ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2013, том 448, № 5, с. 506–509

МАТЕМАТИКА

УДК 517.983:517.986

ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТЬ ОПЕРАТОРОВ И ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СЛЕДА НА C^*-АЛГЕБРАХ

© 2013 г. А. М. Бикчентаев

Представлено академиком И.А. Ибрагимовым 08.06.2012 г.

Поступило 31.07.2012 г.

DOI: 10.7868/S0869565213050046

Настоящая работа продолжает исследования автора, начатые в [1, 2], обозначений и терминологии которых мы придерживаемся. В разделе 2 установлены новые критерии перестановочности неотрицательного оператора и проектора в терминах операторных неравенств. Показано, что в общем случае в этих неравенствах проектор нельзя заменить на произвольный неотрицательный оператор с сохранением перестановочности операторов. Получены новые критерии перестановочности проекторов в терминах операторных неравенств.

В разделе 3 получены характеризации следа в классе всех положительных нормальных функционалов на алгебре фон Неймана, при этом использованы операторные неравенства из раздела 2. Показано, что не каждая характеризация следа среди положительных нормальных функционалов переносится на нормальные веса (пример 1). Это является ответом на вопрос В. Кафтала (Victor Kaftal, Cincinnati University, USA), заданный автору на международной конференции Operator Theory'23 (Romania, Timisoara, 2010, June 30). Приведена характеризация следа в классе всех весов на алгебре фон Неймана. В разделе 4 получены характеризации следа в классе всех положительных функционалов на C^*-алгебре в терминах операторных неравенств. Доказаны новые критерии коммутативности C^*-алгебр. Сведения о других характеризациях следа и критериях коммутативности C^*-алгебр можно почерпнуть из обзора автора [3].

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $\mathcal{H}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Оператор $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется проектором, если $X = X^2 = X^*$. Коммутантом множества $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется множество $\mathcal{X}' = \{Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\colon XY = YX,\ X^*Y = YX^*\ (X \in \mathcal{X})\}$.

$*$-Подалгебра $\mathcal{M}$ алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется алгеброй фон Неймана, действующей в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, если $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$. C^*-алгеброй называется комплексная банахова $*$-алгебра $\mathcal{A}$, такая что $\|A^*A\| = \|A\|^2$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Для C^*-алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{sa}$, $\mathcal{A}^+$ и $\mathcal{A}^{pr}$ будем обозначать ее подмножества эрмитовых элементов, положительных элементов и проекторов соответственно. Для унитальной $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^u$ обозначим ее подмножество унитарных элементов и пусть I – единица $\mathcal{A}$, $P^\perp = I - P$ для $P \in \mathcal{A}^{pr}$.

Весом на C^*-алгебре $\mathcal{A}$ называется отображение $\varphi\colon \mathcal{A}^+ \to [0,+\infty]$ со свойствами

$$\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y),$$
$$\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)\ (X, Y \in \mathcal{A}^+, \lambda \ge 0)$$

(при этом полагается, что $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$).

Вес φ на $\mathcal{A}$ называется: следом, если $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{A}$; точным, если $\varphi(X) = 0 \Rightarrow X = 0$, $X \in \mathcal{A}^+$; конечным, если $\varphi(X) < +\infty$ для всех $X \in \mathcal{A}^+$.

Ограничение $\varphi|\{X \in \mathcal{A}^+\colon \varphi(X) < +\infty\}$ корректно продолжается по линейности до функционала на $\mathrm{Lin}\{X \in \mathcal{A}^+\colon \varphi(X) < +\infty\}$. Такое продолжение позволяет отождествлять конечные веса с положительными функционалами на $\mathcal{A}$.

Для алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов в $\mathcal{H}$ обозначим ее центр через $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$. Вес φ на $\mathcal{M}$ называется нормальным, если $X_i \nearrow X$, $(X_i, X \in \mathcal{M}^+) \Rightarrow \varphi(X) = \sup\varphi(X_i)$. Пусть $\mathcal{M}_*^+$ – конус положительных нормальных функционалов на $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_P = \{PX|P\mathcal{H}\colon X \in \mathcal{M}\}$ – редуцированная алгебра фон Неймана для $P \in \mathcal{M}^{pr}$. Пусть $\delta \in \mathbb{C}$ с $|\delta| = 1$ и функция $g(t) = \sqrt{t(1-t)}$ для $0 \le t \le 1$. Определим проектор $R^{(\delta,t)}$ в $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, положив

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета