КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра технологий программирования

Медведева О.А., Еникеева З.А.

ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ И ПОЛНОТА СИСТЕМ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Учебно-методическое пособие

Казань – 2018

УДК 519.1

*Печатается по решению
кафедры технологий программирования
Казанского федерального университета
Протокол № 6 от 18 апреля 2018 г.*

Рецензент:
*кандидат экономических наук,
доцент кафедры технологий программирования
ИВМиИТ КФУ Вахитов Г.З.*

Авторы: Медведева О.А., Еникеева З.А.

Замкнутые классы и полнота систем функций алгебры логики. / О.А. Медведева, З.А. Еникеева – Казань: Издательство Казанского федерального университета, 2018. – 26 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, изучающих курс "Дискретная математика", а также для преподавателей, ведущих практические занятия по данному курсу.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория булевых функций содержится в основе современной дискретной математики. Наряду с булевыми предикатами булевы функции являются простыми объектами дискретной природы. Язык булевых функций хорошо приспособлен для описания подразделения целого на части и взаимосвязи этих частей. Поэтому он широко используется в самых разнообразных областях знаний, например, таких как: математика или кибернетика (теория множеств и математическая логика, алгебра, теория графов и комбинаторика, теория информации, теория формальных языков и языков программирования, синтез управляющих систем и распознавание образов и т.д.), техника (анализ и построение различных устройств коммутации, управления и переработки информации, включая современные ЭВМ, тестирование сложных систем и построение надежных схем), экономика, биология или социология.

В вопросах приложений булевых функций наиболее часто встречаются две основные задачи: можно ли выразить заданную функцию или заданный класс функций булевыми функциями из имеющегося запаса булевых функций, и если это возможно, то каким образом и с какой сложностью.

В качестве выразительных средств в этих задачах могут выступать самые разнообразные средства. Однако наиболее характерной для булевых функций является возможность осуществлять композиции (суперпозиции) функций. Соответственно этому, говоря о выразимости булевой функции f через функции системы булевых функций F, чаще всего имеют в виду, что функцию f можно получить в виде суперпозиции функций системы F.

Если в качестве средств выразимости принять операцию суперпозиции, то задачу выразимости булевых функций в самой общей форме можно представить так: для произвольного (возможно, бесконечного) множества f булевых функций описать множество всех тех булевых функций, которые выразимы в виде суперпозиции функций из f. С привлечением понятия оператора замыкания, определяемого на основе операции суперпозиции, эту же задачу можно сформулировать как задачу описания по произвольному множеству F булевых функций его замыкания $[F]$. Наконец, несколько сужая общность постановки задачи, можно говорить о задаче описания всех замкнутых классов булевых функций (классов Поста). Эта задача была решена американским математиком Эмилем Постом в 1921 г. (полное ее изложение опубликовано в 1941 г.). Однако достаточную известность результаты Поста получили лишь в середине 50-х годов. Круг задач, связанных с классами Поста, постоянно расширялся как за счет распространения понятий на другие функциональные объекты, так и за счет более детального исследования самих классов Поста [5].

Материал данного учебно-методического пособия содержит краткую теорию и задачи по темам, связанным с замкнутыми классами и критерием Поста о полноте систем булевых функций. Пособие предназначено для студентов, изучающих курс “Дискретная математика”, а также для преподавателей, ведущих лекционные и практические занятия по данному курсу.

§1. Понятия функциональной замкнутости и полноты

Замыканием $[K]$ множества K функций алгебры логики называется совокупность всех функций из P_2, являющихся суперпозициями функций из множества K.

Множество K называется (*функционально*) *замкнутым*, если $[K] = K$. Замкнутые множества называются также *замкнутыми классами*. Подмножество P функций из замкнутого множества K называется (*функционально*) *полным в* K, если $[P] = K$.

Полное в замкнутом классе K множество P называется *базисом класса* K, если для всякого собственного подмножества $P' \subset P$ выполнено $[P'] \neq K$.

Подмножество P функций из замкнутого класса K называется *предполным классом в* K, в том случае, если $[P] \neq K$ и для всякой функции $f \in K \setminus P$ выполняется равенство $[P \cup \{f\}] = K$.

Отметим некоторые свойства замыкания:

1. Любое множество является подмножеством своего замыкания: $K \subseteq [K]$.

2. Замыкание подмножества является подмножеством замыкания: $K \subseteq F \Rightarrow [K] \subseteq [F]$.

3. Следует заметить, что из строгого вложения множеств следует лишь нестрогое вложение их замыканий: $K \subset F \Rightarrow [K] \subseteq [F]$.

4. Многократное применение операции замыкания для множества K эквивалентно однократному: $[[K]] = [K]$.

5. $[K \cap F] \subseteq [K] \cap [F]$;

6. $[K \cup F] \subseteq [K] \cup [F]$.

Функции f_1 и f_2 называются *конгруэнтными*, если одна из них может быть получена из другой заменой переменных (без отождествления). Например, функции $x\overline{y}$ и $y\overline{z}$ конгруэнтны, а функции xy и zz не являются конгруэнтными.

При рассмотрении вопросов, связанных с замкнутыми классами, бывает удобно указывать по одному представителю из множества попарно конгруэнтных функций. Например, класс $\{x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots\}$, состоящий из всех тождественных функций, будет обозначаться через $\{x\}$.

Если A – некоторое множество функций, то через $A(X^n)$ или через A^n будет обозначаться множество тех функций из A, которые зависят только от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Множество P_2 всех возможных булевых функций замкнуто.

Для теории булевых функций важное значение имеют следующие замкнутые классы, называемые предполными классами:

1. Класс T_0 функций, сохраняющих константу 0:
$T_0 = \{f(x_1, \ldots, x_n) \mid f(0, \ldots, 0) = 0\}$.

2. Класс T_1 функций, сохраняющих константу 1:
$T_1 = \{f(x_1, \ldots, x_n) \mid f(1, \ldots, 1) = 1\}$.

3. Класс S самодвойственных функций:
$S = \{f(x_1, \ldots, x_n) \mid f(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})\}$.

4. Класс M монотонных булевых функций:
$M = \{f(x_1, \ldots, x_n) \mid \forall\ i\ \alpha_i \leq \beta_i \Rightarrow f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leq f(\beta_1, \ldots, \beta_n)\}$.

5. Класс L линейных булевых функций:
$L = \{f(x_1, \ldots, x_n) \mid f(x_1, \ldots, x_n) = = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_n x_n\}$.

Всякий нетривиальный (отличный от P_2) замкнутый класс булевых функций целиком содержится хотя бы в одном из классов T_0, T_1, S, M, L.

Замкнутый класс булевых функций, содержащий не только константы, обязательно содержит тождественную функцию.

Другими важными замкнутыми классами являются:

1. Класс конъюнкций K, являющийся замыканием множества $\{\wedge, 0, 1\}$. Он представляет собой множество функций вида: $c_0 \wedge (c_1 \vee x_1) \wedge ... \wedge (c_n \vee x_n)$.

2. Класс дизъюнкций D, являющийся замыканием множества $\{\vee, 0, 1\}$. Он представляет собой множество функций вида: $c_0 \vee (c_1 \wedge x_1) \vee ... \vee (c_n \wedge x_n)$.

3. Класс функций одной переменной U, содержащий только константы, отрицание и селектор (функцию, равную одному из своих аргументов на всех наборах их значений).

4. Класс O^m функций (m — любое натуральное, большее единицы число), удовлетворяющих следующему условию: для любых m наборов, на которых функция принимает нулевое значение, найдется переменная, также принимающая нулевое значение на всех этих наборах.

5. Класс O^∞ функций, для которых выполнено условие $f(x_1,..., x_n) \geq x_i$, где x_i – одна из переменных функции.

6. Класс I^m функций (m — любое натуральное, большее единицы число), удовлетворяющих следующему условию: для любых m наборов, на которых функция принимает единичное значение, найдется переменная, также принимающая единичное значение на всех этих наборах.

7. Класс I^∞ функций, для которых выполнено условие $f(x_1,..., x_n) \leq x_i$, где x_i – одна из переменных функции.

В научных работах американского математика Эмиля Поста показано, что любой замкнутый класс булевых функций является пересечением конечного числа описанных выше классов, приведено полное описание структуры замкнутых классов двузначной логики. Также Пост установил, что любой замкнутый класс может быть порожден конечным базисом.

Задачи

1.1. Выяснить, какие из указанных ниже множеств являются замкнутыми множествами:

a) множество всех функций от одной переменной;

b) множество всех функций от двух переменных;

c) множество всех функций $f(x_1, x_2,..., x_n)$ таких, что $f(1, 1,..., 1) = 1$, $n \geq 0$;

d) множество всех функций $f(\widetilde{x}^n)$, $n \geq 0$, таких, что $f(1, 1,..., 1) = 0$;

e) множество всех функций, выражаемых полиномом Жегалкина не выше первой степени;

f) множество всех функций, допускающих представление в виде ДНФ и не содержащих отрицаний переменных;

g) множество всех функций, любая ДНФ которых содержит хотя бы одно отрицание переменной.

1.2. Построить множество всех функций, зависящих от переменных x_1, x_2 и принадлежащих замыканию множества A:

a) $A = \{\overline{x}\}$;

b) $A = \{0, \overline{x}\}$;

c) $A = \{x_1x_2\}$;

d) $A = \{x_1 \oplus x_2\}$;
e) $A = \{x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1\}$;
f) $A = \{\overline{x}_1 \vee x_2\}$;
g) $A = \{0,\, x_1 \sim x_2\}$;
h) $A = \{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$;
i) $A = \{x_1 \oplus x_2,\, x_1x_2\}$;
j) $A = \{x_1 \to x_2\}$;
k) $A = \{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1\}$;
l) $A = \{x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_3\overline{x}_1\}$.

1.3. Показать, что $f \in [A]$, выразив f формулой над множеством A:
a) $f = x$, $A = \{xy\}$;
b) $f = x$, $A = \{xy \vee yz \vee zx\}$;
c) $f = 0$, $A = \{xy \oplus z\}$;
d) $f = \{\overline{x}\}$, $A = \{0,\, x \to y\}$;
e) $f = xy$, $A = \{x \vee y,\, x \oplus y\}$;
f) $f = x \oplus y \oplus z$, $A = \{x\overline{y},\, x \vee y\}$;
g) $f = x \oplus y \oplus z$, $A = \{xy \vee y\overline{z} \vee \overline{z}x\}$;
h) $f = x \vee y$, $A = \{x \to y\}$;
i) $f = xy$, $A = \{xy \oplus z\}$;
j) $f = x \oplus y$, $A = \{x \downarrow y\}$;
k) $f = x \oplus y \oplus z$, $A = \{x \sim y\}$;
l) $f = xy$, $A = \{x \sim y\}$;
m) $f = xy$, $A = \{x \to y\}$.

1.4. Выписать все попарно неконгруэнтные функции $f(\widetilde{x}^3)$, принадлежащие замыканию множества A:
a) $A = \{x \sim y\}$;
b) $A = \{1,\, \overline{x}\}$;
c) $A = \{xy\}$;
d) $A = \{x\overline{y}\}$;
e) $A = \{x \to y\}$;
f) $A = \{x \oplus y\}$;
g) $A = \{x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$;
h) $A = \{xy \vee z\}$;
i) $A = \{x \vee y \vee z\}$;
j) $A = \{xy \vee yz \vee zx\}$.

1.5. Выделить базис из полной для класса $[A]$ системы:
a) $A = \{0,\, 1,\, \overline{x}\}$;
b) $A = \{x \oplus y,\, x \to y,\, 1\}$;
c) $A = \{x \vee y,\, x \to y\}$;
d) $A = \{x\overline{y},\, xy\}$;
e) $A = \{xy,\, xy \vee \overline{x}z\}$;
f) $A = \{x,\, x \oplus y,\, x \oplus y \oplus z\}$;
g) $A = \{1,\, x \sim y,\, x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$;
h) $A = \{xy,\, x \vee y,\, xy \vee z\}$.

1.6. Выяснить, является ли множество A замкнутым классом. Предполагается, что вместе с каждой функцией f из A множеству A принадлежат и все функции из P_2 конгруэнтные f:

a) $A = \{0,\ 1\}$;
b) $A = \{\overline{x}\}$;
c) $A = \{x,\ \overline{x}\}$;
d) $A = \{1,\ \overline{x}\}$;
e) $A = \{x_1 \cdot ... \cdot x_n,\ \text{n} = 1,\ 2,\ ...\}$;
f) $A = \{x_1 \oplus ... \oplus x_n,\ \text{n} = 1,\ 2,\ ...\}$;
g) $A = \{0,\ x_1 \vee ... \vee x_n,\ \text{n} = 1,\ 2,\ ...\}$.

1.7. a) Перечислить все замкнутые классы $K \subseteq P_2$ такие, что число попарно не равных функций в K конечно.

b) Перечислить все замкнутые классы $K \subseteq P_2$ такие, что число попарно неконгруэнтных функций конечно.

c) Указать множество $A \subseteq P_2$ такое, что для каждого $n \geq 1$ число функций из $[A]$, существенно зависящих от переменных x_1, ..., x_n, равно 1.

1.8. Сведением к заведомо полным системам в P_2 показать, что множество A является полной системой в P_2:
a) $A = \{x \downarrow y\}$;
b) $A = \{xy \oplus z,\ (x \sim y) \oplus z\}$;
c) $A = \{x \to y,\ f = (010111110)\}$;
d) $A = \{\overline{xy} \vee z,\ x \oplus y\}$.

1.9. Перечислить все предполные классы замкнутого класса:
a) $K = [0,\ \overline{x}]$;
b) $K = [0,\ 1]$;
c) $K = [xy]$;
d) $K = [x \oplus y]$;
e) $K = [0,\ x \vee y]$;
f) $K = [1,\ xy]$;
g) $K = [x \oplus y \oplus z]$;
h) $K = [x \oplus y,\ 1]$.

1.10. Выписать все попарно неконгруэнтные функции $f(\widetilde{x}^3)$, принадлежащие замыканию множества A:
a) $A = \{1,\ \overline{x}\}$;
b) $A = \{xy\}$;
c) $A = \{x \sim y\}$;
d) $A = \{x \to y\}$;
e) $A = \{x\overline{y}\}$;
f) $A = \{x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$;
g) $A = \{x \vee y \vee z\}$.

1.11. Привести примеры замкнутых классов K_1, K_2 из P_2 таких, что $K_1 \subseteq K_2$, и таких, что:
a) $K_1 \cap K_2 = \oslash$, $K_2 \setminus K_1 = \oslash$, $[K_1 \cup K_2] = K_1 \cup K_2$;
b) $K_1 \cup K_2 = \oslash$, $K_2 \setminus K_1 = \oslash$, $[K_1 \cap K_2] = K_1 \cap K_2$;
c) $K_1 \cap K_2 = \oslash$, $K_2 \setminus K_1 = \oslash$, $[K_1 \setminus K_2] = K_1 \setminus K_2$;
d) $K_1 \cap K_2 = \oslash$, $K_2 \setminus K_1 = \oslash$, $[K_1 \oplus K_2] = K_1 \oplus K_2$.

§2. Классы функций, сохраняющих константы

Функция $f(\widetilde{x}^n)$ *сохраняет константу* 0 (*константу* 1), если $f(0,\ 0,\ ...,0) = 0$ (соответственно, если $f(1,\ 1,\ ...,\ 1) = 1$). Множество всех функций алгебры логики, сохраняющих константу 0 (константу 1), обозначается через T_0 (соответственно, через T_1). Множество всех из T_0 (T_1), зависящих от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, будет обозначаться через T_0^n (соответственно, через T_1^n). Каждое из множеств T_0, T_1 является замкнутым и предполным в P_2 классом.

2.1. Выяснить, принадлежит ли функция f множеству $T_1 \setminus T_0$:

a) $f = (x_1 \to x_2)\ (x_2 \to x_3)(x_3 \to x_1)$;
b) $f = x_1 \to (x_2 \to (x_3 \to x_1))$;
c) $f = x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2$;
d) $\widetilde{\alpha}_f = (1001\ 0110)$;
e) $\widetilde{\alpha}_f = (1101\ 1001)$;
f) $\widetilde{\alpha}_f = (1000\ 0111)$.

2.2. Подсчитать число функций, зависящих от переменных $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ и принадлежащих множеству A:

a) $A = T_0 \cup T_1$;
b) $A = T_0 \cap L$;
c) $A = T_1 \cap S$;
d) $A = L \setminus T_1$;
e) $A = (L \cup T_1) \cap S$;
f) $A = S \cap T_0$;
g) $A = (S \cap T_0) \cup T_1$;
h) $A = (T_0 \setminus T_1) \cap S$;
i) $A = (S \cap T_0) \cap L$;
j) $A = (L \setminus (T_0) \cup T_1)$;
k) $A = (L \setminus S) \cup (T_0 \setminus T_1)$.

2.3. Выяснить, является ли множество A базисом в классе K:

a) $A = \{xy \sim z\}$, $K = T_1$;
b) $A = \{xy \vee z\}$, $K = T_0$;
c) $A = \{xy,\ x \sim y,\ x \vee y\}$, $K = T_1$;
d) $A = \{x \oplus y \oplus z,\ x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$, $K = T_0 \cap L$;
e) $A = \{xy \oplus y \oplus z,\ x \oplus y \oplus z\}$, $K = T_0 \cap T_1$;
f) $A = \{(x \sim y) \sim z\}$, $K = L \cap S \cap T_0$;
g) $A = \{xy,\ x \oplus y \oplus z,\ x \vee y\}$, $K = T_0 \cap T_1$.

2.4. В заданном векторе $\widetilde{\alpha}_f$ заменить прочерки символами из множества $\{0,\ 1\}$ так, чтобы получился вектор $\widetilde{\alpha}_f$ значений некоторой функции f, образующей базис в K. Доказать единственность решения:

a) $\widetilde{\alpha}_f = (- - - -)$, $K = T_0 \cap T_1$;
b) $\widetilde{\alpha}_f = (- - - - - - - -)$, $K = L \cap S$;
c) $\widetilde{\alpha}_f = (-\ 110 - 11\ -)$, $K = T_0$;
d) $\widetilde{\alpha}_f = (- - - -)$, $K = T_1 \cap L$;
e) $\widetilde{\alpha}_f = (- - - - - - - -)$, $K = L \cap S \cap T$;
f) $\widetilde{\alpha}_f = (-\ 0 - - -\ 0 - -)$, $K = S \cap T_1$;
g) $\widetilde{\alpha}_f = (-\ 00 - - - - -)$, $K = S$;
h) $\widetilde{\alpha}_f = (- - - -\ 1 - 0\ -)$, $K = S \cap T_1$.

§3. Класс самодвойственных функций

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *самодвойственной*, если

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f^*(x_1, x_2, ..., x_n),$$

или, что то же самое, если

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}).$$

Из данного определения следует, что функция является самодвойственной тогда и только тогда, когда на любых двух противоположных наборах значений переменных она принимает противоположные значения. Класс самодвойственных функций обозначим через S.

Справедливо следующее утверждение (*лемма о несамодвойственной функции*): если функция $f(\widetilde{x}^n)$ не является самодвойственной, то, подставляя на места ее переменных функции x и $\overline{x}$ можно получить константу.

Если A – некоторое множество функций из P_2, то через A^* будет обозначаться множество всех функций, двойственных к функциям из множества A.

Множество A^* называется *двойственным к множеству* A.

Если $A^* = A$, то множество A называется *самодвойственным.*

3.1. Функция f задана векторно. Выяснить, является ли она самодвойственной.

a) $\widetilde{\alpha}_f = (1010)$;
b) $\widetilde{\alpha}_f = (1001)$;
c) $\widetilde{\alpha}_f = (1001\ 0110)$;
e) $\widetilde{\alpha}_f = (0110\ 0110)$;
f) $\widetilde{\alpha}_f = (1000\ 0011\ 1000\ 1100)$;
g) $\widetilde{\alpha}_f = (1101\ 0100\ 1011\ 0010)$.

3.2. Заменить прочерки в векторе $\widetilde{\alpha}_f$ символами 0 или 1 так, чтобы получился вектор значений самодвойственной функции:

a) $\widetilde{\alpha}_f = (1 - 0 -)$;
b) $\widetilde{\alpha}_f = (- 0\ 1 -)$;
c) $\widetilde{\alpha}_f = (0\ 1 - -)$;
e) $\widetilde{\alpha}_f = (0\ 1 - 0 - 0 - -)$;
f) $\widetilde{\alpha}_f = (- - 0\ 1 - - 1\ 1)$;
g) $\widetilde{\alpha}_f = (- 1 - 1 - 0 - 1)$;
h) $\widetilde{\alpha}_f = (- 1\ 0 - 0 - - 1)$;
i) $\widetilde{\alpha}_f = (1\ 0\ 0\ 1 - - - - 1\ 1\ 1\ 1 - - - -)$;
j) $\widetilde{\alpha}_f = (1\ 1 - - 0\ 0 - - 0\ 1 - - 1\ 0 - -)$.

3.3. Выяснить, является ли функция f самодвойственной:

a) $f = x_1 \to x_2$;
b) $f = x_1 \vee x_2$;
c) $f = x_1 \oplus x_2$;
d) $f = x_1 x_2 \vee x_3$;
e) $f = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_3 x_1$;
f) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$;
g) $f = x_1 x_2 \oplus x_3\ (x_1 \vee x_2)$;
h) $f = (x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \to x_3) \oplus (x_3 \to x_1) \oplus 1$.

3.4. Выяснить, является ли множество A самодвойственным:

a) $A = \{0,\, 1,\, \overline{x}\}$;

b) $A = \{0,\, x\}$;

c) $A = \{x \to y,\, x\overline{y}\}$;

d) $A = \{x \to y,\, x \vee \overline{y}\}$;

e) $A = \{x \oplus y \oplus z,\, \overline{x}\}$;

f) $A = [\{x \to y\}]$;

g) $A = [\{x \oplus y\}]$;

h) $A = [\{1,\, x\overline{y}\}]$;

i) $A = [\{1,\, x \oplus y\}]$;

j) $A = [\{xy \oplus z \oplus 1\}]$.

3.5. Верно ли, что число самодвойственных функций, существенно зависящих от переменных x_1, x_2,..., x_n, равно числу функций из $P_2(X^{n-1})$, существенно зависящих от всех своих переменных?

3.6. a) Пусть функция $f(\widetilde{x}^n)$ существенно зависит от переменной x_1 и каждая из компонент $f_1^1(\widetilde{x}^n)$ и $f_0^1(\widetilde{x}^n)$ является самодвойственной функцией. Показать, что $f(\widetilde{x}^n)$ не является самодвойственной функцией.

b) Останется ли верным утверждение a), если фразу “каждая из компонент” заменить на “хотя бы одна из компонент”.

3.7. Показать, что самодвойственная функция, существенно зависящая только от переменных x_1, x_2, x_3, представима в виде: $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \alpha$, где $\alpha \in \{0,\, 1\}$.

3.8. Пусть $f(\widetilde{x}^n)$ такова, что $f^*(0,\, x_2, ..., x_n) = f^*(1,\, x_2, ..., x_n)$. Верно ли, что $f^*(x_1, ..., x_{n-1},\, 1) = f^*(x_1, ..., x_{n-1}, 0)$?

§4. Класс линейных функций

Функция $f(\widetilde{x}^n)$ называется линейной, если она представима полиномом Жегалкина не выше первой степени, то есть если существуют такие константы $\alpha_i \in \{0{,}1\}$, $i = \overline{0, n}$, что

$$f(\widetilde{x}^n) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus ... \oplus \alpha_n x_n.$$

Множество всех линейных функций обозначается через L, а множество всех линейных функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ – через L^n. Множество L является замкнутым и предполным в P_2 классом.

Справедливо следующее утверждение (*лемма о нелинейной функции*): если функция f не является линейной функцией, то, подставляя на места ее переменных функции 0, 1, x, y, $\overline{x}, \overline{y}$, можно получить xy или $\overline{xy}$.

Если функция f не принадлежит классу линейных функций L, то она называется *нелинейной.*

4.1. Функция f задана векторно. Выяснить, является ли она линейной.

a) $\widetilde{\alpha}_f = (1101)$;

b) $\widetilde{\alpha}_f = (1001\ 0110)$;

c) $\widetilde{\alpha}_f = (0110\ 1001\ 0110\ 1001)$;

d) $\widetilde{\alpha}_f = (0011\ 1100\ 1100\ 0011)$.

4.2. Заменить прочерки в векторе $\widetilde{\alpha}_f$ символами 0 или 1 так, чтобы получился вектор значений некоторой линейной функции f. Выразить f полиномом:

a) $\widetilde{\alpha}_f = (0 - 1\ 1)$;

b) $\widetilde{\alpha}_f = (1\ 0 - 1)$;

c) $\widetilde{\alpha}_f = (1\ 0\ 0 - 0 - -)$;

e) $\widetilde{\alpha}_f = (- 0 - 1 - - 0\ 0)$;

f) $\widetilde{\alpha}_f = (1 - - 1\ 1 - 0 -)$;

g) $\widetilde{\alpha}_f = (- - 1\ 0 - - - - 0 - - 1 - 1\ 1\ 0)$;

h) $\widetilde{\alpha}_f = (1 - - - - - - - - - - - 0 - 1\ 1\ 0)$;

i) $\widetilde{\alpha}_f = (- - - 1 - 1\ 1 - - 1\ 1 - 1 - 0 -)$;

4.3. Представив функцию f полиномом, выяснить, является ли она линейной:

a) $f = x \to y$;

b) $f = xy \vee \overline{xy} \vee z$;

c) $f = (y \vee x)(z \vee y)$;

d) $f = (z \vee x) \oplus (y \downarrow z)$;

e) $f = (z \mid y) | (x \downarrow y)$;

f) $f = (y \sim (zy)) \downarrow x$;

g) $f = (y \downarrow z)((x \oplus y) \downarrow y)$;

h) $f = ((y \sim z)|z)|x$;

i) $f = x \vee (z \sim (y|x))$;

j) $f = ((x \vee z) \sim y)|(yz \oplus z)$;

k) $f = (x \to y) \vee (x \oplus (y \sim z))$;

l) $f = (x \downarrow z) \sim (z \oplus (x \vee y))$.

4.4. Найти число линейных функций $f(\widetilde{x}^n)$, существенно зависящих в точности от k переменных.

4.5. Найти число линейных функций $f(\widetilde{x}^n)$ таких, для которых выполняется условие: $f(0, 0, ..., 0) = f(1, 1, ..., 1) = 1$.

§5. Класс монотонных функций

Булева функция $f(\widetilde{x}^n)$ называется *монотонной*, если для любых двух наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из B^n таких, что $\widetilde{\alpha} \leq \widetilde{\beta}$, имеет место неравенство $f(\widetilde{\alpha}) \leq f(\widetilde{\beta})$. В противном случае $f(\widetilde{x}^n)$ будет называться *немонотонной*. Множество всех монотонных булевых функций обозначается через M, а множество всех монотонных функций, зависящих от переменных x_1, x_2, ..., x_n – через M^n. Множество M является замкнутым и предполным в P_2 классом. Справедливо утверждение (*лемма о немонотонной функции*): если $f \notin M$, то, подставляя на места ее переменных функции 0, 1, x, можно получить функцию $\overline{x}$.

Вершина $\widetilde{\alpha}$ куба B^n называется *нижней границей* (*верхним нулем*) *монотонной функции* $f(\widetilde{x}^n)$, если $f(\widetilde{\alpha}) = 1$ ($f(\widetilde{\alpha}) = 0$) и для всякой вершины $\widetilde{\beta}$ из условия $\widetilde{\beta} < \widetilde{\alpha}$ следует, что $f(\widetilde{\beta}) = 0$ (соответственно, из $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$ следует, что $f(\widetilde{\beta}) = 1$).

5.1. Функция f задана векторно. Выяснить, является ли она монотонной.

a) $\widetilde{\alpha}_f = (0110)$;
b) $\widetilde{\alpha}_f = (00110111)$;
c) $\widetilde{\alpha}_f = (0101\ 0111)$;
e) $\widetilde{\alpha}_f = (01100\ 0110)$;
f) $\widetilde{\alpha}_f = (0010\ 0011\ 0111\ 1111)$;
g) $\widetilde{\alpha}_f = (0001\ 0101\ 0111\ 0111)$.

5.2. Проверить, является ли функция f монотонной:

a) $f = x_1 \to (x_1 \to x_2)$;
b) $f = x_1 \to (x_2 \to x_1)$;
c) $f = x_1 \vee x_3 \vee (x_1 \mid x_2)$;
d) $f = (x_2 \to x_3) \oplus (x_1 \mid x_3)$;
e) $f = (x_2 \vee x_3) \downarrow (x_1 \downarrow x_3)$;
f) $f = (x_2 \to x_1) \downarrow (x_1 \vee x_3)$;
g) $f = (x_2 \oplus x_3) \downarrow (x_1 \oplus x_2)$;
h) $f = (x_1 \to x_3) \mid (x_2 \mid x_3)$;
i) $f = (x_1 \vee x_2) \oplus x_1 \oplus x_3$;
j) $f = x_1 x_2 (x_1 \to x_3)$;
k) $f = (x_1 x_3) \mid (x_2 \vee x_3)$.

5.3. Пусть M_n – множество таких векторов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{2^n-1})$, которые являются векторами значений монотонной функции. Найти число векторов из $\mathcal{M}_n$ которые можно получить из вектора $\widetilde{\gamma}^{2^n} = (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{2^n-1})$ заменой символа – на 0 или 1:

a) $\widetilde{\gamma}^2 = (0\ -)$;
b) $\widetilde{\gamma}^2 = (-\ -)$;
c) $\widetilde{\gamma}^4 = (-\ 0\ 0\ -)$;
d) $\widetilde{\gamma}^4 = (-\ 1\ 0\ -)$;
e) $\widetilde{\gamma}^8 = (-\ -\ -\ -\ -\ 0\ 0\ -)$;
f) $\widetilde{\gamma}^8 = (-\ -\ -\ 1\ -\ -\ 0\ -)$;
g) $\widetilde{\gamma}^8 = (-\ 1\ -\ -\ 0\ -\ -\ -)$;
h) $\widetilde{\gamma}^8 = (0\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ 1)$.

5.4. Привести пример немонотонной функции $f(\widetilde{x}^n)$, у которой каждая подфункция вида ${f_\sigma}^i(\widetilde{x}^n)$ $(i = 1, ..., n)$, $\sigma \in \{0, 1\}$, монотонна.

5.5. Показать, что всякая монотонная функция содержится не менее чем в двух классах из T_0, T_1, L.

5.6. Показать, что M не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, S, L, указав монотонные функции, не содержащиеся в соответствующих классах.

5.7. Показать, что всякий базис в M состоящий из трех функций, содержит функцию, существенно зависящую не менее чем от трех переменных.

5.8. Привести примеры базисов в следующих классах:

a) $T_0 \cap M$;

b) $T_1 \cap M$;

c) $L \cap M$.

5.8. Показать, что если $f \in M$, то $f^* \in M$.

5.9. Подсчитать число функций в каждом из следующих множеств:

a) $M^n \setminus (T_1 \cup T_0)$;

b) $M^n \setminus (T_1 \cap T_0)$;

c) $M^n \cap L$;

d) $M^n \cap L \cap S$;

e) $L^n(M \cup S)$.

5.10. a) Перечислить все монотонные функции переменных x_1, x_2.

b) Перечислить все попарные неконгруэнтные монотонные функции, существенно зависящие от трех переменных.

c) Пусть $\alpha(n)$ – число монотонных функций, существенно зависящих от переменных x_1, x_2,..., x_n. Показать, что: 1) $\alpha(1) = 3$; 2) $\alpha(2) = 6$; 3) $\alpha(3) = 20$.

d) Пусть $\alpha_c(n)$ – число монотонных функций, существенно зависящих от переменных x_1, x_2,..., x_n. Найти $\alpha_c(n)$ для $n \leq 4$.

5.10. Пусть D^n – множество функций f из $S \cap M^n$, существенно зависящих от n переменных. Для каждого $n \leq 4$ перечислить функции из D^n.

§6. Полнота и замкнутые классы

Множество A функций алгебры логики называется *полной системой*, если замыкание этого множества совпадает с множеством всех функций.

В P_2 справедлив следующий критерий полноты.

Теорема Поста. *Система A функций из P_2 полна в P_2 тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, L, S, M.*

Функция $f(\widetilde{x}^n)$ называется *шефферовой* (или *функцией Шеффера*), если она образует базис в P_2.

Известны такие полные системы булевых функций:

1. $\{\wedge, \vee, \neg\}$ (конъюнкция, дизъюнкция, отрицание);
2. $\{\wedge, \oplus, 1\}$(конъюнкция, сложение по модулю 2, константа 1);
3. $\{\wedge, \neg\}$ (конъюнкция, отрицание);
4. $\{\vee, \neg\}$ (дизъюнкция, отрицание);
5. $\{\downarrow\}$ (стрелка Пирса);
6. $\{|\}$ (штрих Шеффера);
7. $\{\rightarrow, \neg\}$ (импликация, отрицание);
8. $\{\rightarrow, \oplus\}$ (импликация, сложение по модулю 2);
9. $\{\rightarrow, 0\}$ (импликация, константа 0).

Первая система используется для представления функций в виде дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм, вторая – для представления в виде полиномов Жегалкина.

Полная система функций называется базисом, если она перестаёт быть полной при исключении из неё любого элемента.

Иногда говорят о системе функций, полной в некотором замкнутом классе, и соответственно о базисе этого класса. Например, систему $\{\oplus, 1\}$ можно назвать базисом класса линейных функций.

При исследовании полноты систем функций удобно пользоваться таблицей, которую мы будем называть *критериальной.* Эта таблица имеет пять столбцов, каждый из которых соответствует одному из пяти предполных классов в P_2, а строки таблицы соответствуют функциям исследуемой системы. На пересечении строки таблицы, соответствующей функции *f*, и столбца, соответствующего классу K, ставится знак плюс если $f \in K$, и минус, в противном случае. Система функций полна тогда и только тогда, когда в каждом столбце содержится хотя бы один знак минус.

Рассмотрим пример: исследовать полноту системы $A = \{xy \oplus x,\ x \oplus y \oplus 1\}$. Критериальная таблица имеет вид рис. 1.

	T_0	T_1	L	S	M
f_1	+	–	–	–	–
f_2	–	+	+	–	–

Рис. 1: Критериальная таблица

В каждом столбце имеется не менее одного минуса. Следовательно, исходная система полна.

Принадлежность некоторых элементарных булевых функций к различным классам представлена таблицей (рис.2):

Функция	T_0	T_1	S	M	L
0	+	−	−	+	+
1	−	+	−	+	+
$\overline{x}$	−	−	+	−	+
xy	+	+	−	+	−
$x \vee y$	+	+	−	+	−
$x \to y$	−	+	−	−	−
$x \leftrightarrow y$	−	+	−	−	+
$x \mid y$	−	−	−	−	−
$x \downarrow y$	−	−	−	−	−
$x \oplus y$	+	−	−	−	+

Рис. 2: Критериальная таблица для элементарных булевых функций

6.1. Проверить принадлежность функции классам: T_0, T_1, L, S, M.
a) $f = z(x \sim y)$;
b) $f = x \vee (y \mid z)$;
c) $f = \overline{y} \oplus xy$;
d) $f = x \oplus (y \to z)$;
e) $f = (x \to y)(y \to z)$.
6.2. Выяснить, полна ли система функций:
a) $A = \{xy \oplus x,\ x \oplus y \oplus z\}$;
b) $A = \{xy \vee yz \vee zx,\ 0,\ 1,\ x \oplus y \oplus z\}$;
c) $A = \{xy,\ x \vee y,\ x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$;
d) $A = \{xy,\ x \vee y,\ xy \vee yz \vee zx\}$;
e) $A = \{1,\ \overline{x},\ x(y \sim z),\ x \oplus y\}$;
f) $A = \{\overline{x},\ x \oplus y,\ x \sim z \sim y\}$;
g) $A = \{1,\ x \oplus y,\ x \vee y \vee z\}$;
h) $A = \{0,\ xy,\ x \oplus y \oplus z\}$;
i) $A = \{0,\ xy,\ (x \to y) \to z\}$;
j) $A = \{0,\ xy,\ x(x \vee y)\}$;
k) $A = \{\overline{x},\ x \sim y,\ (x \oplus \overline{y}) \mid z\}$;
l) $A = \{x \to y,\ x \oplus y\}$;
m) $A = \{x \to y,\ x \oplus y \oplus z,\ 1\}$;
n) $A = \{xy(x \oplus y),\ xy \oplus yz \oplus zx,\ 1\}$.
6.3. Выяснить, полна ли система A функций, заданных векторами своих значений:
a) $A = \{f_1 = (0110),\ f_2 = (1100\ 0011),\ f_3 = (1001\ 0110)\}$;
b) $A = \{f_1 = (0111),\ f_2 = (0101\ 1010),\ f_3 = (0111\ 1110)\}$;
c) $A = \{f_1 = (0111),\ f_2 = (1001\ 0110)\}$;
d) $A = \{f_1 = (0101),\ f_2 = (1110\ 1000),\ f_3 = (0110\ 1001)\}$;
e) $A = \{f_1 = (1000\ 0001),\ f_2 = (0111),\ f_3 = (1011)\}$;
f) $A = \{f_1 = (1010\ 1110),\ f_2 = (1010),\ f_3 = (1000)\}$;

6.4. Выяснить, полна ли система A:
a) $A = (S \cap M) \cup (L \setminus M)$;
b) $A = (L \cap T_1 \cap T_0) \cup S \setminus (T_0 \cup T_1)$;
c) $A = (L \cap T_1) \cup (S \cap M)$;
d) $A = (L \cap T_1) \cup (S \setminus T_0)$;
e) $A = (M \setminus T_0) \cup (L \setminus S)$;
f) $A = (M \setminus T_0) \cup (S \setminus L)$;
g) $A = (L \cap M) \cup (S \setminus T_0)$;
h) $A = ((L \cap M) \setminus T_1) \cup (S \cap T_1)$;
i) $A = (M \setminus S) \cup (L \cap S)$;
j) $A = (M \cap S) \cup (T_0 \setminus M) \cup (T_1 \cap S)$;
k) $A = (S \cup T_0) \cap (M \cup T_1)$;
l) $A = (L \cap T_1) \cup (T_0 \cap S)$;
m) $A = (M \cap S) \cup (L \cap T_1 \cup T_0)$.
6.5. Проверить, является ли система функций A базисом в P_2.
a) $A = \{x \to y,\ x \oplus y,\ x \vee y\}$;
b) $A = \{x \oplus y \oplus z,\ x \oplus y,\ 0,\ 1\}$;
c) $A = \{x \oplus y,\ x \sim y\}$;
d) $A = \{x \oplus y \oplus yz,\ x \oplus y \oplus 1\}$.
6.6. Из полной в P_2 системе выделить всевозможные базисы:
a) $A = \{1,\ \overline{x},\ xy(x \oplus y),\ x \oplus y \oplus xy \oplus yz \oplus zx\}$;
b) $A = \{0,\ x \oplus y,\ x \to y,\ xy \sim xz$;
c) $A = \{xy,\ x \vee y,\ x\overline{y},\ \overline{x}\}$;
d) $A = \{xy \oplus yz \oplus zx,\ 0,\ 1,\ x \vee y\}$.
6.7. Выяснить, полна ли система $A = \{f_1,\ f_2\}$:
a) $f_1 \in S \setminus M,\ f_2 \notin L \cup S,\ f_1 \to f_2 \equiv 1$;
b) $f_1 \notin L \cup T_0 \cup T_1,\ f_2 \in M \cap L,\ f_1 \to f_2 \equiv 1$;
c) $f_1 \notin T_0 \cup L,\ f_2 \notin S,\ f_1 \to f_2 \equiv 1$;
e) $f_1 \in (S \cap L) \setminus T_0,\ f_2 \in M \setminus (T_1 \cap L),\ f_1 \to f_2 \equiv 1$.

ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1. Доказать, что:

a) пересечение замкнутых классов является замкнутым классом;

b) объединение двух замкнутых классов, не является замкнутым классом;

c) разность двух замкнутых классов, не является замкнутым классом;

d) дополнение непустого и отличного от P_2 замкнутого класса K до P_2 не является замкнутым.

2. Доказать, что класс A, предполный в замкнутом классе K, является замкнутым.

3. a) Доказать, что если замкнутый класс в P_2 содержит функцию, существенно зависящую от $n \geq 2$ переменных, то он содержит бесконечно много попарно неконгруэнтных функций.

b) Верно ли, что если замкнутый класс K содержит функцию, существенно зависящую от $n \geq 2$ переменных, то для всякого $m \geq n$ он содержит функцию, существенно зависящую от m переменных?

4. Доказать, что для любого замкнутого класса $K \subseteq P_2$ выполняется равенство $[K \cup \{x\}] = K \cup \{x\}$.

5. Доказать, что каждый предполный в P_2 класс содержит тождественную функцию.

6. Доказать, что всякий замкнутый класс в P_2, содержащий функцию, отличную от константы, содержит и функцию x.

7. Доказать, что множество P_2 функций алгебры логики не представимо в виде объединения непустых попарно непересекающихся замкнутых классов.

8. Доказать, что если замкнутый класс P_2 имеет конечный базис, то всякий базис этого класса конечен.

9. Доказать, что если непустой замкнутый класс P_2 отличен от множеств, состоящих из одних констант, то его нельзя расширить до базиса в P_2.

10. Доказать, что в замкнутом классе $[x \to y]$ содержатся только такие функции из P_2, которые могут быть представлены (с точностью до обозначения данных) в виде $x_i \vee f\ (\widetilde{x}^n)$, где $f(\widetilde{x}^n) \in P_2$.

11. Пусть функция $f(\widetilde{x}^n)$ принадлежит множеству $[x \to y]$ и зависит существенно не менее чем от двух переменных. Доказать, что $|N_f| > 2^{n-1}$.

12. Доказать, что не существует самодвойственных функций, существенно зависящих в точности от двух переменных.

13. Доказать, что если $f(\widetilde{x}^n) \in S$, то $|N_f| = 2^{n-1}$. Приведите пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

14. Используя лемму о несамодвойственной функции, доказать, что S является предполным классом в P_2.

15. Доказать, что функция $f(\widetilde{x}^n)$, существенно зависящая от всех своих переменных, является линейной тогда и только тогда, когда при замещении любого подмножества переменных любым набором констант получается функция, существенно зависящая от всех оставшихся переменных.

16. Доказать, что линейная функция является самодвойственной тогда и только тогда, когда она существенно зависит от нечетного числа переменных.

17. Доказать, что не существует линейной функции f, образующей базис в L.

18. Доказать, что:

a) $L \cap S \cap T_0 = L \cap S \cap T_1 = L \cap T_0 \cap T_1 = L \cap S \cap T_0 \cap T_1$.

b) $S \cap T_0 = S \cap T_1 = S \cap T_0 \cap T_1$.

19. Доказать, что:

a) $[\{x \vee y,\, x \oplus y\}] = T_0$;

b) $[\{x \vee y,\, x \sim y\}] = T_1$;

c) $[\{xy,\, x \sim y\}] = T_1$;

d) $[\{x \sim y\}] = L \cap T_1$;

e) $[\{x \oplus y\}] = L \cap T_0$;

f) $[\{x \oplus y \oplus z\}] = L \cap S \cap T_0$.

20. Доказать, что класс T_1 является предполным в P_2.

21. Доказать, что множество A является предполным в L:

a) $A = [\{0,\, \overline{x}\}]$; b) $A = L \cap T$;

c) $A = L \cap T_0$; d) $A = L \cap T$.

22. Доказать, что если функция f немонотонна, то существуют два соседних набора $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ такие, что $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$ и $f(\widetilde{\alpha}) > f(\widetilde{\beta})$.

23. Доказать, что функция, существенно зависящая не менее чем от двух переменных, монотонна тогда и только тогда, когда всякая ее подфункция, зависящая от одной переменной, монотонна.

24. Доказать, что для каждой отличной от константы монотонной функции f существуют ДНФ и КНФ, не содержащие отрицаний переменных и реализующие f.

25. Доказать, что если f монотонна и зависит существенно не менее чем от двух переменых, то система $\{0,\, \overline{f}\}$ полна в P_2.

26. Доказать, что функция f является монотонной:

a) $f = (x \oplus y) \cdot (x \leftrightarrow y)$;

b) $f = x \to (y \to x)$;

c) $f = (x \oplus y) \cdot x \cdot y$;

27. Доказать, что функция, двойственная монотонной функции, монотонна.

28. С помощью суперпозиции из функции f можно получить константы 0 и 1. Доказать, что f – *шефферова функция.*

29. Монотонная функция f имеет ровно две нижние единицы. Доказать, что $\overline{f}$ – шефферова функция.

30. Доказать, что множество A является непустым:

a) $A = (L \cap T_1) \setminus (T_0 \cup S)$;

b) $A = (L \cap T_0) \setminus (T_1 \cup S)$;

c) $A = (L \cap S) \setminus (T_0 \cup T_1)$;

31. Доказать, что в P_2 существует ровно два простых базиса, состоящих из одной функции: $\{x \mid y\}$ и $\{x \downarrow y\}$.

32. Доказать, что каждая функция f из простого базиса в P_2 является простой относительно некоторого предполного класса в P_2, к которому f не принадлежит.

33. Доказать, что если функция самодвойственна, то в ее ДНФ любые два слагаемых имеют общий сомножитель.

34. Доказать, что если функция самодвойственна, то в ее КНФ любые два сомножителя имеют общее слагаемое.

35. Доказать, что если произведение любых двух элементарных конъюнкций в ДНФ равна 0, то после замены $\vee$ на $\oplus$ получится формула, эквивалентная исходной.

36. Доказать, что любой предполный класс замкнут.

37. Доказать, что всякий замкнутый класс, содержащий функцию, отличную от константы, содержит функцию x.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Выделить базис из полной для класса $[A]$ системы:
$A = \{x \oplus y,\ x \to y,\ 1\}$.
2. В заданном векторе $\widetilde{\alpha}_f$ заменить координаты – символами из множества $\{0, 1\}$ так, чтобы получился вектор $\widetilde{\alpha}_f$ значений некоторой функции f, образующей базис в K. Доказать единственность решения:
$\widetilde{\alpha}_f = (-\ 0 - - -\ 0 - -)$, $K = S \cap T_1$.
3. Выяснить, является ли множество A самодвойственным:
$A = \{x \to y,\ x \vee \overline{y}\}$.
4. Заменить прочерки в векторе $\widetilde{\alpha}_f$ символами 0 или 1 так, чтобы получился вектор значений самодвойственной функции:
$\widetilde{\alpha}_f = (-\ 1\ 0 -\ 0 - -\ 1)$;
5. Представив функцию f полиномом, выяснить, является ли она линейной:
$f = x \vee (z \sim (y|x))$.
6. Проверить, является ли функция f монотонной:
$f = (x_2 \to x_3) \oplus (x_1 \mid x_3)$.
7. Выяснить, полна ли система функций:
$A = \{xy,\ x \vee y,\ x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$.

Вариант 2

1. Выяснить, принадлежит ли функция f множеству $T_1 \setminus T_0$:
$f = (x_1 \to (x_2 \to (x_3 \to x_1)))$.
2. Заменить прочерки в векторе $\widetilde{\alpha}_f$ символами 0 или 1 так, чтобы получился вектор значений самодвойственной функции:
$\widetilde{\alpha}_f = (0\ 1 -\ 0 -\ 0 - -)$;
3. Заменить прочерки в векторе $\widetilde{\alpha}_f$ символами 0 или 1 так, чтобы получился вектор значений некоторой линейной функции f. Выразить f полиномом:
$\widetilde{\alpha}_f = (1\ 0\ 0 -\ 0 - -)$.
4. Найти число линейных функций $f(\widetilde{x}^n)$, существенно зависящих в точности от k переменных.
5. Пусть M_n – множество таких векторов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{2^n-1})$, которые являются векторами значений монотонной функции. Найти число векторов из $\mathcal{M}_n$ которые можно получить из вектора $\widetilde{\gamma}^{2^n} = (\gamma_0,\ \gamma_1, ...,\ \gamma_{2^n-1})$ заменой символа – на 0 или 1:
$\widetilde{\gamma}^8 = (- - -\ 1 - -\ 0\ -)$.
6. Проверить принадлежность функции классам: T_0, T_1, L, S, M.
$f = x \vee (y \mid z)$.
7. Выяснить, полна ли система A функций, заданных векторами своих значений:
$A = \{f_1 = (0101),\ f_2 = (1110\ 1000),\ f_3 = (0110\ 1001)\}$.

Вариант 3

1. Построить множество всех функций, зависящих от переменных x_1, x_2 и принадлежащих замыканию множества A:
$A = \{x_1 \oplus x_2\}$.
2. Выяснить, является ли множество A базисом в классе K:
$A = \{xy,\ x \sim y,\ x \vee y\}$, $K = T_1$.
3. Функция f задана векторно. Выяснить, является ли она самодвойственной:
$\widetilde{\alpha}_f = (1001\ 0110)$.
4. Представив функцию f полиномом, выяснить, является ли она линейной:
$f = (y \downarrow z)((x \oplus y) \downarrow y)$.
5. Проверить, является ли функция f монотонной:
$f = (x_2 \oplus x_3) \downarrow (x_1 \oplus x_2)$.
6. Выяснить, полна ли система $A = \{f_1,\ f_2\}$:
$f_1 \notin L \cup T_0 \cup T_1$, $f_2 \in M \cap L$, $f_1 \to f_2 \equiv 1$.
7. Доказать, что класс A, предполный в замкнутом классе K, является замкнутым.

Вариант 4

1. В заданном векторе $\widetilde{\alpha}_f$ заменить координаты – символами из множества $\{0, 1\}$ так, чтобы получился вектор $\widetilde{\alpha}_f$ значений некоторой функции f, образующей базис в K. Доказать единственность решения:
$\widetilde{\alpha}_f = (-\ 0 - - -\ 0 - -)$, $K = S \cap T_1$.
2. Выяснить, является ли функция f самодвойственной:
$f = (x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \to x_3) \oplus (x_3 \to x_1) \oplus 1$.
3. Функция f задана векторно. Выяснить, является ли она линейной:
$\widetilde{\alpha}_f = (0110\ 1001\ 0110)$.
4. Пусть M_n – множество таких векторов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{2^n-1})$, которые являются векторами значений монотонной функции. Найти число векторов из $\mathcal{M}_n$ которые можно получить из вектора $\widetilde{\gamma}^{2^n} = (\gamma_0,\ \gamma_1, ...,\ \gamma_{2^n-1})$ заменой символа – на 0 или 1:
$\widetilde{\gamma}^8 = (-\ 1 - -\ 0 - - -)$.
5. Подсчитать число функций, принадлежащих множеству:
$M^n \setminus (T_1 \cap T_0)$.
6. Проверить принадлежность функции классам: T_0, T_1, L, S, M:
$f = x \oplus (y \to z)$.
7. Проверить полноту системы функций:
$A = \{(0110),\ (1100\ 1011),\ (1110\ 0011)\}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

1. Обосновать следующие свойства замыкания:

a) $[[K]] = [K]$;

b) $[K_1 \cap K_2] \subseteq [K_1] \cap [K_2]$;

c) $[K_1 \cup K_2] \subseteq [K_1] \cup [K_2]$.

2. Выяснить, при каких $n \geq 2$ функция $f(x^n)$ является самодвойственной:

a) $f(x^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_n$;

b) $f(x^n) = (x_1 \vee x_2) \oplus (x_2 \vee x_2) \oplus ... \oplus (x_{n-1} \vee x_2) \oplus (x_n \vee x_1)$;

c) $f(x^n) = (x_1 \to x_2)\ (x_2 \to x_3) ...\ (x_{n-1} \to x_n)\ (x_n \to x_1)$.

3. Показать, что если функцию $f(x^n)$ можно представить в виде $f(x^n) = x_n \oplus \varphi$, где φ не зависит от x^n, то $|N_f| = 2^{n-1}$.

4. Показать, что если функция f линейна и отлична от константы, то $|N_f| = 2^{n-1}$.

5. Выяснить, при каких $n \geq 1$ функция $f(x^n)$ монотонна:

a) $f(x^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_n$;

b) $f(x^n) = x_1 x_2 ... x_n \to (x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_n)$.

6. Привести пример немонотонной функции $f(x^n)$, у которой каждая подфункция вида $f^i_\kappa(x^n)$ $(i = 1,..., n)$, $\kappa \in \{0, 1\}$, монотонна.

7. Найти число нижних единиц $e(f)$ и верхних нулей $n(f)$ для монотонной функции f:

a) $f(x^3) = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_3 x_1$;

b) $f(x^2) = x_1 \vee x_2$;

c) $f(x^{2k}) = (x_1 \vee x_2)\ (x_3 \vee x_4) ... (x_{2k-1} \vee x_{2k})$;

d) $f(x^4) = x_1 x_2 x_3 \vee x_4(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$.

8. Можно ли из функции $f = \overline{x}\overline{y}z \vee \mathrm{t}(xy \to z)$ получить:

a) функцию bx отождествлением переменных;

b) функцию $\overline{x}z$ отождествлением переменных;

c) функцию $\overline{x}z$ с помощью суперпозиции;

d) функцию $\overline{x}$ подстановкой констант 0, 1;

e) функцию $\overline{x}z$ подстановкой константы 0;

f) функцию z отождествлением переменных.

9. Можно ли с помощью функций xy, $x \vee y$, 1 получить 0?

10. Можно ли из функции $f = xy \vee yz \vee zx$ получить с помощью операции суперпозиции функцию $f = x \vee y$?

11. С помощью суперпозиции из функции f можно получить константы 0 и 1. Доказать, что f – шефферова функция.

12. Монотонная функция f имеет ровно две нижние единицы. Доказать, что $\overline{f}$ – шефферова функция.

13. Подсчитать число шефферовых функций в $P_2(X^n)$.

14. Функция f зависит существенно ровно от двух переменных и не принадлежит множеству $T_1 \cup T_0$. Доказать, что функция f – шефферова.

15. Доказать, что всякая функция f из множества $S \setminus (T_0 \cup T_1 \cup M \cup L)$ образует базис в S.

16. Верно ли, что всякая функция f из множества $T_0 \setminus (T_1 \cup M \cup L \cup S)$ образует базис в T_0.

17. Выяснить, является ли функция f неприводимой:

a) $f = x \oplus y$;

b) $f = x \oplus y \oplus z$;

c) $f = x \oplus y \oplus z \oplus t$;

d) $f = xy \vee z$;

e) $f = xy \oplus z$;

f) $f = xy \vee zt$.

18. Проверить полноту системы функций:

a) $A = \{(0001), (0101\ 1100), (0010\ 1111)\}$;

b) $A = \{(0111), (0000\ 1111), (1001\ 0111)\}$;

c) $A = \{(1001), (1001\ 0101), (1100\ 1011)\}$;

d) $A = \{(0110), (1100\ 1011), (1110\ 0011)\}$;

e) $A = \{(1010), (1001\ 1111), (1101\ 1100)\}$;

f) $A = \{(1100), (0110\ 0110), (1011\ 1001)\}$.

19. Доказать, что в P_2 существует ровно два простых базиса, состоящих из одной функции: $\{x \mid y\}$ и $\{x \downarrow y\}$.

20. Доказать, что каждая функция f из простого базиса в P_2 является простой относительно некоторого предполного класса в P_2, к которому f не принадлежит.

21. Доказать, что $L \subseteq T_1 \cup T_0 \cup S$.

ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ

1. Васильев А.В., Замов Н.К., Пшеничный П.В. Задачи по дискретной математике для самостоятельных и контрольных работ. Булевы функции. – Казань: Изд. Казан.гос.унив., 2008. – 28 с.

2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике: учеб. пособие. – 3-е изд., перераб. – М.: Физматлит, 2005. – 416 с.

3. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – 4-е изд., М.: Физматлит, 2004. – 256 с.

4. Марченков С.С. Замкнутые классы булевых функций. – М.: Физматлит, 2000. – 128 с.

5. Матросов В.Л., Стеценко В.Н. Лекции по дискретной математике. – М.: МПГУ, 1997. – 220 с.

6. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. – М.: МАИ, 1992. – 264 с.

7. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986. – 384 с.

8. Яблонский С.В., Лупанов О.Б. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1. – М.: Наука, 1974. – 313 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

1. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: учебник для втузов / Белоусов А.И., Ткачев С.Б.; ред. Зарубин В.С., Крищенко А.П. – 5-е изд., М.: Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2015. – 743 с.

2. Гончарова Г.А. Элементы дискретной математики: Учебное пособие / Г.А. Гончарова, А.А. Мочалин. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2004. – 128 с.

3. Горбатов В.А. Дискретная математика: Учебное пособие для студентов втузов / В.А. Горбатов, А.В. Горбатов, М.В. Горбатова. – М.: ООО «Издательство АСТ», ООО «Издательство Астрель», 2003. – 447 с.

4. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика / В.А. Горбатов – М.: Наука. Физматлит, 2002. – 544 с.

5. Дж. Андерсон. Дискретная математика и комбинаторика. – М., СПб, Киев: Изд. Дом «Вильямс», 2003. – 960 с.

6. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы: Учеб. Пособие. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2003. – 288 с.

7. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов – СПб.: Издательство «Лань», 2004 г. – 400 с.

8. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – 3-е изд. М.: Физматлит, 1995. – 212 с.

9. Меньших В.В., Пьянков О.В. Дискретная математика. Типовой расчет. Учебное пособие. – Воронеж: ВИ МВД России, 2007. – 96 с.

10. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб: Питер, 2000, 304 с.

11. Плотников А.Д. Дискретная математика / А.Д. Плотников – М.: Новое знание, 2005. – 288 с.

12. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики / М.:ИНФРА-М, Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. – 280 с.

13. Усов С.В. Дискретная математика. Учебно-метод. пособие для студентов направления «Информатика и вычислительная техника». – Омск: ОмГУ, 2011. - 60 с.

14. Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б. Функции алгебры логики и классы Поста. – М.: Наука, 1966. – 120 с.

Подписано в печать
Формат $60 \times 84_{1/16}$.
Гарнитура "Times".
Печать оперативная.
Усл. печ. л. 1,00.
Тираж 100 экз.
Заказ №   /09