Итерационные алгоритмы на основе метода штрафа на уравнение состояния для задачи оптимального управления системой, описываемой линейным эллиптическим уравнением[1]

А. В. Лапин, Д.Г. Залялов

Аннотация Задача оптимального управления системой, описываемой линейным эллиптическим уравнением, с поточечными ограничениями на управление и нелокальными ограничениями на состояние системы решается конечно-разностным методом. Дискретная задача оптимального управления аппроксимируется задачей минимизации с оштрафованным уравнением состояния. Выводятся оценки близости решений исходной задачи и задачи со штрафом. Доказываются оценки скорости сходимости блочного метода Гаусса-Зейделя для решения задачи со штрафом. Анализируются результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: седловая задача с ограничениями, оптимальное управление, конечно-разностная аппроксимация, итерационные методы.

УДК 519.6

Abstract An optimal control problem of a system, governed by a linear elliptic equation, with point-wise control constraints and non-local state constraints is solved by finite difference method. Discrete optimal control problem is approximated by a minimization problem with penalized state equation. Error estimates are derived. Rate of convergence of block Gauss-Zeidel iterative solution method for the penalized problem are proved. Results of the numerical experiments are analyzed.

Key words: constrained saddle point problem, optimal control, finite difference approximation, iterative methods.

Введение

Задачи оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных при наличии ограничений на состояние системы, представляют собой весьма сложный объект численного анализа. Особую трудность представляет то, что множители Лагранжа для соответствующих дифференциальных задач, как правило, не обладают гладкостью, боле того, могут быть не функциями, а лишь мерами. Как следствие, скорость сходимости итерационных методов с множителями Лагранжа для конечномерных (сеточных) аппроксимаций существенно падает при измельчении параметров сетки. Указанная сложность задачи дополняется высокой размерностью сеточных аппроксимаций, приводящей к большой трудоемкости численной реализации каждого шага любого итерационного алгоритма. В связи со сказанным построение эффективных методов численного решения задач оптимального управления с ограничениями на состояние системы продолжает оставаться актуальной задачей.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 13-01-00368

Известны два основных подхода при решении указанных задач оптимального управления. Первый из них основан на регуляризации исходной дифференциальной задачи, построении функции Лагранжа для регуляризованной задачи и ее последующей сеточной аппроксимации (см. статьи [1] - [7] и библиографию в них). Второй подход к решению задач оптимального управления, в том числе, с ограничениями на состояние, состоит в первоначальной аппроксимации дифференциальной задачи с использованием сеточных методов и дальнейшем решении сеточной задачи оптимизации. Этот подход использован, в частности, в [8] - [13] для построения итерационных методов типа предобусловленного метода Узавы для решения сеточных задач оптимального управления с ограничениями на функции управления и состояния.

Основной задачей исследований, приведенных в данной статье, является построение легко реализуемых и сходящихся алгоритмов для сеточных аппроксимаций задач оптимального управления с ограничениями на состояние. Такие алгоритмы построены на основе метода штрафа на уравнение состояния для сеточной аппроксимации одной эллиптической задачи оптимального управления с нелокальными ограничениями на состояние системы и поточечными ограничениями на управление. Получены оценки близости решений исходной задачи и задач со штрафом. Доказана скорость сходимости блочных релаксационных методов решения задач со штрафом. Обоснована независимость скорости сходимости методов от параметров сетки и линейная зависимость от параметра штрафа. Проведены вычислительные эксперименты, подтвердившие теоретические выводы.

Несмотря на то, что в данной работе подробно исследованы итерационные методы для конечно-разностной аппроксимации частной задачи оптимального управления, теоретические результаты могут быть применены к широкому классу сеточных схем для задач оптимального управления системами, описываемыми линейными краевыми задачами в частных производных. Этот факт обусловлен тем, что все теоретические оценки получены для абстрактных конечномерных седловых задач с ограничениями, которые возникают при решении указанных выше задач оптимального управления.

1 Регуляризация седловых задач по двойственным переменным

1.1 Оценка погрешности метода регуляризации для седловой задачи

Рассмотрим седловую задачу

$$\begin{pmatrix} A & -B^T \\ -B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial\psi(x) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix} \tag{1}$$

в предположении, что выполнены следующие условия:

матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ положительно полуопределена на $\mathbb{R}^n$ и положительно определена на ядре матрицы B :

$$(Ax, x) \geqslant 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ (Ax, x) \geqslant m\|x\|^2 \ \ \forall x \in \mathrm{Ker}B, \ \ m > 0, \tag{2}$$

$$B \in \mathbb{R}^{s\times n} - \text{ матрица полного столбцового ранга: } \operatorname{rank} B = s \leqslant n, \tag{3}$$

$$\psi : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} \ - \text{ выпуклая, собственная и полунепрерывная снизу функция,} \tag{4}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Bx = g\} \cap \operatorname{int}\operatorname{dom}\psi \neq \emptyset. \tag{5}$$

Векторы $f \in \mathbb{R}^n$ и $g \in \mathbb{R}^s$ в задаче (1) заданы, $\partial\psi$ – субдифференциал функции ψ. При выполнении условий (2) – (5) седловая задача (1) имеет непустое множество решений $\{(x,\lambda)\}$ и x определяется однозначно (см. [14]).

Аппроксимируем (1) регуляризованной задачей

$$\begin{pmatrix} A & -B^T \\ -B & -\varepsilon D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\varepsilon \\ \lambda_\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial\psi(x_\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\varepsilon > 0$ – параметр регуляризации, а D – симметричная и положительно определенная матрица. Как и (1), эта задача имеет решение $(x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ с единственной компонентой x_ε. Кроме того, из равенства $\varepsilon D\lambda_\varepsilon = g - Bx_\varepsilon$ следует единственность вектора λ_ε.

Замечание 1. *Пусть $I(x) = \{0 \text{ при } Bx = g; +\infty \text{ иначе}\}$ – индикаторная функция множества $\{x \in \mathbb{R}^n : Bx = g\}$, а $I_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{2\varepsilon}\|Bx - g\|^2_{D^{-1}}$ – ее регуляризация выпуклой и дифференцируемой функцией. Тогда, если (x,λ) – решение задачи (1), а $(x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ – решение задачи (6), то x является решением включения*

$$Ax + \partial\psi(x) + \partial I(x) \ni f,$$

а x_ε – это решение уравнения

$$Ax_\varepsilon + \partial\psi(x_\varepsilon) + \nabla I_\varepsilon(x_\varepsilon) = f.$$

В частном случае симметричной матрицы A пара (x,λ) является седловой точкой функции Лагранжа $\mathcal{L}(x,\lambda) = \dfrac{1}{2}(Ax,x) - (f,x) + \psi(x) - (Bx - g, \lambda)$, при этом x – это решение задачи минимизации

$$\min_{Bx=g} \big(\frac{1}{2}(Ax,x) - (f,x) + \psi(x)\big),$$

а x_ε – это решение соответствующей задачи минимизации со штрафом на ограничение $Bx = g$:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \big(\frac{1}{2}(Ax,x) - (f,x) + \psi(x) + \frac{1}{2\varepsilon}\|Bx - g\|^2_{D^{-1}}\big).$$

Теорема 1. *Пусть $(x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ – решение регуляризованной задачи (6), а (x, λ^0) – решение исходной седловой задачи (1), у которого компонента λ^0 имеет минимальную среди всех компонент решений норму $\|\lambda\|_D$. Тогда $(x_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) \to (x, \lambda^0)$ при $\varepsilon \to 0$ и справедлива оценка*

$$\tilde{m}\|x_\varepsilon - x\|^2 \leqslant (A_\varepsilon(x_\varepsilon - x), x_\varepsilon - x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda^0\|^2_D, \quad A_\varepsilon = A + \frac{1}{2\varepsilon}B^T D^{-1} B. \tag{7}$$

Здесь $\tilde{m} > 0$ – константа положительной определенности матрицы A_ε, не зависящая от ε.

Доказательство. Вначале докажем положительную определенность матрицы $A_\varepsilon = A + \dfrac{1}{2\varepsilon}B^T D^{-1} B$ с константой, не зависящей от ε. Будем считать, что $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 > 0$ – некоторое фиксированное число. Поскольку $(A_\varepsilon x, x) \geqslant (A_{\varepsilon_0} x, x)$ для любого $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и любого x, то достаточно доказать положительную определенность матрицы A_{ε_0}. Из определения A_{ε_0} и положительной полуопределенности A следует $(A_{\varepsilon_0} x, x) \geqslant 0$. Предположим, что для некоторого x_0 справедливо равенство $(A_{\varepsilon_0} x_0, x_0) = 0$. Тогда $(D^{-1}Bx_0, Bx_0) = 0$, откуда $x_0 \in \mathrm{kerB}$. Но матрица A положительно определена на kerB, поэтому $(A_{\varepsilon_0} x_0, x_0) > 0$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Перейдем к выводу оценки (7). Пусть (x, λ) – какое-либо решение (1). Из (1) и (6) следуют соотношения

$$A(x_\varepsilon - x) - B^T(\lambda_\varepsilon - \lambda) + \partial\psi(x_\varepsilon) - \partial\psi(x) \ni 0, \quad B(x_\varepsilon - x) + \varepsilon D\lambda_\varepsilon = 0.$$

Умножив скалярно соотношения этой системы, соответственно, на $x_\varepsilon - x$ и $\lambda_\varepsilon - \lambda$ и сложив, получим неравенство

$$(A(x_\varepsilon - x), x_\varepsilon - x) + \varepsilon(D\lambda_\varepsilon, \lambda_\varepsilon - \lambda) \leqslant 0.$$

Воспользуемся равенством $2(D\lambda_\varepsilon, (\lambda_\varepsilon - \lambda)) = \|\lambda_\varepsilon\|_D^2 - \|\lambda\|_D^2 + \|\lambda_\varepsilon - \lambda\|_D^2$. Тогда

$$(A(x_\varepsilon - x), x_\varepsilon - x) + \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda_\varepsilon\|_D^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda_\varepsilon - \lambda\|_D^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda\|_D^2. \tag{8}$$

Поскольку $\lambda_\varepsilon = \varepsilon^{-1}D^{-1}(g - Bx_\varepsilon) = \varepsilon^{-1}D^{-1}B(x - x_\varepsilon)$, то неравенство (8) преобразуется к виду

$$(A_\varepsilon(x_\varepsilon - x), x_\varepsilon - x) + \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda_\varepsilon - \lambda\|_D^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda\|_D^2. \tag{9}$$

Отсюда, во-первых, следует сходимость x_ε к x с оценкой скорости сходимости

$$\|x_\varepsilon - x\|^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2\tilde{m}}\|\lambda\|_D^2.$$

Кроме того, следствием (8) является неравенство

$$\|\lambda_\varepsilon\|_D^2 + \|\lambda_\varepsilon - \lambda\|_D^2 \leqslant \|\lambda\|_D^2, \tag{10}$$

в частности, ограниченность $\|\lambda_\varepsilon\|_D$. Пусть $\tilde{\lambda}$ – частичный предел последовательности $\{\lambda_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \to 0$: подпоследовательность $\{\lambda_{\varepsilon_k}\} \subset \{\lambda_\varepsilon\}$ сходится к $\tilde{\lambda}$. Перейдем к пределу при $\varepsilon_k \to 0$ в задаче (6). Ясно, что $Bx = g$. Кроме того, $Ax_{\varepsilon_k} - B^T\lambda_{\varepsilon_k} - f \to Ax - B^T\lambda - f$. Из замкнутости максимально монотонного оператора $\partial\psi$ (см., напр., [15], стр. 9) следует, что $Ax - B^T\lambda - f \in \partial\psi(x)$. Таким образом, $(x, \tilde{\lambda})$ – решение (1). Кроме того, в силу неравенства (10) справедлива оценка

$$\|\tilde{\lambda}\|_D^2 \leqslant \|\lambda\|_D^2$$

для любого решения (x, λ), так что $\tilde{\lambda}$ имеет минимальную D-норму среди всех решений задачи (1). Допустим, что существует еще один частичный предел $\tilde{\tilde{\lambda}}$ последовательности $\{\lambda_\varepsilon\}$ с минимальной D-нормой. Тогда в пределе при $\varepsilon \to 0$ по соответствующей подпоследовательности из неравенства (10) получим

$$\|\tilde{\tilde{\lambda}}\|_D^2 + \|\tilde{\tilde{\lambda}} - \tilde{\lambda}\|_D^2 \leqslant \|\tilde{\lambda}\|_D^2.$$

Поскольку $\|\tilde{\tilde{\lambda}}\|_D = \|\tilde{\lambda}\|_D$, то $\tilde{\tilde{\lambda}} = \tilde{\lambda} = \lambda^0$ и вся последовательность $\{\lambda_\varepsilon\}$ сходится к λ^0, а в оценке для $\|x_\varepsilon - x\|$ можно взять λ^0. □

1.2 Оценки погрешности метода регуляризации для специального случая седловой задачи

Далее исследуем седловую задачу

$$\begin{pmatrix} M_y & 0 & -L^T \\ 0 & M_u & E \\ -L & E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial\theta(y) \\ \partial\varphi(u) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

входные данные которой удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{array}{c} M_y - \text{неотрицательно определенная матрица: } M_y \geqslant m_y E,\ m_y \geqslant 0; \\ M_u - \text{ положительно определенная матрица: } M_u \geqslant m_u E,\ m_u > 0; \\ L - \text{невырожденная матрица: } \|Ly\| \geqslant \mu\|y\|\ \forall y,\ \mu > 0, \\ \theta \text{ и } \varphi - \text{выпуклые, собственные и полунепрерывные снизу функции.} \end{array} \tag{12}$$

Соответствующая седловой задаче (11) регуляризованная задача имеет вид:

$$\begin{pmatrix} M_y & 0 & -L^T \\ 0 & M_u & E \\ -L & E & -\varepsilon D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_\varepsilon \\ u_\varepsilon \\ \lambda_\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial\theta(y_\varepsilon) \\ \partial\varphi(u_\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Задачи (11) и (13) – это частные случаи (1) и (6) при

$$x = \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} M_y & 0 \\ 0 & M_u \end{pmatrix}, \quad \psi(x) = \theta(y) + \varphi(u) \ \text{ и } \ B = \begin{pmatrix} L & -E \end{pmatrix}.$$

Матрицы A, B и функция ψ удовлетворяют условиям (2) - (4). В частности, A положительно определена на ядре $\mathrm{Ker}B = \{Ly = u\}$ матрицы B, так как

$$(Ax, x) \geqslant (M_u u, u) \geqslant \frac{m_u}{2}(\|u\|^2 + \|Ly\|^2).$$

Таким образом, задача (11) имеет решение (y, u, λ) с единственными компонентами y и u, а задача (13) имеет единственное решение $(y_\varepsilon, u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$.

Замечание 2. *В случае симметричных матриц* M_y *и* M_u *седловая задача* (11) *является критерием седловой точки* (y, u, λ) *функции Лагранжа*

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \frac{1}{2}(M_y y, y) + \frac{1}{2}(M_u u, u) + \theta(y) + \varphi(u) - (g, y) - (Ly - u, \lambda),$$

построенной для задачи минимизации

$$\min_{Ly=u} \big(\frac{1}{2}(M_y y, y) + \frac{1}{2}(M_u u, u) + \theta(y) + \varphi(u) - (g, y)\big).$$

В свою очередь, компоненты $(y_\varepsilon, u_\varepsilon)$ *решения задачи* (13) *– это решение задачи безусловной минимизации*

$$\min \big(\frac{1}{2}(M_y y, y) + \frac{1}{2}(M_u u, u) + \theta(y) + \varphi(u) - (g, y) + \frac{1}{2\varepsilon}\|Ly - u\|^2_{D^{-1}}\big),$$

Для решений задач (11) и (13) справедливы утверждения теоремы 1 о сходимости $(y_\varepsilon, u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ к (y, u, λ^0) при $\varepsilon \to 0$ и оценка скорости сходимости (7):

$$\tilde{m}\|x_\varepsilon - x\|^2 \leqslant (A_\varepsilon(x_\varepsilon - x), x_\varepsilon - x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda^0\|^2_D.$$

Ниже мы уточним эту оценку при различных вариантах выбора матрицы D, оценив константы положительной определенности матрицы $A_\varepsilon = A + \frac{1}{2\varepsilon}B^T D^{-1} B$.

Теорема 2. *Пусть* (y, u, λ^0) *– решение задачи* (11), $(y_\varepsilon, u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ *– решение задачи* (13) *и выполнены условия* (12). *Тогда справедливы следующие оценки погрешности при различном выборе матрицы* D:

$$D = E: \ m_y\|y_\varepsilon - y\|^2 + c_1 m_u\big(\|L(y_\varepsilon - y)\|^2 + \|u_\varepsilon - u\|^2\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda^0\|^2, \tag{14}$$

$$D = LL^T: \ (m_y + c_2 m_u)\|y_\varepsilon - y\|^2 + c_2 m_u\|u_\varepsilon - u\|^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|L\lambda^0\|^2, \tag{15}$$

$$D = L = L^T > 0: \ m_y\|y_\varepsilon - y\|^2 + c_3 m_u\big(\|y_\varepsilon - y\|^2_L + \|u_\varepsilon - u\|^2\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda^0\|^2_L. \tag{16}$$

Здесь $c_1 \approx \frac{1}{2}$, $c_2 \approx \frac{\mu^2}{1+\mu^2}$, $c_3 \approx \frac{\mu}{1+\mu}$ *асимптотически при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. а) Пусть $D = E$. В силу условий (12) на матрицы M_y и M_u справедливы следующие неравенства:

$$(A_\varepsilon x, x) = (M_y y, y) + (M_u u, u) + \frac{1}{2\varepsilon}\|Ly - u\|^2 \geqslant m_y\|y\|^2 + m_u\|u\|^2 +$$
$$+ \frac{1}{2\varepsilon}\|Ly - u\|^2 \geqslant m_y\|y\|^2 + (m_u + \frac{1}{2\varepsilon}(1 - \frac{1}{\alpha}))\|u\|^2 + \frac{1-\alpha}{2\varepsilon}\|Ly\|^2,$$

где $\alpha > 0$ произвольно. Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало и $\alpha = 1 - m_u\varepsilon > 0$. Тогда

$$(A_\varepsilon x, x) \geqslant m_y\|y\|^2 + \frac{m_u}{2}(1 - \frac{m_u\varepsilon}{1 - m_u\varepsilon})\|u\|^2 + \frac{m_u}{2}\|Ly\|^2 =$$
$$= m_y\|y\|^2 + c_1 m_u\big(\|u\|^2 + \|Ly\|^2\big),\ c_1 \approx \frac{1}{2} \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Отсюда и из (7) следует неравенство (14).

b) $D = LL^T$. В этом случае справедливы следующие неравенства:

$$(A_\varepsilon x, x) = (M_y y, y) + (M_u u, u) + \frac{1}{2\varepsilon}\|y - L^{-1}u\|^2 \geqslant m_y\|y\|^2 + m_u\|u\|^2 +$$
$$+ \frac{1}{2\varepsilon}\|y - L^{-1}u\|^2 \geqslant m_y\|y\|^2 + m_u\|u\|^2 - \frac{1}{2\varepsilon}|1 - \frac{1}{\alpha}|\,\|L^{-1}u\|^2 + \frac{1-\alpha}{2\varepsilon}\|y\|^2,\ \alpha > 0.$$

Поскольку $\|Ly\| \geqslant \mu\|y\|\ \forall y$, то $\|L^{-1}\| \leqslant \mu^{-1}$. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ выберем $\alpha = 1 - \dfrac{2\mu^2 m_u}{1+\mu^2}\,\varepsilon$, тогда

$$(A_\varepsilon x, x) \geqslant m_y\|y\|^2 + \big(m_u - \frac{m_u}{(1+\mu^2)\alpha}\big)\|u\|^2 + \frac{\mu^2 m_u}{1+\mu^2}\|y\|^2 =$$
$$= m_y\|y\|^2 + c_2 m_u\big(\|u\|^2 + \|y\|^2\big),\ c_2 \approx \frac{\mu^2}{1+\mu^2} \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

В результате получим оценку(15).

c) $D = L = L^T > 0$. Оценка константы $\tilde{m}$ положительной определенности матрицы A_ε вытекает из следующих неравенств:

$$(A_\varepsilon x, x) = (M_y y, y) + (M_u u, u) + \frac{1}{2\varepsilon}\|L^{1/2}y - L^{-1/2}u\|^2 \geqslant m_y\|y\|^2 +$$
$$+ m_u\|u\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|L^{1/2}y - L^{-1/2}u\|^2 \geqslant m_y\|y\|^2 + m_u\|u\|^2 -$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon}|1 - \frac{1}{\alpha}|\|L^{-1/2}u\|^2 + \frac{1-\alpha}{2\varepsilon}\|L^{1/2}y\|^2,\ \alpha > 0.$$

Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ выберем $\alpha = 1 - \dfrac{2\mu m_u}{1+\mu}\,\varepsilon$, тогда

$$(A_\varepsilon x, x) \geqslant m_y\|y\|^2 + \big(m_u - \frac{m_u}{(1+\mu)\alpha}\big)\|u\|^2 + \frac{\mu m_u}{1+\mu}\|L^{1/2}y\|^2 =$$
$$= m_y\|y\|^2 + c_3 m_u\big(\|u\|^2 + \|L^{1/2}y\|^2\big),\ c_2 \approx \frac{\mu}{1+\mu} \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

□

2 Блочный метод Гаусса-Зейделя для седловой задачи (11) с симметричной матрицей

Исключив из седловой задачи (13) вектор λ_ε, получим систему включений

$$\begin{aligned}(M_y + \frac{1}{\varepsilon}L^T D^{-1} L)y_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}L^T D^{-1} u_\varepsilon + \partial\theta(y_\varepsilon) \ni g,\\ (M_u + \frac{1}{\varepsilon}D^{-1})u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}D^{-1}Ly_\varepsilon + \partial\varphi(u_\varepsilon) \ni 0.\end{aligned} \tag{17}$$

Пусть выполнены условия (12) и матрицы M_y и M_u – симметричные. Применим блочный метод Гаусса-Зейделя для решения (17):

$$\begin{aligned}(M_y + \frac{1}{\varepsilon}L^T D^{-1} L)y^{k+1} + \partial\theta(y^{k+1}) \ni \frac{1}{\varepsilon}L^T D^{-1} u^k + g,\\ (M_u + \frac{1}{\varepsilon}D^{-1})u^{k+1} + \partial\varphi(u^{k+1}) \ni \frac{1}{\varepsilon}D^{-1}Ly^{k+1}.\end{aligned} \tag{18}$$

Получим оценку его скорости сходимости.

Разрешив второе включение в (18), записанное для номера итерации k, относительно u^k, получим соотношение, связывающее две последовательные итерации y^k и y^{k+1}:

$$(M_y + \frac{1}{\varepsilon}L^T D^{-1} L)y^{k+1} + \partial\theta(y^{k+1}) \ni \\ \ni \frac{1}{\varepsilon}L^T D^{-1}(M_u + \frac{1}{\varepsilon}D^{-1} + \partial\varphi)^{-1}(\frac{1}{\varepsilon}D^{-1}Ly^k) + g. \tag{19}$$

Аналогично, разрешив первое включение в (18) относительно y^{k+1}, получим включение для u^{k+1}:

$$(M_u + \frac{1}{\varepsilon}D^{-1})u^{k+1} + \partial\varphi(u^{k+1}) \ni \\ \ni \frac{1}{\varepsilon}D^{-1}L(M_y + \frac{1}{\varepsilon}L^T D^{-1} L + \partial\theta)^{-1}(\frac{1}{\varepsilon}L^T D^{-1} u^k + g). \tag{20}$$

Введем следующие обозначения для матриц и нелинейных операторов:

$$\begin{aligned}Y_0 = M_y + \frac{1}{\varepsilon}L^T D^{-1} L = Y_0^T > 0, \quad U_0 = M_u + \frac{1}{\varepsilon}D^{-1},\\ Y_1(y) = \frac{1}{\varepsilon}L^T D^{-1}(M_u + \frac{1}{\varepsilon}D^{-1} + \partial\varphi)^{-1}(\frac{1}{\varepsilon}D^{-1}Ly),\\ U_1(u) = \frac{1}{\varepsilon}D^{-1}L(M_y + \frac{1}{\varepsilon}L^T D^{-1} L + \partial\theta)^{-1}(\frac{1}{\varepsilon}L^T D^{-1} u + g).\end{aligned}$$

Используя эти обозначения, включения (19) и (20) можно записать, соответственно, в виде

$$Y_0 y^{k+1} + \partial\theta(y^{k+1}) \ni Y_1(y^k) + g, \tag{21}$$

$$U_0 u^{k+1} + \partial\varphi(u^{k+1}) \ni U_1(u^k). \tag{22}$$

Таким образом, требуется получить оценки скорости сходимости итерационных методов (21) и (22).

Лемма 1. *Пусть* $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M = M^T > 0$, *и* $Q = \partial\psi : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$, *где* ψ *– выпуклая, собственная и полунепрерывная снизу функция. Тогда*

$$(M+Q)^{-1} = M^{-1/2}\circ S\circ M^{-1/2},\ \ S = (E + M^{-1/2}\circ Q\circ M^{-1/2})^{-1}, \tag{23}$$

и оператор S *– ко-коэрцитивный:*

$$(Su - Sv, u - v) \geqslant \|Su - Sv\|^2 \ \ \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Пусть $w = (M+Q)^{-1}(u)$, т.е. $Mw + Q(w) \ni u$. Тогда $M^{1/2}w + M^{-1/2}Q(w) \ni M^{-1/2}u$ и для $z = M^{1/2}w$ справедливо включение $z + M^{-1/2}Q(M^{-1/2}z) \ni M^{-1/2}u$. Отсюда следует $z = (E + M^{-1/2}\circ Q\circ M^{-1/2})^{-1}(M^{-1/2}u)$, т.е. $w = M^{-1/2}(E + M^{-1/2}\,Q\,M^{-1/2})^{-1}(M^{-1/2}u)$.

Осталось доказать ко-коэрцитивность оператора S. Обозначим $y = Su, z = Sv$. Тогда

$$(Su - Sv, u - v) = (y - z, S^{-1}y - S^{-1}z) = \|y - z\|^2 + (y - z, M^{-1/2}\,Q\,M^{-1/2}(y) - \\ - M^{-1/2}\,Q\,M^{-1/2}(z)) \geqslant \|y - z\|^2 = \|Su - Sv\|^2.$$

□

Лемма 2. *1) Операторы* Y_1 *и* U_1 *удовлетворяют условиям липшиц-непрерывности:*

$$\begin{array}{ll}(Y_1(y) - Y_1(z), w) \leqslant \|y - z\|_{\tilde{Y}_0}\,\|w\|_{\tilde{Y}_0} & \forall y, z, w \in \mathbb{R}^n,\\ (U_1(u) - U_1(v), w) \leqslant \|u - v\|_{\tilde{U}_0}\,\|w\|_{\tilde{U}_0} & \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n\end{array} \tag{24}$$

где симметричные и положительно определенные матрицы $\tilde{Y}_0$ *и* $\tilde{U}_0$ *определены равенствами*

$$\tilde{Y}_0 = \frac{1}{\varepsilon}L^TD^{-1/2}(\varepsilon D^{1/2}M_uD^{1/2} + E)^{-1}D^{-1/2}L,$$
$$\tilde{U}_0 = \frac{1}{\varepsilon}D^{-1/2}(E + \varepsilon D^{1/2}L^{-T}M_yL^{-1}D^{1/2})^{-1}D^{-1/2}.$$

2) Если

$$M_u \geqslant c_0D^{-1},\ c_0 > 0, \tag{25}$$

то справедливы следующие оценки:

$$\tilde{Y}_0 \leqslant \frac{1}{1 + c_0\varepsilon}Y_0,\ \ \tilde{U}_0 \leqslant \frac{1}{1 + c_0\varepsilon}U_0. \tag{26}$$

Доказательство. 1) Применив лемму 1 с $M = M_u + \dfrac{1}{\varepsilon}D^{-1}$ и $Q = \partial\varphi$, получим

$$Y_1 = B_y^T\circ S_1\circ B_y,\ \text{где } B_y = \frac{1}{\varepsilon}(M_u + \frac{1}{\varepsilon}D^{-1})^{-1/2}D^{-1}L,$$

$$S_1 = \big(E + (M_u + \frac{1}{\varepsilon}D^{-1})^{-1/2}\circ\partial\varphi\circ(M_u + \frac{1}{\varepsilon}D^{-1})^{-1/2}\big)^{-1}.$$

Прямыми вычислениями легко получить равенство $\tilde{Y}_0 = B_y^T\, B_y$. Из ко-коэрцитивности оператора S_1 следует, что он – нерастягивающий: $\|S_1 y - S_1 z\| \leqslant \|y - z\|$, поэтому

$$(Y_1(y) - Y_1(z), w) = (S_1(B_y y) - S_1(B_y z), B_y w) \leqslant \|B_y(y-z)\|\|B_y w\| = \\ = \|y - z\|_{\tilde{Y}_0}\,\|w\|_{\tilde{Y}_0}.$$

Аналогично доказывается липшиц-непрерывность оператора U_1. Именно, применив лемму 1 с $M = M_y + \dfrac{1}{\varepsilon} L^T D^{-1} L$ и $Q = \partial\theta$, получим

$$U_1(u) = B_u\, S_2(B_u^T u + (M_y + \frac{1}{\varepsilon} L^T D^{-1} L)^{-1/2} g),$$

где $B_u = \dfrac{1}{\varepsilon} D^{-1} L (M_y + \dfrac{1}{\varepsilon} L^T D^{-1} L)^{-1/2}$, $\;S_2 = \big(E + (M_y + \dfrac{1}{\varepsilon} L^T D^{-1} L)^{-1/2} \circ \partial\theta \circ (M_y + \dfrac{1}{\varepsilon} L^T D^{-1} L)^{-1/2}\big)^{-1}$. Теперь в силу ко-коэрцитивности оператора S_2 и равенства $\tilde{U}_0 = B_u^T B_u$

$$(U_1(u) - U_1(v), w) = (S_2(B_u u) - S_2(B_u v), B_u w) \leqslant \|B_u(u - v)\|\|B_u w\| = \\ = \|u - v\|_{\tilde{U}_0}\,\|w\|_{\tilde{U}_0}.$$

2) Докажем первое неравенство в (26). В силу условия (25) имеем $\varepsilon D^{1/2} M_u D^{1/2} + E \geqslant (c_0\varepsilon + 1)E$, поэтому

$$\tilde{Y}_0 \leqslant \frac{1}{1 + c_0\varepsilon}\big(\frac{1}{\varepsilon} L^T D^{-1} L\big) \leqslant \frac{1}{1 + c_0\varepsilon} Y_0.$$

При доказательстве второго неравенства в (26) снова воспользуемся условием (25) и неравенством $D^{1/2} L^{-T} M_y L^{-1} D^{1/2} \geqslant 0$, откуда

$$\tilde{U}_0 \leqslant \frac{1}{\varepsilon} D^{-1} \leqslant \frac{1}{1 + c_0\varepsilon} U_0.$$

$\square$

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (25)*:* $M_u \geqslant c_0 D^{-1}$. *Тогда итерации метода* (18) *сходятся к решению* $(y_\varepsilon, u_\varepsilon)$ *задачи* (17) *со скоростью, зависящей только от* ε. *Более точно, для всех* k *справедливы следующие оценки:*

$$\|y^{k+1} - y_\varepsilon\|_{Y_0} \leqslant \frac{1}{1 + c_0\varepsilon}\|y^k - y_\varepsilon\|_{Y_0},\; Y_0 = M_y + \frac{1}{\varepsilon} L^T D^{-1} L,$$
$$\|u^{k+1} - u_\varepsilon\|_{U_0} \leqslant \frac{1}{1 + c_0\varepsilon}\|u^k - u_\varepsilon\|_{U_0},\; U_0 = M_u + \frac{1}{\varepsilon} D^{-1}. \tag{27}$$

Доказательство. Получим оценку для вектора ошибки $z^k = y^k - y_\varepsilon$. Из (21) следует:

$$Y_0 z^{k+1} + \partial\theta(y^{k+1}) - \partial\theta(y_\varepsilon) \ni Y_1(y^k) - Y_1(y_\varepsilon).$$

Умножив это включения на z^{k+1} и воспользовавшись монотонностью $\partial\theta$ и оценками (24), (26), получим

$$\|z^{k+1}\|_{Y_0}^2 \leqslant \|z^k\|_{\tilde{Y}_0}\|z^{k+1}\|_{\tilde{Y}_0} \leqslant \frac{1}{1+c_0\varepsilon}\|z^k\|_{Y_0}\|z^{k+1}\|_{Y_0},$$

откуда вытекает первая оценка в (27). Вывод второй оценки совершенно аналогичен. □

3 Решение эллиптической задачи оптимального управления с нелокальными ограничениями на состояние

Применим полученные результаты к сеточной аппроксимации одной задачи оптимального управления, подробно изученной в работе [12].

Пусть $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ и $\Omega_1 = \{x \in \Omega : \, x_i < 0.5\}$. Будем решать следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{gathered}
\min\{J(y,u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (y-y_d)^2 dx + \frac{r}{2}\int\limits_\Omega u^2 dx\},\ r>0,\\
-\Delta y = u,\ x\in\Omega,\ \ y(x)=0, x\in\partial\Omega=(0,1)\times(0,1),\\
|u(x)|\leqslant 1 \text{ при } x\in\bar{\Omega}_1,\ \ \int\limits_\Omega y(x)\,dx \leqslant 1.
\end{gathered} \tag{28}$$

Аппроксимируем эту задачу конечно-разностной задачей на равномерной сетке $\omega = \{x_{ij} = (ih, jh),\ i,j, = 0,1,\dots,n+1;\ (n+1)h = 1\}$, считая для простоты, что функции u и y_d непрерывны. Обозначим через $v_{ij} = v_h(ih, jh)$ узловые параметры сеточной функции v_h. Определим множество узлов сетки $\omega_1 = \omega \cap \bar{\Omega}_1 = \{x_{ij} \in \omega : \, i,j, = 0,1,\dots,n_1\}$. Сеточное уравнение состояния и множества ограничений имеют вид:

$$\begin{cases}
\dfrac{-y_{i-1j}+2y_{ij}-y_{i+1j}}{h^2} + \dfrac{-y_{ij-1}+2y_{ij}-y_{ij+1}}{h^2} = u_{ij},\ 1\leqslant i,j\leqslant n,\\
y_{0j} = y_{j0} = y_{jn+1} = y_{n+1j} = 0.
\end{cases} \tag{29}$$

$$U_{ad}^h = \{u_h : \, |u_{ij}| \leqslant 1,\ i,j = 1,2,\dots,n_1\},\ \ Y_{ad}^h = \{y_h : \, h^2\sum_{i,j=1}^n y_{ij} \leqslant 1\}.$$

Сеточная задача оптимального управления:

$$\begin{gathered}
\text{найти} \min_{(y_h,u_h)\in K_h}\{J_h(y_h,u_h) = \frac{h^2}{2}\sum_{i,j=1}^n (y_{ij}-y_{d,ij})^2 + \frac{rh^2}{2}\sum_{i,j=1}^n u_{ij}^2\},\\
K_h = \{(y_h,u_h) : \, y_h \in Y_{ad}^h, u_h\in U_{ad}^h,\ \ \text{выполнено уравнение (29)}\}.
\end{gathered} \tag{30}$$

Пусть $N = n^2$, $N_1 = n_1^2$ и выбрана нумерация сеточных узлов, при которой узлы сетки ω_1 имеют номера с 1 по N_1. Обозначим через L матрицу сеточного оператора Лапласа при нулевых граничных условиях Дирихле, а через $\varphi(u)$ и $\theta(y)$ — индикаторные функции множеств $\{u \in \mathbb{R}^N : |u_i| \leqslant 1 \ \ \forall i = 1, 2, \dots, N_1\}$ и $\{y \in \mathbb{R}^N : \sum\limits_{i=1}^{N} h^2 y_i \leqslant 1 \ \}$, соответственно. Пусть также $\|.\|$ – это евклидова норма в $\mathbb{R}^N$. Тогда сеточная задача (30) может быть записана в виде:

$$\min_{Ly=u} \left\{ J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2 + \frac{r}{2}\|u\|^2 + \varphi(u) + \theta(y) \right\}, \tag{31}$$

а соответствующая ей задача со штрафом на уравнение состояния:

$$\min \left\{ J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2 + \frac{r}{2}\|u\|^2 + \varphi(u) + \theta(y) + \frac{1}{2\varepsilon}\|Ly - u\|^2_{D^{-1}} \right\}. \tag{32}$$

В рассматриваемом примере условие (25) выполнено с постоянными $c_0 = r$ при $D = E$, $c_0 = r\mu_{\min}$ при $D = L$ и $c_0 = r\mu_{\min}^2$ при $D = L^2$, где $\mu_{\min} = \dfrac{8}{h^2}\sin^2\dfrac{\pi h}{2}$ – минимальное собственное число L.

Приведем оценки погрешности метода регуляризации и скорости сходимости итераций метода (18) к решению регуляризованной задачи (32) (следствия оценок (14)-(16) и (27), соответственно). Кроме того, обсудим алгоритмы численной реализации итерационного метода. Отметим, что с точностью до множителя h векторная норма $\|v\|$ соответствует L_2-норме сеточной функции v_h с узловыми параметрами v, векторная норма $\|v\|_L$ – W_2^1-норме сеточной функции v_h и векторная норма $\|Lv\|$ – W_2^2-норме сеточной функции v_h. Таким образом, можно оценки вида (14)-(16) записать для норм сеточных функций $y_{\varepsilon h} - y_h$ и $u_{\varepsilon h} - u_h$ через соответствующие нормы множителя Лагранжа λ_h^0. Будем использовать следующие обозначения: $\|y\|_0 = \|y\|_{L_2}$, $\|y\|_1 = \|y\|_{W_2^1}$, $\|y\|_2 = \|y\|_{W_2^2}$.

a) $D = E$. Оценка близости регуляризованного и точного решений:

$$\|y_{\varepsilon h} - y_h\|_0^2 + \frac{r}{2}\big(\|y_{\varepsilon h} - y_h\|_2^2 + \ \|u_{\varepsilon h} - u_h\|_0^2\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda_h^0\|_0^2. \tag{33}$$

Итерационный метод (18):

$$(E + \frac{1}{\varepsilon}L^2)y^{k+1} + \partial\theta(y^{k+1}) \ni \frac{1}{\varepsilon}Lu^k + g, \ (r + \frac{1}{\varepsilon})u^{k+1} + \partial\varphi(u^{k+1}) \ni \frac{1}{\varepsilon}Ly^{k+1}.$$

Оценки скорости сходимости итераций:

$$\big(\|L(y^{k+1} - y_\varepsilon)\|^2 + \varepsilon\|y^{k+1} - y_\varepsilon\|^2\big)^{1/2} \leqslant \frac{1}{1 + r\varepsilon}\big(\|L(y^k - y_\varepsilon)\|^2 + \varepsilon\|y^k - y_\varepsilon\|^2\big)^{1/2},$$

$$\|u^{k+1} - u_\varepsilon\| \leqslant \frac{1}{1 + r\varepsilon}\|u^k - u_\varepsilon\|.$$

Решение включения для u сводится к проекции известного вектора на множество ограничений U_{ad}, которая находится прямыми вычислениями благодаря структуре U_{ad}. С другой стороны, включение для y эквивалентно вариационному неравенству с матрицей $E+\dfrac{1}{\varepsilon}L^2$, число обусловленности которой имеет порядок h^{-4}. В связи вычисление y внутренним итерационным методом требует значительных вычислительных затрат.

b) $D = L$. Оценка близости регуляризованного и точного решений:

$$\|y_{\varepsilon h} - y_h\|^2 + c_2 r\big(\|y_{\varepsilon h} - y_h\|_L^2 + \|u_{\varepsilon h} - u_h\|^2\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda_h^0\|_L^2,\ c_2 \approx \frac{\mu_{\min}}{1+\mu_{\min}}. \tag{34}$$

Метод (18):

$$(E + \frac{1}{\varepsilon}L)y^{k+1} + \partial\theta(y^{k+1}) \ni \frac{1}{\varepsilon}u^k + g,\ (rE + \frac{1}{\varepsilon}L^{-1})u^{k+1} + \partial\varphi(u^{k+1}) \ni \frac{1}{\varepsilon}y^{k+1}.$$

Оценки скорости сходимости итераций:

$$\big(\|y^{k+1} - y_\varepsilon\|_L^2 + \varepsilon\|y^{k+1} - y_\varepsilon\|^2\big)^{1/2} \leqslant \frac{1}{1 + r\varepsilon\mu_{\min}}\big(\|y^k - y_\varepsilon\|_L^2 + \varepsilon\|y^k - y_\varepsilon\|^2\big)^{1/2},$$

$$|[u^{k+1} - u_\varepsilon]| \leqslant \frac{1}{1 + r\varepsilon\mu_{\min}}|[u^k - u_\varepsilon]|,\ \text{где}\ |[u]|^2 = \frac{1}{\varepsilon}\|L^{-1/2}u\|^2 + r\|u\|^2.$$

Включение для y эквивалентно вариационному неравенству с матрицей $E+\dfrac{1}{\varepsilon}L$, число обусловленности которой имеет порядок h^{-2}. Решение этого неравенства можно осуществить эффективнее, чем вариационного неравенства с матрицей $E+\dfrac{1}{\varepsilon}L^2$ как в предыдущем случае. Матрица включения для вектора u спектрально эквивалентна единичной матрице:

$$rE \leqslant rE + \frac{1}{\varepsilon}L^{-1} \leqslant (r + \frac{1}{\varepsilon\mu_{\min}})E,$$

поэтому для его решения можно применить непредобусловленный метод простой итерации:

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + ru^k + \frac{1}{\varepsilon}L^{-1}u^k + \partial\varphi(u^{k+1}) \ni \frac{1}{\varepsilon}y^{k+1}.$$

Его скорость сходимости при оптимальном параметре τ характеризуется множителем перехода порядка $1 - r\varepsilon$.

Другой вариант решения включения для u – это его преобразование к системе из включения с диагональным оператором и нелинейного уравнения с симметричной, положительно определенной матрицей L и монотонным, диагональным и липшиц-непрерывным оператором $\dfrac{1}{\varepsilon}(rE + \partial\varphi)^{-1}$:

$$ru + \partial\varphi(u) \ni w,\ \ Lw + \frac{1}{\varepsilon}(rE + \partial\varphi)^{-1}(w) = \frac{1}{\varepsilon}Ly^{k+1}.$$

c) $D = L^2$. Оценка близости регуляризованного и точного решений:

$$(1 + c_2 r)\|y_{\varepsilon h} - y_h\|^2 + \, c_3 r\|u_{\varepsilon h} - u_h\|^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|L\lambda_h^0\|^2, \; c_3 \approx \frac{\mu_{\min}^2}{1 + \mu_{\min}^2}. \tag{35}$$

Метод (18):

$$(1 + \frac{1}{\varepsilon})y^{k+1} + \partial\theta(y^{k+1}) \ni \frac{1}{\varepsilon}L^{-1}u^k + g, \; (rE + \frac{1}{\varepsilon}L^{-2})u^{k+1} + \partial\varphi(u^{k+1}) \ni \frac{1}{\varepsilon}L^{-1}y^{k+1}.$$

Оценки скорости сходимости метода:

$$\|y^{k+1} - y_\varepsilon\| \leqslant \frac{1}{1 + r\varepsilon\mu_{\min}^2}\|y^k - y_\varepsilon\|,$$

$$[u^{k+1} - u_\varepsilon] \leqslant \frac{1}{1 + r\varepsilon\mu_{\min}^2}[u^k - u_\varepsilon], \text{ где } [u]^2 = \frac{1}{\varepsilon}\|L^{-1}u\|^2 + r\|u\|^2.$$

Включение для вектора y сводится к проектированию на множество Y_{ad} и реализуется просто. Матрица включения для вектора u спектрально эквивалентна единичной матрице:

$$rE \leqslant rE + \frac{1}{\varepsilon}L^{-2} \leqslant (r + \frac{1}{\varepsilon\mu_{\min}^2})E,$$

поэтому для его решения можно применить непредобусловленный метод простой итерации, скорость сходимости которого характеризуется множителем перехода порядка $1 - r\varepsilon$.

Можно использовать, как и в случае $D = L$, преобразование к системе

$$ru + \partial\varphi(u) \ni w, \;\; L^2 w + \frac{1}{\varepsilon}(rE + \partial\varphi)^{-1}(w) = \frac{1}{\varepsilon}Ly^{k+1}.$$

Из приведенного анализа следует, что наиболее просто реализуемым является метод с $D = L^2$. С другой стороны, как следует из оценок точности (33) — (35), при его использовании для достижения хорошей точности метода штрафа может потребоваться существенно меньший параметр ε, чем при $D = L$ и, тем более, при $D = E$.

Результаты вычислительных экспериментов

Решалась конечно-разностная задача (30) при $y_d(x) = 10(\sin(\pi x_1) + \sin(\pi x_2))$ с нулевым начальным приближением. Под точным решением u_ε понималось решение итерационным методом после очень большого количества итераций. Критерием остановки итераций служило уменьшение евклидовой нормы начальной погрешности для вектора управления u_ε в 100 раз:

$$\|u^n - u_\varepsilon\| \leqslant 0.01\,\|u_\varepsilon\|, \; u^0 = 0. \tag{36}$$

размерность сетки	N_{it} при $\varepsilon = 0.1$ $r = 0.01;\ r = 1$	N_{it} при $\varepsilon = 0.01$ $r = 0.01;\ r = 1$	N_{it} при $\varepsilon = 0.001$ $r = 0.01;\ r = 1$
20×20	56; 4	559; 25	5588; 236
40×40	56; 4	557; 25	5565; 235
80×80	56; 4	560; 25	5603; 227

Зависимость числа итераций N_{it} блочного метода Гаусса-Зейделя от параметра ε при различных сетках для выполнения условия (36). Случай $D = L$. Приведены результаты для $r = 0.01;\ r = 1$

r	N_{it} при $\varepsilon = 0.01$	N_{it} при $\varepsilon = 0.001$	N_{it} при $\varepsilon = 0.0001$	N_{it} при $\varepsilon = 0.00001$	N_{it} при $\varepsilon = 0.000001$
0.01	39	211	1976	21624	216117
1	6	12	119	881	8785

Зависимость числа итераций N_{it} блочного метода Гаусса-Зейделя от параметра ε для выполнения условия (36). Случай $D = L^2$.

Результаты тестовых вычислений полностью согласуется с теоретическими выводами, а именно, скорость сходимости итерационных методов не зависит от размерности задачи (шага сетки) и линейно зависит от параметров ε и r.

Кроме того, оказалось, что использование блочного SOR-метода с параметром верхней релаксации $\sigma > 1$ при подходящем выборе параметра σ дает существенное ускорение сходимости по сравнению с блочным методом Гаусса-Зейделя.

размерность сетки	N_{it} при $\varepsilon = 0.01$ $\sigma = 1; \sigma = 1.5; \sigma = 1.7$	N_{it} при $\varepsilon = 0.001$ $\sigma = 1; \sigma = 1.5; \sigma = 1.7$
20×20	559; 186; 96	5588; 1862; 998
40×40	557; 185; 97	5565; 1855; 997
80×80	560; 188; 98	5603; 1882; 1003

Зависимость числа итераций N_{it} блочного SOR-метода при различных σ от параметра ε. Случай $D = L$, $r = 0.01$.

Для контроля погрешности выполнения сеточного уравнения состояния на решении регуляризованной задачи (y_ϵ, u_ϵ) вычислялась L_2-норма невязки $res = \|Ly_\epsilon - u_\epsilon\|_0$. Под точным решением (y_ϵ, u_ϵ) понималась итерация (y^N, u^N) при очень большом N.

r	res при $\varepsilon = 0.1$	res при $\varepsilon = 0.01$	res при $\varepsilon = 0.001$
0.01	0.63	0.064	0.0064
1	1.31	0.131	0.0131

Зависимость res от параметра ε при $r = 0.01$ и $r = 1$. Решение (y_ϵ, u_ϵ) получено блочным методом Гаусса-Зейделя с $D = L$ на сетке 80×80.

r	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$	$\varepsilon = 0.0001$	$\varepsilon = 0.00001$	$\varepsilon = 0.000001$
0.01	2.515	0.2563	0.0262	0.00261	0.000247
1	5.844	0.589	0.059	0.0059	0.00057

Зависимость res от параметра ε при $r = 0.01$ и $r = 1$. Решение (y_ϵ, u_ϵ) получено блочным методом Гаусса-Зейделя с $D = L^2$ на сетке 20×20.

Список литературы

[1] Bergounioux M., Haddou V., Hintermuller M., Kunisch K. *A comparison of a Moreau-Yosida-based active set strategy and interior point methods for constrained optimal control problems,* SIAM J. Optim., **11**, 495-521 (2000).

[2] Bergounioux M., Kunisch K. *A Primal-dual active set strategy for state-constrained optimal control problems,* Comput. Optim. Appl., **22**, 193-224 (2002).

[3] Troltzsch F., Yousept I. *A regularization method for the numerical solution of elliptic boundary control problems with pointwise state constraints,* Comput. Optim. Appl.,**42**, 43-66 (2009).

[4] Hintermuller M., Hinze M. *Moreau-Yosida regularization in state constrained elliptic control problems: error estimates and parameter adjustment,* SIAM J. Numer. Anal., **47**, 1666-1683 (2009).

[5] Graser C., Kornhuber R. *Nonsmooth Newton methods for set-valued saddle point problems,* SIAM J. Numer. Anal., **47**, 1251-1273 (2009).

[6] Schiela A., Gunther A. *An interior point algorithm with inexact step computation in function space for state constrained optimal control,* Numer. Math., **119**, 373-407 (2011).

[7] Hinze M., Schiela A. *Discretization of interior point methods for state constrained elliptic optimal control problems: Optimal error estimates and parameter adjustment,* Comput. Optim. Appl., **48**, 581-600 (2011).

[8] Laitinen E., Lapin A., Lapin S. *On the iterative solution of finite-dimensional inclusions with applications to optimal control problems,* Comp. Methods in Appl. Math., **10**, 283-301 (2010).

[9] Lapin A. *Preconditioned Uzawa type methods for finite-dimensional constrained saddle point problems,* Lobachevskii J. Math. **31** (4), 309-322 (2010).

[10] Lapin A., Khasanov M. *State-constrained optimal control of an elliptic equation with its right-hand side used as control function,* Lobachevskii J. Math., 32(4), 453-462 (2011).

[11] Laitinen E., Lapin A. *Iterative solution methods for a class of state constrained optimal control problems,* Applied Mathematics, **3** (12), 1862-1867 (2012).

[12] Залялов Д.Г., Лапин А.В. *Численное решение одной задачи оптимального управления системой, описываемой линейным эллиптическим уравнением, при наличии нелокальных ограничений на состояние системы,* Ученые записки Казанского ун-та, **3**, 129-144 (2012).

[13] Laitinen E., Lapin A. *Iterative Solution Methods for the Large-Scale Constrained Saddle Point Problems* "Numerical Methods for Differential Equations, Optimization, and Technological Problems", Comp. Meth. Appl. Sc., **27**, 19-39 (2013).

[14] Laitinen E., Lapin A., Lapin S. *Iterative solution methods for variational inequalities with nonlinear main operator and constraints to gradient of solution,* Lobachevskii J. Math., **33** (4), 364-371 (2012).

[15] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces* (Intern.Publ., 1976).

А.В. Лапин (A. Lapin)

профессор, кафедра математической статистики, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 18. Казань.

e-mail: avlapine@mail.ru

Д.Г. Залялов (D. Zalyalov)

аспирант, кафедра математической статистики, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 18. Казань.

e-mail: dzalyalov@yahoo.com