5), поэтому из (1.13) имеем

$$\left[\alpha(x)X + \beta(x)\frac{\partial X}{\partial n}\right]\Bigg|_{\partial\Omega}. \tag{1.14}$$

Итак, задача свелась е решению уравнения (1.11) и уравнения (1.12) с условием (1.14).

Задача (1.12), (1.14) - задача на собственные значения, которая была рассмотрена раньше. Учитывая класс искомых функций задачи (1.5) - (1.7), мы должны отыскивать решение задачи (1.12), (1.14) $X(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Итак, пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ - спектр, $\{X_k(x)\}_1^\infty$ - максимальная система собственных функций задачи (1.12), (1.14).

Предположим, что все $\lambda_k > 0$. Найдем теперь решение уравнения (.11) при $\lambda = \lambda_k$, так как в уравнениях (1.11) и (1.12) λ одно и то же

$$T_k'' + \lambda_k T_k = 0 \tag{1.15}$$

Решая (1.15), получим

$$T_k(t) = a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t, \tag{1.16}$$

где $k = 1,\ 2,\ ...,\ a_k,\ b_k$ - произвольные потоянные.

Подставляя $T_k(t)$ из (1.16) и $X_k(x)$ в (1.8), получим счетное число частных решений уравнения (1.5), удовлетворяющих граничному учловию (1.7)

$$U_k(x,t) = (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) X_k(x),\ k = 1,\ 2,\ ... \tag{1.17}$$

Удовлетворим теперь условиям (1.16). Если взять одно из решений (1.17) и записать для него первое условие (1.6), то будем иметь

$$U_k(x,0) = a_k X_k(x) = \varphi(x),\ x \in \overline{\Omega}.$$

Отсюда следует, что если $\varphi(x)$ - произвольная функция, то задача не разрешима. Если же взять линейную комбинацию конечного числа решений (1.17)

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{n} X_k(x) T_k(t), \tag{1.18}$$

то в силу линейности и однородности (1.5) и (1.7) функция (1.18) удовлетворяет им. Первое условие (1.6) для (1.18) запишется в виде

$$U(x,0) = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k(x). \tag{1.19}$$

Но при произвольной функции $\varphi(x)$ удовлетворить условию (1.19) нельзя. Поэтому, чтобы удовлетворить (1.6), возьмем решение задачи в виде ряда

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) X_k(x). \tag{1.20}$$

Предположим, что ряд (1.20) и ряды U_t, U_{tt}, $U_{x_ix_i}$ сходятся равномерно. Тогда (1.20) будет удовлетворять уравнению (1.5), граничному условию (1.7) и будет законной подстановка (1.20) в начальные условия (1.6)

$$U(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kX_k(x)=\varphi(x),$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}b_kX_k(x)=\psi(x),\ x\in\overline{\Omega} \tag{1.21}$$

Предположим, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 5 (Стеклова). Тогда функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ разложимы в ряд Фурье по системе $\{X_k(x)\}_1^\infty$, т.е.

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_kX_k(x),$$

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_kX_k(x),\ x\in\overline{\Omega}, \tag{1.22}$$

где $\varphi_k=\frac{(\varphi,X_k)_\rho}{||X_k||_\rho^2}$, $\psi_k=\frac{(\psi,X_k)_\rho}{||X_k||_\rho^2}$.

Учитывая (1.22), из (1.21) имеем, что условие (1.21) будет удовлетворено, если

$$a_k=\varphi_k,\ b_k=\frac{\psi_k}{\sqrt{\lambda_k}}. \tag{1.23}$$

Подставляя (1.23) в (1.20), получим общее решение задачи (1.5) - (1.7) в виде ряда

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k\cos\sqrt{\lambda_k}t+\frac{\psi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t)X_k(x). \tag{1.24}$$

Решение (1.24) - формальное решение задачи. Для обоснования решения нужно показать, что $U(x,t)\in C^2(Ц_\infty)\cap C^1(\overline{Ц}_\infty)$, т.е. нужно доказать сходимость всех вышеуказанных рядов.

Остановимся более подробно на сходимости ряда (1.24). Для доказательства равномерной сходимости ряда построим для ряда (1.24) мажорирующий ряд. Учитывая, что $|\cos\sqrt{\lambda_k}t|$, $|\sin\sqrt{\lambda_k}t|\le 1$, и, кроме того, начиная с некоторого $k\ge k_0$, $\sqrt{\lambda_k}\ge 1$, а значит, $\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\le 1$, получим

$$|U_k(x,t)|\le|\varphi_kX_k|+|\psi_kX_k|. \tag{1.25}$$

Учитывая (1.25), имеем, что ряд (1.24) будет сходится регулярно, а значит, равномерно, если равномерно сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k X_k(x)|, \ \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k X_k(x)|. \tag{1.26}$$

Но ряды (1.26) сходятся на основании того, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют теореме 5 (Стеклова).

Аналогично можно доказать сходимость рядов, полученных дифференцированием ряда (1.24) при некоторых условиях на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Замечание 1. Предположим теперь, что $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_q = 0$. Тогда часть уравнений (1.15) примут вид $T_k''(t) = 0$, $k = \overline{1, q}$, тогда $T_k(t) = a_k + b_k t$.

В этом случае решение задачи ищется в виде

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{q} (a_k + b_k t) X_k(x) + \sum_{k=q+1}^{\infty} (\varphi_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{\psi_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t) X_k(x).$$

Замечание 2. Если в уравнении (1.5) в левой части вместо члена $\rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ стоит член $\rho(x)[A(t)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + B(t)\frac{\partial U}{\partial t} + C(t)U]$, причем $A(t) > 0$, то схема исследования задачи остается прежней, только уравнение для функции $T(t)$ получается несколько сложнее.

Итак, мы получили классическое решение задачи, т.е. решение $U(x,t) \in C^2(Ц_\infty) \cap C^1(\overline{Ц}_\infty)$ при определенных условиях, наложенных на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Если же функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не удовлетворяют этим условиям, то вводят понятие обобщенного решения задачи.

V.2 Лекция 16. Свободные колебания струны, закрепленной на концах (решение задачи, обоснование решения, физическая интерпретация решения).

V.2.1 Решение задачи.

Ранее было показано, что эта задача сводится к решению следующей смешанной задачи

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ (x,t) \in Ц_\infty = (0,l) \times (0,\infty), \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \end{cases},\ 0 \le x \le l, \tag{2.2}$$

$$U(0,t) = 0,\ U(l,t) = 0,\ t \ge 0, \tag{2.3}$$

причем $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

В данном случае $n = 1$, ρ, $p \equiv const$, $q \equiv 0$, $\alpha \equiv 1$, $\beta \equiv 0$, $a^2 = \frac{p}{\rho}$.

Будем искать ршение уравнения (2.1) в виде

$$U(x,t) = X(x)T(t). \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.1) и (2.3), имеем

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda, \tag{2.5}$$

$$U(0,t) = X(0)T(t) = 0,\ U(l,t) = X(l)T(t) = 0,\ t \ge 0. \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) имеем уравнение для $T(t)$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0. \tag{2.7}$$

и задачу на собственные значения (задачу Штурма-Лиувилля) для $X(x)$

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{2.8}$$

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0. \tag{2.9}$$

Задача (2.8), (2.9) была решена ранее

$$\lambda_k = (\frac{\pi k}{l})^2,\ X_k(x) = \sin \frac{\pi k}{l} x,\ k \in \mathbb{N}.$$

В данном случае каждому собственному значению соответствует одна собственная функция, причем последовательность $\{X_k(x)\}_1^\infty$ ортогональна, т.е.

$$(X_k, X_j) = \int\limits_0^l \sin\frac{\pi k}{l}x \sin\frac{\pi j}{l}xdx = \left\{ \begin{array}{l} \frac{l}{2},\ k=j \\ 0,\ k\neq j \end{array} \right. .$$

Рассмотрим теперь ршение упавнения (2.7) при $\lambda = \lambda_k$, т.е. уравнение

$$T_k'' + (\frac{a\pi k}{l})^2 T_k = 0. \tag{2.10}$$

Общее ршеение уравнения (2.10) имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{a\pi k}{l}t + b_k \sin\frac{a\pi k}{l}t,\ a_k,\ b_k - const.$$

Решение задачи (2.1) - (2.3) будем отыскивать в виде

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^\infty U_k(x,t) = \sum_{k=1}^\infty T_k(t)X_k(x) = \sum_{k=1}^\infty (a_k\cos\frac{a\pi k}{l}t + b_k\sin\frac{a\pi k}{l}t)\sin\frac{\pi k}{l}x. \tag{2.11}$$

Удовлетворим теперь условию (2.2)

$$U(x,0) = \sum_{k=1}^\infty T_k(0)X_k(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k \sin\frac{\pi k}{l}x = \varphi(x),\ 0\le x\le l,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \sum_{k=1}^\infty T_k'(0)X_k(x) = \sum_{k=1}^\infty b_k\frac{a\pi k}{l}\sin\frac{\pi k}{l}x = \psi(x).$$

Таким образом, мы пришли к задаче разложения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд по системе $\{\sin\frac{\pi k}{l}x\}_1^\infty$. Из теории тригонометрических рядов известно. что всякая функция $\mathcal{F}(x) \in C^1\{[0,l]\}$ и удовлетворяющая условиям $\mathcal{F}(0) = \mathcal{F}(l) = 0$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по системе $\{\sin\frac{\pi k}{l}x\}_1^\infty$, т.е.

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{k=1}^\infty \mathcal{F}_k\sin\frac{\pi k}{l}x,\ \mathcal{F}_k = \frac{(\mathcal{F}, \sin\frac{\pi k}{l}x)}{||\sin\frac{\pi k}{l}x||^2} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \mathcal{F}(x)\sin\frac{\pi k}{l}xdx.$$

Предположим, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют вышеуказанным условиям (частный случай теоремы Стеклова), тогда решение задачи запишется в виде

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^\infty (\varphi_k\cos\frac{a\pi k}{l}t + \frac{\psi_k l}{\pi k a}\sin\frac{a\pi k}{l}t)\sin\frac{\pi k}{l}x, \tag{2.12}$$

$$\varphi_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi k}{l}xdx,\ \psi_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi k}{l}xdx.$$

Замечание. Если начальная скорость $\psi(x) = 0$, то решение задачи запишется в виде

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\cos\frac{a\pi k}{l}t\sin\frac{\pi k}{l}x \tag{2.13}$$

и его можно интерпретировать соответствующим образом.

Разложим функцию $\varphi(x)$ в ряд по системе $\{\sin\frac{\pi k}{l}x\}_1^{\infty}$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin\frac{\pi k}{l}x. \tag{2.14}$$

Сравнивая (2.13) и (2.14), мы видим, что единственная разница между разложением (2.14) и решением (2.13) состоит в наличии временого множителя $\cos\frac{a\pi k}{l}t$. Поэтому можно утверждать, что каждый член ряда (2.14) совершает колебание, определяемое формулой $U_k(x,t) = \varphi_k\cos\frac{a\pi k}{l}t\sin\frac{\pi k}{l}x$. Таким образом, можно получить следующую интерпретацию метода Фурье. Представляем функцию $\varphi(x)$ в виде ряда простейших функций $\varphi_k\sin\frac{\pi k}{l}x$. Каждая такая функция порождает отклик $U_k(x,t)$. Складывая такие отклики, мы получаем полный отклик системы на начальное условие $\varphi(x)$, т.е. получаем решение задачи.

V.2.2 Обоснование решения.

Перейдем теперь к обоснованию решения (2.12). Для обоснования решения мы должны убедиться в непрерывности (2.12) при $0 \le x \le l$, $t \ge 0$, откуда будет следовать, что функция $U(x,t)$ непрерывно примыкает к первому условию (2.2) и условию(2.3). Для этого достаточно доказать равномерную сходимость ряда (2.12), так как общий член ряда - непрерывная функция. Для доказательства равномерной сходимости ряда (2.12) возьмем в качестве мажорирующего ряда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|\varphi_k| + \frac{l}{a\pi k}|\psi_k|), \tag{2.15}$$

при этом мы учли, что $|\sin|$, $|\cos| \le 1$. Тогда (2.15) будет сходиться, если будут сходиться ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_k}{k}$. Для того, чтобы что ряд (2.12) удовлетворяет второму начальному условию (2.2), нужно доказать равномерную сходимость ряда

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial U_k}{\partial t}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a\pi k}{l}(-\varphi_k\sin\frac{a\pi k}{l}t+\frac{\psi_k l}{a\pi k}\cos\frac{a\pi k}{l}t)\sin\frac{\pi k}{l}x. \tag{2.16}$$

Мажорантным рядом для ряда (2.16) будет ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k|\varphi_k|+|\psi_k|). \tag{2.17}$$

Ряд (2.17) будет сходиться, если сходятся ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k|\varphi_k|$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\psi_k|$.

Чтобы (2.12) удовлетворял уравнению (2.1), т.е. допускал двухкратное дифференцирование по t и x, нужно доказать равномерную сходимость рядов

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2}=-(\frac{a\pi}{l})^2\sum_{k=1}^{\infty}(k^2\varphi_k\cos\frac{a\pi k}{l}t+\frac{\psi_k kl}{a\pi}\sin\frac{a\pi k}{l}t)sin\frac{\pi k}{l}x, \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 U_k}{\partial x^2}=-(\frac{\pi}{l})^2\sum_{k=1}^{\infty}k^2(\varphi_k\cos\frac{a\pi k}{l}t+\frac{\psi_k l}{a\pi k}\sin\frac{a\pi k}{l}t)\sin\frac{\pi k}{l}x). \tag{2.19}$$

Из (2.18) и (2.19) следует, что ряды (2.18) и (2.19) сходятся равномерно, если сходятся ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2|\varphi_k|$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k|\psi_k|$.

Таким образом, наша задача сводится к сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^m|\varphi_k|$, $m=0,1,2$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^m|\psi_k|$, $m=-1,0,1$.

Воспользуемся здесь известными свойствами рядов Фурье. Пусть функция $\phi(x)$ задана в интервале $[0,l]$. Ставится задача о разложении $\phi(x)$ в ряд по системе $\{\sin\frac{\pi k}{l}x\}_1^{\infty}$, т.е. $\phi(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{\pi k}{l}x$. Имеет место

Теорема. Для того. чтобы сходился ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^m A_k$ достаточно, чтобы функция $\phi(x)$ имела в интервале $[0,l]$ m непрерывных производных, $m+1$ кусочно-непрерывную производную и чтобы выполнялись следующие условия продолжимости

$$\phi^{(2p)}(0)=\phi^{(2p)}(l)=0,\ p=0,1,...,v,\ 2p<m+1.$$

Итак, на основании этой теоремы получаем

Теорема. Задача (2.1) - (2.3) имеет решение:

1) если $\varphi(x)$ имеет две непрерывне производные и третью кусочно-непрерывную производную, причем $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$;

2) ψ непрерывно дифференцируема и имеет кусочно-непрерывную вторую производную, причем $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Итак, вышеприеденная теорема дает достаточные условия существования классического решения задачи, причем классическим решением задачи (2.1)-(2.3) называется функция $U(x,t) \in C^2(\text{Ц}_\infty) \cap C^1(\overline{\text{Ц}}_\infty)$, удовлетворяющая уравнению (2.1) при $(x,t) \in \text{Ц}_\infty$, начальному условию (2.2) и граничному условию (2.3).

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не удовлетворяют условиям теоремы, то классическое решение может не существовать. Вводят понятие обобщенного решения. Одним из методов введения обобщенного решения является следующий. Пусть существуют последовательности функций $\{\varphi_k\}_1^\infty$ и $\{\psi_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих условиям теоремы и таких, что $\varphi_k(x) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $\psi_k(x) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} \psi(x)$.Пусть при каждом k существуют классические решения $U_k(x,t)$ задачи (2.1)-(2.3) с данными $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ и пусть $U_k(x,t) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} U(x,t)$. Тогда $U(x,t)$ называется обощенным решением задачи (2.1)-(2.3). Например, если $\varphi(x)$ - непрерывно-дифференцируемая функция, причем $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, а $\psi(x)$ - непрерывная функция, причем $\psi(0) = \psi(l) = 0$, то ряд (2.12) сходится равномерно и дает непрерывную функцию. Тогда функция, определяемая рядом (2.12), дает обобщенное решение задачи.

V.2.3 Физическая интерпретация решения.

Преобразуем формулу (2.11). Будем рассматривать (b_k, a_k) как точку с координатами b_k, a_k. Запишем для нее полярное представление $b_k = A_k \cos\delta_k$, $a_k = A_k \sin\delta_k$, где $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $\delta_k = arctg\frac{a_k}{b_k}$.

Тогда

$$U_k(x,t) = A_k(\sin\delta_k \cos\frac{a\pi k}{l}t + \cos\delta_k \sin\frac{a\pi k}{l}t)\sin\frac{\pi k}{l}x =$$

$$= A_k \sin\frac{\pi k}{l}x \sin(\omega_k t + \delta_k),\ \omega_k = \frac{a\pi k}{l}, \tag{2.20}$$

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k t + \delta_k) \sin\frac{\pi k}{l}x. \tag{2.21}$$

Выясним физический смысл (2.21). Для этого выясним физический смысл (2.20). Если фиксировать $x = x_0$, то

$$U_k(x_0, t) = A_k \sin \frac{\pi k}{l} x_0 \sin(\omega_k t + \delta_k). \tag{2.22}$$

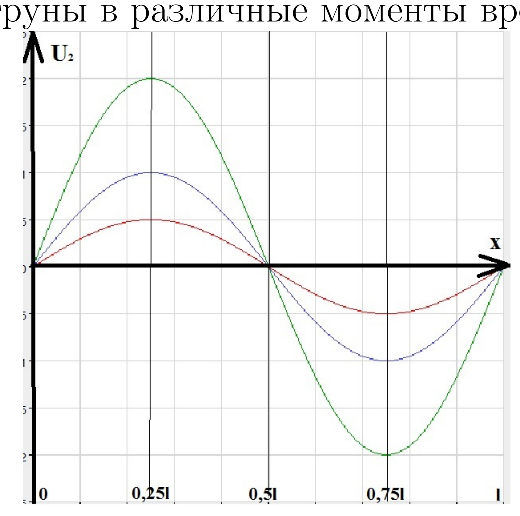
Из (2.22) следует, что при колебании (2.22) любая точка x_0 совершает гармонические колебания с одинаковой начальной фазой δ_k, амплитудой $A_k \sin \frac{\pi k}{l} x_0$ и одинаковой частотой ω_k. При таком колебании все точки струны одновременно достигают своего максимального отклонения в ту или другую сторону и одновременно проходят положение равновесия. Такие колебания называются стоячими волнами.

При таком колебании есть точки x_0, которые в течение всего процесса остаются неподвижными, т.е. в них $U(x_0, t) = 0$. Это точки, в которых $\sin \frac{\pi k}{l} x_0 = 0$, $x_0 = \frac{ml}{k}$, $m = 0, 1, ..., k-1, k$. Эти точки называются узлами стоячей волны.

Есть на струне точки x_0, которые совершают колебания с максимальной амплитудой, т.е. в них $\sin \frac{\pi k}{l} x_0 = 1$. Эти точки называются пучностями стоячей волны.

При фиксированном $t = t_0$ имеем $U_k(x, t_0) = A_k \sin \frac{\pi k}{l} x \sin(\omega_k t_0 + \delta_k) = A_k^*(t_0) \sin \frac{\pi k}{l} x$, $A_k^*(t_0) = A_k \sin(\omega_k t_0 + \delta_k)$, т.е. профилем стоячей волны в каждый фиксированный момент t_0 является синусоида. В момент t, при котором $\sin(\omega_k t_0 + \delta_k) = \pm 1$, отклонение достигает максимального значения, а скорость движения равна нулю. В момент t, при котороmm $\sin(\omega_k t_0 + \delta_k) = 0$, отклонение равно нулю, а скорость движения максимальна.

Пусть $k = 2$, тогда $U_2(x, t) = A_2 \sin \frac{2\pi}{l} x \sin(\frac{2a\pi}{l} + \delta_2)$. Видно, что узлами будут точки $x_0 = 0$, $x_0 = \frac{l}{2}$, $x_0 = l$, а тучностями точки $x_0 = \frac{l}{4}$, $x_0 = \frac{3l}{4}$. Форма струны в различные моменты времени будет иметь вид:



Колебание струны воспринимается нами по звуку, издаваемому струной. Колеблющаяся струна возбуждает колебение воздуха, воспринимаемое ухом как звук, издаваемый струной.

Так как $U(x,t)$ придставляется в виде (2.21), то звук струны является наложением простых тонов, соответствующих стоячим волна, на которые разлагается колебание. Высота тона определяется частотой колебания, сила тона определяется его энергией, следовательно, его амплитудой. Самый низкий тон, который может создать струна, определяется низкой частотой $\omega_1 = \frac{a\pi}{l}$ и называется основным тоном. Остальные тона называются обертонами или гармониками. Звучание струны определяет основной тон, так как он обладает самой большой энергией. Обертоны создают только тембр звука, так как энергия обертонов с увеличением k убывает. Основной тон и тембр звука зависит от способа возбуждения. Действительно, способ возбуждения характеризуют начальные данные $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, через которые выражаются a_k и b_k. Если, например, $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, то основным тоном будет тон, соответствующий частоте ω_k, где k - наименьшее значение, для которого a_k, $b_k \neq 0$. Например, если при игре на гитаре мы оттягиваем струну в одну сторону и отпускаем без начальной скорости, то в этом случае $\varphi(x) > 0$, $\psi \equiv 0$. Основным тоном в этом случае будет самый низкий тон, энергия которого больше энергии других тонов. Если же $\varphi(x)$ - нечетная фнукция относительно середины, то основной тон соответствует чаастоте $\omega_2 = \frac{2a\pi}{l} = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$, T_0 - сила натяжения.

Наличие высоких обертонов (начиная с 7-го) нарушает гармоничность звука и вызывает чувство диссонанса. Наличие низких обертонов вызывает ощущуние полноты звука. Поэтому, например, в рояле место удара молоточка выбирают между узлами 7-го и 8-го оберотнов, чтобы уменьшить их энергию. Регулируя ширину молоточка и его жесткость, стремятся увеличить относительную энергию 3-го и 4-го тонов.

При игре на гитаре можно изменять звук струны, если прикоснуться к ней в какой-либо точке. В момент прикосновения мы гасим стоячие волны, имеющие в этой точке тучности, и сохраняем волны, которые имеют в этой точке узлы.

Таким образом, операциями чисто математического характера можно объяснить законы звучания струны, которые подтверждаются и экспериментально. С помощью так называемых резонаторов можно экспериментально произвести выделение гармоник.

V.3 Лекция 17. Решение смешанной задачи для неоднородного уравнения колебаний. Случай неоднородных граничных условий. Теоремы единственности и устойчивости решений смешанной задачи.

V.3.1 Решение смешанной задачи для неоднородного уравнения методом собственных функций.

Рассмотрим смешанную задачу для неоднородного уравнения колебаний

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -LU + \phi(x,t),\ (x,t) \in Ц_\infty,\ Ц_\infty = \Omega \times (0,\infty), \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} U(x,0) = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases},\ x \in \overline{\Omega}, \tag{3.2}$$

$$\left[\alpha(x)U + \beta(x)\frac{\partial U}{\partial n}\right]\Bigg|_{\partial\Omega\times[0,\infty)} = 0. \tag{3.3}$$

Будем искать решение задачи в виде ряда

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{T}_k(t) X_k(x), \tag{3.4}$$

где $X_k(x)$ - собственная функция задачи на собственные значения для соответствующего однородного уравнения ($\phi(x,t) \equiv 0$), т.е.

$$LX_k = \lambda_k \rho(x) X_k, \tag{3.5}$$

$$\left[\alpha(x)X_k + \beta(x)\frac{\partial X_k}{\partial n}\right]\Bigg|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.6}$$

Предположим, что ряд (3.4) сходится равномерно и допускает двухкратное дифференцирование по t и x_i ($i = \overline{1,n}$). При этом предположении ряд (3.4) удовлетворяет граничному условию (3.1) в силу (3.6). Будет законной подстановка (3.4) в (3.1) и (3.2).

Подберем функции $\tilde{T}_k(t)$ так, чтобы ряд (3.4) удовлетворял уравнению (3.1) и условию (3.2). Подставим (3.4) в (3.1)

$$\rho(x)\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{T}''_k(t) X_k(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{T}_k(t) L X_k(x) + \phi(x,t). \tag{3.7}$$

Но в силу (3.5) $-LX_k = -\lambda_k \rho X_k$, поэтому из (3.7) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\tilde{T}_k''(t) + \lambda_k \tilde{T}_k(t)] X_k(x) = \frac{\phi(x,t)}{\rho(x)}. \tag{3.8}$$

Таким образом, из (3.8) следует, что при каждом фиксированном $t \in (0, \infty)$ мы пришли к задаче разложения функции $\frac{\phi(x,t)}{\rho(x)}$ как функции от x в ряд по системе $\{X_k(x)\}_1^{\infty}$. Предположим, что функция $\frac{\phi(x,t)}{\rho(x)}$ по переменной x удовлетворяет условиям теоремы Стеклова. Тогда будем иметь

$$\frac{\phi(x,t)}{\rho(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) X_k(x), \tag{3.9}$$

$$c_k(t) = \frac{(\frac{\phi}{\rho}, X_k)_\rho}{||X_k||_\rho^2} = \frac{\int\limits_{\Omega} \rho \frac{\phi(x,t)}{\rho(x)} X_k(x) dx}{||X_k||_\rho^2} = \frac{(\phi, X_k)}{||X_k||_\rho^2}.$$

Учитывая (3.9), из (3.8) получаем, что (3.8) будет удовлеворено, если функции $\tilde{T}_k$ будут решениями уравнений

$$\tilde{T}_k''(t) + \lambda_k \tilde{T}_k(t) = c_k(t),\ k = 1, 2, ..., \tag{3.10}$$

т.е. решениями обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Подставляем теперь (3.4) в (3.2), тогда получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{T}_k(0) X_k(x) = 0,\ \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{T}_k'(0) X_k(x) = 0,\ x \in \overline{\Omega},$$

откуда на основании теоремы Стеклова получаем

$$\tilde{T}_k(0) = 0,\ \tilde{T}_k'(0) = 0. \tag{3.11}$$

Итак, мы пришли для определения $\tilde{T}_k(t)$ к задаче Коши (3.10), (3.11) для обыкновенного дифференциального уравнения. Остановимся на решении этой задачи. Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $\tilde{T}_k''(t) + \lambda_k \tilde{T}_k(t) = 0$.

Если $\lambda_k > 0$, то

$$T_k(t) = a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t,$$

где a_k, $b_k - const$.

Надйем общее решение уравнения (3.10) методом вариации произвольных постоянных. Ищем решение уравнения в виде

$$\tilde{T}_k(t) = a_k(t)\cos\sqrt{\lambda_k}t + b_k(t)\sin\sqrt{\lambda_k}t. \tag{3.12}$$

На основании известных результатов из теории обыкновенных уравнений система уравнений для определения $a_k'(t)$, $b_k'(t)$ имеет вид

$$\begin{cases} a_k'(t)\cos\sqrt{\lambda_k}t + b_k'(t)\sin\sqrt{\lambda_k}t = 0 \\ -\sqrt{\lambda_k}a_k'(t)\sin\sqrt{\lambda_k}t + \sqrt{\lambda_k}b_k'(t)\cos\sqrt{\lambda_k}t = c_k(t), \end{cases}$$

причем определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda_k}t & \sin\sqrt{\lambda_k}t \\ -\sqrt{\lambda_k}\sin\sqrt{\lambda_k}t & \sqrt{\lambda_k}\cos\sqrt{\lambda_k}t \end{vmatrix} = \sqrt{\lambda_k} \neq 0.$$

Решаем эту систему методом Крамера. Тогда

$$\begin{cases} a_k'(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\begin{vmatrix} 0 & \sin\sqrt{\lambda_k}t \\ c_k(t) & \sqrt{\lambda_k}\cos\sqrt{\lambda_k}t \end{vmatrix} = -\frac{c_k(t)\sin\sqrt{\lambda_k}t}{\sqrt{\lambda_k}} \\ b_k'(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda_k}t & 0 \\ -\sqrt{\lambda_k}\sin\sqrt{\lambda_k}t & c_k(t) \end{vmatrix} = \frac{c_k(t)\cos\sqrt{\lambda_k}t}{\sqrt{\lambda_k}}. \end{cases} \tag{3.13}$$

Интегрируя (3.13), получим

$$\begin{cases} a_k(t) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^t c_k(\tau)\sin\sqrt{\lambda_k}\tau d\tau + \alpha_k, \\ b_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^t c_k(\tau)\cos\sqrt{\lambda_k}\tau d\tau + \beta_k, \end{cases} \tag{3.14}$$

где α_k, $\beta_k - const$. Учитывая, что функция $\tilde{T}_k(t)$ должна удовлетворять условиям (3.11), имеем $a_k(0) = 0$, $b_k(0) = 0$, т.е.

$$\alpha_k = 0,\ \beta_k = 0. \tag{3.15}$$

Подставляя (3.14) в (3.12) и учитывая (3.15), получим

$$\tilde{T}_k(t) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^t c_k(\tau)\sin\sqrt{\lambda_k}\tau d\tau\cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^t c_k(\tau)\cos\sqrt{\lambda_k}\tau d\tau\sin\sqrt{\lambda_k}t =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_0^t c_k(\tau) \sin \sqrt{\lambda_k}(t-\tau) d\tau. \qquad (3.16)$$

На основании(3.16) из (3.4) получаем общее решение задачи (3.1)-(3.3)

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_0^t c_k(\tau) \sin \sqrt{\lambda_k}(t-\tau) d\tau X_k(x). \qquad (3.17)$$

Для обоснования решения нужно доказать равномерную сходимость ряда (3.17) и рядов U_t, U_{tt}, $U_{x_i x_i}$.

Замечание 1. Чтобы решить задачу для уравнения (3.1) с условиями (3.3) и ненулевым начальным условием

$$\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \end{cases} \quad x \in \overline{\Omega} \qquad (3.18)$$

нужно отыскать решение задачи в виде суммы $U(x,t) = U_1(x,t) + U_2(x,t)$, где $U_1(x,t)$ - решение задачи (3.1) - (3.3), а $U_2(x,t)$ - решение задачи для соответствующего однородного уравнения ($\phi(x,t) \equiv 0$) с условиями (3.18), (3.3).

Заметим, что существует также метод решения сразу задачи (3.1), (3.18), (3.3).

Замечание 2. Рассмотрим задачу для уравнения (3.1) с начальным (3.18) и граничным условием

$$\left[\alpha(x)U + \beta(x)\frac{\partial U}{\partial n}\right]\Bigg|_{\partial\omega\times[0,\infty)} = \gamma(x,t). \qquad (3.19)$$

Решение задачи отыскивается в виде

$$U(x,t) = U_1(x,t) + U_2(x,t), \qquad (3.20)$$

где $U_1 \in C^2(\overline{Ц}_\infty)$, удовлетворяющая граничному условию (3.19). Тогда функция $U_2(x,t) = U_(x,t) - U_1(x,t)$ будет удовлетворять задаче с нулевым граничным условием(3.3). Действительно, так как функция (3.20) должна удовлетворять уравнению (3.1), то подставим (3.20) в (3.1)

$$\rho(x)\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}\right) = -LU_1 - lU_2 + \phi(x,t).$$

Тогда $U_2(x,t)$ будет удовлетворять неоднородному уравнению

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = -LU_2 + \phi^*(x,t), \qquad (3.21)$$

где $\phi^*(x,t) = -LU_1 - \rho(x)\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + \phi(x,t)$.

Подставляя (3.20) в (1.20), получим

$$\begin{cases} U_1(x,0) + U_2(x,0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial U_1}{\partial t}(x,0) + \frac{\partial U_2}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \end{cases} x \in \overline{\Omega}$$

откуда следует, что функция $U_2(x,t)$ удовлетворяет начальным условиям

$$\begin{cases} U_2(x,0) = \varphi^*(x), \\ \frac{\partial U_2}{\partial t}(x,0) = \psi^*(x), \end{cases} x \in \overline{\Omega} \tag{3.22}$$

где $\varphi^*(x) = \varphi(x) - U_1(x,0)$, $\psi^*(x) = \psi(x) - \frac{\partial U_1}{\partial t}(x,0)$.

Подставляя (3.20) в (3.19), будем иметь

$$\left\{\left[\alpha U_1 + \beta\frac{\partial U_1}{\partial n}\right] + \left[\alpha U_2 + \beta\frac{\partial U_2}{\partial n}\right]\right\}\Big|_{\partial\Omega} = \gamma(x,t).$$

Учитывая, что функция $U_1(x,t)$ удовлетворяет (3.19), получаем, что функция $U_2(x,t)$ удовлетворяет условию (3.3), т.е. однородному граничному условию.

Таким образом, для функции $U_2(x,t)$ мы получили задачу для неоднородного уравнения (3.1), неоднородного начального условия (3.18) и однородного граничного условия (3.3). Метод решения этой задачи указан в замечании 1.

Замечание 3. Если имеется такая возможность. то при отыскании решения задачи (3.1), (3.18), (3.19) в виде (3.20) от функции $U_1(x,t)$ требуем, чтобы она удовлетворяла (1.1), (3.19), тогда задача для $U_2(x,t)$ будет для однородного уравнения ($\phi(x,t) \equiv 0$), однородных граничных условий (3.3) и неоднородных начальных условий (3.22). Для решения этой задачи можно применить метод Фурье, рассмотренный выше.

Замечание 4. Рассмотрим смешанную задачу, в которой неоднородность в уравнении и граничном условии не зависит от t (стационарные неоднородности).

Например, в случае $n = 1$, $\beta \equiv 0, \alpha \equiv 1$ задача имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \phi(x),\ Ц_\infty = (0,l) \times (0,\infty), \tag{3.23}$$

$$U(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ 0 \le x \le l,$$

$$U(0,t) = \mu_1,\ U(l,t) = \mu_2,\ \mu_1,\ \mu_2 - const,\ t \ge 0. \tag{3.24}$$

В этом случае решение задачи ищем в виде $U(x,t) = U_1(x) + U_2(x,t)$, где функция $U_1(x)$ удовлетворяет уравнению (3.23) и граничным условиям (3.24), т.е. задаче

$$\frac{d^2 U_1}{dx^2} = -\frac{\phi(x)}{a^2},\ U_1(0) = \mu_1,\ U_1(l) = \mu_2.$$

Решая обычную краевую задачу для обыкновенного уравнения, находим $U_1(x)$. Тогда для $U_2(x,t)$ получаем задачу для однородного уравнения ($\phi(x,t) \equiv 0$), и однородных граничных условий $U_2(0,t) = U_2(l,t) = 0$ и неоднородных начальных условий

$$\begin{cases} U_2(x,0) = \varphi(x) - \phi(x), \\ \frac{\partial U_2}{\partial t}(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

V.3.2 Интеграл энергии. Энергетическое равенство (закон сохранения энергии).

Рассмотрим смешанную задачу

$$\rho(x) = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -LU + \phi(x,t),\ (x,t) \in \text{Ц}_\infty = \Omega \times (0,\infty) \tag{3.25}$$

$$\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \end{cases} x \in \overline{\Omega} \tag{3.26}$$

$$\left[\alpha(x)U + \beta(x)\frac{\partial U}{\partial n}\right]\Bigg|_{\partial\Omega\times[0,\infty)} = 0 \tag{3.27}$$

Пусть $U(x,t)$ - классическое решение задачи (3.25) - (3.27), т.е. $U(x,t) \in C^2(\text{Ц}_\infty) \cap C^1(\overline{\text{Ц}}_\infty)$, тогда интегралом энергии задачи называется интеграл

$$J^2(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left[\rho(x)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + p(x)|\nabla U|^2 + q(x)U^2\right] dx + \frac{1}{2}\int\limits_{S_0} p(x)\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}U^2 dS, \tag{3.28}$$

где $\nabla U = (\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial U}{\partial x_n})$, $|\nabla U|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{\partial U}{\partial x_i})^2$, S_0 – часть $\partial\Omega$, на которой одновременно $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Интеграл энергии (3.28) дает обобщение на n-мерный случай понятия полной энергии системы (т.е. суммы кинетической и потенциальной энергии) колеблющейся системы в момент t.

Действительно, запишем интеграл $J^2(t)$ в случае задачи о поперечных колебаниях струны, закрепленной на концах. В этом случае соответствующая задача имеет вид

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \phi(x,t),\ \text{Ц}_\infty = (0,l) \times (0,\infty)$$

$$\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \end{cases} 0 \le x \le l$$

$$\begin{cases} U(0,t)=0, \\ U(l,t)=0, \end{cases} t \geq 0$$

В данном случае $\rho(x)$ - линейная плотность струны, $p(x) \equiv T_0 - const$, $q(x) \equiv 0$, $\alpha(x) \equiv 1, \beta(x) \equiv 0$, $n=1$,

$$J^2(t) = K(t) + \tilde{U}(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left[\rho(x)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right]dx. \qquad (3.29)$$

Интеграл (3.29) дает сумму кинетической энергии $K(t)$ и потенциальной энергии $\tilde{U}(t)$ струны в момент t, причем последнего слагаемого нет, так как $\beta \equiv 0$.

Действительно, элемент струны dx, движущийся со скоростью $V = \frac{\partial U}{\partial t}(x,t)$ обладает кинетической энергией $dK(t) = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}\rho(x)dx(\frac{\partial U}{\partial t}(x,t))^2$. Тогда кинетическая энегрия всей струны равна $K(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \rho(x)(\frac{\partial U}{\partial t})^2 dx$.

На $\tilde{U}(t)$ будем смотреть как на работу сил по растяжению струны, т.е. элемент потенциальной энергии будет равен $d\tilde{U}(t) = T_0(dS - dx) = T_0(\sqrt{1+(\frac{\partial U}{\partial x})^2}dx - dx) = T_0(\sqrt{1+(\frac{\partial U}{\partial x})^2} - 1)dx$, при этом мы учли, что $dS = \sqrt{1+(\frac{\partial U}{\partial x})^2}dx$.

Но $\sqrt{1+(\frac{\partial U}{\partial x})^2} = (1+(\frac{\partial U}{\partial x})^2)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}(\frac{\partial U}{\partial x})^2 - \frac{1}{8}(\frac{\partial U}{\partial x})^4 + ...$, откуда в силу малости колебаний имеем $\sqrt{1+(\frac{\partial U}{\partial x})^2} \approx 1 + \frac{1}{2}(\frac{\partial U}{\partial x})^2$, поэтому $d\tilde{U}(t) = \frac{T_0}{2}(\frac{\partial U}{\partial x})^2$, $\tilde{U}(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l T_0(\frac{\partial U}{\partial x})^2 dx$.

Имеет место

Лемма (энергетическое равенство, закон сохранения энергии). Пусть $U(x,t)$ – классическое решение задачи (3.25) - (3.27) и $\phi(x,t) \in C(\overline{Ц}_\infty)$, тогда справедливо равенство

$$J^2(t) = J^2(0) + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \phi(x,\tau)\frac{\partial U}{\partial \tau}(x,\tau)dxd\tau,\ t \geq 0, \qquad (3.30)$$

где $J^2(0) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega [\rho(x)\psi^2 + p(x)|\nabla\varphi|^2 + q(x)\varphi^2]dx + \frac{1}{2}\int\limits_{S_0} p(x)\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\varphi^2 dS$.

Заметим, что если $\phi(x,t) \equiv 0$, т.е. рассматриваются свободные колебания системы, то (3.30) примет вид

$$J^2(t) = J^2(0),\ t \geq 0. \qquad (3.31)$$

Физический смысл (3.31) состоит в том, что полная энергия колеблющейся системы при отсутствии внешних возмущений не меняется со временем (закон сохранения энергии).

Перейдем к доказательству (3.30).

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и область $\Omega' \subset\subset \Omega$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega'$. Умножим (3.25) на $\frac{\partial U}{\partial t}$ и проинтегрируем по цилиндру $Ц'_T = \Omega' \times (\varepsilon, T)$, $0 < T < \infty$

$$\int\limits_{\varepsilon}^{T}\int\limits_{\Omega'} \rho(x)\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}dxdt + \int\limits_{\varepsilon}^{T}\int\limits_{\Omega'} \frac{\partial U}{\partial t}LU dxdt = \int\limits_{\varepsilon}^{T}\int\limits_{\Omega'} \phi(x,t)\frac{\partial U}{\partial t}dxdt. \tag{3.32}$$

Преобразуем первое слагаемое левой части (3.32)

$$\int\limits_{\varepsilon}^{T}\int\limits_{\Omega'} \rho(x)\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon}^{T}\int\limits_{\Omega'} \rho(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega'} \rho(x)\int\limits_{\varepsilon}^{T} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega'} \rho(x)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\Bigg|_{\varepsilon}^{T} dx. \tag{3.33}$$

Второе слагаемое левой части (3.32) преобразуем с помощью второй формулы Грина (1.12), в которой роль V играет $\frac{\partial U}{\partial t}$

$$\int\limits_{\Omega'} \frac{\partial U}{\partial t}LU dx = \int\limits_{\Omega'} p(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_i}dx + \int\limits_{\Omega'} q(x)\frac{\partial U}{\partial t}U dx - \int\limits_{\partial\Omega'} p(x)\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial n}dS. \tag{3.34}$$

Преобразуем первое и второе слагаемое правой части (3.34)

$$\int\limits_{\Omega'} p(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_i}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega'} p(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2 dx. \tag{3.35}$$

$$\int\limits_{\Omega'} q(x)\frac{\partial U}{\partial t}U dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega'} q(x)\frac{\partial}{\partial t}(U)^2 dx. \tag{3.36}$$

Учитывая (3.34)-(3.36), и сменив порядок интегрирования, второе слагаемое левой части (3.32) запишем в следующем виде

$$\int\limits_{\varepsilon}^{T}\int\limits_{\Omega'} \frac{\partial U}{\partial t}LU dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega'} p(x)\int\limits_{\varepsilon}^{T}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2 dtdx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega'} q(x)\int\limits_{\varepsilon}^{T}\frac{\partial}{\partial t}(U)^2 dtdx - \int\limits_{\varepsilon}^{T}\int\limits_{\partial\Omega'} p(x)\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial n}dSdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega'} p(x)|\nabla U|^2\Big|_{\varepsilon}^{T} dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega'} q(x)U^2\Big|_{\varepsilon}^{T} dx - \int\limits_{\varepsilon}^{T}\int\limits_{\partial\Omega'} p(x)\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial n}dSdt. \qquad (3.37)$$

Учитывая (3.33), (3.37), запишем (3.32) в виде

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega'} \rho(x)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\Bigg|_{\varepsilon}^{T} dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega'} p(x)|\nabla U|^2\Big|_{\varepsilon}^{T} dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega'} q(x)U^2\Big|_{\varepsilon}^{T} dx -$$

$$- \int\limits_{\varepsilon}^{T}\int\limits_{\partial\Omega'} p(x)\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial n}dSdt = \int\limits_{\varepsilon}^{T}\int\limits_{\Omega'} \phi(x,t)\frac{\partial U}{\partial t}dxdt. \qquad (3.38)$$

Устремим теперь в (3.38) $\varepsilon \to 0$, $\Omega' \to \Omega$, причем учтем, что $U \in C^1(\overline{Ц}_T)$. Тогда получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left[\rho(x)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + p(x)|\nabla U|^2 + q(x)U^2\right]\Bigg|_{0}^{T} dx - \int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\partial\Omega} p(x)\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial n}dSdt =$$

$$= \int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega} \phi(x,t)\frac{\partial U}{\partial t}dxdt. \qquad (3.39)$$

Преобразуем последнее слагаемое левой части (3.39) с помощью граничного условия (3.27). Из граничного условия (3.27) имеем

$$\alpha(x)U + \beta(x)\frac{\partial U}{\partial n} = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \in [0,\infty). \qquad (3.40)$$

Если $\beta(x) \neq 0$, то из (3.40) имеем

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}U, \qquad (3.41)$$

причем, если $\alpha = 0$, то

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0. \qquad (3.42)$$

Если же $\beta(x) = 0$, то $\alpha \neq 0$. Тогда из (3.40) имеем $U = 0$, $t \in [0, \infty)$, откуда

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0. \tag{3.43}$$

Учитывая (3.41) - (3.43), получим

$$\frac{\partial U}{\partial n}\frac{\partial U}{\partial t} = \begin{cases} 0, \text{ если } \alpha = 0 \text{ или } \beta = 0, \\ -\frac{\alpha}{\beta}U\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial}{\partial t}(U^2),\ x \in S_0. \end{cases} \tag{3.44}$$

На основании (3.44) имеем

$$-\int\limits_0^T\int\limits_{S_0} p(x)\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial n}dSdt = \frac{1}{2}\int\limits_{S_0} p(x)\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\int\limits_0^T \frac{\partial}{\partial t}(U^2)dtdS =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{S_0} p(x)\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}U^2\Big|_0^T dt. \tag{3.45}$$

Подставляя (3.45) в (3.39), получим

$$J^2(t)|_0^T = \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \phi(x,t)\frac{\partial U}{\partial t}dxdt. \tag{3.46}$$

Равенство (3.46) имеет место при любом $0 < T < \infty$, поэтому, подставляя в (3.46) вместо T любой t заменяя t на τ, получим (3.30).

V.3.3 Априорные оценки для решений смешанной задачи.

При фиксированном t введем обычную норму в пространстве L_2, т.е. в пространстве функций, интегрируемых с квадратом

$$||U||^2 = \int\limits_\Omega U^2(x,t)dx. \tag{3.47}$$

Продифференцируем по t энергетическое равенство (3.30)

$$2JJ' = \int\limits_\Omega \phi(x,t)\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)dx. \tag{3.48}$$

Применим к правой части (4.24) неравенство Коши-Буняковского

$$2JJ' \leq ||\phi|| \left|\left|\frac{\partial U}{\partial t}\right|\right|. \tag{3.49}$$

Норму $||\frac{\partial U}{\partial t}||$ выразим через $J(t)$. По определению имеем

$$\left|\left|\frac{\partial U}{\partial t}\right|\right|^2 = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx. \tag{3.50}$$

Учтем теперь, что $\rho(x) > 0$, $\rho(x) \in C(\overline{\Omega})$, $\rho(x) \geq \rho_0$, $\rho_0 = \min\limits_{\Omega} \rho > 0$, откуда $\frac{\rho(x)}{\rho_0} \geq 1$. Тогда из (3.50) имеем

$$\left|\left|\frac{\partial U}{\partial t}\right|\right|^2 \leq \int\limits_{\Omega} \frac{\rho(x)}{\rho_0} \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{2}{\rho_0}\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \rho(x) \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx. \tag{3.51}$$

Но из (3.51) с учетом (3.28) получим

$$\left|\left|\frac{\partial U}{\partial t}\right|\right|^2 \leq \frac{2}{\rho_0} J^2(t), \ \left|\left|\frac{\partial U}{\partial t}\right|\right| \leq \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J(t). \tag{3.52}$$

Подставляя (3.52) в (3.49), получим

$$2JJ' \leq ||\phi|| \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J, \ J'(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} ||\phi||, \ t \geq 0. \qquad (3.53))$$

Интегрируя (3.53), получим

$$J(t) \leq J(0) + \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \int\limits_0^t ||\phi(x,\tau)|| d\tau. \tag{3.54}$$

Подставляя (3.54) в (3.52), получим первую априорную оценку для $||\frac{\partial U}{\partial t}||$

$$\left|\left|\frac{\partial U}{\partial t}\right|\right| \leq \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J(0) + \frac{1}{\rho_0} \int\limits_0^t ||\phi(x,\tau)|| d\tau. \tag{3.55}$$

Получим теперь оценку для нормы решения. Дифференцируя (3.47) по t и применяя к правой части неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$2||U|| \frac{\partial}{\partial t} ||U|| = 2 \int\limits_{\Omega} U(x,t) \frac{\partial U}{\partial t}(x,t) dx \leq 2||U|| \left|\left|\frac{\partial U}{\partial t}\right|\right|,$$

откуда
$$\frac{\partial}{\partial t}||U|| \le \left|\left|\frac{\partial U}{\partial t}\right|\right|. \tag{3.56}$$

Учитывая (3.55), из (3.56) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}||U|| \le \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}J(0) + \frac{1}{\rho_0}\int\limits_0^t ||\phi(x,\tau)||d\tau.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t от 0 до t, при этом заменим t на ξ

$$||U|| - ||U|||_{t=0} \le \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}J(0)t + \frac{1}{\rho_0}\int\limits_0^t d\xi \int\limits_0^\xi ||\phi(x,\tau)||d\tau. \tag{3.57}$$

Если учесть, что

$$||U|||_{t=0} = \left\{\int\limits_\Omega U^2(x,0)dx\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\int\limits_\Omega \varphi^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}} = ||\varphi||,$$

то из (3.57) получим

$$||U|| \le ||\varphi|| + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}J(0)t + \frac{1}{\rho_0}\int\limits_0^t d\xi \int\limits_0^\xi ||\phi(x,\tau)||d\tau. \tag{3.58}$$

В последнем слагаемом правой части (3.58) поменяем порядок интегрирования по ξ и τ, применяя формулу Дирихле

$$\int\limits_0^t d\xi \int\limits_0^\xi ||\phi(x,\tau)||d\tau = \int\limits_0^t ||\phi(x,\tau)||d\tau \int\limits_\tau^t d\xi = \int\limits_0^t (t-\tau)||\phi(x,\tau)||d\tau. \tag{3.59}$$

Учитывая (3.59), из (3.58) получаем априорную оценку для нормы решения

$$||U|| \le ||\varphi|| + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}J(0)t + \frac{1}{\rho_0}\int\limits_0^t (t-\tau)||\phi(x,\tau)||d\tau. \tag{3.60}$$

V.3.4 Теоремы единственности и устойчивости решений смешанной задачи.

Теорема 1 (единственность). Смешанная задача (3.25) - (3.27) не может иметь более одного решения.

Доказательство. Предположим, что существует два решения U_1 и U_2. Рассмотрим функцию $V(x,t) = U_1(x,t) - U_2(x,t)$, которая удовлетворяет соответствующему однородному уравнению ($\phi(x,t) \equiv 0$), нулевым начальным условиям ($\varphi(x), \psi \equiv 0$), граничному условию (3.27).

Запишем для функции $V(x,t)$ оценку (3.60), при этом учтем, что

$$J^2(0) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left[\rho(x)\psi^2(x) + p(x)|\nabla\varphi|^2 + q(x)\varphi^2(x)\right] dx + \frac{1}{2}\int\limits_{S_0} p(x)\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\varphi^2(x)dx = 0,$$

так как $\varphi(x), \psi \equiv 0$.

Тогда получим $||V|| \le 0$, $t \ge 0$, так как $\phi \equiv 0$. Откуда $||V|| = 0$, т.е. $V(x,t) \equiv 0$, $U_1 \equiv U_2$, $t \in [0,\infty)$.

□

Предположим теперь, что мы решаем смешанную задачу (3.25) - (3.27) с начальными данными $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и свободным членом $\phi(x,t)$. Затем меняем данные и свободный член на $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $\phi_1(x,t)$. Возникает вопрос: будут ли решения $U(x,t)$ и $U_1(x,t)$ отличаться друг от друга мало, если $\phi(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ мало отличаются от $\phi_1(x,t)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$. Положительный ответ на этот вопрос дает теорема устойчивости.

Сформулируем эту теорему для частного случая граничного условия (3.27).

Теорема 2 (устойчивость). Классическое решение задачи (3.25), (3.26) и граничного условия

$$U|_{\partial\Omega\times[0,\infty)} = 0, \tag{3.61}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\partial\Omega\times[0,\infty)} = 0 \tag{3.62}$$

непрерывно зависит от данных $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\phi(x,t)$ в том смысле, что, если ϕ_1, $\phi \in C(\overline{Ц}_T)$, $Ц_T = \Omega \times (0,T)$, $0 < t < \infty$,

$$||\varphi - \varphi_1|| \le \varepsilon_1,\ ||\psi - \psi_1|| \le \varepsilon_2,\ ||\nabla\varphi - \nabla\varphi_1|| \le \varepsilon_3,\ ||\phi - \phi_1|| \le \varepsilon_4, \tag{3.63}$$

то при $t \in [0,T]$

$$||U - U_1|| \le \varepsilon, \tag{3.64}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1 + C\sqrt{\frac{2}{\rho_0}}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)T + \frac{\varepsilon_4}{2\rho_0}T^2$, $C - const$, не зависящая от φ, ψ, ϕ, T.

Доказательство. Рассмотрим функций $V = U - U_1$, где U - решение задачи (3.25), (3.26), (3.61) или (3.62) с данными φ, ψ, ϕ, U_1 - решение задачи с данными φ_1, ψ_1, ϕ_1. Функция V является решением задачи

$$\rho\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -LV + \phi^*(x,t),\ \phi^* = \phi - \phi_1 \tag{3.65}$$

$$\begin{cases} V(x,0) = \varphi^*(x), \\ \frac{\partial V}{\partial t}(x,0) = \psi^*(x), \end{cases} x \in \overline{\Omega},\ \varphi^* = \varphi - \varphi_1,\ \psi^* = \psi - \psi_1 \tag{3.66}$$

$$V|_{\partial\Omega\times[0,\infty)} = 0, \tag{3.67}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{\partial\Omega\times[0,\infty)} = 0 \tag{3.68}$$

Запишем для функции V оценку (3.60)

$$||V|| \le ||\varphi^*|| + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}J^*(0)t + \frac{1}{\rho_0}\int\limits_0^t (t-\tau)||\phi^*(x,\tau)||d\tau, \tag{3.69}$$

где

$$[J^*(0)]^2 = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left[\rho(x)(\psi^*(x))^2 + p(x)|\nabla\varphi^*|^2 + q(x)(\varphi^*(x))^2\right]dx, \tag{3.70}$$

при этом мы учли, что в силу (3.67), (3.68) последнее слагаемое в (3.70) отсутствует.

Оценим каждое слагаемое в (3.69)

$$[J^*(0)]^2 \le \frac{1}{2}\max_{\overline{\Omega}}\rho(x)||\psi^*||^2 + \frac{1}{2}\max_{\overline{\Omega}}p(x)\,|||\nabla\varphi^*|||^2 + \frac{1}{2}\max_{\overline{\Omega}}q(x)||\varphi^*||^2 \le$$

$$\le C^2(||\psi^*||^2 + |||\nabla\varphi^*|||^2 + ||\varphi^*||^2) \le C^2(||\psi^*|| + |||\nabla\varphi^*||| + ||\varphi^*||)^2, \tag{3.71}$$

где $C^2 = \frac{1}{2}\max(\max\limits_{\overline{\Omega}}\rho(x),\ \max\limits_{\overline{\Omega}}p(x)),\ \max\limits_{\overline{\Omega}}q(x)$.

Учитывая (3.71), из (3.69) получим

$$||V|| \le ||\varphi^*|| + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}C(||\psi^*|| + |||\nabla\varphi^*||| + ||\varphi^*||)t + \frac{1}{\rho_0}\int\limits_0^t (t-\tau)||\phi^*(x,\tau)||d\tau. \tag{3.72}$$

Если учесть тепрь (3.63), то из (3.72) получим

$$||V|| \leq \varepsilon_1 + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} C(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)t + \frac{1}{\rho_0}\varepsilon_4 \int\limits_0^t (t-\tau)d\tau =$$

$$= \varepsilon_1 + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} C(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)t + \frac{1}{\rho_0}\varepsilon_4 \frac{t^2}{2} \leq \varepsilon_1 + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} C(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)T + \frac{\varepsilon_4}{\rho_0}\frac{T^2}{2}$$

$\square$

Замечание. Теорему 2 называют также теоремой непрерывной зависимости от данных задачи. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ из соотношения $\varepsilon = \varepsilon_1 + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} C(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)T + \frac{\varepsilon_4}{\rho_0}\frac{T^2}{2}$ можно выбрать $\varepsilon_i\,(\varepsilon, T)$, что из неравенств (3.63) будет следовать неравенство (3.64).

VI Задача Коши для волнового уравнения.

VI.1 Лекция 18. Решение задачи Коши для волнового уравнения методом усреднения.

VI.1.1 Метод усреднения решения задачи Коши для однородного волнового уравнения.

Постановка задачи. Найти функцию

$$U(x,t) \in C^2\{\mathbb{R}^3_x \times (0,\infty)\} \cap C^1\{\mathbb{R}^3_x \times [0,\infty)\},$$

удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta U,\ (x,t) \in \mathbb{R}^3_x \times (0,\infty) \tag{1.1}$$

и начальным условиям

$$\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \psi(x). \end{cases} x \in \mathbb{R}^3_x \tag{1.2}$$

Вместо функции $U(x,t)$ четырех независимых переменных введем функцию двух переменных

$$\hat{U}(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{|\xi - x| = r} U(\xi,t) dS_\xi, \tag{1.3}$$

где интеграл берется по поверхности сферы $S^x_r = \{|\xi - x| = r\}$ с центром в проихвольно зафиксированной точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ и радиуса r, $|\xi - x|^2 = \sum\limits_{k=1}^{3} (\xi_k - x_k)^2$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Функция $\hat{U}(r,t)$ называется средним арифметическим значением $U(x,t)$ по сфере S^x_r.

Введем в (1.3) сферические координаты r, θ, $\tilde{\varphi}$ с полюсом в точке x, т.е.

$$\xi = x + r\eta, \tag{1.4}$$

где $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ - точка сферы единичного радиуса, т.е. $\eta_1 = \sin\theta\cos\tilde{\varphi}$, $\eta_2 = \sin\theta\sin\tilde{\varphi}$, $\eta_3 = \cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \tilde{\varphi} < 2\pi$.

Элемент сферы dS_ξ тогда запишется в виде

$$dS_\xi = r^2 \sin\theta d\theta d\tilde{\varphi} = r^2 d\omega_\eta, \tag{1.5}$$

где $d\omega_\eta = \sin\theta d\theta d\tilde{\varphi}$ - элемент сферы единичного радиуса.

Учитывая (1.4), (1.5), запишем (1.3) в виде

$$\hat{U}(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} U(x+r\eta,t)r^2\sin\theta d\theta d\tilde{\varphi} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1} U(x+r\eta,t)d\omega_\eta. \quad (1.6)$$

Полагая в (1.6) $r=0$, получим выражение искомой функции $U(x,t)$ через $\hat{U}(r,t)$:

$$\hat{U}(0,t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1} U(x,t)d\omega_\eta = \frac{1}{4\pi}U(x,t)4\pi = U(x,t).$$

Тепрь получим задачу, решением которой является функция $\hat{U}(r,t)$.

Предположим, что решение задачи (1.1), (1.2) существует. Тогда имеет место тождество (1.1), которое мы запишем, заменив x на ξ:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(\xi,t) = a^2\Delta U(\xi,t). \quad (1.7)$$

Умножим обе части (1.7) на $\frac{1}{4\pi}$ и проинтегрируем по шару $\bar{G}_r^x = \{|\xi - x| \le r\}$, ограниченному сферой S_r^x:

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\xi-x|\le r}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(\xi,t)d\xi = \frac{a^2}{4\pi}\int\limits_{|\xi-x|\le r}\Delta U(\xi,t)d\xi. \quad (1.8)$$

Интеграл правой части (1.8) преобразуем с помощью второй формулы Грина для оператора Лапласа:

$$\int\limits_{|\xi-x|\le r}\Delta U(\xi,t)d\xi = \int\limits_{|\xi-x|=r}\frac{\partial U}{\partial n}dS_\xi, \quad (1.9)$$

где $\vec{n}$ - внешняя нормаль к сфере S_r^x. Если учесть теперь, что в случае сферы $\frac{\partial U}{\partial n}|_{S_r^x} = \frac{\partial U}{\partial r}|_{S_r^x}$, то из (1.9) имеем:

$$\frac{a^2}{4\pi}\int\limits_{|\xi-x|\le r}\Delta U(\xi,t)d\xi = \frac{a^2}{4\pi}\int\limits_{|\xi-x|=r}\frac{\partial U(\xi,t)}{\partial r}dS_\xi. \quad (1.10)$$

Перейдем в правой части (1.10) к сферическим координатам, тогда получим:

$$\frac{a^2}{4\pi}\int\limits_{|\xi-x|=r}\frac{\partial U(\xi,t)}{\partial r}dS_\xi = \frac{a^2 r^2}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\partial U}{\partial r}(x+r\eta,t)d\omega_\eta =$$

$$= \frac{a^2 r^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} U(x + r\eta, t) d\omega_\eta \right) = a^2 r^2 \frac{\partial \hat{U}(r,t)}{\partial r}. \tag{1.11}$$

Преобразуем теперь интеграл в левой части (1.8). Перейдем к сферическим координатам ρ, θ, $\tilde{\varphi}$, при этом заметим, что в данном случае интеграл берется по шару, поэтому $\xi = x + \rho\eta$, $0 \le \rho \le r$,

$$d\xi = \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\tilde{\varphi} = \rho^2 d\omega_\eta. \tag{1.12}$$

С учетом (1.12) имеем:

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\xi - x| \le r} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(\xi, t) d\xi = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\xi - x| \le r} U(\xi, t) d\xi \right) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^r \rho^2 d\rho \int\limits_{|\eta|=1} U(x + r\eta, t) d\omega_\eta \right\} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int\limits_0^r \hat{U}(\rho, t) \rho^2 d\rho. \tag{1.13}$$

Подставляя (1.11) и (1.13) в (1.8), получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int\limits_0^r \rho^2 \hat{U}(\rho, t) d\rho = a^2 r^2 \frac{\partial \hat{U}(r,t)}{\partial r}. \tag{1.14}$$

Дифференцируя (1.14) по r и переставляя слева дифференцирование по r и t, получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [r^2 \hat{U}(r,t)] = \frac{\partial}{\partial r} [a^2 r^2 \frac{\partial \hat{U}}{\partial r}(r,t)], \tag{1.15}$$

т.е. получим дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно функции двух переменных $\hat{U}(r,t)$.

Для получения условий для $\hat{U}(r,t)$ берем от обеих частей условия (1.2) средние арифметические значения по формуле (1.3):

$$\begin{cases} \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{|\xi - x| = r} U(\xi, 0) dS_\xi = \hat{U}(r, 0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{|\xi - x| = r} \varphi(\xi) dS_\xi = \hat{\varphi}(r), \\ \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{|\xi - x| = r} \frac{\partial U}{\partial t}(\xi, 0) dS_\xi = \frac{\partial \hat{U}(r,0)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{|\xi - x| = r} \psi(\xi) dS_\xi = \hat{\psi}(r). \end{cases} \tag{1.16}$$

Итак, для определения $\hat{U}(r,t)$ мы пришли к задаче решения уравнения (1.14) с условиями (1.16), т.е. к задаче Коши.

Найдем сначала общее решение уравнения (1.14). Для этого введем новую функцию

$$V(r,t) = r\hat{U}(r,t). \tag{1.17}$$

Тогда функциям $V(r,t)$ будет удовлетворять уравнению поперечных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}. \tag{1.18}$$

Известно, что общее решение уравнения (1.18) имеет вид:

$$V(r,t) = C_1(at+r) + C_2(at-r), \tag{1.19}$$

где C_i, $i = 1, 2$ - произвольные функции класса C^2.

Перепишем (1.19) в виде

$$V(r,t) = \mathcal{F}_1\left(t + \frac{r}{a}\right) + \mathcal{F}_2\left(t - \frac{r}{a}\right), \tag{1.20}$$

так как $C_1(at+r) = C_1[a(t+\frac{r}{a})] \equiv \mathcal{F}_1(t+\frac{r}{a})$.

Учитывая (1.20), из (1.17) имеем:

$$r\hat{U}(r,t) = \mathcal{F}_1\left(t + \frac{r}{a}\right) + \mathcal{F}_2\left(t - \frac{r}{a}\right). \tag{1.21}$$

Но $\hat{U}(0,t)$ ограничено, поэтому из (1.21) получаем $0 = \mathcal{F}_1(t) + \mathcal{F}_2(t)$, $\mathcal{F}_2(t) = -\mathcal{F}_1(t) \equiv -\mathcal{F}(t)$, откуда из (1.21) имеем:

$$r\hat{U}(r,t) = \mathcal{F}\left(t + \frac{r}{a}\right) - \mathcal{F}\left(t - \frac{r}{a}\right). \tag{1.22}$$

Как было указано выше, для решения исходной задачи (1.1), (1.2) надо найти $\hat{U}(0,t)$.

Продифференцируем (1.22) по r:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\hat{U}(r,t)) = \hat{U}(r,t) + r\frac{\partial \hat{U}(r,t)}{\partial r} = \frac{1}{a}\left[\mathcal{F}'\left(t + \frac{r}{a}\right) + \mathcal{F}'\left(t - \frac{r}{a}\right)\right]. \tag{1.23}$$

Полагая в (1.23) $r = 0$, получим

$$\hat{U}(0,t) = \frac{2}{a}\mathcal{F}'(t). \tag{1.24}$$

Из (1.24) следует, что для определения $\hat{U}(0,t)$, а значит $U(x,t)$, надо выразить $\mathcal{F}'(t)$ через известные данные (1.16).

Продифференцируем (1.22) по t и поделим полученное выражение на a:

$$\frac{1}{a}r\frac{\partial \hat{U}(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{a}\left[\mathcal{F}'\left(t+\frac{r}{a}\right) - \mathcal{F}'\left(t-\frac{r}{a}\right)\right]. \tag{1.25}$$

Сложим почленно (1.23) и (1.25), тогда получим:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\hat{U}(r,t)) + \frac{1}{a}r\frac{\partial \hat{U}(r,t)}{\partial t} = \frac{2}{a}\mathcal{F}'\left(t+\frac{r}{a}\right),$$

откуда полагая $t=0$ и учитывая (1.16), будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial r}[r\hat{\varphi}(r)] + \frac{1}{a}r\hat{\psi}(r) = \frac{2}{a}\mathcal{F}'\left(\frac{r}{a}\right), \tag{1.26}$$

причем (1.26) выполняется при любом r. Положим $r = at$, $t = \frac{r}{a}$. Тогда, учитывая, что $\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{dt}{dr} = \frac{1}{a}\frac{\partial \phi}{\partial t}$, из (1.26) получим:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}[(at)\hat{\varphi}(at)] + \frac{1}{a}[(at)\hat{\psi}(at)] = \frac{2}{a}\mathcal{F}'(t). \tag{1.27}$$

Если теперь учесть (1.24), (1.27) и то, что $U(x,t) = \hat{U}(0,t)$, получим решение задачи (1.1), (1.2):

$$U(x,t) = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\left[(at)\frac{1}{4\pi(at^2)}\int\limits_{|\xi-x=at|}\varphi(\xi)dS_\xi\right] + \frac{1}{a}(at)\frac{1}{4\pi(at^2)}\int\limits_{|\xi-x=at|}\psi(\xi)dS_\xi,$$

откуда

$$U(x,t) = \frac{1}{4\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|\xi-x=at|}\frac{\varphi(\xi)}{at}dS_\xi + \int\limits_{|\xi-x=at|}\frac{\psi(\xi)}{at}dS_\xi\right\}. \tag{1.28}$$

Формула (1.28) носит название формулы Кирхгофа.

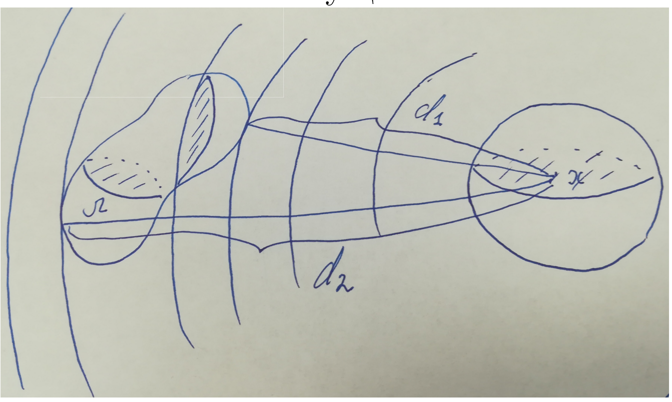
Замечание 1. Формула (1.28) получена в предположении, что решение задачи (1.1), (1.2) существует. Непосредственной проверкой можно убедиться, что она действительно дает решение задачи, если $\varphi \in C^3$, $\psi \in C^2$.

Замечание 2. Из формул (1.28) следует единственность решения задачи (1.1), (1.2).

VI.1.2 Физическая интерпретация решения. Распространение волн в неограниченном пространстве.

Пусть рассматривается некоторый колебательный процесс в трехмерном пространстве. Это может быть колебание упругой пространственной среды, колебание газа (звуковые колебания) или электромагнитные колебания. Тогда этот процесс будет характеризоваться вектором скорости: $\vec{V}(x,t)$ - скорость в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент t. Предположим, что векторное поле является потенциальным, $\vec{V} = \nabla U$, где $\nabla U = (\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3})$. Тогда функция $U(x,t)$ будет удовлетворять уравнению (1.1) и будет характеризовать некоторое состояние среды, а условие (1.2) характеризует при этом начальное возмущение среды.

С помощью формулы (1.28) можно выяснить физическую картину звуковых колебаний. Предположим, что источник звуковых колебаний имеет конечную размерность, т.е. начальное возмущение сосредоточено в некоторой ограниченной области Ω с границей $\partial\Omega$, т.е. $\varphi(x), \psi(x) \equiv 0$, $x \notin \overline{\Omega}$. Мы имеем так называемое локальное возмущение.



Пусть x - точка, расположенная вне $\overline{\Omega}$, т.е. вне области начального возмущения. Рассмотрим изменение состояния $U(x,t)$ в точке x со временем, т.е. что происходит с точкой x, когда она колеблется и когда находится в стостоянии покоя.

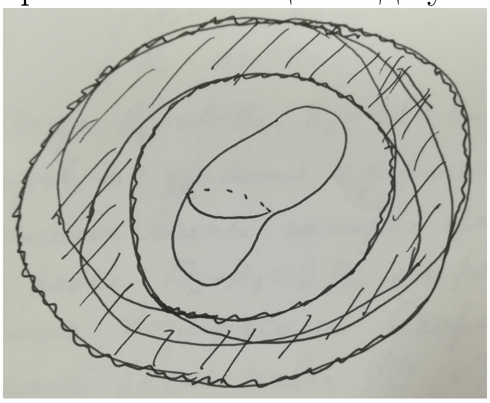
Из формулы (1.32) следует, что состояние $U(x,t)$ в точке x в момент t определяется значениями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на сфере $S^x_{at} = \{|\xi - x| = at\}$. Поэтому функция $U(x,t)$ отлична от нуля только в том случае, если сфера S^x_{at} с центром в точке x пересекает область начальных возмущений $\overline{\Omega}$. Если сфера S^x_{at} не пересекает $\overline{\Omega}$, то $U(x,t) \equiv 0$, значит, колебаний в точке x нет, начальное возмущение еще не успело дойти до точки x.

Обозначим через d_1 и d_2 наименьшее и наибольшее расстояние от x до $\partial\Omega$, соответственно, т.е. $d_1 = \min \rho(x, \partial\Omega)$, $d_2 = \max \rho(x, \partial\Omega)$. Тогда очевидно, что если t достаточно мало: $t < t_1 = \frac{d_1}{a}$, то сфера S^x_{at} не пересекается с областью $\overline{\Omega}$, поэтому $U(x,t) \equiv 0$. До точки x еще не дошло, точка x не колеблется, т.е. будет находиться в состоянии покоя. Начиная с момента t_1 и до момента $t_2 = \frac{d_2}{a}$ сфера S^x_{at} будет пересекать область $\overline{\Omega}$ и $U(x,t) \neq 0$. Точка x находится в возмущенном состоянии, т.е. она колеблется. При дальнейшем увеличении t, т.е. при $t > t_2$, сфера S^x_{at} не будет иметь общих точек с областью $\overline{\Omega}$ (вся область лежит внутри сферы), и мы получим, что $U(x,t) = 0$. Начальное возмущение прошло через точку x, точка x уже не колеблется.

Итак, только при $t_1 \leq t \leq t_2$ точка x будет колебаться, а в остальные моменты, т.е. при $t < t_1$ и $t > t_2$, будет находиться в состоянии покоя.

Опишем теперь геометрически множество точек пространства, которое в данный момент времени $t = t_0$ находится в возмущенном состоянии. Каждая точка z этого множества характеризуется тем, что сфера $S^z_{at_0}$ с центром в точке z радиуса at_0 пересекает область $\overline{\Omega}$. Но таким свойством, очевидно, обладают все точки сферы $S^y_{at_0}$ с центром в точке y,где y - переменная точка область $\overline{\Omega}$, т.е. y - бегающая по Ω точка.

Таким образом, множество точек, возмущение которых отлично от нуля в момент t_0, состоит из точек, находящихся на сферах $S^y_{at_0}$ радиуса at_0 с центром в точках $y \in \overline{\Omega}$. Если граница $\partial\Omega$ область Ω достаточно гладкая, то существуют две огибающие указанного семейства сфер, внутренняя и внешняя, причем при построении огибающих надо учитывать лишь сферы с центрами на границе $\partial\Omega$.



Эти огибающие будут границами мнжеств точек, которые находятся в возмущенном состоянии в момент t_0. При изменении t_0 будут изменяться и сферы, и будут перемещаться огибающие, т.е. будет происходить перемещение колеблющихся точек. Такое колеблющееся состояние пространста называется пространственной волной. Внешняя огибающая - передний фронт, внутренняя - задний фронт волны. Оба фронта распространяются в пространстве со скоростью a, поэтому сама волна идет по пространству также со скоростью a. Момент t_1 есть момент прохождения через точку x переднего фронта, а t_2 - заднего фронта, а тогда промежуток $[t_1, t_2]$ является промежутком прохождения пространственой волны через точку x.

Таким образом, начальное возмущение, ограниченное в пространстве, вызывает в каждой точке x пространства действие, ограниченное во времени, при этом имеет место распространение волны с ярко выраженным передним и задним фронтом (это так называемый принцип Гюйгенса).

Рассмотрим в качестве примера следующий частный случай. Пусть $\overline{\Omega} = \{|x| \leq R\}$ с центром в начале координат радиуса R. В данном случае ясно, что передний и задний фронт в любой момент t_0 есть сферы, поэтому такая волна называется сферической. Радиусы заднего и переднего фронтов в момент t_0 будут соответственно равны

$$\begin{cases} R_1 = at_0 - R_0 \\ R_2 = at_0 + R_0. \end{cases}$$

Тогда $R_1 = at_0 - R_0$, $R_2 = at_0 + R_0$ - уравнения движущихся радиусов, т.е. уравнения сферических волн. Ширина сферической волны, которая представляет шаровой слой, равна $R_2 - R_1 = 2R_0$, т.е. равна диаметру области начальных возмущений. Скорость распространения волны равна $\frac{dR_1}{dt} = \frac{dR_2}{dt} = a$.

VI.2 Лекция 19. Метод спуска.

VI.2.1 Колебание бесконечной мембраны. Колебание бесконечной струны.

Используя формулу (1.28), получим решение задачи Коши при $n = 2$ и $n = 1$, т.е. спустимся к меньшему числу переменных, поэтому рссматриваемый метод носит название метода спуска.

1. Предположим, что в начальных условиях (1.2) трехмерной задачи функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не зависят от x_3, то есть условия (1.2) имеют вид:

$$\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x_1, x_2), \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \psi(x_1, x_2). \end{cases} \quad x = (x_1, x_2, x_3) \tag{2.1}$$

Тогда можно утверждать, что функция $U(x,t)$, дающая решение задачи (1.1), (3.1), также не будет зависеть от x_3. Действительно, рассморим первый интеграл в правой части (1.28) и покажем, что он не зависит от x_3. Для этого перейдем к сферическим координатам $\xi = x + (at)\eta$, $dS_\xi = (at)^2 \sin\theta d\theta d\tilde{\varphi} = (at)^2 d\omega_\eta$, тогда получим:

$$\int\limits_{|\xi - x| = a} \frac{\varphi(\xi)}{at} dS_\xi = \int\limits_{|\eta|=1} (at)\varphi[x + (at)\eta] d\omega_\eta = (at) \int\limits_{|\eta|=1} \varphi[x_1 + (at)\eta_1, x_2 + (at)\eta_2] d\omega_\eta.$$

Аналогично можно показать, что второй интеграл в (1.28) не зависит от x_3.

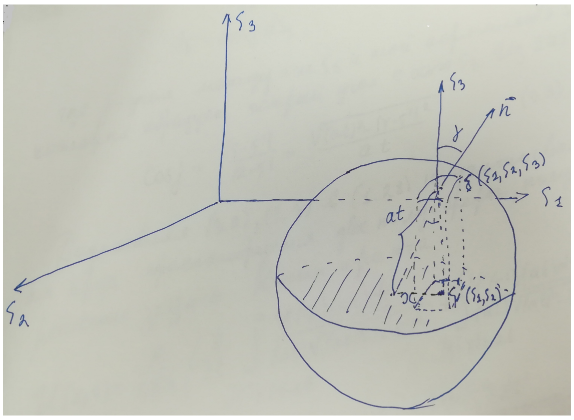
Таким образом, функция $U(x,t)$, дающая решение задачи (1.1), (2.1), будет не зависеть от x_3, т.е. $U(x_1, x_2, t)$. Формула (1.28) будет давать решение задачи

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \right), \ (x,t) \in \mathbb{R}^2_x \times (0, \infty)$$

$$\begin{cases} U(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2), \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x_1, x_2, 0) = \psi(x_1, x_2), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^2$$

т.е. в этом случае формула (1.28) дает решение задачи Коши при $n = 2$.

Преобразуем формулу (1.28). В формуле (1.28) интегрирование ведется по сфере S^x_{at}, причем $x = (x_1, x_2)$, т.е. центр сферы лежит на плоскости (ξ_1, ξ_2):



Так как начальные данные $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не зависят от x_3, то интегрирование по нижней и верхней сфере можно заменить интегрированием по кругу $\Sigma_{at}^x = \{|\xi' - x| \le at\}$, получающемуся при пересечении шара $G_{at}^x = \{|\xi - x| \le at\}$ и плоскости (ξ_1, ξ_2).

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ - переменная точка сферы, а $\xi' = (\xi_1, \xi_2)$ - ее проекция на плоскость (ξ_1, ξ_2). Элемент dS_ξ поверхности сферы S_{at}^x, связанный с точкой ξ, и соответствующий ему элемент плоскости $d\xi' = d\xi_1 d\xi_2$ связаны между собой соотношением

$$d\xi' = \cos\gamma dS_\xi, \tag{2.2}$$

где γ - угол между осью ξ_3 и той нормалью $\vec{n}$ к S_{at}^x, которая образует острый угол с осью ξ_3. Из $\Delta x\xi\xi'$ имеем:

$$\cos\gamma = \frac{|\xi - \xi'|}{|x - \xi|} = \frac{\sqrt{(at)^2 - |x - \xi'|^2}}{at}. \tag{2.3}$$

Подставляя (2.2), (2.3) в (1.28) и учитывая, что на круг проектируется две полусферы, получим решение задачи Коши при $n = 2$:

$$U(x,t) = \frac{2}{4\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|\xi'-x|\le at} \frac{\varphi(\xi')(at)}{(at)\sqrt{(at)^2 - |x-\xi'|^2}}d\xi' + \frac{\psi(\xi')(at)}{(at)\sqrt{(at)^2 - |x-\xi'|^2}}d\xi'\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|\xi'-x|\le at} \frac{\varphi(\xi')}{\sqrt{(at)^2 - |x-\xi'|^2}}d\xi' + \frac{\psi(\xi')}{\sqrt{(at)^2 - |x-\xi'|^2}}d\xi'\right). \tag{2.4}$$

Формула (2.4) носит название формулы Пуассона.

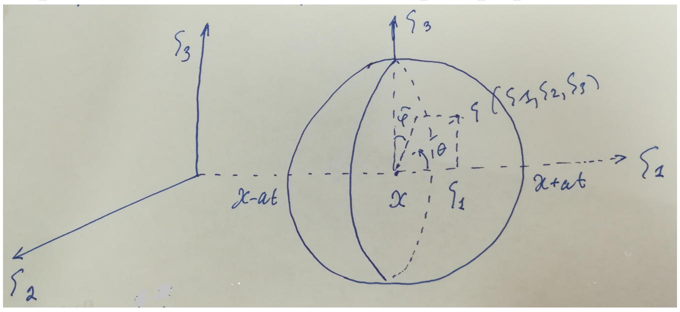
2. Пусть теперь начальные условия трехмерной задачи (1.1),(1.2) не зависят от x_2, x_3, т.е. $\varphi(x) = \varphi(x_1)$, $\psi(x) = \psi(x_1)$. Тогда, рассуждая как и выше,

получим, что функция (1.28) дает решение задачи Коши при $n = 1$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2},\ (x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0, \infty)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x_1, 0) = \varphi(x_1), \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x_1, 0) = \psi(x_1). \end{array} \right. \quad x_1 \in \mathbb{R}^1$$

Преобразуем формулу (1.28). В формуле (1.28) интегрированиеведется по сфере S_{at}^x, причем $x = x_1$, т.е. центр сферы лежит на оси ξ_1:



Сфера S_{at}^x пересекает ось ξ_1 в двух точках $x+at$, $x-at$. Введем сферические координаты с полюсом в точке x, направив полярную ось по оси ξ_1 : r, $\tilde{\varphi}$, θ, причем $r = at$, $0 < \tilde{\varphi} \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$. Тогда

$$dS_\xi = r^2 \sin\theta d\theta d\tilde{\varphi}. \tag{2.5}$$

Из $\Delta x \xi_1 \xi$ имеем:

$$\xi_1 - x = r\cos\theta,\ d\xi_1 = -r\sin\theta d\theta. \tag{2.6}$$

Учитывая (2.6), из (2.5) имеем:

$$dS_\xi = -r d\xi_1 d\tilde{\varphi} = -(at) d\xi_1 d\tilde{\varphi}. \tag{2.7}$$

Тогда из (1.28) с учетом (2.7) получим:

$$U(x,t) = -\frac{1}{4\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x+at}^{x-at}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\varphi(\xi_1)}{at}(at)d\tilde{\varphi}d\xi_1 + \int\limits_{x+at}^{x-at}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\psi(\xi_1)}{at}(at)d\tilde{\varphi}d\xi_1\right) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x+at}^{x-at}\varphi(\xi_1)d\xi_1\int\limits_{0}^{2\pi}d\tilde{\varphi} + \int\limits_{x+at}^{x-at}\psi(\xi_1)d\xi_1\int\limits_{0}^{2\pi}d\tilde{\varphi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi_1)d\xi_1 + \int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi_1)d\xi_1\right) =$$

$$= \frac{1}{2a}\left\{[\varphi(x+at)a+\varphi(x-at)a]+\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi_1)d\xi_1\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi_1)d\xi_1.$$

Итак, мы получили формулу, дающую решение задачи Коши при $n = 1$, т.е. формулу Деламбера:

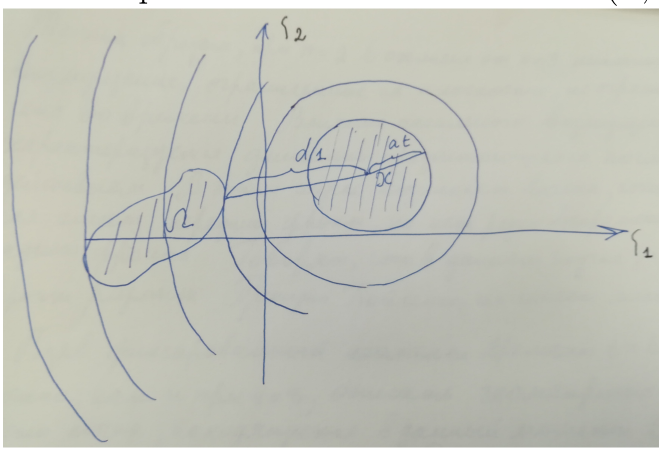
$$U(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi_1)d\xi_1. \qquad (2.8)$$

VI.2.2 Физическая интерпретация.

1. Формулу (2.4) можно интерпретировать двояко: а) как решение задачи о колебаниях двумерных тел, например, бесконечной мембраны; б) как решение задачи о распространении волн в пространстве при условии, что начальные данные не зависят от x_3.

Остановимся на первой интерпретации. Предположим, что, как и в случае $n = 3$, $\varphi(x_1, x_2)$, $\psi(x_1, x_2)$ равны нулю вне некоторой конечной области Ω плоскости, ограниченной контуром $\partial\Omega$.

Рассмотрим изменение состояния $U(x,t)$ в некоторой точке $x \notin \Omega$.



Состояние $U(x,t)$ в точке x определяется на основании формулы (2.4) начальными условиями φ, ψ в точке ξ' круга Σ^x_{at}. Пусть $d_1 = \min \rho(x, \partial\Omega)$. Тогда для моментов времени $t < t_1 = \frac{d_1}{a}$ круг Σ^x_{at} не имеет общих точек с $\overline{\Omega}$, φ, $\psi \equiv 0$ в этом круге, и тогда из (2.4) следует, что $U(x,t) = 0$, т.е. до точки x возмущение еще не дошло. В момент $t_1 = \frac{d_1}{a}$ в точку x придет передний фронт волны.

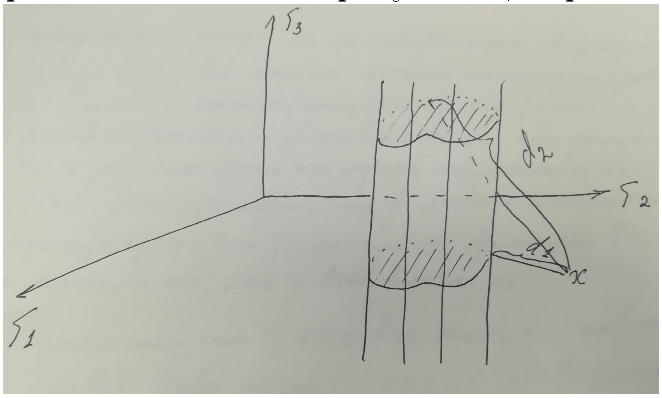
Начиная с этого момента, круг Σ_{at}^{x} и область $\overline{\Omega}$ будут иметь непустое пересечение, где φ, $\psi \neq 0$. Таким образом, при $t_1 \leq t < \infty$ $U(x,t) \neq 0$,т.е. возмущение, придя при $t = t_1$ в точку x, возрастает, а затем, начиная с некоторого момента, убывает до нуля при $t \to \infty$. Действительно, при $t \to \infty$ правая часть (2.4) за счет знаменателя стремится к нулю: $\lim\limits_{t\to\infty} U(x,t) = 0$.

Таким образом, при $n = 2$ в отличие от $n = 3$ начальное возмущение, ограниченное на плоскости, не ограничено во времени. Влияние начального возмущения характеризуется длительно продолжающимся последействием. В этом случае возникает волна, которая имеет передний фронт, не нет резко выраженного заднего фронта. Говорят, что в данном случае задний фронт размыт. Принцип Гюйгенса не имеет места.

Взяв фиксированный момент времени $t = t_0$, можно, как и при $n = 3$, описать геометрически место точек, находящихся в данный момент t_0 в возмусостоянии. Для этого строим круги $\Sigma_{at_0}^{y}$ с центрами в точках $y \in \overline{\Omega}$ радиуса at_0. Тогда все точки кругов $\Sigma_{at_0}^{y}$ дадут часть плоскости, состоящую из колеблющихся точек. Внешняя огибающая семейства окружностей, являющихся границами кругов $\Sigma_{at_0}^{y}$, дает передний фронт волны. Если t меняется, то передний фронт двигается со скоростью a.

Остановимся теперь на второй интерпретации. Формулу (2.4) можно интепретировать и в смысле звуковых волн в пространстве, но при условии. что начальное возмущение зависит только от x_1 и x_2.

Так как φ и ψ не зависят от x_3, то в любой плоскости, перпендикулярной оси ξ_3, начальные возмущения такие же, как и в плоскости $\xi_3 = 0$. Таким образом, начальные условия в данном случае заданы в цилиндре бесконечной высоты с направляющей $\partial\Omega$ и образующей, паралельной оси ξ_3:



Тогда очевидно, что в данном случае передний фронт будет представлять из себя цилиндрическую поверхность с параллельной оси ξ_3 образующей. Поэтому возникающая при этом пространственная волна называется цилиндрической.

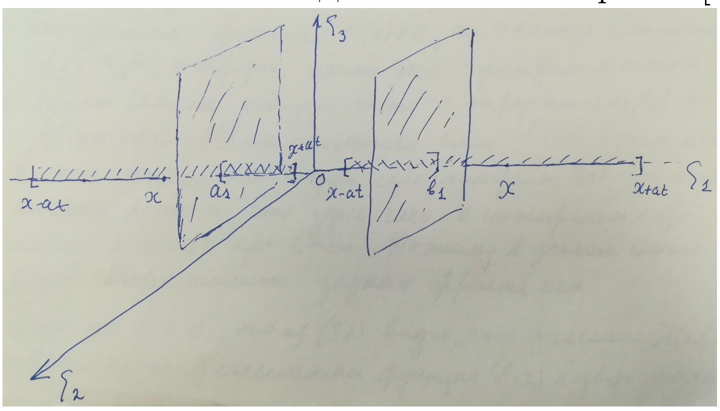
Пусть x - точка вне цилиндра, а $d_1 = \min \rho(x, \partial\Omega)$. Тогда момент $t_1 = \frac{d_1}{a}$ будет моментом прихода в точку x переднего фронта. Он означает начало колебаний в этой точке.

Если предположить, что цилиндр начальных возмущений имеет конечную высоту, и обозначить через d_2 максимальное расстояние от точки x до границы цилиндра, то момент $t_2 = \frac{d_2}{a}$ определяет момент прохождения через x заднего фронта.

Но мы имеем бесконечный цилиндр, т.е.у нас $d_2 \to \infty$, поэтому $t_2 \to \infty$. Значит, задний фронт не будет резко выражен, он будет размыт.

2. Остановимся теперь на интерпретации формулы Даламбера (2.8). Ее также можно интепретировать двояко. Сначала интерпретируем ее как решение задачи о распространении звуковых волн при условии, что φ и ψ зависят лишь от одной переменной x_1: $\varphi(x_1)$, $\psi(x_1)$. Это означает. что в любой плоскости, перпендикулярной оси ξ_1, начальные функции $\varphi(x_1)$, $\psi(x_1)$ будут такими же, как и в точке x_1.

Предположим, что $\varphi, \psi \equiv 0$ вне конечного отрезка оси ξ_1: $[a_1, b_1]$. Через точки $\xi_1 = a_1$ и $\xi_2 = b_1$ проведем плоскости, перпендикулярные оси ξ_1. Тогда начальные данные задаются в пространстве между этими двумя плоскостями. Аналогом области $\overline{\Omega}$ здесь является отрезок $[a_1, b_1]$:



Чтобы выяснить изменение состояния $U(x,t)$, берем точку x вне $[a_1, b_1]$ и откладываем от точки x отрезок $[x - at, x + at]$, т.е. отрезок длиной $2at$ с центром в отчке. В зависимости от взаимного расположения этого отрезка и отрезка $[a_1, b_1]$ начальных возмущений будет меняться состояние $U(x,t)$, так как значение $U(x,t)$ согласно формуле (2.8) определяется значением фнукции $\psi(x)$ на интервале $[a_1, b_1]$.

Передний фронт волны в даном случае представляет из себя две плоскости:

$$\begin{cases} \xi_1 = b_1 + at, \\ .\xi_1 = a_1 - at. \end{cases}$$

Ввиду того. что передний фронт - плоскость, волна называется плоской.

Выясним изменение состояния $U(x,t)$ в точке $x > b_1$ в зависимости от времени. Если в начальных данных функция $\psi(x) \neq 0$, то, начиная с момента $t_1 = \frac{x-b_1}{a}$, отрезок длиной $2at$ с центром в точке x будет иметь общую часть с отрезком $[a_1, b_1]$, т.е. $U(x,t) \neq 0$. Интегральный член в (2.8) будет себя вести так же, как ведут себя интегралы (2.4). Отличие только в том, что здесь член с интегралом стремится к $const$ при $t \to \infty$. Поэтому в данном случае резко выраженного заднего фронта нет.

Если же $\psi(x) \equiv 0$, то из (2.8) видно, что значание $U(x,t)$ определяется значениями функции $\varphi(x)$ в двух точках $x - at$ и $x + at$. Поэтому, начиная с момента $t_1 = \frac{x-b_1}{a}$, $U(x,t) = 0$, т.е. будет задний фронт. Задний фронт в данном случае представляет из себя две плоскости:

$$\begin{cases} \xi_1 = a_1 + at, \\ .\xi_1 = b_1 - at. \end{cases}$$

Одномерный случай любопытен тем, что принцип Гюйгенса выполняется для начальных смещений и не выполняется для начальных скоростей. Можно утвреждать, что в целом принцип Гюйгенса в одномерном случае не выполняется. В формуле Даламбера начальное смещение $\varphi(x)$ приводит к образованию резко выраженного заднего фронта, а начальная скорость $\psi(x)$ его размывает.

3. Формулу (2.8) можно интерпретировать как решение задачи о колебаниях бесконечной струны. Этот вопрос рассматривается на лабораторных занятиях. На этих занятиях также вопрос о применении формулы Даламбера к задачам о колебаниях полубесконечной и конечной струны.

Сделаем несколько замечаний по формуле Даламбера (2.8).

Замечание 1. Формула (2.8) определяет решение задачи при $-\infty < x < \infty$, $t \to \infty$, если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы на всей оси x. Иногда же приходится решать задачу Коши при условии, что начальные данные заданы лишь на конечном отрезке $[a_1, b_1]$. Возникает вопрос: в какой области плоскости (x, t) теперь будет определено решение $U(x,t)$. Для этого сначала выясним, где надо задать функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, чтобы решение было определено в точке (x_0, t_0). Полагая в формуле (2.8) $x = x_0$, $t = t_0$, получим:

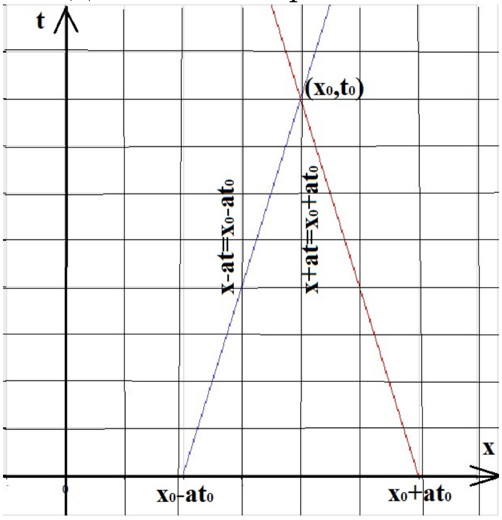
$$U(x_0, t_0) = \frac{1}{2}[\varphi(x_0 + at_0) + \varphi(x_0 - at_0)] + \frac{1}{2a} \int\limits_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} \psi(\xi_1) d\xi_1.$$

Отсюда видно, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ должны быть заданы на отрезке $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$. Этот отрезок называется областью зависимости для точки (x_0, t_0).

Поясним вывод геометрически. Возьмем точку (x_0, t_0) проведем через нее две характеристики различных семейств:

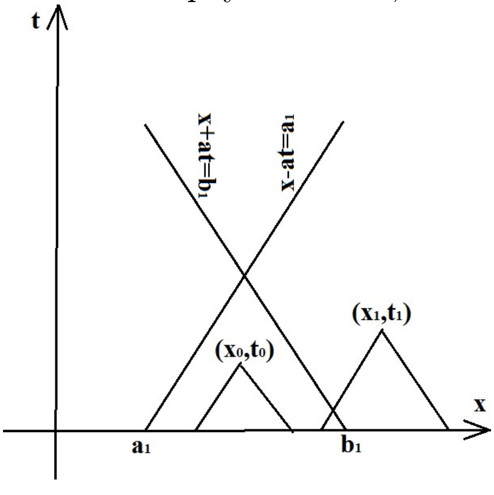
$$\begin{cases} x - at = c_1, \\ x + at = c_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - at = x_0 - at_0, \\ x + at = x_0 + at_0. \end{cases}$$

Найдем точки пересечения этих харакеристик с осью x:



Видно, что отрезок $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ является основанием треугольника с вершиной (x_0, t_0) и боковыми сторонами - характеристиками. Этот треугольник на называется характеристическим треугольником.

Итак, решение $U(x,t)$ будет определено в вершине характеристического треугольника, если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы на его основании. Отсюда следует, что, если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы на отрезке $[a_1, b_1]$, то решение буде определено в характеристическом треугольнике, основанием которого является этот отрезок:



Действительно, если возьмем любую точку (x_0, t_0) внутри этого треугольника, то для определения решения в этой точке функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ надо задать на отрезке, лежащем внутри отрезка $[a_1, b_1]$. Если же взять точку (x_1, t_1) вне этого треугольника, то для определения решения в этой точке нужно задать

$\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на отрезке, лежащем частью вне отрезка $[a_1, b_1]$, а функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не определены вне отрезка $[a_1, b_1]$.

Замечание 2. Мы получили формулу (2.8) при условии, что решение задачи существует. Поэтому для доказательства существованния решения нужно непосредственой подстановкой (2.8) в уравнение и начальные условия убедиться, что (2.8) является решением задачи. Фнукция $U(x,t) \in C^2$ удет решением задачи, если $\varphi(x) \in C^2$, $\psi(x) \in C^1$, и это решение называется классическим решением задачи.

При решении конкретных задач может оказаться, что φ и ψ не удовлетворяют указанным условиям. В этом случае введем понятие обобщенного решения.

Одним из способов введения обобщенного решения является следующий. Рассмотрим последовательность функций $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$, $\{\psi_k(x)\}_1^\infty$, причем $\varphi_k(x) \in C^2$, $\psi_k(x) \in C^1$. Кроме того, $\varphi_k(x) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $\psi_k(x) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} \psi(x)$. Пусть $\{U_k(x,t)\}_1^\infty$ – последовательность решений нашей задачи с данными $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$, $\{\psi_k(x)\}_1^\infty$ и пусть $U_k(x,t) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} U(x,t)$. Тогда функция $U(x,t)$ называется обобщенным решением задачи. Можно доказать теорему существования обощенного решения при определенных условиях на $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, причем это решение будет определятся формулой (2.8).

VI.3 Лекция 20. Задача Коши для неоднородного волнового уравнения. Теоремы единственности и устойчивости решений задачи Коши.

VI.3.1 Решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения.

Найти функцию $U(x,t) \in C^2\{\mathbb{R}^3_x \times (0,\infty)\} \cap C^1\{\mathbb{R}^3_x \times [0,\infty)\}$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta U + \phi(x,t),\ (x,t) \in \mathbb{R}^3_x \times (0,\infty) \tag{3.1}$$

и начальным условиям:

$$\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \psi(x). \end{cases} x \in \mathbb{R}^3_x \tag{3.2}$$

Для построения решения этой задачи рассмотрим решение задачи (3.1), (3.3), где (3.3) имеет вид:

$$\begin{cases} U(x,0) = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 0, \end{cases} x \in \mathbb{R}^3_x \tag{3.3}$$

так как решение задачи (3.1), (3.2) можно представить в виде $U(x,t) = U_1(x,t) + U_2(x,t)$, где $U_1(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta U \tag{3.4}$$

и условиям (3.2), а $U_2(x,t)$ удовлетворяет уравнению (3.1) и условиям (3.3). Решение задачи (3.4), (3.2) нами было получено раньше. Остановимся на решении задачи (3.1), (3.3), причем для удобства переобозначим $U_2(x,t) \equiv U(x,t)$.

Для уравнений в частных производных, как и для обыкновенных уравнений, для неоднородного уравнения решение может быть получено с помощью решения для соответствующего однородного уравнения.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу. Найти функцию $\omega(x,t,\tau)$, зависящую от переменных x, t и вещественного параметра $\tau \in [0,\infty)$ и удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2 \Delta \omega \text{ при } t > \tau \tag{3.5}$$

и условиям

$$\begin{cases} \omega|_{t=\tau} = \omega(x,\tau,\tau) = 0, \\ \omega_t|_{t=\tau} = \omega_t(x,\tau,\tau) = \phi(x,\tau). \end{cases} \tag{3.6}$$

Предполжим, что задача (3.5), (3.6) решена, тогда можно показать, что решение задачи (3.1), (3.3) дает функция

$$U(x,t)=\int\limits_0^t \omega(x,t,\tau)d\tau. \tag{3.7}$$

Действительно, положим в (3.7) $t=0$, тогда $U(x,0)=0$, т.е. выполняется первое условие (3.3).

Продифференцируем (3.7) по t и учтем первое условие (3.6):

$$U_t(x,t)=\omega(x,t,t)+\int\limits_0^t \omega_t(x,t,\tau)d\tau=\int\limits_0^t \omega_t(x,t,\tau)d\tau, \tag{3.8}$$

откуда при $t=0$ имеем $U_t(x,0)=0$, т.е. выполняется второе условие (3.3).

Дифференцируя (3.8) еще раз по t, получим:

$$U_{tt}(x,t)=\omega_t(x,t,t)+\int\limits_0^t \omega_{tt}(x,t,\tau)d\tau=\phi(x,t)+\int\limits_0^t \omega_{tt}(x,t,\tau)d\tau, \tag{3.9}$$

при этом мы учли второе условие (3.6).

Вычислим теперь оператор Лапласа от (3.7):

$$\Delta U=\int\limits_0^t \Delta\omega(x,t,\tau)d\tau. \tag{3.10}$$

Учитывая тепрь (3.9) и (3.10), рассмотрим выражение

$$\Box_a U\equiv\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-a^2\Delta U=\phi(x,t)+\int\limits_0^t [\omega_{tt}-a^2\Delta\omega]d\tau=\phi(x,t),$$

при этом мы учли (3.5).

Здесь $\Box_a U$ - оператор Даламбера (даламбертиан).

Итак, мы показали, что функция (3.7) удовлетворяет (3.1), (3.3).

Изложенный метод построения $U(x,t)$ имеет наглаядную физическую интерпретацию. Задача (3.1), (3.3) - задача о вынужденных колебаниях под действием внешней силы, причем с точностью до постоянного множителя, $\phi(x,t)$ -

объемная плотность внешней силы. Задача (3.5), (3.6) - задача о свободных колебаниях под действием начального возмущения. Предположим, что действие внешней силы осуществляется импульсами, действующими в течение некоторых промежутков времени. Импульсы вызывают дополнительную скорость, и вот функция $\omega(x,t,\tau)$ описываетпроцесс колебаний, начина с момента $t=\tau$, т.е. действие внешней силы учитывается в начальном условии. Суммируя теперь по всем этим промежуткам, мы получаем решение в виде (3.7), т.е. в виде интеграла.

Итак, решение нашзадачи (3.1), (3.3) сводится к решению задачи (3.5), (3.6).

Решение задачи (3.5), (3.6) можно было бы записать по формуле Кирхгофа. если бы начальные условия записывались при $t=0$. Поэтому приведем этот случай к $t=0$, т.е. сделаем замену переменной: $t_1=t-\tau$, при этом при $t=\tau$ $t_1=0$. Функция $\omega(x,t,\tau)$ перейдет в функцию $\omega(x,t,\tau)=\omega(x,t_1+\tau,\tau)\equiv\omega_1(x,t_1,\tau)$. Учитывая, что $\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\partial\omega_1}{\partial t_1}\frac{dt_1}{dt}=\frac{\partial\omega_1}{\partial t_1}$, получим, что уравнение (3.5) перейдет в уравнение

$$\frac{\partial^2\omega_1}{\partial t_1^2}=a^2\Delta\omega_1. \tag{3.11}$$

Начальные условия примут вид:

$$\begin{cases} \omega_1|_{t_1=0}=0, \\ \frac{\partial\omega_1}{\partial t_1}|_{t_1=0}=\phi(x,\tau). \end{cases} \tag{3.12}$$

Решение задачи (3.11), (3.12) запишем по формуле Кирхгофа (1.28):

$$\omega_1(x,t,\tau)=\frac{1}{4\pi a}\int\limits_{|\xi-x|=at_1}\frac{\phi(\xi,\tau)}{at_1}dS_\xi,$$

при этом мы учли, что в нашем случае $\varphi(\xi)=0$, $\psi(\xi)=\phi(\xi,\tau)$.

Тогда решение задачи (3.5), (3.6) запишется в виде:

$$\omega(x,t,\tau)=\frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)}\int\limits_{|\xi-x|=a(t-\tau)}\phi(\xi,\tau)dS_\xi. \tag{3.13}$$

Преобразуем формулу (3.13), перейдя к сферическим координатам:

$$\xi=x+a(t-\tau)\eta,\ dS_\xi=a^2(t-\tau)^2d\omega_\eta$$

$$\omega(x,t,\tau)=\frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)}\int\limits_{|\eta|=1}\phi[x+a(t-\tau)\eta,\tau]a^2(t-\tau)^2d\omega_\eta. \tag{3.14}$$

Имея (3.14), запишем решение нашей задачи (3.1), (3.3):

$$U(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t (t-\tau)^2 d\tau \int\limits_{|\eta|=1} \frac{\phi[x + a(t-\tau)\eta, \tau]}{t-\tau} d\omega_\eta. \tag{3.15}$$

В интеграле по τ введем новую переменную интегрирования $\tilde{\rho} = a(t - \tau)$, $d\tau = -\frac{d\tilde{\rho}}{a}$, тогда (3.15) запишется в виде:

$$U(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^{at} \tilde{\rho}^2 d\tilde{\rho} \int\limits_{|\eta|=1} \frac{\phi\left[x + \tilde{\rho}\eta, t - \frac{\tilde{\rho}}{a}\right]}{\tilde{\rho}} d\omega_\eta. \tag{3.16}$$

Но справа в (3.16) стоит интеграл по шару $|\xi - x| \le at$, записанный в сферических координатах. Запишем этот интеграл в декартовых координтах, т.е. сделаем замену $\xi = x + \tilde{\rho}\eta$, $0 \le \tilde{\rho} \le at$. Учитывая, что $|\xi - x| = \tilde{\rho}$, из (3.16) окончательно получим, что решение задачи (3.1), (3.3) будет иметь вид:

$$U(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{|\xi - x| \le at} \frac{\phi\left[\xi, t - \frac{|\xi - x|}{a}\right]}{|\xi - x|} d\xi. \tag{3.17}$$

Интеграл (3.17) называют запаздывающим потенциалом, так как в математической физике интеграл вида

$$U(x,t) = \int\limits_\Omega \frac{\mu(\xi)}{|\xi - x|} d\xi \tag{3.18}$$

называют потенциалом. Связано это с тем, что интеграл (3.18) дает потенциал электростатического поля, созданного телом Ω при условии, что объемная плотность зарядов, распределенных в теле Ω, равна $\mu(\xi)$.

Почему в данном случае запаздывающий? Как мы уже отмечали, задачв (3.1), (3.3) описывает некторый колебательный процесс, причем скорость распространения процеса равна a. Из (3.17) видно, что для определения $U(x,t)$ в момент t мы берем значения ϕ не в рассматриваемый момент t, а в момент $t - \frac{|\xi - x|}{a}$, т.е. в момент, предшествующий t на промежуток $\frac{|\xi - x|}{a}$, т.е. на тот промежуток, который требуется, чтобы процесс, распространяющийся со скоростью a, прошел путь $|\xi - x|$ от точки ξ до точки x. Таким образом, мы вычисляем значение $U(x,t)$ как бы с запаздыванием.

Таким образом, решение щадачи (3.1), (3.3) запишется в виде:

$$U(x,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|\xi-x|=at}\frac{\varphi(\xi)}{t}dS_\xi+\int\limits_{|\xi-x|=at}\frac{\psi(\xi)}{t}dS_\xi\right]+\int\limits_{|\xi-x|\le at}\frac{\phi[\xi,t-\frac{|\xi-x|}{a}]}{|\xi-x|}d\xi\right\}. \tag{3.19}$$

Эта формула также носит название формулы Кирхгофа, причем формула (3.19) получена в предположении, что решение задачи существует. Для доказательства сущестования решения непосредственой подстановкой (3.19) в (3.1), (3.2) нужно убедиться, что (3.19) дейтсвительно решение.

Замечание. На основании (3.19) следует также единственость решения задачи (3.1), (3.2). Действиетльно, предположим, что существует два решения $U_1(x,t)$ и $U_2(x,t)$. Рассмотрим функцию $V = U_1 - U_2$, которая удовлетворяет соответствующему однородному уравнению ($\phi \equiv 0$) и нулевым начальным условиям ($\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$). Тогда из (3.19) следует, что $V(x,t) \equiv 0$, т.е. $U_1 \equiv U_2$.

VI.3.2 Теоремы единствености и устойчивости решений задачи Коши в одномерном случае.

Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\phi(x,t),\ -\infty<x<\infty,\ t>0, \tag{3.20}$$

$$\begin{cases} U(x,0)=\varphi(x), \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0)=\psi(x). \end{cases} -\infty<x<\infty \tag{3.21}$$

Выше было отмечено, что получив формулу решения задачи, мы сразу доказываем единственность решения. Докажем теперь единственность, причем независимо от метода решения.

Теорема единственности. Задача (3.20), (3.21) не может иметь более одного решения.

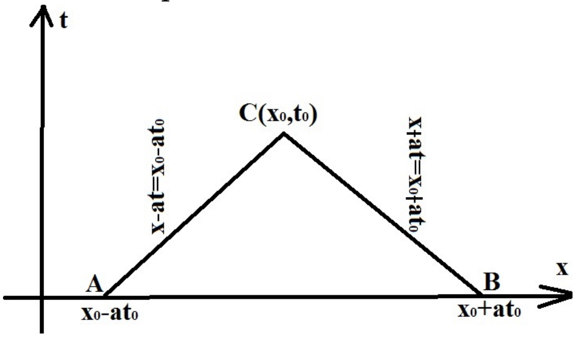
Доказательство. Предположим, что существует два решения $U_1(x,t)$ и $U_2(x,t)$. Рассмотрим функцию $V = U_1 - U_2$. Тогда функция V удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},\ -\infty<x<\infty,\ t>0 \tag{3.22}$$

и начальным условиям

$$\begin{cases} V(x,0)=0, \\ \frac{\partial V}{\partial t}(x,0)=0. \end{cases} -\infty<x<\infty \tag{3.23}$$

Покажем, что $V(x,t) \equiv 0$. Возбмем так называемую фазувую плоскость, т.е. плоскость переменных x и t.



Покажем, что в любой точке верхней полуплоскости $(-\infty,\infty)\times(0,\infty)$ $V = 0$. Возбмем произвольную точку $C(x_0,t_0)$ верхней полуплоскости. Проведем через точку C характеристики уранения (3.22). Искомые характеристики будут:

$$\begin{cases} AC: \ x - at = x_0 - at_0, \\ BC: \ x + at = x_0 + at_0. \end{cases} \tag{3.24}$$

Обозначим через Ω внутренность характеристического треугольника ABC, а через $\partial\Omega$ его границу.

Перепишем тождество (3.22) в виде:

$$V_{tt} - a^2 V_{xx} = 0. \tag{3.25}$$

Умножим обе части (3.25) на $2V_t$:

$$2V_t V_{tt} - 2a^2 V_t V_{xx} = 0. \tag{3.26}$$

Преобразуем левую часть (3.26), добавив и вычтя $2a^2 V_x V_{tx}$:

$$2V_t V_{tt} - 2a^2 V_t V_{xx} - 2a^2 V_x V_{tx} + 2a^2 V_x V_{tx} = (V_t^2)_t - 2a^2 (V_t V_x)_x + a^2 (V_x^2)_t =$$

$$= (V_t^2 + a^2 V_x^2)_t - 2a^2 (V_t V_x)_x = 0. \tag{3.27}$$

Проинтегрируем (3.27) по Ω:

$$\iint\limits_{\Omega} [(V_t^2 + a^2 V_x^2)_t - 2a^2 (V_t V_x)_x] dx dt. \tag{3.28}$$

Применим к левой части (3.28) известную из анализа формуду Грина:

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dt = \int\limits_{\partial\Omega} (P dx + Q dt)$$

при условии, что $P = V_t^2 + a^2V_x^2$, $Q = 2a^2V_tV_x$. Тогда получим:

$$\int\limits_{\partial\Omega}(V_t^2 + a^2V_x^2)dx + 2a^2(V_tV_x)dt = \int\limits_{AB\cup BC\cup CA}(V_t^2 + a^2V_x^2)dx + 2a^2(V_tV_x)dt =$$

$$= \int\limits_{BC}(V_t^2 + a^2V_x^2)dx + 2a^2(V_tV_x)dt - \int\limits_{AC}(V_t^2 + a^2V_x^2)dx + 2a^2(V_tV_x)dt = 0, \quad (3.29)$$

при этом мы учли, что $\int\limits_{AB}(V_t^2 + a^2V_x^2)dx + 2a^2(V_tV_x)dt = 0$, так как при $t = 0$ на основании (3.23) $V(x, 0) = 0$, а значит $V_x(x, 0) = 0$.

Криволинейные интегралы по BC и AC можно свести к определенным интегралам по t. Действительно, из (3.23) имеем:

$$\begin{array}{l} dx = -adt \text{ на BC}, \\ dx = adt \text{ на AC}. \end{array} \quad t \in [0, t_0] \quad (3.30)$$

Учитывая (3.30), из (3.29) имеем:

$$\int\limits_0^{t_0}[(V_t^2 + a^2V_x^2)(-a) + 2a^2(V_tV_x)]|_{BC}dt - \int\limits_0^{t_0}[(V_t^2 + a^2V_x^2)a + 2a^2(V_tV_x)]|_{AC}dt =$$

$$= -a\int\limits_0^{t_0}[(aV_x - V_t)^2|_{BC} + (aV_x + V_t)^2|_{AC}]dt = 0. \quad (3.31)$$

Так как подинтегральная функция в (3.31) непрерывна, неотрицательна, и интеграл равен нулю, то отсюда следует, что функция тождественно равна нулю, т.е.

$$(aV_x - V_t)^2|_{BC} \equiv 0, \; (aV_x + V_t)^2|_{AC} \equiv 0,$$

откуда

$$(aV_x - V_t)|_{BC} \equiv 0, \; (aV_x + V_t)|_{AC} \equiv 0. \quad (3.32)$$

Можно показать, что из (3.32) следует, что $V|_{BC} \equiv const$.

На основании (3.23) $V(B) = 0$, а тогда в силу непрерывности $V|_{BC} \equiv 0$, т.е. $V(C) = 0$, $V(x_0, t_0) = 0$. Так как (x_0, t_0) - произвольная точка верхней полуплоскости, то $V(x, t) \equiv 0$, т.е. $U_1 \equiv U_2$.

$\square$

Теорема устойчивости по начальным данным. Пусть $U_1(x,t)$ и $U_2(x,t)$ – два решения уравнения (3.20), удовлетворяющие начальным условиям

$$\begin{cases} U_i(x,0) = \varphi_i(x), \\ \frac{\partial U_i}{\partial t}(x,0) = \psi_i(x). \end{cases} \quad i = 1,2,\ -\infty < x < \infty \tag{3.21}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$, каким бы маленьким оно ни было, и любого $0 < T < \infty$ можно найти такое $\delta(\varepsilon, T)$, что

$$|U_1(x,t) - U_2(x,t)| < \varepsilon,\ -\infty < x < \infty,\ 0 < t \le T, \tag{3.33}$$

если только

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta,\ |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta,\ -\infty < x < \infty. \tag{3.34}$$

Кратко: Решение задачи Коши устойчиво на любом конечном интервале времени.

Доказательство. Рассмотрим функцию $V = U_1 - U_2$., кторая удовлетворяет уравнению (3.25) и условиям

$$\begin{cases} V(x,0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial V}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \end{cases},\ \begin{matrix} \varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x), \\ \psi(x) = \psi_1(x) - \psi_2(x). \end{matrix}\quad -\infty < x < \infty \tag{3.35}$$

Решение задачи (3.25), (3.35) запишется по формуле Даламбера

$$V(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha. \tag{3.36}$$

Из (3.36) с учетом (3.34) при $0 < t \le T$ имеем:

$$|V(x,t)| \le \frac{1}{2}|\varphi(x+at)| + \frac{1}{2}|\varphi(x-at)| + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} |\psi(\alpha)|d\alpha <$$

$$< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2a}\int_{x-at}^{x+at} d\alpha = \delta + \delta t \le \delta(1+T).$$

Полагая

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1+T}, \tag{3.37}$$

из (3.36) получаем $|U(x,t)| < \varepsilon$, т.е., выбрав δ по данным ε, T согласно (3.37), получаем (3.33).

□

VII Уравнения параболического типа. Смешанная задача для уравнения диффузии.

VII.1 Лекция 21. Постановка смешанной задачи для уравнения диффузии. Принцип максимума и минимума для уравнения диффузии.

VII.1.1 Постановка смешанной задачи для уравнения диффузии.

Уравнения параболического типа описывают процессы распространения тепла, диффузию в жидкостях и газах, движение вязкой жидкости.

Самым общим уравнением параболического типа является уравнение диффузии

$$\rho(x)\frac{\partial U}{\partial t} = -LU + \phi(x,t), \tag{1.1}$$

где $LU \equiv -\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(p(x)\frac{\partial U}{\partial x_i}) + q(x)U$.

Уравнение (1.1) можно также записать в виде

$$\rho(x)\frac{\partial U}{\partial t} = \nabla(p(x)\nabla U) - q(x)U + \phi(x,t).$$

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, а $0 < t < \infty$, тогда областью задания (1.1) является цилиндр бесконечной высоты $Ц_\infty$ с основанием Ω: $Ц_\infty = \Omega \times (0,\infty)$. Граница цилиндра $\partial Ц_\infty = \{\partial\Omega \times (t=0)\} \cup \{\overline{\Omega} \times (t=0)\}$, $\overline{Ц}_\infty = Ц_\infty \cup \partial Ц_\infty$.

Найти функцию $U(x,t) \in C^2(Ц_\infty) \cap C(\overline{Ц}_\infty)$, $\nabla_x U \in C(\overline{Ц}_\infty)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) при $(x,t) \in Ц_\infty$, начальному условию

$$U(x,0) = \varphi(x),\ x \in \overline{\Omega} \tag{1.2}$$

на нижнем основании цилиндра и граничному условию

$$\left[\alpha(x)U + \beta(x)\frac{\partial U}{\partial n}\right]\Bigg|_{\partial\Omega\times[0,\infty)} = \gamma(x,t) \tag{1.3}$$

на боковой поверхности цилиндра.

$\rho(x)$, $p(x)$, $q(x)$, $\phi(x,t)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x,t)$ - заданные функции, удовлетворяющие условиям:

1. $\rho(x), q(x), \varphi(x) \in C(\overline{\Omega})$,

2. $p(x)C^1(\overline{\Omega})$,

3. $\phi(x,t) \in C(\text{Ц}_\infty)$,

4. $\alpha(x), \beta(x) \in C(\partial\Omega)$,

5. $\gamma(x,t) \in C\{\partial\Omega \times [0,\infty)\}$.

Из физического смысла также следует, что $\rho(x), p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\alpha(x) \geq 0$, $\beta(x) \geq 0$, $\alpha(x) + \beta(x) > 0$.

Кроме того, должно выполняться условие согласованности

$$\left[\alpha(x)\varphi(x) + \beta(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}\right]\Big|_{\partial\Omega} = \gamma(x,0).$$

Заметим, что рассматривая раньше задачу распространения тепла в теле, мы получили уравнение теплопроводности, которое получается из (1.1) при $n = 3$. $U(x,t)$ в этом случае интерпертируется как температура в точке x в момент t. Условие (1.2) тогда задает температуру в начальный момент, а (1.3) - температурный режим на границе тела. В этой задаче мы рассматривали 3 вида граничного режима:

I. $U|_{\Omega\times[0,\infty)} = \gamma(x,t)$. На границе тела поддерживается заданная температура. Соответствующая смешанная задача называется первой краевой задачей.

II. $\frac{\partial U}{\partial n}|_{\Omega\times[0,\infty)} = \gamma(x,t)$. Через границу тела подается на поверхность тепловой поток (вторая краевая задача).

III. Условие (1.3) означает. что через границу тела происходит тепловой обмен со средой, температура которой известна (третья краевая задача).

VII.1.2 Принцип максимума и минимума для уравнения диффузии.

Пусть $0 < T < \infty$. Обозначим через $\text{Ц}_T = \Omega \times (0,T)$ - цилиндр конечной высоты, $\overline{\text{Ц}}_T = \text{Ц}_T \cup \partial\text{Ц}_T$, где $\partial\text{Ц}_T = \{\overline{\Omega} \times (t=0)\} \cup \{\overline{\Omega} \times (t=T)\} \cup \{\partial\Omega \times [0,T]\}$ - граница Ц_T.

Принцип максимума. Пусть функция $U(x,t) \in C^2(\text{Ц}_\infty) \cap C^1(\overline{\text{Ц}}_\infty)$ удовлетворяет уравнению (1.1) в Ц_∞. Тогда если $\phi(x,t) \leq 0$ в Ц_T, то либо $U \leq 0$ в $\overline{\text{Ц}}_T$, либо функция $U(x,t)$ принимает свой положительный максимум в $\overline{\text{Ц}}_T$ на нижнем основании $\overline{\Omega} \times (t=0)$ или на боковой поверхности $\partial\Omega \times [0,T]$, т.е.

$$U(x,t) \leq \max\left[0, \max_{\overline{\Omega}\times(t=0)} U(x,t), \max_{\partial\Omega\times[0,T]} U(x,t)\right], \ (x,t) \in \overline{\text{Ц}}_T \qquad (1.4)$$

Если обозначить через $\Gamma = \{\partial\Omega \times [0,T]\} \cup \{\overline{\Omega} \times (t = 0)\}$, то (1.4) можно записать в виде:

$$U(x,t) \leq \max(0, \max_{\Gamma} U(x,t)),\ (x,t) \in \overline{Ц}_T. \tag{1.5}$$

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть функция $U(x,t)$ принимает положительные значения в некоторых точках цилиндра, но не достигает своего положительного максимального значения на Γ, а принимает его в некоторой точке $(x_0,t_0) \in \overline{Ц}_T \setminus \Gamma$, т.е. $x_0 \in \Omega$, $0 < t_0 \leq T$.

Итак, $U(x_0,t_0) = \max\limits_{\overline{Ц}_T} U(x,t)$. Обозначим через $M = \max\limits_{\Gamma} U(x,t)$, тогда $U(x_0,t_0) > M$.

Обозначим через

$$\varepsilon = U(x_0,t_0) - M > 0 \tag{1.6}$$

и построим вспомогательную функцию

$$V(x,t) = U(x,t) + \frac{\varepsilon}{2}\frac{T-t}{T}, \tag{1.7}$$

где ε определяется формулой (1.6).

Покажем, что функция $V(x,t)$, определяется формулой (1.7), достигает своего положительного максимального значения не на Γ, а в некоторой точке $(x',t') \in \overline{Ц}_T \setminus \Gamma$, $x' \in \Omega$, $0 < t' \leq T$. Для этого достаточно показать, что значение функции $V(x,t)$ точке (x_0,t_0) больше значения V на Γ:

$$V(x_0,t_0) = U(x_0,t_0) + \frac{\varepsilon}{2}\frac{T-t_0}{T} \geq U(x_0,t_0) = M + \varepsilon \tag{1.8}$$

$$V|_\Gamma = U|_\Gamma + \frac{\varepsilon}{2}\frac{T-t}{T} \leq M + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.9}$$

так как $\frac{T-t}{T} \leq 1$, причем $\frac{T-t}{T} = 1$ при $t = 0$.

Сопоставляя (1.8) и (1.9), имеем:

$$V(x_0,t_0) \geq M + \varepsilon > M + \frac{\varepsilon}{2} \geq V|_\Gamma. \tag{1.10}$$

Из (1.10) следует, что функция $V(x,t)$ принимает свое положительное максимальное значение в некоторой точке (x',t'), причем $V(x',t') \geq V(x_0,t_0) \geq M + \varepsilon > \varepsilon > 0$.

Итак, функция $V(x,t)$ принимает положительное максимальное значение или внутри $Ц_T$, или на верхнем основании. В точке (x',t') должны выполняться необходимые условия максимума, которые в случае функции многих переменных имеют вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x', t') \geq 0, \tag{1.11}$$

причем $\frac{\partial V}{\partial t} > 0$ при $t' = T$, $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ при $t' < T$,

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x', t') = 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}(x', t') \leq 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Так как $U(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) в $Ц_\infty$, то имеет место равенство

$$\rho(x')\frac{\partial U}{\partial t}(x', t') - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[p(x')\frac{\partial U}{\partial x_i}(x', t')\right] + q(x')U(x', t') - \phi(x', t') = 0. \tag{1.13}$$

Учитывая теперь, что $U(x, t) = V(x, t) - \frac{\varepsilon}{2}\frac{T-t}{T}$, а также (1.11) и (1.12), из (1.13) получим:

$$\rho(x')\frac{\partial V}{\partial t}(x', t') + \rho(x')\frac{\varepsilon}{2T} - \sum_{i=1}^{n} p(x')\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}(x', t') -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial x_i}(x')\frac{\partial V}{\partial x_i}(x', t') + q(x')V(x', t') - q(x')\frac{\varepsilon}{2}\frac{T-t'}{T} - \phi(x', t') >$$

$$> \rho(x')\frac{\varepsilon}{2T} + q(x')\varepsilon - q(x')\frac{\varepsilon}{2}\frac{T-t'}{T} =$$

$$= \rho(x')\frac{\varepsilon}{2T} + q(x')\varepsilon\left(1 - \frac{T-t'}{2T}\right) \geq \rho(x')\frac{\varepsilon}{2T} > 0, \tag{1.14}$$

при этом мы учли, что $\rho(x'), \varepsilon > 0$, $q(x') \geq 0$.

Однако (1.13) и (1.14) противоречат друг другу. А значит, наше первоначальное предположение было не верно,т.е. функция $U(x, t)$ не может достигать положительного максимального значения в точке (x_0, t_0), т.е. достигает его на нижнем основании или боковой поверхности $Ц_T$.

$\square$

Имеет место также

Принцип минимума. Если функция $U(x, t) \in C^2(Ц_\infty) \cap C^1(\overline{Ц}_\infty)$ удовлетворяет уравнению (1.1) в $Ц_\infty$ и $\phi(x, t) \geq 0$ в $Ц_T$, то справедливо неравенство

$$U(x, t) \geq \min(0, \min_{\Gamma} U(x, t)),\ (x, t) \in \overline{Ц}_T. \tag{1.15}$$

Доказательство получается сразу заменой U на $-U$. Действительно, отрицательное наименьшее значение для U является максимальным положительным значением для $-U$. Для $-U$ имеет место принцип максимума, т.е. имеет место неравенство (1.5). Отсюда следует неравенство (1.15).

Частный случай. Если в уравнении (1.1) $\phi(x,t) \equiv 0$, $q(x) \equiv 0$, то принцип минимума и максимума имеет следующую формулировку:

Функция $U(x,t) \in C^2(Ц_\infty) \cap C^1(\overline{Ц}_\infty)$, удовлетворяющая уравнению (1.1), принимает минимальное и максимальное значение в $\overline{Ц}_T$ на Γ, т.е.

$$\min_{\Gamma} U(x,t) \leq U(x,t) \leq \max_{\Gamma} U(x,t),\ (x,t) \in \overline{Ц}_T.$$

VII.2 Лекция 22. Теоремы единственности и устойчивости решений смешанной задачи при граничных условиях первого рода.

VII.2.1 Априорные оценки.

Рассмотрим смешанную задачу:

$$\rho(x)\frac{\partial U}{\partial t} = -LU + \phi(x,t), \tag{1.1}$$

$$U(x,0) = \varphi(x),\ x \in \overline{\Omega}, \tag{1.2}$$

$$U|_{\partial\Omega\times[0,\infty)} = \gamma(x,t), \tag{2.1}$$

Пусть $U(x,t) \in C^2(\text{Ц}_\infty) \cap C^1(\overline{\text{Ц}}_\infty)$ и $\phi(x,t) \in C^1(\overline{\text{Ц}}_\infty)$. Фиксируем $0 < T < \infty$ и введем следующие постоянные:

$$\begin{cases} M_0 = \max\limits_{\overline{\Omega}}|\varphi(x)| = ||\varphi||_{C(\overline{\Omega})}, \\ M_1 = \max\limits_{\partial\Omega\times[0,\infty)}|\gamma(x,t)| = ||\gamma||_{C(\partial\Omega\times[0,\infty))}, \\ M = \max\limits_{\overline{\text{Ц}}_\infty}|\phi(x,t)| = ||\phi||_{C(\overline{\text{Ц}}_\infty)}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Введем вспомогательную функцию

$$\chi(x,t) = U(x,t) - \frac{M}{\rho_0}t, \tag{2.3}$$

где $\rho_0 = \min\limits_{\overline{\Omega}}\rho(x) > 0$. Из (2.3) имеем:

$$U(x,t) = \chi(x,t) + \frac{M}{\rho_0}t. \tag{2.4}$$

Так как $U(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.1), то подставляя (2.4) в (1.1), получим:

$$\rho(x)\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\rho(x)}{\rho_0}M = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[p(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(\chi + \frac{M}{\rho_0}t)\right] - q(x)\chi - \frac{q(x)M}{\rho_0}t + \phi(x,t). \tag{2.5}$$

Из (2.5) следует, что функция $\chi(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho(x)\frac{\partial \chi}{\partial t} = -L\chi + \phi^*(x,t), \tag{2.6}$$

где

$$\phi^*(x,t) = \phi(x,t) - \frac{\rho(x)}{\rho_0}M - q(x)\frac{M}{\rho_0}t. \tag{2.7}$$

Начальные и граничные условия для $\chi(x,t)$ будут иметь вид:

$$\chi(x,0) = U(x,0) = \varphi(x),\ x \in \overline{\Omega} \tag{2.8}$$

$$\chi|_{\partial\Omega\times[0,\infty)} = U|_{\partial\Omega\times[0,\infty)} - \frac{M}{\rho_0}t = \gamma(x,t) - \frac{M}{\rho_0}t. \tag{2.9}$$

Покажем, что для функции $\chi(x,t)$ выполняются условия принципа максимума. Для этого покажем, что

$$\phi^*(x,t) \leq 0,\ (x,t) \in \overline{Ц}_T. \tag{2.10}$$

Действительно, $\frac{\rho(x)}{\rho_0} \geq 1$, значит, $\frac{\rho(x)}{\rho_0}M \geq M$, а поэтому $\phi(x,t) - \frac{\rho(x)}{\rho_0}M \leq 0$, так как имеет место (2.2). Таким образом, из (2.7) следует, что имеет место (2.10), так как $q(x) \geq 0$.

Таким образом, на основании принципа максимума имеем:

$$\chi(x,t) \leq \max(0, \max_{\Gamma}\chi(x,t))$$

, или более подробно:

$$\chi(x,t) \leq \max(0, \max_{\overline{\Omega}\times(t=0)}\chi(x,t), \max_{\partial\Omega\times[0,T]}\chi(x,t)),\ (x,t) \in \overline{Ц}_T. \tag{2.11}$$

Но из (2.8) и (2.9) имеем:

$$\max_{\overline{\Omega}\times(t=0)}\chi(x,t) = \max_{\overline{\Omega}}\varphi(x) \leq \max_{\overline{\Omega}}|\varphi(x)| = M_0, \tag{2.12}$$

$$\max_{\partial\Omega\times[0,T]}\chi(x,t) = \max_{\partial\Omega\times[0,T]}\left(\gamma(x,t) - \frac{M}{\rho_0}t\right) \leq \max_{\partial\Omega\times[0,T]}\gamma(x,t) \leq \max_{\partial\Omega\times[0,T]}|\gamma(x,t)| = M_1. \tag{2.13}$$

Тогда из (2.11) с учетом (2.12), (2.13), получим:

$$\chi(x,t) \leq \max(M_0, M_1),\ (x,t) \in \overline{Ц}_T. \tag{2.14}$$

Введем еще одну вспомогательную функцию

$$\chi_1(x,t) = U(x,t) + \frac{M}{\rho_0}t. \tag{2.15}$$

Рассуждая как и выше, получим, что фнукция $\chi_1(x,t)$ удовлетворяет задаче

$$\begin{array}{l} \rho(x)\frac{\partial \chi_1}{\partial t} = -L\chi_1 + \phi^{**}(x,t), \\ \chi_1(x,0) = \varphi(x),\ x \in \overline{\Omega}, \end{array} \tag{2.16}$$

$$\chi|_{\partial\Omega\times[0,\infty)} = \gamma(x,t) + \frac{M}{\rho_0}t, \tag{2.17}$$

причем $\phi^{**}(x,t) = \phi(x,t) + \frac{\rho(x)}{\rho_0}M + q(x)\frac{M}{\rho_0}t \geq 0,\ (x,t) \in \overline{Ц}_T$.

Применяя к $\chi_1(x,t)$ принцип минимума, получим:

$$\chi_1(x,t) \geq \min(0, \min_{\overline{\Omega}\times(t=0)} \chi_1(x,t), \min_{\partial\Omega\times[0,T]} \chi_1(x,t)),\ (x,t) \in \overline{Ц}_T. \tag{2.18}$$

Учитывая (2.15), (2.16), получим:

$$\min_{\overline{\Omega}\times(t=0)} \chi_1(x,t) = \min_{\overline{\Omega}} \varphi(x) \geq -\min_{\overline{\Omega}} |\varphi(x)| \geq -\max_{\overline{\Omega}} |\varphi(x)| = -M_0, \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} \min_{\partial\Omega\times[0,T]} \chi_1(x,t) = \min_{\partial\Omega\times[0,T]} \left(\gamma(x,t) + \frac{M}{\rho_0}t\right) \geq \min_{\partial\Omega\times[0,T]} \gamma(x,t) \geq \\ \geq -\min_{\partial\Omega\times[0,T]} |\gamma(x,t)| \geq -\max_{\partial\Omega\times[0,T]} |\gamma(x,t)| = -M_1. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Из (2.18), учитывая (2.19) и (2.20), имеем:

$$\chi_1(x,t) \geq \min(-M_0, -M_1) \geq -\max(M_0, M_1),\ (x,t) \in \overline{Ц}_T. \tag{2.21}$$

Используя (2.4), (2.15), (2.14) (2.21), получим

$$U(x,t) - \frac{M}{\rho_0}t \leq \max(M_0, M_1),\ 0 < t \leq T,$$

откуда

$$U(x,t) \leq \max(M_0, M_1) + \frac{M}{\rho_0}T,\ (x,t) \in \overline{Ц}_T, \tag{2.22}$$

$$U(x,t) \geq -\max(M_0, M_1) - \frac{M}{\rho_0}T,\ (x,t) \in \overline{Ц}_T. \tag{2.23}$$

Объединяя (2.22) и (2.23), имеем:

$$-\max(M_0, M_1) - \frac{M}{\rho_0}T \leq U(x,t) \leq \max(M_0, M_1) + \frac{M}{\rho_0}T,$$

откуда

$$|U(x,t) \le \max(M_0, M_1) + \frac{M}{\rho_0}T,\ (x,t) \in \overline{\text{Ц}}_T,$$

$$\max_{\overline{\text{Ц}}_T}|U(x,t)| = ||U||_{C(\overline{\text{Ц}}_T)} \le \max(M_0, M_1) + \frac{M}{\rho_0}T.$$

Если учесть теперь (2.2), то получим:

$$||U||_{C(\overline{\text{Ц}}_T)} \le \max(||\varphi||_{C(\overline{\Omega})}, ||\gamma||_{C\{\partial\Omega\times[0,T]\}}) + \frac{T}{\rho_0}||\phi||_{C(\overline{\text{Ц}}_T}, \tag{2.24}$$

причем (2.24) справедливо для любого $0 < T < \infty$.

VII.2.2 Теоремы единственности и устойчивости решений смешанной задачи.

Теорема. Решение задачи (1.1), (1.2), (2.1) единственно и непрерывно зависит от данных ϕ, φ, γ в том смысле, что если

$$||\phi - \tilde{\phi}||_{C(\overline{\text{Ц}}_T)} \le \varepsilon_1,\ ||\varphi - \tilde{\varphi}||_{C(\overline{\Omega})} \le \varepsilon_2,$$

$$||\gamma - \tilde{\gamma}||_{C\{\partial\Omega\times[0,T]\}} \le \varepsilon_3, \tag{2.25}$$

то соответствующие решения удовлетворяют неравенству

$$||U - \tilde{U}||_{C(\overline{\text{Ц}}_T)} \le \varepsilon,\ \varepsilon = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \frac{T}{\rho_0}\varepsilon_1. \tag{2.26}$$

Доказательство. Единственность: Предположим, что существует два решения U_1 и U_2. Рассмотрим функцию $V = U_1 - U_2$, которая удовлетворяет смешанной задаче с данными $\phi \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$, $\gamma \equiv 0$. Запишем для V оценку (2.24): $||V||_{C(\overline{\text{Ц}}_T)} \le \max(0,0) + \frac{T}{\rho_0}0 = 0$, откуда $V \equiv 0$ в $\overline{\text{Ц}}_T$, а в силу произвольности T $V \equiv 0$, $(x,t) \in \overline{\text{Ц}}_\infty$.

Устойчивость: Рассмотрим функцию $V = U - \tilde{U}$, которая удовлетворяет смешанной задаче с данными $\phi - \tilde{\phi}$, $\varphi - \tilde{\varphi}$, $\gamma - \tilde{\gamma}$. Если теперь записать для $V(x,t)$ оценку (2.24) с учетом (2.25), получим (2.26).

□

VII.3 Лекция 23. Распространение тепла в конечном стержне с концами, поддерживаемыми при нулевой температуре.

VII.3.1 Решение задачи для однородного уравнения.

Рассмотрим задачу распространения тепла в однородном стержне длины l с теплоизолированной боковой поверхностью при условии, что начальная температура задана, а концы поддерживаются при нулевой температуре.

Идеализация процесса нами была раньше указана. Кроме того, будем предполагать стержень настолько тонким, что температура всех точек поперечного сечения будет одной и той же (поперечные сечения являются изотермическими поверхностями). Тогда за характеризующую функцию берем функцию $U(x,t)$ - температуру сечения стержня абциссой x в момент t. Задача для функции $U(x,t)$ в данном случае ставится так: найти функцию $U(x,t) \in C^2(Ц_\infty) \cap C(\overline{Ц}_\infty)$, $Ц_\infty = (0,l) \times (0,\infty)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ a^2 = \frac{k}{c\rho_0} \tag{3.1}$$

при $(x,t) \in Ц_\infty$, начальному условию

$$U(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le l \tag{3.2}$$

на нижнем основании цилиндра $\{[0,l] \times (t=0)\}$ и граничному условию

$$\begin{cases} U(0,t) = 0, \\ U(l,t) = 0 \end{cases} t \ge 0 \tag{3.3}$$

на боковой поверхности цилиндра $\{(x=0) \times [0,\infty)\} \cup \{(x=l) \times [0,\infty)\}$.

Кроме того, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Задача (3.1) - (3.3) из (1.1) - (1.3) при следующих значениях $\rho(x) \equiv \rho_0 - const$, $p(x) \equiv k - const$, $q(x) \equiv 0$, $\alpha(x) \equiv 1$, $\beta(x) \equiv 0$, $n = 1$.

Решим задачу (3.1) - (3.3) методом Фурье.

I. Ищем решение уравнения (3.1), удовлетворяющее условию (3.3) в виде

$$U(x,t) = X(x)T(t). \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (3.1) и деля полученое соотношение на $a^2X(x)T(t)$, получим:

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

откуда получаем уравнения для $T(t)$ и $X(x)$:

$$T' + a^2\lambda T = 0, \tag{3.5}$$

$$X'' + \lambda X = 0. \tag{3.6}$$

Подставляя (3.4) в (3.3), получим:

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0. \tag{3.7}$$

Итак, для функции $X(x)$ ы пришли к задаче (3.6), (3.7) - задаче на собственное значение. Как мы уже знаем, эта задача имеет решения

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2,\ X_k(x) = \sin\frac{\pi k}{l}x,\ k \in \mathbb{N}.$$

Уравнения для $T_k(t)$ будут иметь вид $T_k' + (\frac{a\pi k}{l})^2 T_k = 0$. Его решение $T_k(t) = c_k e^{-(\frac{a\pi k}{l})^2 t}$, $c_k - const$.

II. Общее решение задачи ищем в виде:

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi k}{l}x. \tag{3.8}$$

Удовлетворим условию (3.2):

$$U(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\frac{\pi k}{l}x = \varphi(x),\ 0 \le x \le l.$$

Предполагая, что функция $\varphi()x$ разлагается в ряд по системе $\{\sin\frac{\pi k}{l}x\}_1^{\infty}$, получим:

$$c_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi k}{l}\xi d\xi. \tag{3.9}$$

Итак, решение задачи (3.1) - (3.3) получаем в виде ряда (3.8), где c_k определяются формулой (3.9).

Обоснуем полученое решение:

1. Для этого надо доказать, что ряд (3.8) дифференцируем и удовлетворяет уравнению (3.1) при $0 < x < l$, $t > 0$. Покажем, что ряд (3.8) можно дифференцировать дважды по x и один раз по t. Пркажем, что при $t \ge t_0 > 0$, где t_0 –

любое фиксированное число, $U_t = \sum\limits_{k=1}^{\infty} U_{kt}$, $U_{xx} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} U_{kxx}$ сходятся равномерно. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_{kt}(x,t) = -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k k^2 e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi k}{l}x, \qquad (3.10)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_{kxx}(x,t) = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k k^2 e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi k}{l}x. \qquad (3.11)$$

Из (3.10) и (3.11) следует, что при $t \geq t_0 > 0$ мажорирующим рядом для этих рядов с точностью до постоянного множителя будет ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| k^2 e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t_0}. \qquad (3.12)$$

Предположим, что функция $\varphi(x)$ ограничена, т.е. $|\varphi(x)| \leq M$, тогда из (3.9) имеем:

$$|c_k| = \frac{2}{l}\left|\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi k}{l}\xi d\xi\right| \leq \frac{2}{l}M\int\limits_0^l d\xi = 2M. \qquad (3.13)$$

Учитывая (3.12) и (3.13), получаем, что в качестве мажорирующего ряда можно взять ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t_0}. \qquad (3.14)$$

Но функция e^{-x^2} убывает всегда быстрее, чем любая отрицательная степень x, а именно, начиная с некоторого достаточно большого $k \geq k_0$ имеет место оценка

$$k^2 e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t_0} < \frac{B}{k^2},\ k \geq k_0,\ B - const.$$

Однако ряд с общим членом $\frac{1}{k^2}$ сходится, следовательно, сходится ряд (3.14). Отсюда вытекает возможность дифференцирования ряда (3.8), а отсюда следует, что ряд(3.8) удовлетвоярет уравнению (3.1), так как уравнению (3.1) удовлетворяет каждый член ряда.

2. Покажем непрерывность ряда (3.8) при $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$. При $t \geq 0$ общий член ряда (3.8) допускает оценку $|U_k(x,t)| \leq c_k$, так как $|\sin\frac{\pi k}{l}x| \leq 1$, $e^{-(\frac{a\pi k}{l})^2 t_0} \leq 1$.

Таким образом, при $t_0 \geq 0$ мажорирующим рядом для ряда (3.8) будет ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|$.

Если тепрь воспользуемся леммой, устанавливающей сходимость ряда вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^m |c_k|$ при $m = 0$ (лекция №16), то получаем следующую теорему:

Теорема. Задача (3.1) - (3.3) имеет классическое решение вида (3.8), если $\varphi(x)$ непрерывна в $[0, l]$, имеет кусочно-непрерывную производную первого порядка и удовлетворяет условию $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

VII.3.2 Физическая интепретация решения, функция Грина.

Преобразуем теперь получнное решение (3.8), подставляя (3.9) в (3.8):

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi k}{l} \xi d\xi \right] e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi k}{l} x =$$

$$= \int_0^l \varphi(\xi) \left[\frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi k}{l} x \sin \frac{\pi k}{l} s e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \right] d\xi, \qquad (3.15)$$

при этом мы переставили порядок интегрирования и суммирования, что возможно в силу сходимости ряда.

Обозначим через

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l} \sin \frac{\pi k}{l} x \sin \frac{\pi k}{l} \xi e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t}, \qquad (3.16)$$

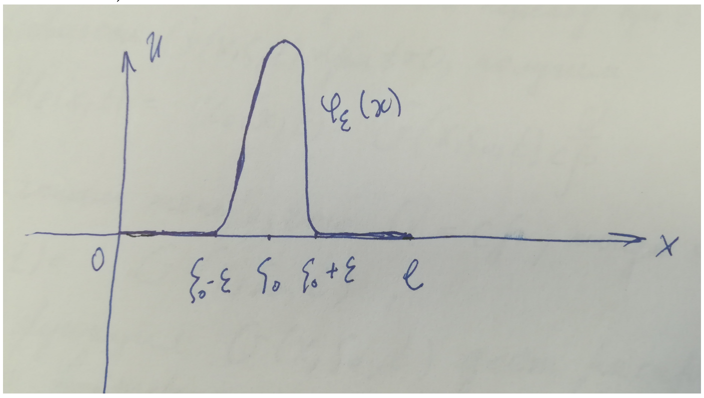
тогда (3.15) запишется в виде:

$$U(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t) \varphi(\xi) d\xi. \qquad (3.17)$$

Функция $G(x,\xi,t)$, определяемая формулой (3.16), называется функцией Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности или функцией мгновенного источника, или, более подробно, функцией температурного влияния мгновенного теплового источника.

Выясним физический смысл функции $G(x,\xi,t)$, т.е. выясним, почему эта функция имеет такое название.

Рассмотрим вспомогательную задачу об определении температуры стержня длины l при условии, что концы стержня поддерживаются при нулевой температуре, а начальная температура $\varphi_\varepsilon(x)$ равна нулю всюду, кроме некоторого малого интервала $[\xi_0 - \varepsilon, \xi_0 + \varepsilon]$, на котором она положительна, непрерывно дифференцируема и бесконечно велика (стержень очень снагревается на этом интервале).



Таким образом, мы имеем задачу:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ 0 < x < l,\ t > 0, \tag{3.1}$$

$$U(x,0) = \varphi_\varepsilon(x),\ 0 \le x \le l, \tag{3.18}$$

$$U(0,t) = 0,\ U(l,t) = 0,\ t = 0. \tag{3.3}$$

Для того, чтобы создать такой режим, надо на интервале $[\xi_0 - \varepsilon, \xi_0 + \varepsilon]$ выделить количество тепла:

$$Q = c\rho \int\limits_0^l \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = c\rho \int\limits_{\xi_0-\varepsilon}^{\xi_0+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi. \tag{3.19}$$

На основании (3.17) решение этой задачи запишется в виде:

$$U_\varepsilon(x,t) = \int\limits_0^l \varphi_\varepsilon(\xi) G(x,\xi,t) d\xi = \int\limits_{\xi_0-\varepsilon}^{\xi_0+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi) G(x,\xi,t) d\xi. \tag{3.20}$$

Применим к интегралу правой части (3.20) теорему о среднем и учтем (3.19), тогда получим:

$$U_\varepsilon(x,t) = G(x,\xi_0^*,t) \int\limits_{\xi_0-\varepsilon}^{\xi_0+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = G(x,\xi_0^*,t) \frac{Q}{c\rho}, \tag{3.21}$$

где $\xi_0 - \varepsilon < \xi_0^* < \xi_0 + \varepsilon$.

Совершим в (3.21) предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Учитывая непрерывность $G(x, \xi, t)$ при $t > 0$, получим:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} U_\varepsilon(x,t) = U_0(x,t) = G(x, \xi_0, t)\frac{Q}{c\rho}. \tag{3.22}$$

Предположим теперь, что $Q = c\rho$, тогда из (3.22) получим:

$$U_0(x,t) = G(x, \xi_0, t), \tag{3.23}$$

то есть функция $G(x, \xi_0, t)$ дает распределение температуры в стержне длины l при условии, что концы стержня поддерживаются при нулевой температуре, а в момент $t = 0$ в точке $x = \xi_0$ мгновенно выделяется количество тепла $Q = c\rho$.

Замечание. При условии, что $Q = c\rho$, из (3.19) следует

$$\int\limits_0^l \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = 1. \tag{3.24}$$

Тогда, учитывая (3.24), имеем $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(x) = \delta(x - \xi_0)$, где $\delta(x - \xi_0)$ - смещенная δ-функция Дирака, которая по определению всюду равна нулю, кроме точки $x = \xi_0$, где она обращается в бесконечность, и интеграл от которой равен единице: $\int\limits_0^l \delta(\xi - \xi_0) d\xi = 1$.

$\delta(x)$-функция имеет строгое определение как обобщенная функция, т.е. как непрерывный линейный функционал на пространстве основных функций. Этот функционал ставит в соответствие каждой функции из пространства основных функций ее значение в точке $x = 0$. Этот функционал обозначается следующим образом:

$$\int\limits_0^l \varphi(\xi)\delta(\xi) d\xi =< \delta, \varphi >= \varphi(0),$$

$$\int\limits_0^l \varphi(\xi)\delta(\xi - \xi_0) d\xi =< \delta, \varphi >= \varphi(\xi_0). \tag{3.25}$$

Учитывая (3.25), из (3.20) можно получить:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} U_\varepsilon(x,t) = U_0(x,t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^l \varphi_\varepsilon(\xi) G(x, \xi, t) d\xi =$$

$$= \int_0^l \delta(\xi - \xi_0) G(x, \xi, t) d\xi = G(x, \xi_0, t),$$

т.е. получаем формулу (3.23).

Итак, можно утверждать, что функция $G(x, \xi, t)$ является решением задачи

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \tag{3.26}$$

$$G(x, \xi, 0) = \delta(x - \xi), \tag{3.27}$$

$$G(0, \xi, t) = G(l, \xi, t) = 0. \tag{3.28}$$

Предположим, что существует функция $G(x, \xi, t)$, которая является решением задачи (3.26) - (3.28). Можно показать, что функция $U(x, t)$, определяемая формулой (3.16), действительно дает решение задачи (3.1) - (3.3). Действительно, функция (3.16) удовлетворяет уравнению (3.1) и граничному условию (3.3), так как функция $G(x, \xi, t)$ удовлетворяет уравнению (3.26) и условию (3.28). Проверим, что функция (3.16) удовлетворяет начальному условию (3.2):

$$U(x, 0) = \int_0^l \varphi(\xi) \delta(x - \xi) d\xi = \int_0^l \varphi(\xi) \delta(\xi - x) d\xi = \varphi(x).$$

VII.3.3 Решение задачи для неоднородного уравнения.

Рассмотрим смешанную задачу

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \phi(x, t),\ (x, t) \in Ц_\infty = (0, l) \times (0, \infty), \tag{3.29}$$

$$U(x, 0) = 0,\ 0 \le x \le l, \tag{3.30}$$

$$U(0, t) = 0,\ U(l, t) = 0,\ t \ge 0. \tag{3.31}$$

Данная задача описывает процесс распространения тепла в однородном стержне длины l с теплоизолированной боковой поверхностью при условии, что по стержню непрерывно распространены источники тепла с объемной плотностью $\mathcal{F}(x, t) = c\rho\phi(x, t)$. Начальная температура равна нулю, а концы поддерживаются при нулевой температуре.

Применим к решению этой задачи метод собственных функций. Будем искать решение задачи в виде ряда

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{T}_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x, \tag{3.32}$$

где $X_k(x) = \sin \frac{\pi k}{l} x$, $k \in \mathbb{N}$ – собственные функции задачи на собственные значения

$$X'' + \lambda X = 0, \; X(0) = X(l) = 0. \tag{3.33}$$

Предполагая, что ряд (3.32) сходится равномерно, получим, что ряд (3.32) удовлетворяет граничным условиям (3.31) за счет (3.33).

Подберем функции $\tilde{T}_k(t)$ так, чтобы ряд (3.32) удовлетворял уравнению (3.29) и начальным условиям (3.30).

Предполагая, что ряд (3.32) допусает дифференцирование по x дважды и однократно по t, подставим (3.32) в (3.29):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\tilde{T}_k'(t) + \left(\frac{a\pi k}{l} \right)^2 \tilde{T}_k(t) \right] \sin \frac{\pi k}{l} x = \phi(x,t). \tag{3.34}$$

Тождество (3.34) должно выполняться при $x \in (0,l)$ и $t \in (0,\infty)$. Зафиксируем $t = t_0$, тогда слева имеем ряд по системе $\{\sin \frac{\pi k}{l} x\}_1^\infty$, а справа - заданная функция $\phi(x,t)$, т.е. мы пришли к задаче разложения в ряд функции $\phi(x,t)$ по системе $\{\sin \frac{\pi k}{l} x\}_1^\infty$. Предположим, что при каждом фиксированном $t \in (0,\infty)$ $\phi(x,t)$ удовлетворяет достаточным условиям для разложения в ряд по системе $\{\sin \frac{\pi k}{l} x\}_1^\infty$. Тогда получим:

$$\phi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x, \; \phi_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(\xi,t) \sin \frac{\pi k}{l} \xi d\xi, \tag{3.35}$$

причем $\phi_k(t)$ зависит от t как от параметра.

Итак, получим, что тождество (3.34) будет иметь место тогда и только тогда, когда

$$\tilde{T}_k'(t) + \left(\frac{a\pi k}{l} \right)^2 \tilde{T}_k(t) = \phi_k(t). \tag{3.36}$$

Но ряд (3.32) должен удовлетворять условию (3.30). Подставляя (3.32) в (3.30), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{T}_k(0) \sin \frac{\pi k}{l} x = 0, \; 0 \le x \le l,$$

откуда

$$\tilde{T}_k(0) = 0. \tag{3.37}$$

Итак, для определения $\tilde{T}_k(t)$ имеем задачу Коши (3.36), (3.37). Ее решение может быть получено методом вариации произвольной постоянной. Решим сначала соответствующее однородное уравнение

$$\tilde{T}_k'(t) + \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 \tilde{T}_k(t) = 0.$$

Его решение имеет вид $\tilde{T_{k0}}(t) = c_k e^{-(\frac{a\pi k}{l})^2 t}$, где $c_k - const$. Ищем решение уравнения (3.35) в виде

$$\tilde{T}_k(t) = c_k(t) e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t}. \tag{3.38}$$

Подставляя (3.38) в (3.36), получим:

$$c_k'(t) e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} - \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 c_k(t) e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} + \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 c_k(t) e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} = \phi_k(t),$$

откуда

$$c_k(t) = \int\limits_0^t e^{\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 \tau} \phi_k(\tau) d\tau + \alpha_k, \tag{3.39}$$

где $\alpha_k - const$. Но в силу (3.27) $c_k(0) = 0$, поэтому $\alpha_k = 0$.

Подставляя (3.39) в (3.38), получим:

$$\tilde{T}_k(t) = \int\limits_0^t e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 (t-\tau)} \phi_k(\tau) d\tau.$$

Таким образом, решение задачи (3.29) - (3.31) запишется в виде

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int\limits_0^t e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 (t-\tau)} \phi_k(\tau) d\tau \right] \sin \frac{\pi k}{l} x. \tag{3.40}$$

Для обоснования решения нужно доказать равномерную сходимость вышеуказанных рядов.

VII.3.4 Физическая интерпретация решения.

Преобразуем формулу (3.40). Учитывая (3.35), перепишем (3.40) в виде

$$U(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^t\left[e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2(t-\tau)}\int\limits_0^l\phi(\xi,\tau)\sin\frac{\pi k}{l}\xi d\xi\right]d\tau\sin\frac{\pi k}{l}x.$$

Предполагая возможность перемены порядка интегрирования и суммирования, получим:

$$U(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^l\left[\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{\pi k}{l}x\sin\frac{\pi k}{l}\xi\right]\phi(\xi,\tau)d\xi d\tau=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau)\phi(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{3.41}$$

где

$$G(x,\xi,t-\tau)=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{\pi k}{l}x\sin\frac{\pi k}{l}\xi. \tag{3.42}$$

Выясним физический смысл функции $G(x,\xi,t-\tau)$, определяемой формулой (3.42). Предположим, что функция $\phi(\xi,\tau)$ отлична от нуля лишь в достаточно малой окрестности точки (ξ_0,τ_0), т.е. при $\xi_0\le\xi\le\xi_0+\Delta\xi$, $\tau_0\le\tau\le\tau_0+\Delta\tau$. Так как $\mathcal{F}(x,t)=c\rho\phi(x,t)$ - плотность тепловых источников, то общее количество тепла, выделяемое в стержне длины l за время действия источника, т.е. за время $\Delta\tau$, равно:

$$Q=\int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau}\int\limits_0^l c\rho\phi(\xi,\tau)d\xi d\tau=c\rho=\int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau}\int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi}\phi(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{3.43}$$

Но в силу (3.41) решение задачи в этом случае запишется в виде:

$$\tilde{U}(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau)\phi(\xi,\tau)d\xi d\tau=\int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau}\int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi}G(x,\xi,t-\tau)\phi(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{3.44}$$

Применяя теорему о среднем, из (3.44) с учетом (3.43) получим:

$$\tilde{U}(x,t) = G(x,\tilde{\xi},t-\tilde{\tau})\frac{Q}{c\rho}, \tag{3.45}$$

где $\xi_0 < \tilde{\xi} < \xi_0 + \Delta\xi$, $\tau_0 < \tilde{\tau} < \tau_0 + \Delta\tau$.

Переходя в (3.45) к пределу при $\Delta\xi \to 0$, $\Delta\tau \to 0$, получим:

$$\lim_{\substack{\Delta\xi \to 0 \\ \Delta\tau \to 0}} \tilde{U}(x,t) = \hat{U}(x,t) = \frac{Q}{c\rho}G(x,\xi_0,t-\tau_0),$$

откуда при $Q = c\rho$ получаем

$$\hat{U}(x,t) = G(x,\xi_0,t-\tau_0). \tag{3.46}$$

Из (3.46) следует, что функция $G(x,\xi,t-\tau)$ представляет из себя функцию температурного влияния мгновенного теплового источника мощности $Q = c\rho$, сосредоточеного в точке $x = \xi$ в момент $t = \tau$, т.е. дает распределение температуры в стержне длины l при условии, что концы стержня поддерживаются при нулевой температуре, а в момент $t = \tau$ в точке $x = \xi$ мгновенно выделяется количество тепла $Q = c\rho$.

Замечание 1. Зная функцию $G(x,\xi,t-\tau)$, можно показать, что решение задачи (3.29) - (3.31) запишется в виде (3.41), т.е. действие источников, непрерывно распределенных с плотностью $c\rho\phi(x,t)$, определится формулой (3.41).

Действительно, если источники действуют лишь в области $[\xi_0, \xi_0 + \Delta\xi]$, $[\tau_0, \tau_0 + \Delta\tau]$, то распределение температуры определяется формулой

$$\tilde{U}(x,t) = G(x,\tilde{\xi},t-\tilde{\tau})\frac{Q}{c\rho} = G(x,\tilde{\xi},t-\tilde{\tau})\phi(\xi,\tau)\Delta\xi\Delta\tau,$$

так как $Q = c\rho\phi(\xi,\tau)\Delta\xi\Delta\tau$.

Если теперь источники распределены непрерывно,то суммируя влияние источников, действующих во всей области $0 \le \xi \le l$, $0 \le \tau \le t$, получим после предельного прехода при $\Delta\xi \to 0$, $\Delta\tau \to 0$

$$U(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau)\phi(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

т.е. получаем формулу (3.41), исходя из физического смысла функции $G(x,\xi,t-\tau)$.

Замечание 2. На основании вышеизложенного можно утверждать, что функция $G(x,\xi,t-\tau)$ является решением задачи

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \tag{3.47}$$

$$G|_{t=\tau} = G(x,\xi,0) = \delta(x-\xi), \tag{3.48}$$

$$G(0,\xi,t-\tau) = G(l,\xi,t-\tau) = 0. \tag{3.49}$$

Можно показать, что учитывая (3.47) - (3.49), функция $U(x,t)$, определяемая формулой (3.41), удовлетворяет (3.29) - (3.31). Покажем, что функция (3.41) удовлетворяет уравнению (3.29):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int\limits_0^l \phi(\xi,t)G(x,\xi,0)d\xi + \int\limits_0^t\int\limits_0^l \frac{\partial G(x,\xi,t-\tau)}{\partial t}\phi(\xi,\tau)d\xi d\tau =$$

$$= \int\limits_0^l \phi(\xi,t)\delta(x-\xi)d\xi + \int\limits_0^t\int\limits_0^l \frac{\partial G(x,\xi,t-\tau)}{\partial t}\phi(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int\limits_0^t\int\limits_0^l \frac{\partial^2 G(x,\xi,t-\tau)}{\partial x^2}\phi(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int\limits_0^l \phi(\xi,t)\delta(x-\xi)d\xi + \int\limits_0^t\int\limits_0^l \left[\frac{\partial G}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right]\phi(\xi,\tau)d\xi d\tau = \phi(x,t).$$

VIII Задача Коши для уравнения теплопроводности.

VIII.1 Лекция 24. Постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности. Единственность решения. Задача распространения тепла в неограниченном стержне.

VIII.1.1 Постановка задачи. Единственность решения задачи.

Требуется найти функцию $U(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^n_x \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R}^n_x \times [0,\infty))$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U + \phi(x,t),\ a^2 = 1 \tag{1.1}$$

при $(x,t) \in \mathbb{R}^n_x \times (0,\infty)$ и начальному условию

$$U(x,0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n_x. \tag{1.2}$$

Теорема единственности. Задача (1.1), (1.2) не может иметь более одного решения в классе ограниченных функций, т.е. функций, удовлетворяющих условию

$$|U(x,t)| \le M,\ (x,t) \in \mathbb{R}^n_x \times [0,\infty). \tag{1.3}$$

Доказательство. Предположим, что существует два решения U_1 и U_2. Рассмотрим $V = U_1 - U_2$. Тогда $V(x,t)$ удовлетворяет задаче

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \Delta V,\ (x,t) \in \mathbb{R}^n_x \times (0,\infty), \tag{1.4}$$

$$V(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n_x, \tag{1.5}$$

$$|V| \le |U_1| + |U_2| \le 2M. \tag{1.6}$$

Докажем, что $V(x,t) \equiv 0$. Для этого используем приницп экстремума для уравнения (1.4).

Для задачи (1.4) - (1.6) мы не можем сразу применить этот принцип, так как область по x и t бесконечна. Поэтому построим конечный цилиндр $\overline{\text{Ц}}_{T,R} = (|x| \le R) \times [0,T]$, где $0 < R,\ T < \infty$, причем $\Gamma = \{(|x| \le R) \times (t = 0)\} \cup \{|x| = R \times [0,T]\}$.

Построим теперь вспомогательную функцию, являющуюся мажорантой V на Г. Возьмем эту функцию в виде $\omega(x,t) = \frac{4M}{R^2}(\frac{|x|^2}{2} + nt)$, где n –размерность пространства, $|x|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.

Функция $\omega(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.4). Действительно, $\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{4M}{R^2}n$, $\frac{\partial\omega}{\partial x_i} = \frac{4M}{R^2}x_i$, $\frac{\partial^2\omega}{\partial x_i^2} = \frac{4M}{R^2}$, $\Delta\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\omega}{\partial x_i^2} = \frac{4M}{R^2}n$.

Выясним, в каком соотношении находятся V и ω на части границы Г.

Пусть $|x| \le R$, $t = 0$, тогда в силу (1.5) $V(x,0) = 0$, а значит,

$$|V(x,0)| = 0, \tag{1.7}$$

$$\omega(x,0) = \frac{4M}{R^2}\frac{|x|^2}{2} = \frac{2M|x|^2}{R^2} \ge 0, \tag{1.8}$$

причем $\omega(x,0) = 0$ при $|x| = 0$.

Пусть теперь $|x| = R$, $0 \le t \le T$, тогда имеет место (1.6):

$$\omega(x,t)|_{|x|=R,\, 0\le t\le T} = 2M + \frac{4M}{R^2}nt \ge 2M, \tag{1.9}$$

причем $\omega = 2M$ при $t = 0$.

Сопоставляя (1.7) и (1.8), (1.6) и (1.9), получим

$$|V|_\Gamma \le \omega|_\Gamma. \tag{1.10}$$

Покажем, что из (1.10) следует, что $|V(x,t)| \le \omega(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Ц}_{T,R}$. Действительно, неравенство (1.10) можно переписать следующим образом:

$$-\omega \le V \le \omega,\ (x,t) \in \Gamma. \tag{1.11}$$

Рассмотрим функцию $W(x,t) = \omega(x,t) - V(x,t)$, тогда из правой части неравенства (1.11) имеем:

$$W|_\Gamma \ge 0,\ (x,t) \in \Gamma. \tag{1.12}$$

Кроме того, функция $W(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.4), поэтому на основании принципа эктремума имеем:

$$\min_\Gamma W \le W \le \max_\Gamma W,\ (x,t) \in \overline{Ц}_{T,R}. \tag{1.13}$$

Но из (1.12) следует, что $\min\limits_\Gamma W \ge 0$, поэтому из (1.13) имеем $W(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in \overline{Ц}_{T,R}$, т.е. $V \le \omega$ при $(x,t) \in \overline{Ц}_{T,R}$.

Рассуждая аналогично, получим, что $V \geq -\omega$ при $(x,t) \in \overline{\text{Ц}}_{T,R}$, откуда

$$|V| \leq \omega,\ (x,t) \in \overline{\text{Ц}}_{T,R}. \tag{1.14}$$

Итак, пусть (x_0, t_0) - любая точка такая, что $x_0 \in \mathbb{R}^n_x$, $t_0 \in [0, \infty)$. Покажем, что $V(x_0, t_0) = 0$, откуда в силу произвольности точки (x_0, t_0) будет следовать, что $V(x,t) \equiv 0$ при $x \in \mathbb{R}^n_x$, $t > 0$.

Действительно, можем всегда выбрать R и T такими, что $(x_0, t_0) \in \overline{\text{Ц}}_{T,R}$, поэтому в этой точке имеет место неравенство (1.14), т.е. $|V(x_0,t_0)| \leq \frac{4M}{R^2}(\frac{|x|^2}{2} + nt)$. Это неравенство верно для любого достаточно большого R, поэтому устремляя $R \to \infty$, получим $|V(x_0,t_0)| = 0$, $V(x_0,t_0) = 0$. Таким образом, $V(x,t) \equiv 0$, $U_1 \equiv U_2$ при $x \in \mathbb{R}^n_x$, $t > 0$.

$\square$

VIII.1.2 Задача распространения тепла в неограниченном стержне. Решение задачи. Функция Грина.

Рассмотрим решение задачи

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ -\infty < x < \infty,\ t > 0, \tag{1.15}$$

$$U(x,0) = \varphi(x),\ -\infty < x < \infty, \tag{1.16}$$

где φ - непрерывная и ограниченная функция.

Для решения задачи предположим сначала, что функция φ всюду равна нулю, кроме некоторого малого интервала $[\xi_0 - \varepsilon, \xi_0 + \varepsilon]$, на котором она отлична нуля. Тогда на основании предыдущего следует, чтобы изменить так температуру, надо на интервале $[\xi_0 - \varepsilon, \xi_0 + \varepsilon]$ поместить начальное количество тепла

$$Q = c\rho \int\limits_{\xi_0 - \varepsilon}^{\xi_0 + \varepsilon} \varphi(\xi) d\xi = c\rho\varphi(\tilde{\xi})\Delta\xi, \tag{1.17}$$

где $\Delta\xi = 2\varepsilon$, $\tilde{\xi}$ - средняя точка интервала $[\xi_0 - \varepsilon, \xi_0 + \varepsilon]$. Температура в любой точке интервала в момент $t > 0$ равна:

$$U_\varepsilon(x,t) = \frac{Q}{c\rho} G(x, \tilde{\xi}, t) = G(x, \tilde{\xi}, t)\varphi(\tilde{\xi})\Delta\xi, \tag{1.18}$$

при этом мы учли (1.17). $G(x, \tilde{\xi}, t)$ - функция Грина, введенная раньше при решении задачи для конечного стержня.

Разобьем теперь всю прямую $(-\infty, \infty)$ на мелкие промежутки $[\xi_0 - \varepsilon, \xi_0 + \varepsilon]$. Тогда температуру $U(x, t)$ мы можем представить как сумму слагаемых типа (1.18). Эта сумма будет интегральной суммой, которая при $\varepsilon \to 0$ перейдет в интеграл

$$U(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t)\varphi(\xi)d\xi, \tag{1.19}$$

который будет давать решение задачи (1.15), (1.16).

Заметим, что приведенные выше рассуждения не являются доказательством существования решения. Формула (1.19) получена при условии, что решение задачи существует, поэтому в дальнейшем необходимо доказать существование решения.

Из (1.19) видно, что для построения решения задачи нужно построить функцию Грина для бесконечной прямой; причем функцию Грина $G(x, \xi, t)$ в данном случае надо понимать как предел функции Грина для конечного отрезка

Как было получено выше, функция Грина для конечного отрезка $[0, l]$ имеет вид:

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi k}{l}x \sin\frac{\pi k}{l}\xi. \tag{1.20}$$

Для вычисления предела преобразуем функцию (1.20) так, чтобы концы конечного отрезка длины l имели координаты $-\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}$. Для этого введем новые переменные $x' = x - \frac{l}{2}$, $\xi' = \xi - \frac{l}{2}$. При $x = 0$, $x' = -\frac{l}{2}$; $x = l, x' = \frac{l}{2}$. Тогда из (1.20) получим, что функция влияния мгновенного конечного источника мощности $Q = c\rho$, помещенного в точку $x' = \xi'$ отрезка $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$, будет иметь вид:

$$G_{\frac{l}{2}}(x', \xi', t) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi k}{l}\left(x' + \frac{l}{2}\right) \sin\frac{\pi k}{l}\left(\xi' + \frac{l}{2}\right). \tag{1.21}$$

Преобразуем в (1.21) произведение синусов. Если k - четно, т.е. $k = 2n$, то

$$\sin\frac{2\pi n}{l}\left(x' + \frac{l}{2}\right)\sin\frac{2\pi n}{l}\left(\xi' + \frac{l}{2}\right) = \sin\frac{2\pi n}{l}x' \sin\frac{2\pi n}{l}\xi'. \tag{1.22}$$

Если $k = 2n + 1$, то:

$$\sin\frac{\pi(2n+1)}{l}\left(x' + \frac{l}{2}\right)\sin\frac{\pi(2n+1)}{l}\left(\xi' + \frac{l}{2}\right) = \cos\frac{\pi(2n+1)}{l}x' \cos\frac{\pi(2n+1)}{l}\xi'. \tag{1.23}$$

Учитывая (1.22) и (1.23), запишем (1.21) в виде:

$$G_{\frac{l}{2}}(x', \xi', t) = \frac{2}{l} \sum_{k=2}^{\infty}{}' e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi k}{l} x' \sin \frac{\pi k}{l} \xi' + \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty}{}'' e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \cos \frac{\pi k}{l} x' \cos \frac{\pi k}{l} \xi' =$$

$$= \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

причем штрихи у знака суммы означают, что суммирование проводится только по четным или нечетным k.

Преобразуем теперь Σ_1 и Σ_2. Представим Σ_1 в несколько ином виде. Обозначим через $\lambda_k = \frac{\pi k}{l}$, $\Delta\lambda = \lambda_{k+1} - \lambda_k = \frac{\pi(2n+2) - \pi(2n)}{l} = \frac{2\pi}{l}$, $\phi_1(\lambda) = e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x' \sin \lambda \xi'$, тогда

$$\Sigma_1 = \frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty}{}' \phi_1(\lambda_k) \Delta\lambda. \tag{1.24}$$

Сумма (1.24) подобна интегральной сумме для функции $\phi_1(\lambda)$ при интегрировании в промежутке $0 \leq \lambda < \infty$, причем промежуточные точки λ_k являются левыми концами интервалов. Поэтому, если в (1.24) перейти к пределу при $l \to \infty$, т.е. при $\Delta\lambda \to 0$, получим:

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \Sigma_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x' \sin \lambda \xi' d\lambda. \tag{1.25}$$

Совершенно аналогично Σ_2 можно представить в виде:

$$\Sigma_2 = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty}{}'' e^{-\lambda_k^2 a^2 t} \cos \lambda_k x' \cos \lambda_k \xi' = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty}{}'' \phi_2(\lambda_k) \Delta\lambda, \tag{1.26}$$

где $\phi_2(\lambda) = e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda x' \cos \lambda \xi'$, $\Delta\lambda = \lambda_{k+1} - \lambda_k = \frac{\pi(2n+3) - \pi(2n+1)}{l} = \frac{2\pi}{l}$.

Совершая в (1.26) предельный переход при $l \to \infty$, т.е. при $\Delta\lambda \to 0$, получим:

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \Sigma_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \phi_2(\lambda) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda x' \cos \lambda \xi' d\lambda. \tag{1.27}$$

В формуле (1.25) и (1.27) мы получили несобственные интегралы в правых частях как предел интегральных сумм, взятых по всему бесконечному отрезку. Для обоснования этого прехода можно показать, что он не противоречит определению несобственного интеграла:

$$\int\limits_0^\infty \phi(\lambda)d\lambda = \lim_{L\to\infty}\int\limits_0^L \phi(\lambda)d\lambda.$$

Учитывая (1.25) и (1.27), получим:

$$G(x,\xi,t) = \lim_{l\to\infty} G_{\frac{l}{2}}(x,\xi,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\lambda. \tag{1.28}$$

Преобразуем (1.28), вычислив интеграл. Обозначим:

$$a^2 t = \alpha,\ \xi - x = \beta. \tag{1.29}$$

Тогда интеграл в правой части (1.28) запишется в виде:

$$J(\beta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2\alpha}\cos\lambda\beta d\lambda. \tag{1.30}$$

Интеграл (1.30) зависит от двух параметров α и β. Фиксируем α и обозначим этот интеграл $J(\beta)$. Вычислим этот интеграл методом дифференцирования по параметру β.

Вычислим производную:

$$\frac{dJ}{d\beta} = -\int\limits_0^\infty \sin\lambda\beta\lambda e^{-\lambda^2\alpha}d\lambda, \tag{1.31}$$

причем дифференцирование под знаком интеграла законно. Проинтегрируем (1.31) по частям, взяв в качестве $\tilde{U} = \sin\lambda\beta$, $d\tilde{V} = -\lambda e^{-\lambda^2\alpha}d\lambda$, тогда получим:

$$\frac{dJ}{d\beta} = \left.\frac{\sin\lambda\beta e^{-\lambda^2\alpha}}{2\alpha}\right|_0^\infty - \frac{\beta}{2\alpha}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2\alpha}\cos\lambda\beta d\lambda = -\frac{\beta}{2\alpha}J(\beta).$$

Таким образом, для $J(\beta)$ получили диференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{\beta}{2\alpha}d\beta,\ J(\beta) = Ce^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}},\ C - const. \tag{1.32}$$

Полагая $\beta = 0$, получим $C = J(0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2\alpha} d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}$. Тогда из (1.32) имеем $J(\beta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$. Учитывая (1.29), получим:

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}. \tag{1.33}$$

Функцию $G(x, \xi, t)$ называют также фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

Учитывая (1.33), из (1.19) получаем решение задачи (1.15), (1.16) в виде:

$$U(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi. \tag{1.34}$$

Интеграл (1.34) называется интегралом Пуассона.

VIII.2 Лекция 25. Обоснование решения задачи.

VIII.2.1 Обоснование решения.

Обоснуем полученное решение (1.34), т.е. покажем, что функция (1.34) удовлетворяет уравнению (1.15) и начальным условиям (1.16).

Для того, чтобы показать, что функция (1.34) удовлетворяет уравнению (1.15), нужно обосновать возможность дифференцирования по x и t под знаком интеграла при $t > 0$, $-\infty < x < \infty$. Докажем этот факт при $t \geq t_0 > 0$, откуда в силу произвольности t_0 этот факт будет иметь возможность при $t > 0$. Заметим, что если (1.34) дифференцировать по x и t, то будет выделяться множитель $(\xi - x)$ в положительной степени, а множитель t - в отрицательной степени. Таким образом, дело сводиться к равномерной сходимости интеграла

$$J = t^{-k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} (\xi - x)^m d\xi. \tag{2.1}$$

Сделаем в (2.1) при $t \geq t_0 > 0$ замену переменных интегрирования:

$$\mu = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}},\ d\xi = 2a\sqrt{t} d\mu. \tag{2.2}$$

Тогда

$$J = t^{-k+\frac{m+1}{2}} (2a)^{m+1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(2a\sqrt{t}\mu + x) e^{-\mu^2} \mu^m d\mu.$$

Учитывая, что $|\varphi(x)| \leq A$, получим:

$$|\varphi(2a\sqrt{t}\mu + x) e^{-\mu^2} \mu^m| \leq A e^{-\mu^2} |\mu|^m.$$

Но функция $e^{-\mu^2}|\mu|^m$ интегрируема в промежутке $(-\infty, \infty)$, поэтому интеграл J равномерно сходится при $t \geq t_0 > 0$. Отсюда следует, что функция (1.34) непрерывна и имеет непрерывные производные по x и t при $t > 0$. Кроме того, можно проверить, что функция $G(x, \xi, t)$, определяемая формулой (1.33), удовлетворяет уравнению (1.15), откуда следует, что функция (1.34) удовлетворяет уравнению (1.15) при $t > 0$, $-\infty < x < \infty$.

Докажем теперь, что функция (1.34) удовлетворяет начальному условию (1.16). Для этого достаточно показать, что $\lim\limits_{t \to 0} U(x,t) = \varphi(x)$, т.е. доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$|U(x,t) - \varphi(x)| < \varepsilon \tag{2.3}$$

лишь только при $|t| < \delta(\varepsilon)$.

Сделаем в интеграле (1.34) замену (2.2):

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2a\sqrt{t}\mu) e^{-\mu^2} d\mu =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x + 2a\sqrt{t}\mu) - \varphi(x)] e^{-\mu^2} d\mu + \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x + 2a\sqrt{t}\mu) - \varphi(x)] e^{-\mu^2} d\mu + \varphi(x).$$

Тогда

$$|U(x,t) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x + 2a\sqrt{t}\mu) - \varphi(x)| e^{-\mu^2} d\mu. \tag{2.4}$$

В силу ограничености $\varphi(x)$ имеем:

$$|\varphi(x + 2a\sqrt{t}\mu) - \varphi(x)| \leq 2A, \tag{2.5}$$

при этом нельзя воспользоваться непрерывностью $\varphi(x)$, так как аргумент функции $\varphi(x + 2a\sqrt{t}\mu)$ может принимать бесконечно большие значения за счет μ.

Поэтому разобьем интеграл в (2.4) на три интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} = \int\limits_{-\infty}^{-N} + \int\limits_{-N}^{N} + \int\limits_{N}^{\infty}$, где $N > 0$ – достаточно большое число.

Оценим каждый интеграл в отдельности.

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-N} |\varphi(x + 2a\sqrt{t}\mu) - \varphi(x)| e^{-\mu^2} d\mu \leq \frac{2A}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-N} e^{-\mu^2} d\mu, \tag{2.6}$$

при этом учли (2.5). Так как интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu$ сходится, то по любому сколь угодно малому $\varepsilon > 0$ можно подобрать малое $-N$, что

$$\int\limits_{-\infty}^{-N} e^{-\mu^2} d\mu < \frac{\varepsilon}{3} \frac{\sqrt{\pi}}{2A}. \tag{2.7}$$

Тогда, учитывая (2.7), из (2.6) получим:

$$J_1 < \frac{2A}{\sqrt{\pi}}\frac{\varepsilon}{3}\frac{\sqrt{\pi}}{2A} = \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.8}$$

Аналогично получаем:

$$J_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{N}^{\infty}|\varphi(x+2a\sqrt{t}\mu)-\varphi(x)|e^{-\mu^2}d\mu < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.9}$$

Для оценки $J_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-N}^{N}|\varphi(x+2a\sqrt{t}\mu)-\varphi(x)|e^{-\mu^2}d\mu$ воспользуемся непрерывностью $\varphi(x)$. В силу непрерывности $\varphi(x)$ при всех $|\mu| \leq N$, $|t| < \delta(\varepsilon)$ имеем:

$$|\varphi(x+2a\sqrt{t}\mu)-\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.10}$$

Учитывая теперь (2.8) - (2.10), из (2.4) имеем:

$$|U(x,t)-\varphi(x)| < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3}\int\limits_{-N}^{N}e^{-\mu^2}d\mu < \ frac23\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\mu^2}d\mu = \varepsilon$$

при $|t| < \delta(\varepsilon)$.

IX Уравнение эллиптического типа. Постановка граничных задач для стационарного уравнения.

IX.1 Лекция 26. Постановка граничных задач. Фундаментальное уравнение Лапласа. Интегральное представление функций $U(x) \in C^2(\overline{\Omega})$.

IX.1.1 Постановка граничных задач для стационарного уравнения, для уравнения Пуассона.

К уравнениям эллиптического типа приводит изучение стационарных, т.е. не меняющихся со временем процессов различной физической природы (колебание, теплопроводность, диффузия, установившееся движение идеальной жидкости).

С простейшими представлениями этих уравнений мы уже встречались, когда рассматривали вопросы постановки задач математической физики. Это уравнение Пуассона

$$\Delta U = -\mathcal{F} \text{ где } \Delta U \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}. \tag{1.1}$$

В частности, из (1.1) получаем уравнение Лапласа

$$\Delta U = 0. \tag{1.2}$$

Большинство стационарных задач математической физики сводится к решению уравнения вида

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p(x) \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) + q(x) U = \mathcal{F}(x) \tag{1.3}$$

относительно неизвестной функции $U(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $p(x)$, $q(x)$, $\mathcal{F}(x)$ - заданные функции, причем физического смысла следует, что $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$. Уравнение (1.3) называется стационарным уравнением.

Если ввести известный нам оператор

$$LU \equiv -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p(x) \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) + q(x) U,$$

то уравнение (1.3) примет вид:

$$LU = \mathcal{F}.$$

Или уравнение (1.3) можно записать в виде:

$$\nabla(p(x)U) - q(x) = -\mathcal{F}(x).$$

Из (1.3) при $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, получаем уравнение (1.1). При $\mathcal{F} \equiv 0$ - уравнение (1.2).

Так как уравнения эллиптического типа описывают стационарные процессы, то краевые задачи характеризуются только граничными условиями, начальные условия отсутствуют, поэтому задачи называются граничными.

I. Внутренняя задача.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – конечная область, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial\Omega$ состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей.

Требуется найти функцию $U(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1.3) при $x \in \Omega$ и граничному условию

$$\left[\alpha(x)U + \beta(x)\frac{\partial U}{\partial n}\right]\bigg|_{\partial\Omega} = \phi(x), \tag{1.4}$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль, а $p(x)$, $q(x)$, $\mathcal{F}(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\phi(x)$ - заданные функции, причем

1. $p(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $q(x)\,\mathcal{F}(x) \in C(\overline{\Omega})$,
2. $\alpha(x), \beta(x), \phi(x) \in C(\partial\Omega)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$.

Рассматриваются также частные случаи граничного условия (1.4).

а) Граничное условие первого рода:

$$U|_{\partial\Omega} = \phi(x),\ (\alpha \equiv 1,\ \beta \equiv 0), \tag{1.5}$$

причем в данном случае ищется функция $U(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Для уравнений (1.1), (1.2) задача с условием (1.5) называется задачей Дирихле.

б) Граничное условие второго рода:

$$\frac{\partial U}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = \phi(x). \tag{1.6}$$

Для уравнений (1.1), (1.2) задача с условием (1.6) называется задачей Неймана.

II. Внешняя задача.

Пусть Ω_1 - бесконечная область, т.е. $\Omega_1 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, $\overline{\Omega_1} = \Omega_1 \cup \partial\Omega$. Внешняя задача отличается от соответствующей внутренней задачи тем, что на неизвестную функцию накладываются дополнительное условие, определяющее поведение на бесконечности, а именно:

$$U(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right),\ |x| \to \infty, \tag{1.7}$$

где $O(\xi)$ означает величину такую, что отношение $\frac{O(\xi)}{\xi}$ остается ограниченным при достаточно больших по модулю значений ξ.

Требуется найти функцию $U(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1.3) в конечных точках, граничному условию (1.4) и условию (1.7).

IX.1.2 Фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Определение. Вещественнозначная функция $U(x) \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta U = 0$ в Ω, называется гармонической в конечной области. Функция $U(x)$ называется гармонической в бесконечной области, если в каждой точке области, находящейся на конечном расстоянии от начала, $U(x) \in C^2$ и удовлетворяет уравнению Лапласа, а для достаточно больших $|x|$ справедливо соотношение (1.7).

Замечание. Подчеркнем, что определение гармоничности относится только к открытой области. Если говорят о функции, гармонической в замкнутой области, то под этим понимают, что данная функция гармонична в более широкой открытой области. Заметим, что определение гармонической функции не накладывает никаких ограничений на поведение функции на границе области.

Поставим теперь перед собой задачу: найти решение уравнения Лапласа $U(r)$, которое является функцией от r, где $r = |x - \xi| = [\sum\limits_{i=1}(x_i - \xi_i)^2]^{\frac{1}{2}}$, x - переменная точка $\mathbb{R}^n$, а $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ - фиксированная точка.

Получим уравнение для $U(r)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{dU}{dr}\frac{(x_i - \xi_i)}{r},\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} =$$

$$= \frac{d^2U}{dr^2}\frac{(x_i - \xi_i)^2}{r^2} + \frac{dU}{dr}\frac{r - \frac{(x_i-\xi_i)^2}{r}}{r^2} = \frac{d^2U}{dr^2}\frac{(x_i - \xi_i)^2}{r^2} + \frac{dU}{dr}\frac{r^2 - (x_i - \xi_i)^2}{r^3},$$

$$\Delta U = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = \frac{d^2U}{dr^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \xi_i)^2}{r^2} +$$

$$+ \frac{dU}{dr} \sum_{i=1}^{n} \frac{r^2 - (x_i - \xi_i)^2}{r^3} = \frac{d^2U}{dr^2} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2}{r^2} +$$

$$+ \frac{dU}{dr} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} r^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2}{r^3} = \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{dU}{dr} \frac{nr^2 - r^2}{r^3} =$$

$$= \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{dU}{dr} \frac{(n-1)}{r}.$$

Итак, уравнение (1.2) примет вид:

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{dU}{dr} \frac{(n-1)}{r} = 0. \tag{1.8}$$

Для решения уравнения (1.8) сделаем замену $\frac{dU}{dr} = V(r)$, тогда уравнение (2.1) перейдет в уравнение

$$\frac{dV}{dr} + \frac{(n-1)}{r} V = 0. \tag{1.9}$$

Разделяя в (1.9) переменные и интегрируя, получим $V = C_1 r^{1-n}$, откуда

$$\frac{dU}{dr} = C_1 r^{1-n}. \tag{1.10}$$

1. Если $n > 2$, то из (1.10) имеем:

$$U(r) = C_1 \frac{r^{2-n}}{2-n} + C_2. \tag{1.11}$$

2. Если $n = 2$, то из (1.10) имеем:

$$U(r) = C_1 \ln r + C_2. \tag{1.12}$$

Случай $n = 1$ не рассматривается, так как получаем линейные функции, кне интересны.

В (1.11) и (1.12) постоянные C_1 и C_2 - произвольны. Выберем теперь постоянные так:

$$C_2 = 0,\, C_1 = -\frac{1}{\omega_n}, \tag{1.13}$$

где ω_n - площадь сферы единичного радиуса в пространстве $\mathbb{R}^n$, т.е.:

$$\omega_n = \int\limits_{S_1} d\xi = \frac{2(\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \tag{1.14}$$

где $\Gamma(x)$ - гамма-функция Эйлера, т.е. $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$.

Заметим, что из (1.14) при $n = 2$ имеем $\omega_2 = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = 2\pi$, так как $\Gamma(1) = 1$. $\omega_3 = \frac{2(\pi)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2(\pi)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}} = 4\pi$, при этом мы учли, что $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}$.

Кроме того отметим, что площадь сферы радиуса R в пространстве $\mathbb{R}^n$ будет $\omega_n R^{n-1}$.

Итак, выбирая C_1 и C_2 согласно (1.13), получим функцию

$$\mathcal{E}(r) = \begin{cases} \frac{r^{2-n}}{\omega_n(n-2)}, \ n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}, \ n = 2. \end{cases}$$

или

$$E(x,\xi) = \begin{cases} \frac{|x-\xi|^{2-n}}{\omega_n(n-2)}, \ n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-\xi|}, \ n = 2. \end{cases} \tag{1.15}$$

Функцию $E(x,\xi)$, определяемую формулой (1.15), называют фундаментальным решением уравнения Лапласа. $E(x,\xi)$ является гармонической функцией, кроме точки $x = \xi$, где она обращается в бесконечность. При $n \geq 3$ $E(x,\xi)$ имеет в точке $x = \xi$ полюс, а при $n = 2$ имеет логарифмическую особенность.

Заметим, что $E(x,\xi)$ является гармонической и в бесконечной области, т.е. имеет место соотношение (1.7). Покажем (1.7) при $n \geq 3$. Действительно, $|x - \xi| \geq |x| - |\xi|$ пи достаточно больших $|x|$. Так как нас интересует поведение $E(x,\xi)$ при достаточно больших $|x|$, поэтому можно считать $|x| > 2|\xi|$, тогда $|\xi| < \frac{|x|}{2}$ и $|x-\xi| > |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}$. Итак, $\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} < \frac{2^{n-2}}{|x|^{n-2}}$, т.е. имеет место (1.7).

IX.1.3 Интегральное представление функций класса $C^2(\overline{\Omega})$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, причем $\partial\Omega$ состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей. Пусть $U, V \in C^2(\overline{\Omega})$, тогда имеет место вторая формула Грина для оператора Лапласа:

$$\int\limits_\Omega (V\Delta U - U\Delta V)dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(V\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial V}{\partial n}\right)dS. \tag{1.16}$$

Пусть $\xi \in \Omega$ - произвольная фиксированная точка. С центром в точке ξ построим шар радиуса ε: $\overline{Q_\varepsilon^\xi} = \{|x-\xi| \le \varepsilon\}$ и выбросим его из области Ω. Оставшуюся область обозначим $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \overline{Q_\varepsilon^\xi}$.

Применим к Ω_ε формулу (1.16), взяв в качетсве функций $U \in C^2(\overline{\Omega})$ и $V(x) = E(x,\xi)$, где $E(x,\xi)$ определяется формулой (1.15). Причем заметим, что $E(x,\xi) \in C^2(\overline{\Omega_\varepsilon})$, так как особенность $E(x,\xi)$ лежит вне $\overline{\Omega_\varepsilon}$. Граница $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup S_\varepsilon^\xi$, где $S_\varepsilon^\xi = \{|x-\xi| = \varepsilon\}$.

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} [E(x,\xi)\Delta U(x) - U(x)\Delta E(x,\xi)]dx =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} \left[E(x,\xi)\frac{\partial U(x)}{\partial n} - U(x)\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial n}\right] dS_x + \int\limits_{S_\varepsilon^\xi} \left[E(x,\xi)\frac{\partial U(x)}{\partial n} - U(x)\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial n}\right] dS_x. \tag{1.17}$$

Так как $E(x,\xi)$ - гармоническая в Ω_ε, то $\Delta E(x,\xi) = 0$. Перейдем в (1.17) к пределу при $\varepsilon \to 0$. Тогда слева получим:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} E(x,\xi)\Delta U(x)dx = \int\limits_{\Omega} E(x,\xi)\Delta U(x)dx, \tag{1.18}$$

причем справа стоит несобственный интеграл, существующий, так как $U(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, а $E(x,\xi)$ имеет в точке $x = \xi$ особеность порядка $n-2 < n$.

Подсчитаем предел правой части (1.17), т.е. предел второго слагаемого:

$$E(x,\xi)|_{|x-\xi|=\varepsilon} = \frac{\varepsilon^{2-n}}{\omega_n(n-2)},\ J_1 = \int\limits_{S_\varepsilon^\xi} E(x,\xi)\frac{\partial U(x)}{\partial n} dS_x = \frac{\varepsilon^{2-n}}{\omega_n(n-2)} \int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} \frac{\partial U(x)}{\partial n} dS_x,$$

$$|J_1| \le \frac{\varepsilon^{2-n}}{\omega_n(n-2)} \max_{|x-\xi|=\varepsilon} \left|\frac{\partial U(x)}{\partial n}\right| \int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} dS_x = \max_{|x-\xi|=\varepsilon} \left|\frac{\partial U(x)}{\partial n}\right| \frac{\varepsilon^{2-n}}{\omega_n(n-2)} \omega_n \varepsilon^{n-1},$$

откуда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_1 = 0, \tag{1.19}$$

так как $U(x) \in C^2(\overline{\Omega})$.

$$\left.\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial n}\right|_{|x-\xi|=\varepsilon} = -\left.\frac{d\mathcal{E}(r)}{dr}\right|_{r=\varepsilon} = -\frac{d}{dr}\left.\left[\frac{r^{2-n}}{\omega_n(n-2)}\right]\right|_{r=\varepsilon} = \left.\frac{r^{1-n}}{\omega_n}\right|_{r=\varepsilon} = \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n},$$

$$J_2 = \int\limits_{S_\varepsilon^\xi} U(x)\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial n}dS_x = \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} U(x)dS_x =$$

$$= \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}\left[\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon}[U(x)-U(\xi)]dS_x + U(\xi)\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} dS_x\right] = J_3 + J_4.$$

$$|J_3| \leq \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}\max_{|x-\xi|=\varepsilon}|U(x)-U(\xi)|\varepsilon^{n-1}\omega_n = \max_{|x-\xi|=\varepsilon}|U(x)-U(\xi)|,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J_3 = 0$, так как $U(x) \in C^2(\overline{\Omega})$.

$$J_4 = \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}U(\xi)\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} dS_x = U(x)\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}\omega_n\varepsilon^{n-1} = U(\xi).$$

Итак,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_2 = U(\xi). \tag{1.20}$$

Учитывая теперь (1.18) - (1.20), из (1.17) получим:

$$\int\limits_{\Omega} E(x,\xi)\Delta U(x)dx = \int\limits_{\partial\Omega}\left[E(x,\xi)\frac{\partial U(x)}{\partial n} - U(x)\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial n}\right]dS_x - U(\xi). \tag{1.21}$$

Перепишем формулу (1.21) следующим образом:

$$U(\xi) = \int\limits_{\partial\Omega}\left[E(y,\xi)\frac{\partial U(y)}{\partial n} - U(y)\frac{\partial E(y,\xi)}{\partial n}\right]dS_y - \int\limits_{\Omega} E(x,\xi)\Delta U(x)dx, \tag{1.22}$$

$\xi \in \Omega$, $y \in \partial\Omega$, $U(x) \in C^2(\overline{\Omega})$.

Замечание 1. Формула (1.22) остается справедливой при $U(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, причем интеграл по области Ω следует понимать как несобственный. Для доказательства применим формулу (1.16) к области $\Omega' \subset\subset \Omega$ и перейдем к пределу при $\Omega' \to \Omega$, причем предел существует в силу гладкости функции $U(x)$.

Замечание 2. При $n = 2$ имеем аналогичные рассуждения, учитывая, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon = 0$.

Замечание 3. Пусть $U(x)$ - гармоническая функция, причем $U(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, тогда $\Delta U = 0$ и из (1.22) получаем интегральное представление гармонической функции, принадлежащей классу $C^1(\overline{\Omega})$.

$$U(\xi) = \int\limits_{\partial\Omega} \left[E(y,\xi)\frac{\partial U(y)}{\partial n} - U(y)\frac{\partial E(y,\xi)}{\partial n} \right] dS_y, \tag{1.23}$$

т.е. значение гармонической функции в точке области выражается через ее значение на границе.

Формула (1.23) является аналогом формулы Коши для аналитических функций

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

восстанавливающей аналитическую функцию по ее значениям на границе.

X Свойства гармонических функций.

X.1 Лекция 27. Свойства гармонических функций.

X.1.1 Свойства гармонических функций.

Теорема 1 (теорема о потоке). Пусть $U(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ - гармоническая функция в области Ω, тогда

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial U}{\partial n} dS = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим вторую формулу Грина для функций $U, V \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

$$\int\limits_{\Omega} (V\Delta U - U\Delta V) = \int\limits_{\partial\Omega} \left(V\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial V}{\partial n} \right) dS$$

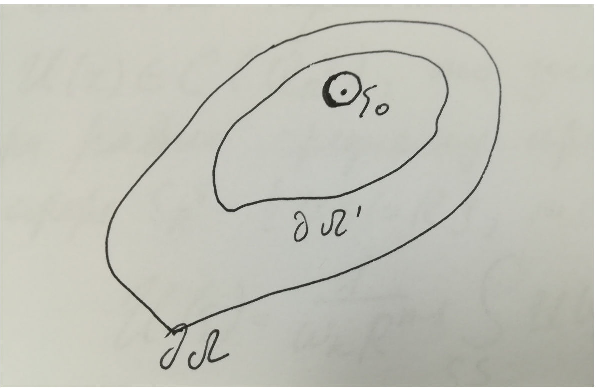
и положим в ней $V \equiv 1$. Тогда, учитывая, что $\Delta V = 0$, $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$, получим (1.1).

Формула (1.1) при $n = 3$ имеет очень простую физическую интерпретацию. При расмотрении задачи распространнения тепла в однородном изотропном теле Ω при условии, что иемпература не меняется со временем, мы получим, что температура $U(x) = U(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta U = 0$. Выражение $Q = k \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial U}{\partial n} dS$ дает нам величину потока тепла через поверхность $\partial\Omega$ тела. Поэтому условием того, что температура не меняется со временем, является условие $Q = 0$, т.е. условие (1.1).

□

Теорема 2. Функция $U(x)$ - гармоническая в области Ω и имеет в этой области непрерывные производные всех порядков, т.е. является бесконечно дифференцированной: $U(x) \in C^\infty(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $U(x) \in C^2(\Omega)$, $\Delta U = 0$, $x \in \Omega$. Возьмем произвольную точку $\xi_0 \in \Omega$ и окружим ее поверхностью $\partial\Omega'$, ограничивающую конечную область $\Omega' \subset\subset \Omega$.



Очевидно, что $U(x) \in C^2(\Omega') \cap C^1(\overline{\Omega}')$, поэтому к области Ω' применим формулу (1.23) предыдущей лекции:

$$U(\xi) = \int\limits_{\partial\Omega'} \left[E(y,\xi)\frac{\partial U(y)}{\partial n} - U(y)\frac{\partial E(y,\xi)}{\partial n} \right] dS_y,\ \xi \in \Omega'. \tag{1.2}$$

Пусть $\overline{Q_{\delta_1}^{\xi_0}} = \{|\xi - \xi_0| \le \delta_1\}$ - окрестность точки ξ_0, причем $\delta_1 < \delta$, где $\delta = \rho(\xi_0, \partial\Omega')$. Тогда если $y \in \partial\Omega'$, то для любого $\xi \in \overline{Q_{\delta_1}^{\xi_0}}$ подинтегральная функция в (1.2) непрерывна по ξ и y и имеет непрерывные производные сколь угодно высокого порядка, причем также непрерывные по ξ и y. Тогда на основании известной теоремы из анализа о дифференцировании интегралов, зависящих от параметров, по параметру, получим, что функция $U(\xi)$ имеет в окрестности $\overline{Q_{\delta_1}^{\xi_0}}$ бесконечное число производных по ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n. Значит, $U(\xi) \in C^\infty(\Omega)$, причем произвдные получаются дифференцированием под знаком интеграла:

$$\frac{\partial^q U}{\partial \xi_k^q} = \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial^q E}{\partial \xi_k^q}\frac{\partial U(y)}{\partial n} - U(y)\frac{\partial^q}{\partial \xi_k^q}\left(\frac{\partial E}{\partial n}\right) \right] dS_y,\ k = \overline{1,\ n},\ q = 1,\ 2,\ ...$$

□

Теорема 3 (о среднем арифметическом по сфере). Если $U(x)$ - гармоническая в шаре $Q_R^\xi = \{|x-\xi| < R\}$ и $U(x) \in C(\overline{Q_R^\xi})$, то значение функции в центре шара равно среднему арифметическому значению по сфере $S_R^\xi = \{|x-\xi| = R\}$, т.е.:

$$U(\xi) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{S_R^\xi} U(y) dS_y. \tag{1.3}$$

Доказательство. Предположим, что $n \ge 3$. Пусть $\overline{Q_{R'}^\xi} = \{|x-\xi| \le R'\}$, причем $R' < R$, $S_{R'}^\xi = \{|x-\xi| = R'\}$. Тогда $U(x) \in C^1(\overline{Q_{R'}^\xi})$, поэтому имеет место формула:

$$U(\xi) = \int\limits_{S^{\xi}_{R'}} \left[E(y,\xi)\frac{\partial U(y)}{\partial n_y} - U(y)\frac{\partial E(y,\xi)}{\partial n_y} \right] dS_y, \tag{1.4}$$

где

$$E(y,\xi) = E(x,\xi)|_{|x-\xi|=R'} = \left.\frac{|x-\xi'|^{2-n}}{\omega_n(n-2)}\right|_{|x-\xi|=R'} = \frac{(R')^{2-n}}{\omega_n(n-2)} - const, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial E(y,\xi)}{\partial n_y} = \left.\frac{d\mathcal{E}(r)}{dr}\right|_{r=R'} = \left.\frac{d}{dr}\left[\frac{r^{2-n}}{\omega_n(n-2)}\right]\right|_{r=R'} = -\frac{(R')^{1-n}}{\omega_n} - const. \tag{1.6}$$

Подставляя (1.5) и (1.6) в (1.4), получим:

$$U(\xi) = \frac{(R')^{2-n}}{\omega_n(n-2)} \int\limits_{S^{\xi}_{R'}} \frac{\partial U(y)}{\partial n_y} dS_y + \frac{(R')^{1-n}}{\omega_n} \int\limits_{S^{\xi}_{R'}} U(y) dS_y = \frac{1}{\omega_n (R')^{n-1}} \int\limits_{S^{\xi}_{R'}} U(y) dS_y, \tag{1.7}$$

так как первое слагаемое в силу теоремы 1 равно нулю.

Пусть теперь в (1.7) $R' \to R$. Так как $U \in C(\overline{Q^{\xi}_{R'}})$, то из (1.7) получаем (1.3). □

Следствие (о среднем арифметическом по шару). Пусть $U(x)$ - гармоническая в шаре $Q^{\xi}_R = \{|x-\xi| < R\}$ и $U(x) \in C(\overline{Q^{\xi}_R})$, тогда значение функции в центре шара равно среднему арифметическому по объему шара:

$$U(\xi) = \frac{1}{\frac{\omega_n R^n}{n}} \int\limits_{|x-\xi|\le R} U(x) dx, \tag{1.8}$$

где $\frac{\omega_n R^n}{n}$ - объем шара радиуса R в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $r \le R$, то на основании теоремы о среднем по сфере имеем:

$$U(\xi) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{|\xi-x|=r} U(y) dS_y. \tag{1.9}$$

Умножим обе части (1.9) на $\omega_n r^{n-1}$ и проинтегрируем по r от 0 до R. Тогда получим:

$$U(\xi) \int\limits_0^R \omega_n r^{n-1} dr = \int\limits_0^R dr \int\limits_{|\xi-x|=r} U(y) dS_y,$$

откуда следует (1.8).

□

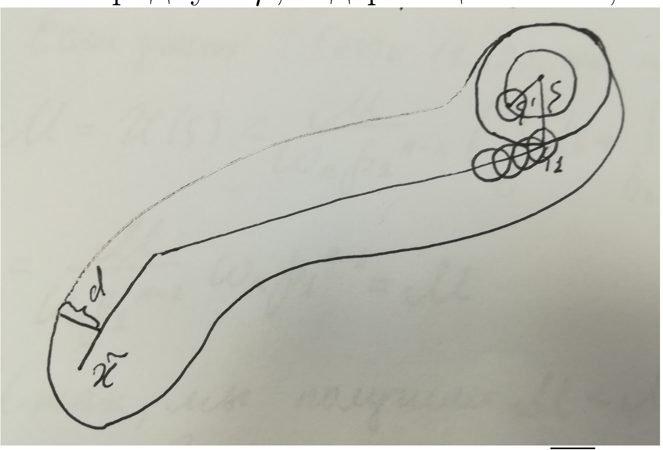
Теорема 4 (принцип экстремума). Гармоническая в конечной области Ω функция $U(x) \in C(\overline{\Omega})$, не равная тождественно константе, не может принимать максимального и минимального значения в Ω, следовательно, принимает их на границе, т.е. имее место неравенство

$$\min_{y\in\partial\Omega} U(y) \leq U(x) \leq \max_{y\in\partial\Omega} U(y),\ x \in \overline{\Omega}. \tag{1.10}$$

Доказательство. Доказательство проводится от противного. Докажем сначала принцип максимума. Предположим, что $U(x)$ принимает свое максимальное значение M в некоторой внутренней точке $\xi \in \Omega$, т.е.

$$M = \max_{x\in\Omega} U(x) = U(\xi). \tag{1.11}$$

Так как ξ - внутренняя точка, то существует шар $\overline{Q^{\xi}_{\rho}} = \{|x-\xi| \leq \rho\}$ наибольшего радиуса ρ, содержащийся в $\overline{\Omega}$, т.е. касающийся границы $\partial\Omega$:



1) Докажем, что $U(x) \equiv M$, $x \in \overline{Q^{\xi}_{\rho}}$. Из (1.11) следует, что

$$U(x) \leq M,\ x \in \overline{Q^{\xi}_{\rho}}. \tag{1.12}$$

Предположим, что в некоторой точке $\xi' \in \overline{Q^{\xi}_{\rho}}$

$$U(\xi') < M. \tag{1.13}$$

Докажем, что (1.13) приведет к противоречию. Действительно, так как $U(x) \in C(\overline{\Omega})$, то всегда существует окрестность точки ξ': $\omega = \{|x-\xi'| \leq \tilde{\rho}\}$, в которой выполняется неравенство (1.13), т.е.

$$U(x) < M,\ x \in \omega. \tag{1.14}$$

Проведем теперь сферу с центром в точке ξ радиуса $\rho_1 = |\xi - \xi'|$: $S^{\xi}_{\rho_1} = \{|x - \xi| = \rho_1\}$. Обозначим через $\sigma = S^{\xi}_{\rho_1} \cap \omega$, $\sigma_1 = S^{\xi}_{\rho_1} \setminus \sigma$, причем на σ выполняется неравенство (1.14), а на σ_1 - неравенство (1.12).

Применим к свере $S^{\xi}_{\rho_1}$ теорему о среднем арифметическом по сфере:

$$U(\xi) = \frac{1}{\omega_n \rho_1} \int\limits_{S^{\xi}_{\rho_1}} U(y) dS = \frac{1}{\omega_n \rho_1} \left(\int\limits_{\sigma} U(y) dS + \int\limits_{\sigma_1} U(y) dS \right). \tag{1.15}$$

Если учесть (1.14) и (1.12), то из (1.15) получим:

$$M = U(\xi) < \frac{M}{\omega_n \rho_1^{n-1}} \left(\int\limits_{\sigma} dS + \int\limits_{\sigma_1} dS \right) = \frac{M}{\omega_n \rho_1^{n-1}} \int\limits_{S^{\xi}_{\rho_1}} dS = \frac{M}{\omega_n \rho_1^{n-1}} \omega_n \rho_1^{n-1} = M.$$

Итак, мы получили $M < M$, т.е. противоречие. Таким образом, наше предположение (1.13) было неверным, поэтому $U(x) \equiv M$, $x \in \overline{Q^{\xi}_{\rho}}$.

2) Теперь покажем, что $U(x) \equiv M$, $x \in \overline{\Omega}$. Пусть $\tilde{x} \in \Omega$ - произвольная внутренняя точка. Покажем, что $U(\tilde{x}) = M$, откула в силу произвольности точки будет следовать, что $U(x) \equiv M$, $x \in \Omega$.

Соединим точки $\tilde{x}$ и ξ ломаной L, лежащей внутри Ω (мы считаем нашу область связной, поэтому это возможно). Пусть $d = \min |x - y|$, $x \in L$, $y \in \partial\Omega$, $\xi_1 = L \cap \{|x - y| = \rho\}$. Построим шар $\overline{Q^{\xi_1}_{\frac{d}{2}}} = \{|x - \xi_1| \le \frac{d}{2}\}$. Так как $\xi_1 \in \overline{Q^{\xi}_{\rho}}$, то $U(\xi_1) = M$, поэтому на основании предыдущего получим $U(x) \equiv M$, $x \in \overline{Q^{\xi_1}_{\frac{d}{2}}}$. Пусть $\xi_2 = L \cap \{|x - \xi_1| = \frac{d}{2}\}$, тогда, рассуждая как и выше, получим $U(x) \equiv M$, $x \in \overline{Q^{\xi_1}_{\frac{d}{2}}}$. Продолжая этот процесс, получим $U(\tilde{x}) \equiv M$, откуда $U(x) \equiv M$, $x \in \Omega$.

Но в силу того, что $U(x) \in C(\overline{\Omega})$, имеем, что $U(x) \equiv M$, $x \in \overline{\Omega}$.

Таким образом, наше предположение (1.11) было неверным, поэтому $U(x)$ не может достигать своего максимального значения в Ω.

Заменяя U на $-U$ и используя принцип максимума для функции $-U$, получим, что функция $U(x)$ не может своего минимального значения в Ω.

$\square$

Следствие 1. Гармоническая функция не может принимать внутри области локальных экстремумов.

Следствие 2. Если $U(x) \in C(\overline{\Omega})$ - гармоническая в Ω функция, то

$$|U(x)| \leq \max_{y \in \partial\Omega} |U(y)|,\ x \in \overline{\Omega}. \tag{1.15}$$

В частности, если $U|_{\partial\Omega} = 0$, то $U(x) \equiv 0,\ x \in \overline{\Omega}$.

Доказательство. На основании принципа экстремума имеем

$$\min_{y \in \partial\Omega} U(y) \leq U(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} U(y). \tag{1.16}$$

$$\max_{y \in \partial\Omega} U(y) \leq \max_{y \in \partial\Omega} |U(y)| \tag{1.17}$$

$$\min_{y \in \partial\Omega} U(y) \geq -\min_{y \in \partial\Omega} |U(y)| \geq -\max_{y \in \partial\Omega} |U(y)|. \tag{1.18}$$

Учитывая (1.17) и (1.18), из (1.16) имеем:

$$-\max_{y \in \partial\Omega} |U(y)| \leq U(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} |U(y)|,\ x \in \overline{\Omega},$$

откуда получаем (1.15).

□

Замечание. Из (1.15) следует, что $\max\limits_{x \in \overline{\Omega}} |U(x)| \leq \max\limits_{y \in \partial\Omega} |U(y)|$ или

$$||U(x)||_{C(\overline{\Omega})} \leq ||U(y)||_{C(\partial\Omega)}.$$

Следствие 3. Пусть $U, V \in C(\overline{\Omega})$ - гармонические в Ω функции, причем

$$U \leq V,\ y \in \partial\Omega, \tag{1.19}$$

тогда

$$U \leq V,\ x \in \overline{\Omega}. \tag{1.20}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $W = U - V$, которая является гармонической в Ω, при $W(x) \in C(\overline{\Omega})$. Кроме того, в силу (1.20)

$$W|_{\partial\Omega} \geq 0. \tag{1.21}$$

На основании принципа экстремума имеем

$$\min_{y \in \partial\Omega} W(y) \leq W(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} W(y),\ x \in \overline{\Omega}. \tag{1.22}$$

Но из (1.21) следует, что $\min\limits_{y \in \partial\Omega} W(y) > 0$, поэтому из левого неравенства (1.22) следует, что $W(x) \geq 0,\ x \in \overline{\Omega}$, т.е. имеет место (1.19).

□

Следствие 4. Пусть $U, V \in C(\overline{\Omega})$ - гармонические в Ω функции, причем $V \geq 0$. Тогда, если

$$|U| \leq V,\ y \in \partial\Omega, \tag{1.23}$$

то

$$|U| \leq V,\ x \in \overline{\Omega}. \tag{1.24}$$

Доказательство. Неравенство (1.23) эквивалентно неравенствам

$$-V \leq U \leq V,\ y \in \partial\Omega. \tag{1.25}$$

Применяя к (1.25) дважды следствие 3, получим (1.24).

□

XI Задача Дирихле.

XI.1 Лекция 28. Теоремы единственности и устойчивости решений задачи Дирихле. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье. Интеграл Пуассона.

XI.1.1 Теоремы единственности и устойчивости решений задачи Дирихле для уравнений Пуассона.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - конечная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $\Omega_1 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ - бесконечная область с той же границей.

I. Внутрення задача Дирихле.

Найти функцию $U(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению Пуассона

$$\Delta U = -\mathcal{F}(x),\ x \in \Omega \tag{1.1}$$

и граничному условию

$$U|_{\partial\Omega} = \phi(y),\ y \in \partial\Omega. \tag{1.2}$$

II. Внешняя задача Дирихле.

Найти функцию $U(x) \in C^2(\Omega_1) \cap C(\overline{\Omega_1})$, удовлетворяющую уравнению (1.1) в конечных точках Ω_1 и граничному условию

$$U|_{\partial\Omega} = \phi_1(y). \tag{1.3}$$

Однако в случае бесконечной области этих условий не достаточно для однозначного определения решения, поэтому дополнительно задается поведение искомой функции на бесконечности:

$$U(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right),\ |x| \to \infty. \tag{1.4}$$

Условие (1.4) при $n = 2$ означает, что

$$|U(x)| \leq A,\ A - const,\ |x| \to \infty. \tag{1.5}$$

При $n \geq 3$ условие (1.4) означает, что

$$\lim_{|x|\to\infty} |U(x)| = 0, \tag{1.6}$$

т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $R = R(\varepsilon)$, что $|U(x)| < \varepsilon$, если только $|x| > R(\varepsilon)$.

Условие (1.5) и (1.6) обеспечивают единственность решения задачи. Действительно, рассмотрим пример.

Пусть $\overline{\Omega_1} = \{|x| \geq 1\}$. Ищется гармоническая функция, удовлетворяющая условию $U|_{|x|=1} = 1$. Очевидно, что функции $U_1 \equiv 1$ и $U_2 = 1 + \ln|x|$ являются решениями этой задачи, так как являются гармоническими функциями, т.е. $\Delta U_1 = 0$ и $\Delta U_2 = 0$ и удовлетворяют граничному условию $U_1|_{|x|=1} = 1$, $U_2|_{|x|=1} = 1$. Таким образом, решение не единственно. Если же учесть условие (1.5), то решением задачи может быть только функция U_1, т.е. будет иметь место единственность.

Теорема 1. Внутренняя задача Дирихле не может иметь более одного решения.

Доказательство. Предположим противное, т.е. предположим, что существует два решения $U_1(x)$ и $U_2(x)$. Рассмотрим разность $U = U_1 - U_2$. Тогда U удовлетворяет задаче

$$\Delta U = 0,\ x \in \Omega, \tag{1.7}$$

$$U|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.8}$$

Так как $U(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет уравнению Лапласа (1.7), то для неё имеет место принцип максимума, а значит, и следствие из него

$$||U||_{C(\overline{\Omega})} \leq ||U||_{C(\partial\Omega)}. \tag{1.9}$$

Но в силу (1.8) следует, что $||U||_{C(\partial\Omega)} = 0$, откуда в силу (1.9) следует, что $||U||_{C(\overline{\Omega})} = 0$, откуда $U \equiv 0$, т.е. $U_1 \equiv U_2$, $x \in \overline{\Omega}$.

□

Теорема 2. Внешняя задача Дирихле не может иметь более одного решения.

Доказательство. 1) Пусть $n = 2$. Предположим, что существует два решения $U_1(x)$ и $U_2(x)$. Рассмотрим функцию $U = U_1 - U_2$, которая удовлетворяет задаче

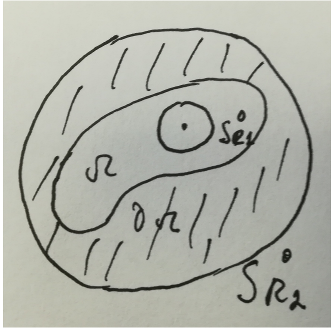
$$\Delta U = 0,\ x \in \Omega_1, \tag{1.10}$$

$$U|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.11}$$

Кроме того, в силу(1.5) имеем:

$$|U| \leq |U_1| + |U_2| \leq 2A. \tag{1.12}$$

В данном случае к функции U мы не можем применить принцип максимума, так как область Ω_1 бесконечна. Поэтому сначала построим конечную область, а затем перейдем к пределу. Построим две окружности $S^0_{R_1} = \{|x| = R_1\}$, $S^0_{R_2} = \{|x| = R_2\}$ с центром в начале координат, причем $S^0_{R_1}$ лежит внутри Ω, при этом она может касаться изнутри $\partial\Omega$. Окружность $S^0_{R_2}$ содержит Ω внутри. Заметим, что начало координат принадлежит Ω.



Обозначим через $\Omega' = \Omega_1 \cap \{|x| = R_1\}$ - конечную область с границей $\partial\Omega' = \partial\Omega \cup \{|x| = R_2\}$.

Построим теперь некоторую гармоническую в Ω' функцию, которая на границе $\partial\Omega'$ мажорирует нашу функцию U. А именно, возьмем функцию

$$\omega(x) = \frac{2A}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \ln\frac{|x|}{R_1}, \tag{1.13}$$

где $\frac{2A}{\ln\frac{R_2}{R_1}} > 0$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $R_2 > R_1$.

Функция (1.13) - гармоническая в Ω', так как $\ln|x|$ - гармоническая в Ω'. Особенность функции $\omega(x)$ не лежит в Ω'.

Выясним теперь поведение (1.13) на границе $\partial\Omega'$. Так как на $\partial\Omega$ $|x| \geq R_1$, то $\ln\frac{|x|}{R_1} \geq 0$, а тогда на основании (1.13)

$$\omega|_{\partial\Omega} \geq 0. \tag{1.14}$$

На $S^0_{R_2}$ $|x| = R_2$, поэтому

$$\omega|_{S^0_{R_2}} = 2A. \tag{1.15}$$

Сопоставляя (1.11), (1.14), (1.12) и (1.15), получим:

$$|U(x)| \leq \omega(x),\ x \in \partial\Omega',$$

откуда на основании следствия из принципа экстремума имеем:

$$|U(x)| \leq \omega(x),\ x \in \overline{\Omega}',$$

т.е.

$$|U(x)| \leq 2A\frac{\ln\frac{|x|}{R_1}}{\ln\frac{R_2}{R_1}},\ x \in \overline{\Omega}'. \tag{1.16}$$

Пусть $x_0 \in \overline{\Omega_1}$ - произвольная точка. Покажем, что $U(x_0) = 0$, откуда в силу произвольности точки x_0 будет следовать. что $U(x) \equiv 0$, $x \in \overline{\Omega_1}$.

Выбирая R_2 достаточно большим, мы можем всегда добиться, что $x_0 \in \overline{\Omega}'$. Тогда на основании (1.16) в этой точке будем иметь:

$$|U(x_0)| \leq 2A \frac{\ln \frac{|x_0|}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \tag{1.17}$$

(1.17) справедливо для любого достаточно большого R_2, поэтому, переходя к пределу при $R_2 \to \infty$ (R_1 фиксировано) и учитывая, что левая часть (1.17) не зависит от R_2, получим $U(x_0) = 0$. Таким образом, $U(x) \equiv 0$, $x \in \overline{\Omega_1}$, т.е. $U_1 \equiv U_2$, $x \in \overline{\Omega_1}$.

2) Пусть $n \geq 3$. Рассмотрим функцию $U = U_1 - U_2$, тогда, как и выше, имеем:

$$U|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.18}$$

Кроме того, $\lim\limits_{|x|\to\infty} U(x) = 0$ в силу (1.6), т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $R(\varepsilon)$, что

$$|U()x| < \varepsilon,\ |x| > R(\varepsilon). \tag{1.19}$$

В качестве функции $\omega(x)$ возьмем $\omega(x) \equiv \varepsilon$, где ε берется из (1.19). Тогда

$$\omega|_{\partial\Omega'} = \varepsilon. \tag{1.20}$$

Тогда, соспоставляя (1.18), (1.19) и (1.20), получим:

$$|U| < \omega(x),\ x \in \overline{\Omega}'. \tag{1.21}$$

Из (1.21) для любой точки $x_0 \in \overline{\Omega_1}$ получаем $|U(x_0)| < \varepsilon$, откуда в силу произвольности ε имеем $U(x_0) = 0$, а значит, $U(x) \equiv 0$, $x \in \overline{\Omega_1}$.

□

Теорема 3 (теорема устойчивости внутренней задачи Дирихле по граничным данным). Пусть $U_i(x)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют уравнению (1.1) и граничным условиям

$$U_i|_{\partial\Omega} = \phi_i(y). \tag{1.22}$$

Пусть для всех $y \in \partial\Omega$

$$||\phi_1(y) - \phi_2(y)||_{C(\partial\Omega)} \leq \varepsilon, \tag{1.23}$$

тогда

$$||U_1(x) - U_2(x)||_{C(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon. \tag{1.24}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $U = U_1 - U_2$, тогда U удовлетворяет задаче $\Delta U = 0$, $U|_{\partial\Omega} = \phi_1(y) - \phi_2(y)$. На основании следствия из принципа экстремума имеем:

$$||U||_{C(\overline{\Omega})} \leq ||U||_{C(\partial\Omega)} = ||\phi_1(y) - \phi_2(y)||_{C(\partial\Omega)} \leq \varepsilon,$$

откуда

$$||U_1 - U_2||_{C(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon.$$

□

XI.1.2 Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье. Интеграл Пуассона.

При решении смешанной задачи для уравнения гиперболического и параболического типа при $n = 2$ метод Фурье всегда приводит к цели по той причине, что область изменения переменных x и t была была полуполоса, в частности, прямоугольник $\Omega = [0, l] \times [0, \infty)$, $\overline{\Omega} = [0, l] \times [0, T]$, $0 < T < \infty$.

При решении граничных задач для уравнений эллиптического типа в случае произвольной области Ω метод фурье неприменим, так как не дает разделения переменных. Метод Фурье в данном случае применим, если область Ω - прямоугольник. Введение полярных координат позволяет решить эти задачи также в случае круга, сектора, кольца. Отметим, что имеется еще ряд областей (например. эллипс), где разделение переменных может быть осуществлено за счет введения тех или иных криволинейных координат, в частности, эллиптических координат.

Рассмотрим в качестве примера решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае круга.

Пусть $\overline{\Omega}$ есть круг $\overline{Q_a^0} = \{|x| \leq a\}$, граница которого есть окружность $S_a^0 = \{|x| = a\}$, где $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Требуется найти функцию $U(x) \in C^2\{|x| < a\} \cap C\{|x| \leq a\}$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta U = 0 \text{ при } |x| < a \tag{1.25}$$

и граничному условию

$$U|_{|x|=a} = \phi(y), \tag{1.26}$$

причем $\phi(y) \in C(S_a^0)$.

Возьмем полярные координаты r, φ с полюсом в начале координат:

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi, \\ x_2 &= r\sin\varphi. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Делая замену (1.27) в (1.25), получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{1.28}$$

относительно функции $U(r,\varphi)$.

Кроме того, ввиду введения полярных координат возникает неоднозначность, обусловленная неоднозначностью φ, определяемому с точностью до 2π. Поэтому в этих координатах искомая функция $U(r,\varphi)$ должна удовлетворять условию

$$U(r,\varphi+2\pi) = U(r,\varphi), \tag{1.29}$$

так как U - непрерывная и однозначная функция.

Граничное условие (1.26) запишется в виде

$$U|_{r=a} = U(a,\varphi) = \phi(\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \tag{1.30}$$

причем

$$\phi(\varphi+2\pi) = \phi(\varphi), \tag{1.31}$$

так как ϕ - непрерывная и однозначная функция.

Применим к решению этой задачи метод Фурье.

I. Ищем $U(r,\varphi)$ в виде

$$U(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi), \tag{1.32}$$

удовлетворяющую (1.28) и (1.29).

Подставляя (1.32) в (1.28), получим:

$$R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi) = 0.$$

Умножая на $\frac{r^2}{R(r)\Phi(\varphi)}$, имеем:

$$-\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\lambda,$$

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0, \tag{1.33}$$

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0. \tag{1.34}$$

Записывая для (1.32) условие (1.29), получим:

$$U(r, \varphi + 2\pi) = R(r)\Phi(\varphi + 2\pi) = U(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi),$$

откуда

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \tag{1.35}$$

т.е. $\Phi(\varphi)$ - периодическая функция с периодом 2π.

Задача (1.34), (1.35) - задача на собственные значения. Решим ее.

1) $\lambda < 0$. Тогда из (1.35) следует, что в этом случае уравнение (1.34) не имеет периодических решений.

2) $\lambda = 0$, $\Phi_0''(\varphi) = 0$, $\Phi_0(\varphi) = A_0 + B_0\varphi$, откуда, учитывая (1.35), получаем:

$$\Phi_0(\varphi) = A_0. \tag{1.36}$$

3) $\lambda > 0$. Тогда общее решение уравнения (1.34) запишется в виде:

$$\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi. \tag{1.37}$$

Запишем для (1.37) условие (1.35):

$$A\cos\sqrt{\lambda}(\varphi + 2\pi) + B\sin\sqrt{\lambda}(\varphi + 2\pi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi,$$

откуда

$$\sqrt{\lambda_k} = k,\ \lambda_k = k^2,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Итак,

$$\Phi_k(\varphi) = A_k\cos k\varphi + B_k\sin k\varphi,\ k = 0, 1, 2, ...,$$

так как отрицательные значения k новых решений не дают.

Решим теперь уравнение (1.33) при $\lambda_k = k^2$, $k = 1, 2, ...$, т.е.

$$r^2R''(r) + rR'(r) - k^2R(r) = 0. \tag{1.38}$$

(1.38) - уравнение Эйлера. Его решение ищем в виде

$$R_k = r^\mu. \tag{1.39}$$

Пдставляя (1.39) в (1.38), имеем:

$$r^2\mu(\mu - 1)r^{\mu-2} + r\mu r^{\mu-1} - k^2r^\mu = 0,$$

откуда $\mu^2 - k^2 = 0$, $\mu_{1,2} = \pm k$.

Итак, при $k \neq 0$ имеем две совокупности линейно-независимых решений $R_{1k} = r^k$, $R_{2k} = r^{-k}$, $k = 1, 2, ...$

Таким образом, общее решение уравнения (1.38) запишется в виде:

$$R_k(r) = C_k r^k + D_k r^{-k},\ k = 1, 2, ..., \tag{1.40}$$

где $C_k, D_k - const$.

При $k = 0$, решая уравнение $rR_0'' + R_0' = 0$, получим:

$$R_0 = C_0 + D_0 \ln r. \tag{1.41}$$

Так как мы решаем внутреннюю задачу, то надо взять $R_k = C_k r^k$, $k = 0, 1, ...$. Если же $D_k \neq 0$, то функция $U_k = R_k \Phi_k\,(k = 0, 1, ...)$ обращается в бесконечность при $r = 0$, т.е. не будет гармонической функцией.

Итак, мы нашли частные решения вида

$$U_k(r, \varphi) = (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) r^k,\ k = 0, 1, 2, ...,\ a_k = A_k C_k,\ b_k = B_k C_k.$$

II. Для того, чтобы удовлетворить условию (1.30), ищем общее решение виде:

$$U(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(r, \varphi), \tag{1.42}$$

причем предположим, что ряд (1.42) равномерно сходится при $r \leq a$ и допускает дифференцирование дважды по r и φ при $r < a$.

Запишем для (1.42) условие (1.30):

$$U(a, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) a^k = \phi(\varphi),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \tag{1.43}$$

Таким образом, мы пришли к задаче разложения функции $\phi(\varphi)$ в тригонометрический ряд. Условие (1.43) будет удовлетворено, если:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \phi(\psi) d\psi, \\ a^k a_k = \alpha_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \phi(\psi) \cos k\psi d\psi, \\ a^k b_k = \beta_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \phi(\psi) \sin k\psi d\psi. \end{cases} \tag{1.44}$$

Подставляя (1.44) в (1.32), получим формальное решение задачи:

$$U(r,\varphi)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^k[\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi]. \tag{1.45}$$

Обоснуем полученное решение (1.45).

1. Докажем сначала, что функция, определяемая формулой (1.45), принадлежит классу $C^2(r<a)$ и удовлетворяет уравнению (1.28). Для этого нужно доказать рпвномерную сходимость ряда (1.45) при $r<a$ и рядов

$$U_r=\sum_{k=1}^{\infty}U_{kr}(r,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a^k}kr^{k-1}[\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi]=$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{r}{a}\right)^{k-1}[\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi], \tag{1.46}$$

$$U_{rr}=\frac{1}{a^2}\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\left(\frac{r}{a}\right)^{k-2}[\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi], \tag{1.47}$$

$$U_{\varphi}=\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{r}{a}\right)^{k}[-\alpha_k\sin k\varphi+\beta_k\cos k\varphi], \tag{1.48}$$

$$U_{\varphi\varphi}=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\left(\frac{r}{a}\right)^{k}[-\alpha_k\cos k\varphi-\beta_k\sin k\varphi]. \tag{1.49}$$

Построим ряды, мажорирующие ряды (1.45) - (1.49). Так как $\phi(\varphi)\in C$, то из (1.44) имеем:

$$\begin{aligned}&|\alpha_k|\le\tfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\phi(\psi)||\cos k\psi|d\psi\le\tfrac{A_1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\psi=2A_1,\\&|\beta_k|\le 2A_1.\end{aligned} \tag{1.50}$$

Зафиксируем некоторое значение $r_0<a$. Тогда, учитывая (1.50), получим, что при $r\le r_0<a$ ряды (1.45) - (1.49) мажорируются рядами

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r_0}{a}\right)^k,\ \sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{r_0}{a}\right)^{k-1},\ \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\left(\frac{r_0}{a}\right)^{k-2},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{r_0}{a}\right)^{k},\ \sum_{k=1}^{\infty}k^2\left(\frac{r_0}{a}\right)^{k}. \tag{1.51}$$

Ряды (1.51) на основании признака Даламбера сходятся, поэтому ряды (1.45) - (1.49) равномерно сходятся в замкнутом круге $r \le r_0$, а значит функция (1.45) имеет непрерывные производные первого и второго порядка по r и φ. В силу произвольности r_0 заключаем, что (1.45) имеет ппо r и φ в любой внутренней точке круга $r < a$. Кроме того, функция (1.45) удовлетворяет уравнению (1.28), так как $\Delta U_k = 0$.

2. Покажем теперь, что $U(r,\varphi) \in C(r \le a)$, т.е. нужно доказать равномерную сходимость ряда (1.45) при $r \le a$.

Так как в данном случае $r \le a$, то воспользоваться предыдущими мажорирующими рядами мы не можем. Поэтому возьмем в качестве мажорирующего ряда следующий ряд:

$$|\alpha_0| + \sum_{k=1}^{\infty}(|\alpha_k| + |\beta_k|), \tag{1.52}$$

при этом мы учли, что $\frac{r}{a} \le 1$.

Если предположить, что $\phi \in C$, то ряд (1.52) расходится, поэтому предположим теперь, что $\phi \in C^2$.

Преобразуем α_k и β_k интегрированием дважды по частям:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \phi(\psi)\cos k\psi d\psi = \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{\phi(\psi)\sin k\psi}{k}\right|_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int\limits_0^{2\pi} \phi'(\psi)\sin k\psi d\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{\phi'(\psi)\cos k\psi}{k^2}\right|_0^{2\pi} - \frac{1}{k^2}\int\limits_0^{2\pi} \phi''(\psi)\cos k\psi d\psi\right] = \frac{1}{\pi k^2}\phi''(\psi)\cos k\psi d\psi.$$

Аналогично преобразуем β_k. Тогда получим $|\alpha_k, \beta_k| \le \frac{2\tilde{A}}{k^2}$, так как $|\phi''(\psi)| \le \tilde{A}$, $\tilde{A} - const$. Таким образом, в качестве ряда, мажорирующего ряд (1.52), можно взять ряд $2\tilde{A}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, который сходится, а значит, ряд (1.45) сходится равномерно при $r \le a$.

Итак, мы доказали следующее утверждение:

1) Функция $U(r,\varphi)$, определяемая формулой (1.45), является гармонической функцией при $r < a$, если $\phi \in C$.

2) Функция (1.45) непрерывна при $r \le a$ и удовлетворяет граничному условию (1.30), если $\phi \in c^2$.

Теперь преобразуем (1.45) к более простому виду и покажем, что решение существует только при условии, что $\phi \in C$.

Преобразуем (1.45) при $r < a$, подставив вместо α_k и β_k их выражения из (1.44) и приведя потом перестановку порядка суммирования и интегрирования:

$$U(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\phi(\psi)d\psi +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^k\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\phi(\psi)\cos k\psi\cos k\varphi d\psi + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\phi(\psi)\sin k\psi\sin k\varphi d\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^k\cos k(\psi-\varphi)\right]\phi(\psi)d\psi. \qquad (1.53)$$

Обозначим для удобства $\psi - \varphi = \omega$, $\frac{r}{a} = t$, тогда:

$$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^k\cos k(\psi-\varphi) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}t^k\cos k\omega =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}t^k(e^{ik\omega} + e^{-ik\omega}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(te^{i\omega})^k + \sum_{k=1}^{\infty}(te^{-i\omega})^k. \qquad (1.54)$$

Каждая из сумм правой части (1.54) дает геометрическую прогрессию со знаменателем $q = |te^{i\omega}| = |te^{-i\omega}| = |t| < 1$, поэтому, суммируя каждую из прогрессий в (1.54), получим:

$$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^k\cos k(\psi-\varphi) = 1 + \frac{te^{i\omega}}{1-te^{i\omega}} + \frac{te^{-i\omega}}{1-te^{-i\omega}} =$$

$$= \frac{1 - te^{i\omega} - te^{-i\omega} + t^2 + te^{i\omega} - t^2 + te^{-i\omega} - t^2}{(1-te^{i\omega})(1-te^{-i\omega})} = \frac{1-t^2}{1 - te^{i\omega} - te^{-i\omega} + t^2} =$$

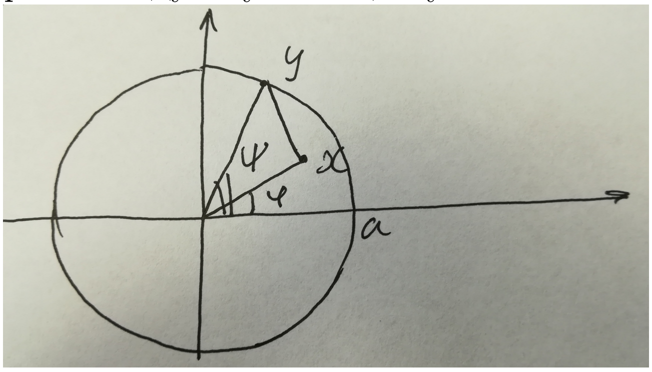
$$= \frac{1-t^2}{1-2t\cos\omega + t^2} = \frac{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{r}{a}\right)\cos(\psi-\varphi) + \left(\frac{r}{a}\right)^2} = \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\psi-\varphi) + r^2} \qquad (1.55)$$

Подставляя (1.55) в (1.53), получим:

$$U(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(a^2-r^2)\phi(\psi)}{a^2 - 2ar\cos(\psi-\varphi) + r^2}d\psi. \qquad (1.56)$$

(1.56) - формула Пуассона, а интеграл, стоящий справа (1.56) - интеграл Пуассона.

Перепишем (1.56) в несколько ином виде, взяв в качестве перемнной интегрирования дуговую абсциссу:



Пусть x - точка внутри круга с полярными координатами r, φ, т.е. $x(r, \varphi)$, а y – точка на окружности $y(a, \psi)$, тогда $x\hat{o}y = \psi - \varphi$, $|x-y|^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos(\psi - \varphi)$. Дуговая абсцисса точки y, отсчитываемая от точки пересечения с осью x, $S_y = a\psi$, $dS_y = ad\psi$, $\phi(\psi) = \phi(y)$.

Таким образом, интеграл (1.56) можно записать в виде:

$$U(x) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{S_a^0} \frac{a^2 - |x|^2}{|x-y|^2} \phi(y) dS_y. \tag{1.57}$$

Итак, мы получиили, что при $|x| < a$ интеграл (1.57) является гармонической функцией, если $\phi \in C$, так как интеграл (1.57) совпадает с рядом (1.45).

Докажем, что непрерывности $\phi(y)$ достаточно для того, чтобы функция (1.57) была непрерывна в замкнутом круге $|x| \leq a$ и удовлетворяла условию (1.26). Для этого докажем, что

$$\lim_{x \to y_0} U(x) = \phi(y_0), \tag{1.58}$$

где y_0 - любая точка окружности S_a^0.

Для доказательства (1.58) нужно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что $|U(x) - \phi(y_0)| < \varepsilon$, если только $|x - y_0| < \delta(\varepsilon)$. Для этого воспользуемся тождеством

$$1 \equiv \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(a^2 - r^2)}{a^2 - 2ar\cos(\psi - \varphi) + r^2} d\psi = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{S_a^0} \frac{a^2 - |x|^2}{|x-y|^2} dS_y. \tag{1.59}$$

Для доказательства (1.59) приравняем правые части (1.53) и (1.56) при $\phi(\psi) \equiv 1$. Если в (1.53) положить $\phi(\psi) \equiv 1$, то все интегралы, кроме первого, равного единице, обратяться в нуль, так как $\int\limits_0^{2\pi} \cos k(\psi - \varphi) d\psi = 0$, т.е. мы получили (1.59).

Умножи обе части (1.59) на $\phi(y_0)$ и вычтем почленно из (1.57):

$$U(x) - \phi(y_0) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{S_a^0} \frac{a^2 - |x|^2}{|x-y|^2} [\phi(y) - \phi(y_0)] dS_y. \tag{1.60}$$

Так как $\phi(y) \in C(S_a^0)$, то для любого $\varepsilon > 0$ всегда можно подобрать $\delta_1(\varepsilon)$, что

$$|\phi(y) - \phi(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.61}$$

если только $|y - y_0| < \delta_1(\varepsilon)$. С центром в точке y_0 построим окружность радиуса $\delta_1(\varepsilon)$: $\{|x - y_0| = \delta_1(\varepsilon)\}$. Обозначим через $S_1(\delta_1)$ – часть окружности S_a^0, которая попала внутрь окружности $S_{\delta_1}^{y_0}$, т.е. $S_1(\delta_1) = S_a^0 \cap \{|x - y_0| \le \delta_1\}$, $S_2(\delta_1) = S_a^0 \setminus S_1(\delta_1)$. Тогда (1.60) представим в виде:

$$U(x) - \phi(y_0) = J_1 + J_2, \tag{1.62}$$

где $J_1 = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{S_1(\delta_1)} \frac{a^2 - |x|^2}{|x-y|^2} [\phi(y) - \phi(y_0)] dS_y$, $J_2 = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{S_2(\delta_1)} \frac{a^2 - |x|^2}{|x-y|^2} [\phi(y) - \phi(y_0)] dS_y$.

Из (1.62) имеем:

$$|U(x) - \phi(y_0)| \le |J_1| + |J_2|. \tag{1.63}$$

Оценим каждое слагаемое справа в (1.63). Так как нас интересует оценка при $x \to y_0$, то можно предположить, что x при своем приближении к y_0 удовлетворяет неравенству

$$|x - y_0| < \frac{\delta_1(\varepsilon)}{2}, \tag{1.64}$$

т.е. x находится внутри окружности $S_{\frac{\delta_1}{2}}^{y_0}$.

$$|J_2| \le \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{S_2(\delta_1)} \frac{a^2 - |x|^2}{|x-y|^2} |\phi(y) - \phi(y_0)| dS_y. \tag{1.65}$$

Так как x удовлетворяет неравенству (1.64), то для $y \in S_2(\delta_1)$ имеем $|x - y_0| > \frac{\delta_1}{2}$, откуда

$$\frac{1}{|x-y|} < \frac{2}{\delta_1}. \tag{1.66}$$

Кроме того, учитывая ограниченность непрерывной функции $\phi(y)$, имеем:

$$|\phi(y) - \phi(y_0)| \leq 2A. \tag{1.67}$$

Поэтому, учитывая (1.66) и (1.67), из (1.65) имеем:

$$|J_2| \leq \frac{2A}{2\pi a} \frac{2^2}{\delta_1^2}(a^2 - |x|^2) \int\limits_{S_2(\delta_1)} dS_y < \frac{A}{\pi a} \frac{4}{\delta_1^2}(a^2 - |x|^2).$$

Пусть теперь $x \to y_0$, тогда $a^2 - |x|^2 \to 0$, так как $|x| \to a$, а поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta_2(\varepsilon)$, что

$$|J_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.68}$$

если только

$$|x - y_0| < \delta_2(\varepsilon). \tag{1.69}$$

$$|J_1| \leq \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{S_1(\delta_1)} \frac{a^2 - |x|^2}{|x - y|^2} |\phi(y) - \phi(y_0)| dS_y. \tag{1.70}$$

Учитывая (1.61), из (1.70) имеем:

$$|J_1| \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{S_1(\delta_1)} \frac{a^2 - |x|^2}{|x - y|^2} dS_y = \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.71}$$

при этом мы учли (1.59).

Таким образом, мы получаем, что (1.68) и (1.71) будут выполнены, если $|x - y| < \delta$, где $\delta = \max(\frac{\delta_1}{2}, \delta_2)$.

Итак, из (1.63) имеем:

$$|U(x) - \phi(y_0)| < \varepsilon, \tag{1.72}$$

если только $|x - y_0| < \delta(\varepsilon)$, т.е. имеем (1.58).

Функцию, определенную в открытом круге $|x| < a$ формулой (1.57), доопределим на окружности $|x| = a$, положим $U(x)|_{S_a^0} = \phi(y_0)$. Доопределенная таким образом функция $U(x)$ - гармоническая внутри круга $|x| < a$, в силу (2.48) равна на границе $\phi(y_0)$, т.е. удовлетворяет граничному условию (1.26).

XI.2 Лекция 29. Метод функции Грина решения задачи Дирихле. Методы построения функции Грина.

XI.2.1 Метод функции Грина решения задачи Дирихле.

Как мы знаем, внутренняя задача Дирихле ставится следующим образом:

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - конечная область. Требуется найти функцию $U(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta U = -\mathcal{F}(x),\ x \in \Omega \tag{2.1}$$

и граничному условию

$$U|_{\partial\Omega} = \phi(y),\ y \in \partial\Omega. \tag{2.2}$$

Метод функции Грина основан на интегральном представлении функций $U(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, а именно, на формуле:

$$U(\xi) = \int\limits_{\partial\Omega} \left[E(y,\xi)\frac{\partial U(y)}{\partial n_y} - U(y)\frac{\partial E(y,\xi)}{\partial n_y} \right] dS_y - \int\limits_{\Omega} E(x,\xi)\Delta U(x)dx,\ \xi \in \Omega, \tag{2.3}$$

где

$$E(x,\xi) = \begin{cases} \frac{|x-\xi|^{2-n}}{\omega_n(n-2)},\ n \geq 3, \\ \frac{1}{2n}\ln\frac{1}{|x-\xi|},\ n = 2. \end{cases}$$

Предположим, что мы решаем внутреннюю задачу Дирихле. Тогда из (2.3) видно, что формула (2.3) могла бы дать решение задачи (2.1), (2.2), если бы эта формула не содержала $\frac{\partial U(y)}{\partial n_y}$, так как остальные величины в условиях задачи заданы. Поэтому постараемся из (2.3) получить формулу, не содержащую $\frac{\partial U(y)}{\partial n_y}$.

Пусть $g(x,\xi)$ - функция двух точек $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \Omega$, причем $g(x,\xi) \in C^1(\overline{\Omega})$ и $\Delta g = 0$ как функция от x при фиксированном ξ. Тогда применим к $U(x)$ и $g(x,\xi)$ вторую формулу Грина, взяв в качестве $V = g(x,\xi)$,получим:

$$\int\limits_{\Omega} [g(x,\xi)\Delta U(x) - U(x)\Delta g(x,\xi)]dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left[g(y,\xi)\frac{\partial U(y)}{\partial n_y} - U(y)\frac{\partial g(y,\xi)}{\partial n_y} \right] dS_y.$$

Учитывая, что $\Delta g = 0$, получим:

$$0 = \int\limits_{\partial\Omega} \left[g(y,\xi)\frac{\partial U(y)}{\partial n_y} - U(y)\frac{\partial g(y,\xi)}{\partial n_y} \right] dS_y - \int\limits_{\Omega} g(x,\xi)\Delta U(x)dx. \tag{2.4}$$

Складывая почленно (2.3) и (2.4), получим:

$$U(\xi) = \int\limits_{\partial\Omega} \left[G(y,\xi)\frac{\partial U(y)}{\partial n_y} - U(y)\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y} \right] dS_y - \int\limits_{\Omega} G(x,\xi)\Delta U(x)dx, \qquad (2.5)$$

где

$$G(x,\xi) = E(x,\xi) + g(x,\xi). \qquad (2.6)$$

Функция $G(x,\xi)$ является решением уравнения Лапласа $\Delta G = 0$, причем представляет из себя сумму фундаментального решения $E(x,\xi)$ и регулярного решения $g(x,\xi)$.

Так как $g(x,\xi)$ - произвольная функция, то выберем ее так, что

$$G|_{\partial\Omega} = G(y,\xi) = E(y,\xi) + g(y,\xi) = 0 \qquad (2.7)$$

при любом $y \in \partial\Omega$ и фиксированном $\xi \in \Omega$.

Функция $G(x,\xi)$, имеющая вид (2.6) и удовлетворяющая условию (2.7), называется функцией Грина задачи Дирихле для области Ω.

Докажем, что функция $G(x,\xi)$ обладает свойством симметрии, т.е.:

$$G(x,\xi) = G(\xi,x),\ x,\xi \in \Omega.$$

Пусть ξ, η - некоторые фиксированные точки области Ω. С центрами в точках ξ и η построим сферы радиуса ε: $S_\varepsilon^\xi = \{|x-\xi| = \varepsilon\}$, $S_\varepsilon^\eta = \{|x-\eta| = \varepsilon\}$, ограничивающие шары $\overline{Q_\varepsilon^\xi} = \{|x-\xi| \le \varepsilon\}$, $\overline{Q_\varepsilon^\eta} = \{|x-\eta| \le \varepsilon\}$. Выбросим из Ω эти шары и обозначим полученную область $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \{\overline{Q_\varepsilon^\xi} \cup \overline{Q_\varepsilon^\eta}\}$.

Применим к области $\Omega - \varepsilon$ вторую формулу Грина, взяв качестве $U = G(x,\xi)$, $V = G(x,\eta)$:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} [G(x,\eta)\Delta G(x,\xi) - G(x,\xi)\Delta G(x,\eta)]dx =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega \cup S_\varepsilon^\xi \cup S_\varepsilon^\eta} \left[G(y,\eta)\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y} - G(y,\xi)\frac{\partial G(y,\eta)}{\partial n_y} \right] dS_y. \qquad (2.8)$$

Если учесть теперь, что $\Delta G(x,\xi) = 0$, $\Delta G(x,\eta) = 0$, $x \in \Omega$, $G(y,\eta) = 0$, $G(y,\xi) = 0$, $y \in \partial\Omega$, то из (2.7) получим:

$$\int\limits_{S_\varepsilon^\xi} \left[G(y,\eta)\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y} - G(y,\xi)\frac{\partial G(y,\eta)}{\partial n_y} \right] dS_y +$$

$$+\int\limits_{S_\varepsilon^\eta}\left[G(y,\eta)\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y}-G(y,\xi)\frac{\partial G(y,\eta)}{\partial n_y}\right]dS_y=0. \tag{2.9}$$

Перейдем в (2.9) к пределу при $\varepsilon\to 0$. Обозначим через

$$J_1=\int\limits_{S_\varepsilon^\xi}G(y,\eta)\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y}dS_y,\ J_2=\int\limits_{S_\varepsilon^\xi}G(y,\xi)\frac{\partial G(y,\eta)}{\partial n_y}dS_y$$

и преобразуем каждый интеграл. Начнем с интеграла J_1:

$$\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y}=\frac{\partial E(y,\xi)}{\partial n_y}+\frac{\partial g(y,\xi)}{\partial n_y}=-\left.\frac{d\mathcal{E}(r)}{dr}\right|_{r=\varepsilon}+\frac{\partial g(y,\xi)}{\partial n_y}=$$

$$=\left.\frac{r^{1-n}}{\omega_n}\right|_{r=\varepsilon}+\frac{\partial g(y,\xi)}{\partial n_y}=\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}+\frac{\partial g(y,\xi)}{\partial n_y}, \tag{2.10}$$

поэтому, учитывая (2.10), имеем:

$$J_1=\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}\int\limits_{S_\varepsilon^\xi}G(y,\eta)dS_y+\int\limits_{S_\varepsilon^\xi}G(y,\eta)\frac{\partial g(y,\xi)}{\partial n_y}dS_y. \tag{2.11}$$

Применяя в интеграле (2.11) теорему о среднем, получим:

$$J_1=\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}[G(y,\eta)]_{\text{ср}}\varepsilon^{n-1}\omega_n+\left[G(y,\eta)\frac{\partial g(y,\xi)}{\partial n_y}\right]_{\text{ср}}\varepsilon^{n-1}\omega_n. \tag{2.12}$$

Так как $y\neq\eta$, то $[G(y,\eta)\frac{\partial g(y,\xi)}{\partial n_y}]_{\text{ср}}$ ограничено, поэтому, переходя в (2.12) к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}J_1=G(\xi,\eta). \tag{2.13}$$

Переходим к интегралу J_2:

$$G(y,\xi)=\left.\frac{|x-\xi|^{2-n}}{\omega_n(n-2)}\right|_{|x-\xi|=\varepsilon}+g(y,\xi)=\frac{\varepsilon^{2-n}}{\omega_n(n-2)}+g(y,\xi),$$

поэтому

$$J_2=\frac{\varepsilon^{2-n}}{\omega_n(n-2)}\int\limits_{S_\varepsilon^\xi}\frac{\partial G(y,\eta)}{\partial n_y}dS_y+\int\limits_{S_\varepsilon^\xi}g(y,\xi)\frac{\partial G(y,\eta)}{\partial n_y}dS_y. \tag{2.14}$$

Из (2.14), рассуждая как и выше, получим:

$$J_2 = \frac{\varepsilon^{2-n}}{\omega_n(n-2)} \left[\frac{\partial G(y,\eta)}{\partial n_y}\right]_{\text{ср}} \varepsilon^{n-1}\omega_n + \left[g(y,\xi)\frac{\partial G(y,\eta)}{\partial n_y}\right]_{\text{ср}} \varepsilon^{n-1}\omega_n. \qquad (2.15)$$

Учитывая, что при $y \neq \eta$ $\frac{\partial G(y,\eta)}{\partial n_y}$ и $g(y,\xi)\frac{\partial G(y,\eta)}{\partial n_y}$ ограничены, из (2.15) получим:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_2 = 0. \qquad (2.16)$$

Расуждая аналогично, получим:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_\varepsilon^\eta} \left[G(y,\eta)\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y} - G(y,\xi)\frac{\partial G(y,\eta)}{\partial n_y}\right] dS_y = -G(\eta,\xi). \qquad (2.17)$$

Учитывая (2.13), (2.6) и (2.17), из (2.9) получим:

$$G(\xi,\eta) - G(\eta,\xi) = 0,\ G(\xi,\eta) = G(\eta,\xi)$$

или

$$G(x,\xi) = G(\xi,x),\ x,\xi \in \Omega.$$

Итак, мы ввели функцию, обладающую свойствами:

1) $G(x,\xi)$ - функция двух точек $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \Omega$, которая при каждом фиксированном ξ представима в виде (2.6), где $g(x,\xi)$ - гармоническая по x и принадлежит классу $C^1(\overline{\Omega})$ по x;

2)

$$G|_{\partial\Omega} = G(y,\xi) = 0,\ y \in \partial\Omega; \qquad (2.18)$$

3) функция $G(x,\xi)$ симметрична, т.е.

$$G(x,\xi) = G(\xi,x),\ x,\xi \in \Omega. \qquad (2.19)$$

Заметим, что из свойства (2.19) вытекает, что при каждом фиксированном x $G(x,\xi)$ гармонична по ξ и принадлежит классу $C^1(\overline{\Omega})$ по ξ.

Предположим, что мы решаем задачу Дирихле (2.1), (2.2) и пусть существует решение этой задачи $U(x) \in C^1(\overline{\Omega})$. Предположим также, что существует функция Грина, удовлетворяющая условиям 1) - 3). Тогда на основании вышеизложенного мы можем представить $U(x)$ в виде (2.5). Если учесть теперь, что функция $G(x,\xi)$ удовлетворяет условию (2.18) и выполняются условия (2.1) и (2.2), то получим:

$$U(\xi) = -\int\limits_{\partial\Omega} \phi(y)\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y} dS_y + \int\limits_{\Omega} G(x,\xi)\mathcal{F}(x)dx, \qquad (2.20)$$

откуда, в частности, при $\mathcal{F}(x) \equiv 0$, имеем:

$$U(\xi) = -\int\limits_{\partial\Omega} \phi(y) \frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y} dS_y. \tag{2.21}$$

Итак, мы получили следующий результат:

Если существует решение задачи (2.1), (2.2), принадлежащее классу $C^1(\overline{\Omega})$, то решение определяется формулой (2.20).

Таким образом, мы не доказали существование решения, а лишь указали вид решения при условии его существования. Поэтому для доказательства существования нужно непосредственной подстановкой (2.20) в (2.1) и (2.2) убедиться в том, что (2.20) действительно дает решение задачи.

Из (2.20) следует, что для построения решения задачи Дирихле нам нужно уметь строить функцию Грина $G(x,\xi)$, удовлетворяющую условиям 1) - 3).

XI.2.2 Метод построения функции Грина.

Заметим, что функцию Грина возможно построить только для областей частного вида.

Из 1) - 3) следует, что для построения $G(x,\xi)$ нужно уметь строиьт функцию $g(x,\xi)$, удовлетворяющую условиям

$$\Delta g = 0,\ x \in \Omega, \tag{2.22}$$

$$g(y,\xi) = -E(y,\xi),\ y \in \partial\Omega, \tag{2.23}$$

т.е. для определения $g(x,\xi)$ имеем опять задачу Дирихле с граничным условием (2.2).

Создается впечатление, что для решения задачи Дирихле (1.1), (1.2) нужно решить задачу Дирихле (2.1), (2.2), т.е. имеем порочный круг. На самом деле порочного круга нет. Для построения $G(x,\xi)$ нужно решить задачу Дирихле со специальным граничным условием (2.2). Знание же $G(x,\xi)$ позволяет решить задачу Дирихле для произвольного граничного условия (1.2).

Остановимся сейчас на построении функции Грина в случае $n = 2$ и $n = 3$. Метод основан на физической интерпретации функции Грина.

Метод электростатических изображений.

При $n = 3$ $G(x,\xi)$ имеет вид:

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-\xi|} + g(x,\xi), \tag{2.24}$$

причем
$$G|_{\partial\Omega} = G(y, \xi) = 0. \tag{2.25}$$

Из курса физики известно, что если в точку ξ пространства поместить электрический заряд величины e, то он создает в свободном неограниченном пространстве электростатическое поле, потенциал которого точке x при определенном выборе системы единиц равен $U_0(x) = \frac{e}{4\pi}\frac{1}{|x-\xi|}$.

Таким образом, первое слагаемое в (2.24) можно интерпретировать как потенциал точечного единичного заряда ($e = 1$), помещенного в точку ξ области Ω:
$$U_1(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-\xi|}. \tag{2.26}$$

Второе слагаемое в (2.24) будем интерпретировать как потенциал электростатического поля, созданного одним или несколькими зарядами, но уже расположенными вне области Ω, т.е.:
$$g(x, \xi) = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{e_k}{|x-\xi^k|},\ \xi^k \notin \overline{\Omega}. \tag{2.27}$$

Это возможно, так как потенциал электростатического поля в любой области, свободной от заряда, является гармонической функцией, т.е. при $x \neq \xi$ $\Delta g(x, \xi) = \frac{1}{4\pi}\sum\limits_{k=1}^{m} e_k \Delta\frac{1}{|x-\xi^k|} = 0$, так как $\Delta\frac{1}{|x-\xi^k|} = 0$ при $x \neq \xi^k$.

Тогда функция $G(x, \xi)$ есть потенциал суммарного поля, созданного зарядами $e = 1$ и e_k, $k = \overline{1, m}$.

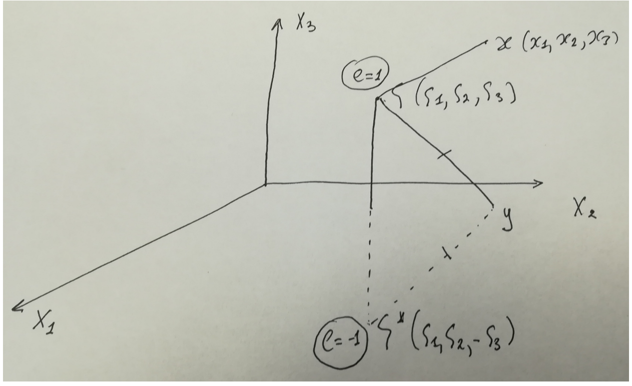
Так как функция $G(x, \xi)$ удовлетворяет условию (2.25), то заряды e_k вне области Ω нужно выбирать так, чтобы на поверхности $\partial\Omega$ суммарный потенциал был равен нулю. Заряды e_k называются электростатическими изображениями заряда $e = 1$ в точке ξ.

Итак, в описанной выше интерпретации мы учли, что пространство неограниченно, а поверхность воображаемая.

Имеется и другая интерпретация. Считают, что $\partial\Omega$ - идеально проводящая заземленная поверхность, сделанная из металического листа, а $g(x, \xi)$ - потенциал поля зарядов, индуцированных на $\partial\Omega$. То есть под действием электростатического поля, созданного единичными зарядами в точке ξ, поверхность поляризуется, т.е. на внутренней стороне появляются отрицательные заряды, а на внешней строне - положительные заряды. А так как поверхность заземлена, то все положительные заряды уйдут в землю, останутся только отрицательные, и поверхность будет иметь нулевой потенциал.

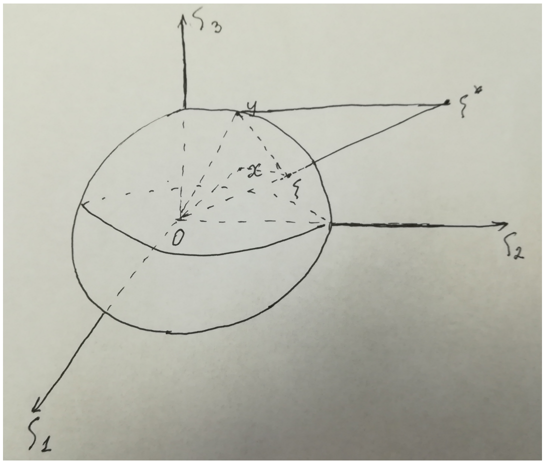
Рассмотрим несколько примеров.

1. Построить функцию Грина для полупространства $\overline{\Omega} = \{x_3 \geq 0\}$, $\partial\Omega = \{x_3 = 0\}$.



Поместим в точку $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \Omega$ единичный положительный заряд $e = 1$. Тогда потенциал поля, созданного этим зарядом, равен $\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-\xi|}$. Если теперь в точку $\xi^* = (\xi_1, \xi_2, -\xi_3)$, являющуюся зеркальным изображением ξ в Ω, поместить отрицательный единичный заряд $e_1 = -1$, то потенциал суммарного поля, созданного зарядами e и e_1, будет равен: $G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi}[\frac{1}{|x-\xi|} - \frac{1}{|x-\xi^*|}]$. Это и есть искомая функция Грина, так как она имеет вид (2.24) и, кроме того, $G(x,\xi)|_{x_3=0} = G(y,\xi) = \frac{1}{4\pi}[\frac{1}{|y-\xi|} - \frac{1}{|y-\xi^*|}] = 0$, так как $|y-\xi| = |y-\xi^*|$, $y \in \partial\Omega$.

2. Построить функцию Грина для шара $\overline{\Omega} = \{|x| \leq R\}$, $\partial\Omega = \{|x| = R\}$.



Поместим в точку $\xi \in \Omega$ единичный положительный заряд. Тогда потенциал поля, сзданного этим зарядом, равен $\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-\xi|}$.

Возьмем точку ξ^* - симметричную точке ξ относительно сферы $\partial\Omega = \{|x| = R\}$, т.е. точки ξ и ξ^* лежат на одном луче, исходящем из центра сферы, причем

$$|\xi||\xi^*| = R^2,\ \xi^* = \frac{R^2}{|\xi|^2}\xi. \tag{2.28}$$

В точку ξ^* поместим заряд e, тогда суммарный потенциал будет равен:

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-\xi|} + \frac{e}{4\pi}\frac{1}{|x-\xi^*|}. \tag{2.29}$$

Выберем теперь величину заряда e в (2.8) так, чтобы $G|_{|x|=R} = G(y,\xi) = \frac{1}{4\pi}[\frac{1}{|y-\xi|} - \frac{e}{|y-\xi^*|}] = 0$, $y \in \partial\Omega$, т.е. чтобы

$$e = -\frac{|y-\xi^*|}{|y-\xi|}. \tag{2.30}$$

Покажем, что правая часть (2.30) постоянна и вычислим значение этой постоянной, тогда получим нужную величину заряда.

Пусть $y \in \partial\Omega$. Рассмотрим два треугольника $\Delta 0\xi y$ и $\Delta 0\xi^* y$. Эти треугольники подобны, так как они имеют общий угол, а стороны, содержащие этот угол, пропорциональны в силу (2.28), так как $\frac{|\xi|}{R} = \frac{R}{|\xi^*|}$. Из подобия треугольников следует пропорциональность других сторон: $\frac{|\xi|}{R} = \frac{|y-\xi|}{|y-\xi^*|}$, откуда $e = -\frac{R}{|\xi|} - const$, так как ξ и R - фиксированы.

Итак, на основании (2.29)

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-\xi|} - \frac{1}{4\pi}\frac{R}{|\xi|}\frac{1}{|x-\xi^*|} = \mathcal{E}(|x-\xi|) - \mathcal{E}(\frac{|\xi|}{R}|x-\xi^*|),$$

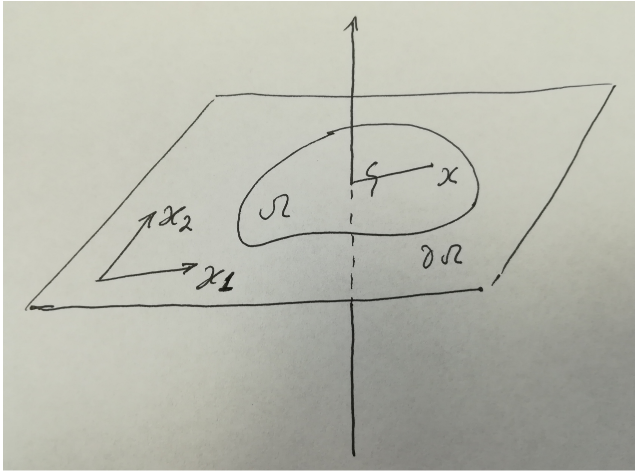
где

$$\mathcal{E}(r) = \begin{cases} \frac{r^{2-n}}{\omega_n(n-2)},\ n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r},\ n = 2. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь случай $n = 2$. В этом случае функция Грина имеет вид:

$$G(x,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-\xi|} + g(x,\xi). \tag{2.31}$$

Физическая интерпретация функции (2.31) отлична от $n = 3$. А именно, если на прямой, проходящей через точку ξ, ортогонально плоскости (x_1, x_2) разместить положительные электрические заряды с единичной плотностью (имеем бесконечно длинный линейный проводник), то эти заряды создадут плоскопараллельное поле (не зависящее от x_3), потенциал которого в точке $x = (x_1, x_3)$ равен $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-\xi|}$, т.е. первому слагаемому в (2.31).



Для кратности изложения в дальнейшем будем говорить, что заряд помещен в точку ξ. Тогда $g(x, \xi)$ - потенциал поля зарядов, расположенных вне Ω и выбранных таким образом, чтобы суммарный потенциал на $\partial\Omega$ был равен нулю, так что $G(y, \xi) = 0$, $y \in \partial\Omega$.

Заметим в заключении, что в отличие от трехмерного случая, в данном случае в качестве электростатических изображений заряда в точке ξ берутся только единичные заряды, как отрицательные, так и положительные, причем потенциал поля, созданного единичным отрицательным зарядом в точке ξ^*, равен $-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-\xi^*|}$.

3. Построить функцию Грина для круга $\overline{\Omega} = \{|x| \leq R\}$.

В точку ξ круга поместим единичный положительный заряд, а в точку ξ^*, симметричную точке ξ относительно окружности $\partial\Omega = \{|x| = R\}$, поместим отрицательный единичный заряд. Тогда потенциал электростатического поля, созданного этими зарядами, будет равен:$G_1(x, \xi) = \frac{1}{2\pi}[\ln\frac{1}{|x-\xi|} - \ln\frac{1}{|x-\xi^*|}] = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|x-\xi^*|}{|x-\xi|}$.

Проверим, будет ли функция $G_1(x, \xi)$ искомой функцией Грина. Для этого выяснимее поведение на $\partial\Omega$. $G_1|_{\partial\Omega} = G_1|_{|x|=R} = G_1(y, \xi) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|y-\xi^*|}{|y-\xi|} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{|\xi|}$, т.е. функция $G_1(x, \xi)$ на $\partial\Omega$ постоянна (это можно показать аналогично, как для $n = 3$).

Поэтому искомая функция Грина будет иметь вид:

$$G(x, \xi) = G_1(x, \xi) - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{|\xi|} = \frac{1}{2\pi}\ln\ln\frac{|\xi|}{R}\frac{|x-\xi^*|}{|x-\xi|}.$$

Метод конформного отображения.

При $n = 2$ вся теория гармонических функций может быть построена на основании теории аналитических функций комплексного переменного. Этот метод основан на том факте, что вещественная и мнимая части любой аналитической функции $\phi(z)$ являются гармоническими функциями. И обратно, любую гармоническую функцию можно рассматривать как вещественную или мнимую часть аналитической функции. Использую эту идею, можно дать метод построения функции Грина задачи Дирихле.

Пусть Ω - односвязная область. Введем комплексную плоскость $\mathbb{C}$, на которой точке $x(x_1, x_2) \in \Omega$ соответствует точка $z = x_1 + ix_2$. Тогда точке $\xi(\xi_1, \xi_2) \in \Omega$ будет соответствовать точка $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$.

По теореме Римана из теории аналитических функций существует аналитическая однолистная функция комплексного переменного z, конформно отображающая односвязную область на единичный круг с центром в начале координат.

Пусть $w = \varphi(z, \zeta)$ - аналитическая однолистная функция комплексного переменного z, конформно отображающая область $\overline{\Omega}$ на единичный круг, причем так, что любая внутренняя точка ζ переходит в центр круга $w = 0$, т.е. $\varphi(\zeta, \zeta) = 0$. Тогда можно доказать, что функция

$$G(x, \xi) = G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\varphi(z, \zeta)|} \tag{2.32}$$

есть искомая функция Грина.

1) Покажем, что

$$G|_{\partial\Omega} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\varphi(z, \zeta)|}\bigg|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.33}$$

Действительно, при отображении $w = \varphi(z, \zeta)$ точкам контура $\partial\Omega$ соответствуют точки единичной окружности $|w| = 1$, поэтому $|\varphi(z, \zeta)||_{\partial\Omega} = 1$, т.е. имеет место (2.33).

2) Покажем, что функция (2.32) имеет вид (2.31). Так как $\varphi(\zeta, \zeta) = 0$, что $\varphi(z, \zeta)$ можно представить в виде $\varphi(z, \zeta) = (z - \zeta)\varphi_1(z, \zeta)$, где $\varphi_1(z, \zeta) \neq 0, \infty$, так как $\varphi' \neq 0$. Поэтому из (2.32) следует $G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|(z-\zeta)|} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\varphi_1(z,\zeta)|}$. Но $|z - \zeta| = |x - \xi|$, $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\varphi_1(z,\zeta)|} = \frac{1}{2\pi} Re[\ln \frac{1}{\varphi_1(z,\zeta)}]$, а $\ln \frac{1}{\varphi_1(z,\zeta)}$ – аналитическая функция, так как $\varphi_1(z, \zeta) \neq 0, \infty$. Поэтому $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\varphi_1(z,\zeta)|}$ - гармоническая функция как вещественная часть аналитической функции.

4. Построить функцию Грина для верхней полуплоскости $\overline{\Omega} = \{Imz \geq 0\}$.

Построим функцию, конформно отображающую верхнюю полуплоскость на единичный круг, причем так, что точка ζ перейдет в центр круга: $\zeta \to 0$. Это отображение осуществляет дробно-линейная фунция, причем при этом отображении точка $\overline{\zeta}$, симметричная точке ζ относительно оси x_1, должна перейти в точку, симметричную точке $w = 0$ относительно окружности, т.е. в точку $w = \infty$.

Итак, искомая функция имеет вид $w = \varphi(z, \zeta) = k\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}$. Подберем k так, чтобы круг в плоскости w был единичным. Для этого потребуем, чтобы точка $z = 0$ границы $x_2 = 0$ перешла в точку окружности $|w| = 1$, т.е. чтобы $|w| = |k|\frac{|0-\zeta|}{|0-\overline{\zeta}|} = |k| = 1$, откуда $k = e^{i\varphi}$.

Итак, $w(z, \zeta) = e^{i\varphi}\frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}$, поэтому искомая функция Грина имеет вид:

$$G(x, \xi) = G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z - \overline{\zeta}|}{|z - \zeta|} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|x - \xi^*|}{|x - \xi|}.$$

XI.3 Лекция 30. Решение задачи Дирихле для n-мерного шара методом функции Грина.

XI.3.1 Решение задачи Дирихле для шара методом функции Грина.

Пусть дан шар $\overline{Q_R^0} = \{|x| \le R\}$ с границей $S_R^0 = \{|x| = R\}$. Требуется найти функцию $U(x) \in C^2(Q_R^0) \cap C(\overline{Q_R^0})$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta U = 0,\ x \in Q_R^0 \tag{3.1}$$

и граничному условию

$$U|_{S_R^0} = \phi(y),\ \phi(y) \in C(S_R^0). \tag{3.2}$$

Предположим, что существует тешение задачи $U(x) \in C^1(\overline{Q_R^0})$, тогда на основании предыдущего решение задачи можно записать в виде:

$$U(\xi) = -\int\limits_{S_R^0} \frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y} \phi(y) dS_y, \tag{3.3}$$

где $\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y} = \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n_y}|_{S_R^0}$, $G(x,\xi) = E(x,\xi) + g(x,\xi) = \mathcal{E}(|x-\xi|) + g(x,x)$ - функция Грина,

$$E(x,\xi) = \begin{cases} \frac{|x-\xi|^{2-n}}{\omega_n(n-2)},\ n \ge 3, \\ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-\xi|},\ n = 2 \end{cases};\ \mathcal{E}(r) = \begin{cases} \frac{r^{2-n}}{\omega_n(n-2)},\ n \ge 3, \\ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r},\ n = 2. \end{cases} \tag{3.4}$$

Введем точку ξ^*, связанную с точкой ξ следующим образом:

$$\xi^* = \frac{R^2}{|\xi|^2}\xi,\ |\xi||\xi^*| = R^2. \tag{3.5}$$

Из (3.5) следует, что при $n = 2$ это инверсия относительно окружности, а при $n = 3$ - инверсия относительно сферы. Заметим, что из (3.5) следует, что координаты точек ξ и ξ^* связаны соотношением

$$\xi_k^* = \frac{R^2}{|\xi|^2}\xi_k,\ k = \overline{1,n}. \tag{3.6}$$

Известно, что при $n = 3$ $G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-\xi|} - \frac{R}{|\xi|}\frac{1}{|x-\xi^*|} = \mathcal{E}(|x-\xi|) - \mathcal{E}(\frac{|\xi|}{R}|x-\xi^*|)$.

По аналогии утверждаем, что функция Грина для n-мерного шара имеет вид:

$$G(x,\xi) = \mathcal{E}(|x-\xi|) - \mathcal{E}(\frac{|\xi|}{R}|x-\xi^*|). \tag{3.7}$$

Покажем теперь, что $\Delta_x G = 0$ при $x \in Q_R^0$. Для этого покажем, что $\Delta_x \mathcal{E}(\frac{|\xi|}{R}|x-\xi^*|) = 0$, т.е. $\mathcal{E}(\frac{|\xi|}{R}|x-\xi^*|)$ - гармоническая функция по x.

$$\mathcal{E}(\frac{|\xi|}{R}|x-\xi^*|) = \frac{1}{\omega_n(n-2)}\left(\left(\frac{|\xi|}{R}\right)^{2-n}|x-\xi^*|^{2-n}\right) =$$

$$= \left(\frac{|\xi|}{R}\right)^{2-n}\mathcal{E}(|x-\xi^*|) = \left(\frac{|\xi|}{R}\right)^{2-n}E(x,\xi^*).$$

Но функция $E(x,\xi^*)$ - фундаментальное решение уравнения Лапласа, т.е. является гармонической функцией при $x \neq \xi^*$, так как $x \in Q_R^0$, $\xi^* \notin Q_R^0$.

Проверим теперь, выполняется ли условие

$$G|_{|x|=R} = \mathcal{E}(|y-\xi|) - \mathcal{E}(\frac{|\xi|}{R}|y-\xi^*|) = 0. \tag{3.8}$$

Для этого достаточно показать, что при $y \in S_R^0$

$$|y-\xi| = \frac{|\xi|}{R}|y-\xi^*|. \tag{3.9}$$

Выше было показано, что функция $G(x,\xi)$ симметрична, т.е. $G(x,\xi) = G(\xi,x)$, поэтому из (3.7) следует, что $\mathcal{E}(|x-\xi|)$ и $\mathcal{E}(\frac{|\xi|}{R}|x-\xi^*|)$ симметричны. Учитывая симметрию функции $\mathcal{E}(\frac{|\xi|}{R}|x-\xi^*|)$, получим:

$$\frac{|\xi|}{R}|x-\xi^*| = \frac{|\xi|}{R}\left|x-\frac{R^2}{|\xi|^2}\xi\right| = \left|\frac{|\xi|}{R}x-\frac{R}{|\xi|}\xi\right| = \left|\frac{|x|}{R}\xi-\frac{R}{|x|}x\right|.$$

Тогда

$$\frac{|\xi|}{R}|y-\xi^*| = \frac{|\xi|}{R}|x-\xi^*|\bigg|_{S_R^0} = |\frac{|x|}{R}\xi-\frac{R}{|x|}x|\bigg|_{S_R^0} = \left|\frac{|y|}{R}\xi-\frac{R}{|y|}y\right| = |\xi-y|$$

, так как $|y| = R$. Итак, имеет место (3.9), а значит выполняется (3.8).

Для того, чтобы получить решение задачи (3.1), (3.2), подставим (3.7) в (3.3). Для этого подсчитаем $\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y}$:

$$\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y} = \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n_y}\bigg|_{S_R^0} =$$

$$= \left[\mathcal{E}'(|x-\xi|)\frac{\partial|x-\xi|}{\partial n_y} - \frac{|\xi|}{R}\mathcal{E}'(\frac{|\xi|}{R}|x-\xi^*|)\frac{\partial|x-\xi^*|}{\partial n_y} - \frac{|\xi|}{R}\right]\bigg|_{S_R^0}. \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial|x-\xi|}{\partial n_y}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial|x-\xi|}{\partial x_k}\cos(n_y,x_k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k-\xi_k}{|x-\xi|}\frac{x_k}{|x|}, \tag{3.11}$$

так как направление внешней нормали совпадает с направлением радиус-вектора. Аналогично

$$\frac{\partial|x-\xi^*|}{\partial n_y}=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k-\xi_k^*}{|x-\xi|}\frac{x_k}{|x|}. \tag{3.12}$$

Учитывая (3.11) и (3.12), из (3.10) получаем:

$$\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y}=\mathcal{E}'(|y-\xi|)\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k-\xi_k}{|y-\xi|}\frac{y_k}{|y|}-\frac{|\xi|}{R}\mathcal{E}'(\frac{|\xi|}{R}|y-\xi^*|)\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k-\xi_k^*}{|y-\xi|}\frac{y_k}{|y|}. \tag{3.13}$$

В силу (3.6) и (3.9) имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k-\xi_k^*}{|y-\xi|}\frac{y_k}{|y|}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(y_k-\frac{R^2}{|\xi|^2}\xi_k)|\xi|y_k}{R|y-\xi||y|}. \tag{3.14}$$

Учитывая теперь (3.14) и (3.9), из (3.13) получим:

$$\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y}=\mathcal{E}'(|y-\xi|)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|y-\xi||y|}\left[(y_k^2-\xi_k y_k)-\frac{|\xi|^2}{R^2}\left(y_k^2-\frac{R^2}{|\xi|^2}\xi_k y_k\right)\right]=$$

$$=\mathcal{E}'(|y-\xi|)\frac{1}{|y-\xi||y|}\sum_{k=1}^{n}\left(y_k^2-\frac{|\xi|^2}{R^2}y_k^2\right)=$$

$$=\mathcal{E}'(|y-\xi|)\frac{1}{|y-\xi||y|}|y|^2\left(1-\frac{|\xi|^2}{R^2}\right). \tag{3.15}$$

Но

$$\mathcal{E}'(r)=\begin{cases}-\frac{r^{1-n}}{\omega_n}=-\frac{1}{\omega_n r^{n-1}},\ n\geq 3,\\ -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r},\ n=2,\end{cases} \tag{3.16}$$

поэтому из (3.15) с учетом (3.16) имеем:

$$\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y}=-\frac{1}{\omega_n|y-\xi|^{n-1}}\frac{R^2-|\xi^2|}{R|y-\xi|}=-\frac{R^2-|\xi|^2}{R\omega_n|y-\xi|^n}. \tag{3.17}$$

Подставляя (3.17) в (3.3), получим формулу Пуассона, дающую решение задачи (3.1), (3.2):

$$U(\xi)=\frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{S_R^0}\frac{R^2-|\xi|^2}{|\xi-y|^n}\phi(y)dS_y. \tag{3.18}$$

Обоснуем полученное решение. Для этого нужно показать, что (3.18) удовлетворяет (3.1) и (3.2).

На основании предыдущего решение задачи (3.1) и (3.2) можно записать в виде (3.3). Покажем, прежде всего, что (3.3) удовлетворяет уравнению (3.1) при $|z| < R$. Применим к функции (3.3) оператор Лапласа по переменной ξ, тогда получим:

$$\Delta_\xi U = -\Delta_\xi \int\limits_{S_R^0} \frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y} \phi(y) dS_y. \tag{3.19}$$

Мы пришли к задаче дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, по параметру. Так как $|y| = R$, $|\xi| < R$, то $\xi \neq y$, поэтому подынтегральная функция в интеграле (3.19) непрерывна по ξ и y и бесконечно дифференцируема по ξ, причем эти производные также непрерывны по ξ и y. Таким образом, оператор Лапласа можно ввести под знак интеграла. На основании теоремы о независимости смешанной производной от порядка дифференцирования из (3.20) получим:

$$\Delta_\xi U = -\int\limits_{S_R^0} \Delta_\xi \left[\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y}\right] \phi(y) dS_y = -\int\limits_{S_R^0} \frac{\partial}{\partial n_y} \left[\Delta_\xi G(y,\xi)\right] \phi(y) dS_y. \tag{3.20}$$

Известно, что $\Delta_x G(x,\xi) = 0$. Но в силу симметрии функции $G(x,\xi)$ имеем $\Delta_\xi G(x,\xi) = 0$, поэтому из (3.20) следует, что $\Delta_\xi U = 0$, т.е. (3.3), а значит (3.18) удовлетворяет уравнению (3.1).

Совершенно так же, как мы доказали, при решении задачи Дирихле для круга, можно показать, что при усолвии, что $\phi(y) \in C(\partial\Omega)$, $U(\xi)$, определяемая формулой (3.18), непрерывна в замкнутом шаре $\overline{Q_R^0}$ и удовлетворяет условию (3.2). Для этого достаточно доказать, что

$$\lim_{\xi \to y_0} U(\xi) = \phi(y_0),\ y_0 \in S_R^0. \tag{3.21}$$

Действительно, если мы докажем (3.21), то обоснуем решение. Функцию $U(\xi)$, определенную в открытом шаре Q_R^0, определим на сфере, положив $U|_{S_R^0} = \phi(y)$. Доопределенная таким образом функция будет гармонической внутри шара и непрерывной в замкнутом шаре $\overline{Q_R^0}$ в силу (3.21), причем будет удовлетворять условию (3.2).

XI.4 Лекция 31. Решение задачи Дирихле для внешности шара. Поведение гармонических функций и их производных на бесконечности.

XI.4.1 Решение задачи Дирихле для внешности шара.

Пусть $\overline{\Omega} = \{|x| \geq R\}$. Требуется найти функцию, удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\Delta U = 0,\ |x| > R \tag{4.1}$$

и граничным условиям

$$U|_{S_R^0} = \phi(y), \tag{4.2}$$

$$U(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right),\ |x| \to \infty. \tag{4.3}$$

Функция Грина в данном случае строится аналогично как для внутренности шара с той лишь разницей, что $\xi \in \{|x| > R\}$, а $\xi^* \in \{|x| < R\}$. Функция Грина будет иметь вид $G(x,\xi) = \mathcal{E}(|x-\xi|) - \mathcal{E}(\frac{|\xi|}{R}|x-\xi^*|)$, а решение задачи запишется по формуле:

$$U(\xi) = \frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{S_R^0} \frac{|\xi|^2 - R^2}{|\xi - y|^n}\phi(y)dS_y. \tag{4.4}$$

Аналогично предыдущему можно показать, что (4.4) удовлетворяет (4.1). Покажем, что (4.4) удовлетворяет(4.2). Заменим в (4.4) ξ его выражением через ξ^*, учитывая, что

$$|\xi||\xi^*| = R^2,\ |\xi|^2 = \frac{R^4}{|\xi^*|^2},\ \xi^* = \frac{R^2}{|\xi|^2}\xi. \tag{4.5}$$

Так как $\frac{|\xi-y|}{|\xi^*-y|} = \frac{|\xi|}{R} = \frac{R}{|\xi^*|}$, то

$$\frac{1}{|\xi - y|} = \frac{|\xi^*|}{R}\frac{1}{|\xi^* - y|}. \tag{4.6}$$

Подставляя (4.5) и (4.6) в (4.4), получим:

$$U(\xi) = U(\frac{|\xi|^2}{R^2}\xi^*) = U_1(\xi^*) = \frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{S_R^0} \frac{\left(\frac{R^4}{|\xi^*|^2} - R^2\right)\frac{|\xi^*|^n}{R^n}\phi(y)}{|\xi^* - y|^n}dS_y =$$

$$= \left(\frac{|\xi^*|}{R}\right)^{n-2}\frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{S_R^0} \frac{R^2 - |\xi^*|^2}{|\xi^* - y|^n}\phi(y)dS_y. \tag{4.7}$$

Так как $\xi \in \{|x| > R\}$, то $\xi^* \in \{|x| < R\}$, то множитель при $(\frac{|\xi^*|}{R})^{n-2}$ в (4.7) дает решение внутренней задачи Дирихле для шара $|x| \leq R$.

Переходим в (4.7) к пределу при $\xi \to y_0$, т.е. при $\xi^* \to y_0$. Тогда на основании предыдущего имеем:

$$\lim_{\xi \to y_0} U(\xi) = \lim_{\xi^* \to y_0} U_1(\xi^*) = \lim_{\xi^* \to y_0} \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0} \frac{R^2 - |\xi^*|^2}{|\xi^* - y|^n} \phi(y) dS_y = \phi(y_0),$$

так как $\lim\limits_{\xi^* \to y_0} (\frac{|\xi^*|}{R})^{n-2} = 1$.

Таким образом, (4.4) удовлетворяет условию (4.2). Покажем теперь. что (4.4) удовлетворяет условию (4.3). Пусть точка ξ настолько удалена от начала координат, что

$$|\xi| > 2R,\ R < \frac{|\xi|}{2}, \tag{4.8}$$

где R - фиксированное достаточно большое число. Тогда, учитывая (4.8), получим $|\xi - y| \geq |\xi| - |y| = |\xi| - |R| > |\xi| - \frac{|\xi|}{2} = \frac{|\xi|}{2}$, откуда

$$\frac{1}{|\xi - y|} < \frac{2}{|\xi|}. \tag{4.9}$$

На основании (4.9) имеем:

$$\frac{|\xi|^2 - R^2}{|\xi - y|^n} < \frac{|\xi|^2}{|\xi - y|^n} < \frac{|\xi|^2 2^n}{|\xi|^n} = \frac{2^n}{|\xi|^{n-2}}. \tag{4.10}$$

Учитывая (4.10), из (4.4) имеем:

$$|U(x)| < \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0} \frac{|\xi|^2 - R^2}{|\xi - y|^n} |\phi(y)| dS_y < \frac{A}{|\xi|^{n-2}}, \tag{4.11}$$

где $A = \frac{2^n}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0} |\phi(y)| dS_y$.

Таким образом, из (4.11) следует, что $\lim\limits_{|\xi| \to \infty} U(\xi) = 0$, т.е. имеет место (4.3).

XI.4.2 Поведение гармонических функций и их производных на бесконечности.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - конечная область с границей $\partial\Omega$, $\Omega_1 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Пусть $U(x) \in C^2(\Omega_1)$ в конечных точка Ω_1 и удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta U = 0$ в конечных точках Ω_1. Выясним поведение $U(x)$ при $|x| \to \infty$. Проведем сферу $S_R^0 = \{|x| = R\}$ достаточно большого радиуса R такого, чтобы $\Omega \subset\subset S_R^0$. Так как $U(x) \in C^2\{|x| \geq R\}$ и удовлетворяет уравнению Лапласа, т.е. ее можно рассматривать как решение задачи Дирихле для внешности шара, а значит, представить в виде интеграла Пуассона для внешности шара:

$$U(x) = \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0} \frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^n} U(y) dS_y, \tag{4.12}$$

где $U(y) = U|_{S_R^0}$.

Пусть $|x| > 2R$, $R < \frac{|x|}{2}$, тогда, рассуждая как и выше, получим $\frac{1}{|x-y|} < \frac{2}{|x|}$, плэтому

$$|U(x)| < \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0} \frac{|x|^2 2^n}{|x|^n} |U(y)| dS_y = \frac{A}{|x|^{n-2}}, \tag{4.13}$$

где $A = \frac{2^n}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0} |U(y)| dS_y$.

Из (4.13) получаем, что

$$U(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right),\ |x| \to \infty.$$

Оценим теперь поведение производных гармонических функций. Так как в (4.12) $x \neq y$, то подинтегральная функция непрерывна и имеет непрерывные производные, поэтому в (4.12) можно дифференцировать под знаком интеграла:

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^n}\right) U(y) dS_y, \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^n}\right) = \frac{1}{|x-y|^n} \frac{\partial}{\partial x_k}(|x|^2 - R^2) - n\frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^{n+1}} \frac{\partial}{\partial x_k}(|x-y|) =$$

$$= \frac{2x_k}{|x-y|^n} - n\frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^{n+1}} \frac{x_k - y_k}{|x-y|}. \tag{4.15}$$

Поэтому, учитывая (4.15), из (2.14) имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0} \left[\frac{2x_k}{|x-y|^n} - n\frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^{n+1}} \frac{x_k - y_k}{|x-y|}\right] U(y) dS_y. \tag{4.16}$$

Пусть $|x| > 2R$, тогда $\frac{1}{|x-y|} < \frac{2}{|x|}$. Кроме того, $|x_k| \le |x|$, $\frac{|x_k-y_k|}{|x-y|} \le 1$, поэтому из (4.16) имеем:

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x_k}\right| < \frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{S_R^0}\left[\frac{2^{n+1}|x|}{|x|^n} + n\frac{|x|^2 2^{n+1}}{|x|^{n+1}}\right]|U(y)|dS_y =$$

$$= \frac{2^{n+1}}{\omega_n R}(1+n)\frac{1}{|x|^{n-1}}\int\limits_{S_R^0}|U(y)|dS_y = \frac{A_1}{|x|^{n-1}},\ A_1 = \frac{2^{n+1}}{\omega_n R}(1+n)\int\limits_{S_R^0}|U(y)|dS_y.$$

Итак,

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = O\left(\frac{1}{|x|^{n-1}}\right),\ |x| \to \infty,\ k = \overline{1,n}, \tag{4.17}$$

т.е. $\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{\partial U}{\partial x_k} = 0$. Заметим, что при $n = 2$ из (4.17) следует $\frac{\partial U}{\partial x_k} = O(\frac{1}{|x|})$, $|x| \to \infty$. Эту оценку можно уточнить и улучшить, используя связь между гармоническими и аналитическими функциями.

Пусть $U(x)$ - гармоническая функция, причем ограниченная на бесконечности, т.е. $|U(x)| < A$ при $|x| \to \infty$. Будем рассматривать $U(x)$ как вещественную часть некоторой аналитической функции $\phi(z)$, т.е. $U(x) = Re\phi(z)$, $z = x_1 + ix_2$. По вещественной части построим аналитическую функцию $\phi(z) = U + iV$, причем в силу аналитичности в окрестности бесконечно удаленной точки $\phi(z)$ можно представить в виде ряда:

$$\phi(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + ... \tag{4.18}$$

Дифференцируя (4.18), имеем $\phi'(z) = -\frac{a_1}{z^2} - \frac{2a_2}{z^3} - ... = \frac{1}{z^2}\phi_1(z)$, где $\phi_1(z)$ аналитична в окрестности бесконечности, причем $|\phi_1(z)| < A$ на бесконечности. Далее, так как

$$\phi'(z) = \frac{\partial U}{\partial x_1} + i\frac{\partial V}{\partial x_1}, \tag{4.19}$$

где V - сопряженная гармоническая функция к U, т.е. связанная с ней условиями Коши-Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial V}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial x_2}. \end{cases} \tag{4.20}$$

Тогда, учитывая (4.20), из (4.19) имеем:

$$\phi'(z) = \frac{\partial U}{\partial x_1} - i\frac{\partial U}{\partial x_2}. \tag{4.21}$$

Из (4.21) имеем $|\phi'(z)| = \sqrt{(\frac{\partial U}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial U}{\partial x_2})^2}$, поэтому

$$|\frac{\partial U}{\partial x_k}| \leq |\phi'(z)| < \frac{A}{|z|^2} = \frac{A}{|x|^2},\ k = 1, 2, \tag{4.22}$$

т.е. оценка (4.22) уточняет оценку (4.17) на единицу.

XII Задача Неймана.

XII.1 Лекция 32. Задача Неймана.

XII.1.1 Постановка задачи Неймана. Корректность задачи Неймана.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω - конечная область, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\Omega_1 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

I. Внутренняя задача Неймана.

Найти функцию $U(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\Delta U = 0,\ x \in \Omega \tag{1.1}$$

и граничному условию

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \phi(y),\ y \in \partial\Omega, \tag{1.2}$$

где $\vec{n}$ - внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

II. Внешняя задача Неймана.

Найти функцию $U(x) \in C^2(\Omega_1) \cap C^1(\overline{\Omega_1})$, $\overline{\Omega_1} = \Omega_1 \cup \partial\Omega$, удовлетворяющую в конечных точках уравнению

$$\Delta U = 0,\ x \in \Omega_1 \tag{1.3}$$

и граничному условию

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \phi_1(y),\ y \in \partial\Omega, \tag{1.4}$$

где $\vec{n}$ - внутренняя нормаль к $\partial\Omega$.

Кроме того,

$$U(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right),\ |x| \to \infty. \tag{1.5}$$

Докажем сначала формулу Дирихле. Пусть $U, V \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, тогда имеет место вторая формула Грина:

$$\int\limits_{\Omega} (V\Delta U - U\Delta V)dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(V\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial V}{\partial n}\right)dS. \tag{1.6}$$

Положим в (1.6) $V \equiv 1$, $U = \omega^2$, где $\Delta\omega = 0$. Тогда $\frac{\partial U}{\partial x_k} = 2\omega\frac{\partial \omega}{\partial x_k}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2} = 2(\frac{\partial \omega}{\partial x_k})^2 + 2\omega\frac{\partial^2\omega}{\partial x_k^2}$, поэтому

$$\Delta U \equiv \sum_{k=1} n\frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2} = 2\sum_{k=1} n\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right)^2 + 2\omega\sum_{k=1} n\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_k^2} =$$

$$= 2|\nabla\omega|^2 + 2\omega\Delta\omega = 2|\nabla\omega|^2, \tag{1.7}$$

где $\nabla\omega = (\frac{\partial\omega}{\partial x_1}, \frac{\partial\omega}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial\omega}{\partial x_n})$,

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 2\omega\frac{\partial\omega}{\partial n}. \tag{1.8}$$

Учитывая теперь, что $\Delta V = 0$, $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$ и (1.7), (1.8), из (1.6) получим формулу Дирихле:

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla\omega|^2 dx = \int\limits_{\partial\Omega} \omega\frac{\partial\omega}{\partial n} dS, \tag{1.9}$$

причем интеграл, стоящий слева в (1.9), называется интегралом Дирихле.

Теорема 1. Любые два решения внутренней задачи Неймана при любом n отличаются на постоянное слагаемое. Для разрешимости задачи необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_{\partial\Omega} \phi(y) dS = 0. \tag{1.10}$$

Таким образом, внутренняя задача Неймана не корректна, так как нет единственности и решение существует не при любой $\phi(y)$, а только при выполнении условия (1.10).

Доказательство. Предположим, что существует два решения U_1 и U_2. Рассмотрим разность $\omega = U_1 - U_2$, тогда $\omega(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и граничному условию

$$\left.\frac{\partial\omega}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0,\ y \in \partial\Omega. \tag{1.11}$$

Применим к функции ω формулу Дирихле (1.9). Тогда, учитывая (1.11), получим $\int\limits_{\Omega} |\nabla\omega|^2 dx = 0$, откуда, учитывая, что подинтегральная функция неотрицательна, имеем $|\nabla\omega|^2 = 0$, $x \in \overline{\Omega}$, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{\partial\omega}{\partial x_k})^2 = 0$, $\frac{\partial\omega}{\partial x_k} \equiv 0$, $k = \overline{1, n}$, т.е. $\omega(x) \equiv C$, где $C - const$, т.е. $U_1 - U_2 = C$.

Пусть задача Неймана разрешима, т.е. существует решение $U(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее уравнению (1.1) и условию (1.2). Проинтегрируем обе части (1.2) по $\partial\Omega$, тогда получим:

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial U}{\partial n} dS = \int\limits_{\partial\Omega} \phi(y) dS. \tag{1.12}$$

Однако на основании теоремы о потоке для гармонических функций имеем, что левая часть (1.12) равна нулю, поэтому имеет место (1.10).

□

Теорема 2. Внешняя задача Неймана при $n \geq 3$ не может иметь более одного решения.

Доказательство. Предположим, что начало координат лежит внутри Ω. Построим сферу $S_R^0 = \{|x| = R\}$, содержащую внутри Ω. Обозначим через $\Omega_R = \Omega_1 \cap \{|x| \leq R\}$, причем граница $\partial\Omega_R = \partial\Omega \cup S_R^0$.

Предположим, что существует два решения U_1 и U_2. Рассмотрим $\omega = U_1 - U_2$. Тогда ω удовлетворяет уравнению (1.3), условию (1.11) и условию (1.5). Применим к функции ω и области Ω_R формулу Дирихле:

$$\int\limits_{\Omega_R} |\nabla\omega|^2 dx = \int\limits_{\partial\Omega} \omega \frac{\partial\omega}{\partial n} dS + \int\limits_{S_R^0} \omega \frac{\partial\omega}{\partial n} dS,$$

откуда, учитывая (1.11), имеем:

$$\int\limits_{\Omega_R} |\nabla\omega|^2 dx = \int\limits_{S_R^0} \omega \frac{\partial\omega}{\partial n} dS. \tag{1.13}$$

Формула (1.13) справедлива для достаточно большого R, поэтому перейдем в (1.13) к пределу при $R \to \infty$. Покажем, что предел правой части существует и равен нулю. Тогда отсюда будет следовать, что существует предел левой части, причем $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\Omega_R} |\nabla\omega|^2 dx = \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\omega|^2 dx$.

Оценим интеграл в правой части (1.13):

$$\left| \int\limits_{S_R^0} \omega \frac{\partial\omega}{\partial n} dS \right| \leq \int\limits_{S_R^0} |\omega| \left| \frac{\partial\omega}{\partial n} \right| dS. \tag{1.14}$$

Так как ω - гармоническая функция, то при всех достаточно больших $|y| = R$ имеем:

$$|\omega(y)| < \frac{A}{|y|^{n-2}} = \frac{A}{R^{n-2}},\ |\frac{\partial\omega}{\partial x_k}| < \frac{A_1}{|y|^{n-1}} = \frac{A_1}{R^{n-1}}. \tag{1.15}$$

Тогда, учитывая (1.15), получим:

$$\left| \frac{\partial\omega}{\partial n} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\omega}{\partial x_k} \cos(x_k, n) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial\omega}{\partial x_k} \right| < \frac{nA_1}{R^{n-1}}. \tag{1.16}$$

С учетом (1.15) и (1.16) из (1.14) имеем:

$$\int\limits_{S_R^0} |\omega(y)| \left|\frac{\partial\omega(y)}{\partial n}\right| dS < \frac{nAA_1}{R^{2n-3}} \int\limits_{S_R^0} dS = \frac{nAA_1}{R^{2n-3}}\omega_n R^{n-1} = \frac{nAA_1\omega_n}{R^{n-2}},$$

откуда видно, что

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{S_R^0} \omega\frac{\partial\omega}{\partial n}dS = 0, \text{ так как } n \geq 3. \tag{1.17}$$

Если учесть теперь (1.17), то из (1.13) при $R \to \infty$ получим $\int\limits_{\Omega_1} |\nabla\omega|^2 dx = 0$, откуда $\omega(x) \equiv C_1$, $x \in \overline{\Omega_1}$, где $C_1 - const$. Но в силу (1.5) $\lim\limits_{|x|\to\infty} \omega(x) = 0$, поэтому $C_1 = 0$, а значит, $U_1 = U_2$.

$\square$

Теорема 3. При $n = 2$ любые два решения внешней задачи Неймана отличаются на постоянное слагаемое. Для разрешимости задачи необходимо, чтобы

$$\int\limits_{\partial\Omega} \phi_1(y)dS = 0. \tag{1.18}$$

Доказательство. Как и при $n \geq 3$ построим окружность $S_R^0 = \{|x| = R\}$, содержащую внутри Ω и обозначим через $\Omega_R = \Omega_1 \cap \{|x| \leq R\}$. Рассмотрим функцию $\omega = U_1 - U_2$ и получим как и выше:

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla\omega|^2 dx = \int\limits_{S_R^0} \omega\frac{\partial\omega}{\partial n}dS. \tag{1.19}$$

Оценим интеграл правой части (1.19) при достаточно больших R:

$$|\omega| < A,\ |\frac{\partial\omega}{\partial x_k}| < \frac{A_1}{R^2},\ \frac{\partial\omega}{\partial n} < \frac{2A_1}{R^2}. \tag{1.20}$$

Поэтому, учитывая (1.20), получим:

$$\left|\int\limits_{S_R^0} \omega\frac{\partial\omega}{\partial n}dS\right| < \frac{2AA_1}{R^2}\int\limits_{S_R^0} dS = \frac{2AA_1}{R^2}2\pi R = \frac{4\pi AA_1}{R},$$

откуда $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{S_R^0}\omega\frac{\partial\omega}{\partial n}dS=0$, а значит, $\int\limits_{\Omega_1}|\nabla\omega|^2dx=0$, т.е. $\omega(x)\equiv C$, $C-const$, т.е. $U_1-U_2=C$, причем $C\neq 0$.

Докажем теперь (1.18). При изучении свойств гармонических функций была доказана теорема о потоке в случае, когда Ω - конечная область. Однако можно доказать, что теорема верна для функций, гармонических в бесконечной области Ω_1.

Для доказательства возьмем область Ω_R. К этой конечной области применим теорему о потоке, тогда получим:

$$\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial U}{\partial n}dS+\int\limits_{S_R^0}\frac{\partial U}{\partial n}dS=0. \tag{1.21}$$

Перейдем в (1.21) к пределу при $R\to\infty$. Тогда, учитывая, что $|\int\limits_{S_R^0}\frac{\partial U}{\partial n}dS|<\frac{2A_1}{R^2}\int\limits_{S_R^0}dS=\frac{2A_1}{R^2}2\pi R=\frac{4\pi A_1}{R}$, получим $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{S_R^0}\frac{\partial U}{\partial n}dS=0$. Таким образом,

$$\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial U}{\partial n}dS=0, \tag{1.22}$$

где $U(x)$ - гармоническая в Ω_1, причем $U(x)\in C^1(\overline{\Omega_1})$.

Предположим теперь, что внешняя задача Неймана при $n=2$ разрешима, интегрируя (1.4) по $\partial\Omega$, получим $\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial U}{\partial n}dS=\int\limits_{\partial\Omega}\phi_1(y)dS$, откуда с учетом (1.22) получим (1.18).

$\square$

Список литературы

[1] Аблаева С.Г., Салехова И.Г. *Методическое пособие для проведения практических занятий по курсу "Уравнения математической физики"* // Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, Казань, 2010.

$http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05-036_000518.pdf$

[2] Владимиров В.С., Жаринов В.В. *Уравнения математической физики* // Физматлит, М., 2004.

[3] Ильин А.М. *Уравнения математической физики* // Физматлит, М., 2009.

[4] Петровский И.Г. *Лекции об уравнениях с частными производными* // Физматлит, М., 2009.

[5] Салехова И.Г. *Уравнения математической физики, I. Курс лекций.*

$http://dspace.kpfu.ru/xmlui/handle/net/103017$