Математические модели теоретической физики

(математика и компьютерные науки)

Математические основы физики

(математика и информатика)

профессор Игнатьев Юрий Геннадиевич

Казанский федеральный университет
Институт математики и механики
им. Н.И. Лобачевского
Кафедра высшей математики и математического моделирования

Казань, VI-VII семестр, 2015 г.

Лекция XVIII: Теория Фридмана изотропной однородной Вселенной

Содержание лекции

- Почему наша Вселенная однородная, изотропная и не всегда была такой, как сейчас?
- Трехмерные пространства постоянной кривизны и метрики Фридмана
- Кинематика Вселенной Фридмана
- Уравнения Эйнштейна и законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. Принципы релятивистской теории гравитации (Lection14.pdf) ; Лекция XVII. Сферически - симметричные гравитационные поля (Lection16.pdf) *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
4. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf*>

Информация

- Александр Александрович Фридман (4 (16) июня 1888, Санкт-Петербург — 16 сентября 1925, Ленинград) — выдающийся российский и советский математик, физик и геофизик, создатель теории нестационарной Вселенной.
- В 1922 году опубликовал работу «О кривизне пространства» *http://www.astronet.ru/db/msg/1187035/*, которая положила начало теоретической космологии. Эйнштейн на начальных этапах подвергал критике результаты работы Фридмана, однако впоследствии безоговорочно принял их.

Лекция XVIII: Теория Фридмана изотропной однородной Вселенной

Содержание лекции

- Почему наша Вселенная однородная, изотропная и не всегда была такой, как сейчас?
- Трехмерные пространства постоянной кривизны и метрики Фридмана
- Кинематика Вселенной Фридмана
- Уравнения Эйнштейна и законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. Принципы релятивистской теории гравитации (Lection14.pdf) ; Лекция XVII. Сферически - симметричные гравитационные поля (Lection16.pdf) *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
4. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf*>

Информация

- Александр Александрович Фридман (4 (16) июня 1888, Санкт-Петербург — 16 сентября 1925, Ленинград) — выдающийся российский и советский математик, физик и геофизик, создатель теории нестационарной Вселенной.
- В 1922 году опубликовал работу «О кривизне пространства» *http://www.astronet.ru/db/msg/1187035/*, которая положила начало теоретической космологии. Эйнштейн на начальных этапах подвергал критике результаты работы Фридмана, однако впоследствии безоговорочно принял их.

Лекция XVIII: Теория Фридмана изотропной однородной Вселенной

Содержание лекции

- Почему наша Вселенная однородная, изотропная и не всегда была такой, как сейчас?
- Трехмерные пространства постоянной кривизны и метрики Фридмана
- Кинематика Вселенной Фридмана
- Уравнения Эйнштейна и законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. Принципы релятивистской теории гравитации (Lection14.pdf) ; Лекция XVII. Сферически - симметричные гравитационные поля (Lection16.pdf) *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
4. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf*>

Информация

- Александр Александрович Фридман (4 (16) июня 1888, Санкт-Петербург — 16 сентября 1925, Ленинград) — выдающийся российский и советский математик, физик и геофизик, создатель теории нестационарной Вселенной.
- В 1922 году опубликовал работу «О кривизне пространства» *http://www.astronet.ru/db/msg/1187035/*, которая положила начало теоретической космологии. Эйнштейн на начальных этапах подвергал критике результаты работы Фридмана, однако впоследствии безоговорочно принял их.

Содержание лекции

- Почему наша Вселенная однородная, изотропная и не всегда была такой, как сейчас?
- Трехмерные пространства постоянной кривизны и метрики Фридмана
- Кинематика Вселенной Фридмана
- Уравнения Эйнштейна и законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. Принципы релятивистской теории гравитации (Lection14.pdf) ; Лекция XVII. Сферически - симметричные гравитационные поля (Lection16.pdf) *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
4. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf*>

Информация

- Александр Александрович Фридман (4 (16) июня 1888, Санкт-Петербург — 16 сентября 1925, Ленинград) — выдающийся российский и советский математик, физик и геофизик, создатель теории нестационарной Вселенной.
- В 1922 году опубликовал работу «О кривизне пространства» *http://www.astronet.ru/db/msg/1187035/*, которая положила начало теоретической космологии. Эйнштейн на начальных этапах подвергал критике результаты работы Фридмана, однако впоследствии безоговорочно принял их.

Лекция XVIII: Теория Фридмана изотропной однородной Вселенной

Содержание лекции

- Почему наша Вселенная однородная, изотропная и не всегда была такой, как сейчас?
- Трехмерные пространства постоянной кривизны и метрики Фридмана
- Кинематика Вселенной Фридмана
- Уравнения Эйнштейна и законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. Принципы релятивистской теории гравитации (Lection14.pdf) ; Лекция XVII. Сферически - симметричные гравитационные поля (Lection16.pdf) *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
4. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf*>

Информация

- Александр Александрович Фридман (4 (16) июня 1888, Санкт-Петербург — 16 сентября 1925, Ленинград) — выдающийся российский и советский математик, физик и геофизик, создатель теории нестационарной Вселенной.
- В 1922 году опубликовал работу «О кривизне пространства» *http://www.astronet.ru/db/msg/1187035/*, которая положила начало теоретической космологии. Эйнштейн на начальных этапах подвергал критике результаты работы Фридмана, однако впоследствии безоговорочно принял их.

Лекция XVIII: Теория Фридмана изотропной однородной Вселенной

Содержание лекции

- Почему наша Вселенная однородная, изотропная и не всегда была такой, как сейчас?
- Трехмерные пространства постоянной кривизны и метрики Фридмана
- Кинематика Вселенной Фридмана
- Уравнения Эйнштейна и законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. Принципы релятивистской теории гравитации (Lection14.pdf) ; Лекция XVII. Сферически - симметричные гравитационные поля (Lection16.pdf) *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
4. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf*>

Информация

- Александр Александрович Фридман (4 (16) июня 1888, Санкт-Петербург — 16 сентября 1925, Ленинград) — выдающийся российский и советский математик, физик и геофизик, создатель теории нестационарной Вселенной.
- В 1922 году опубликовал работу «О кривизне пространства» *http://www.astronet.ru/db/msg/1187035/*, которая положила начало теоретической космологии. Эйнштейн на начальных этапах подвергал критике результаты работы Фридмана, однако впоследствии безоговорочно принял их.

Содержание лекции

- Почему наша Вселенная однородная, изотропная и не всегда была такой, как сейчас?
- Трехмерные пространства постоянной кривизны и метрики Фридмана
- Кинематика Вселенной Фридмана
- Уравнения Эйнштейна и законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. Принципы релятивистской теории гравитации (Lection14.pdf) ; Лекция XVII. Сферически - симметричные гравитационные поля (Lection16.pdf) *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
4. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf>*

Информация

- Александр Александрович Фридман (4 (16) июня 1888, Санкт-Петербург — 16 сентября 1925, Ленинград) — выдающийся российский и советский математик, физик и геофизик, создатель теории нестационарной Вселенной.
- В 1922 году опубликовал работу «О кривизне пространства» *http://www.astronet.ru/db/msg/1187035/*, которая положила начало теоретической космологии. Эйнштейн на начальных этапах подвергал критике результаты работы Фридмана, однако впоследствии безоговорочно принял их.

Лекция XVIII: Теория Фридмана изотропной однородной Вселенной

Содержание лекции

- Почему наша Вселенная однородная, изотропная и не всегда была такой, как сейчас?
- Трехмерные пространства постоянной кривизны и метрики Фридмана
- Кинематика Вселенной Фридмана
- Уравнения Эйнштейна и законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. Принципы релятивистской теории гравитации (Lection14.pdf) ; Лекция XVII. Сферически - симметричные гравитационные поля (Lection16.pdf) *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
4. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf*>

Информация

- Александр Александрович Фридман (4 (16) июня 1888, Санкт-Петербург — 16 сентября 1925, Ленинград) — выдающийся российский и советский математик, физик и геофизик, создатель теории нестационарной Вселенной.
- В 1922 году опубликовал работу «О кривизне пространства» *http://www.astronet.ru/db/msg/1187035/*, которая положила начало теоретической космологии. Эйнштейн на начальных этапах подвергал критике результаты работы Фридмана, однако впоследствии безоговорочно принял их.

Лекция XVIII: Теория Фридмана изотропной однородной Вселенной

Содержание лекции

- Почему наша Вселенная однородная, изотропная и не всегда была такой, как сейчас?
- Трехмерные пространства постоянной кривизны и метрики Фридмана
- Кинематика Вселенной Фридмана
- Уравнения Эйнштейна и законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. Принципы релятивистской теории гравитации (Lection14.pdf) ; Лекция XVII. Сферически - симметричные гравитационные поля (Lection16.pdf) *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
4. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf*>

Информация

- Александр Александрович Фридман (4 (16) июня 1888, Санкт-Петербург — 16 сентября 1925, Ленинград) — выдающийся российский и советский математик, физик и геофизик, создатель теории нестационарной Вселенной.
- В 1922 году опубликовал работу «О кривизне пространства» *http://www.astronet.ru/db/msg/1187035/*, которая положила начало теоретической космологии. Эйнштейн на начальных этапах подвергал критике результаты работы Фридмана, однако впоследствии безоговорочно принял их.

Лекция XVIII: Теория Фридмана изотропной однородной Вселенной

Содержание лекции

- Почему наша Вселенная однородная, изотропная и не всегда была такой, как сейчас?
- Трехмерные пространства постоянной кривизны и метрики Фридмана
- Кинематика Вселенной Фридмана
- Уравнения Эйнштейна и законы сохранения

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. Принципы релятивистской теории гравитации (Lection14.pdf) ; Лекция XVII. Сферически - симметричные гравитационные поля (Lection16.pdf) *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
4. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf>*

Информация

- Александр Александрович Фридман (4 (16) июня 1888, Санкт-Петербург — 16 сентября 1925, Ленинград) — выдающийся российский и советский математик, физик и геофизик, создатель теории нестационарной Вселенной.
- В 1922 году опубликовал работу «О кривизне пространства» *http://www.astronet.ru/db/msg/1187035/*, которая положила начало теоретической космологии. Эйнштейн на начальных этапах подвергал критике результаты работы Фридмана, однако впоследствии безоговорочно принял их.

Лекция XVIII: Теория Фридмана изотропной однородной Вселенной

Содержание лекции

- Почему наша Вселенная однородная, изотропная и не всегда была такой, как сейчас?
- Трехмерные пространства постоянной кривизны и метрики Фридмана
- Кинематика Вселенной Фридмана
- Уравнения Эйнштейна и законы сохранения

Литература

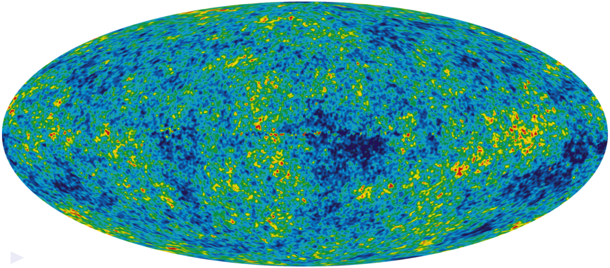
1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XV. Принципы релятивистской теории гравитации (Lection14.pdf) ; Лекция XVII. Сферически - симметричные гравитационные поля (Lection16.pdf) *http://kpfu.ru/main?p_id=28384*
4. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых поверхностей в евклидовом пространстве. — *http://libweb.ksu.ru/ebooks/05_120_000327.pdf>*

Информация

- Александр Александрович Фридман (4 (16) июня 1888, Санкт-Петербург — 16 сентября 1925, Ленинград) — выдающийся российский и советский математик, физик и геофизик, создатель теории нестационарной Вселенной.
- В 1922 году опубликовал работу «О кривизне пространства» *http://www.astronet.ru/db/msg/1187035/*, которая положила начало теоретической космологии. Эйнштейн на начальных этапах подвергал критике результаты работы Фридмана, однако впоследствии безоговорочно принял их.

Почему наша Вселенная однородная, изотропная и не всегда была такой, как сейчас?

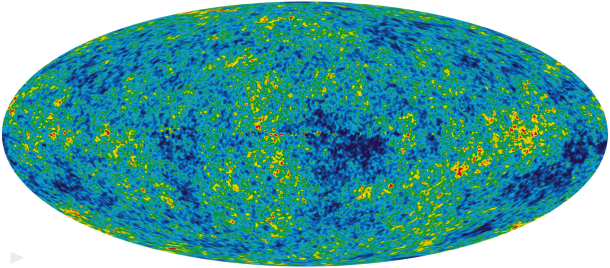
- Изотропия — свойства пространства в больших масштабах не зависят от направления: плотность галактик, плотность реликтового излучения, плотность космических лучей не зависят от угла зрения. Спектр реликтового излучения соответствует спектру излучения абсолютно чёрного тела с температурой $2,725^oK$, что соответствует длине волны 1,9 мм. Оно изотропно с точностью порядка 10^{-4}, т.е. среднеквадратичное отклонение температуры составляет приблизительно $1,8 \cdot 10^{-5}\ ^oK$.



- **Figure 1**. Восстановленная карта (панорама) анизотропии реликтового излучения с исключённым изображением Галактики, изображением радиоисточников и изображением дипольной анизотропии. Красные цвета означают более горячие области, а синие цвета — более холодные области. По данным спутника WMAP.

Почему наша Вселенная однородная, изотропная и не всегда была такой, как сейчас?

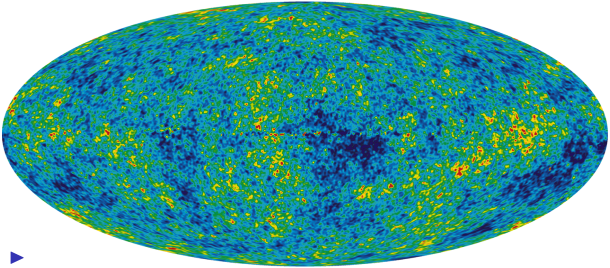
- Изотропия — свойства пространства в больших масштабах не зависят от направления: плотность галактик, плотность реликтового излучения, плотность космических лучей не зависят от угла зрения. Спектр реликтового излучения соответствует спектру излучения абсолютно чёрного тела с температурой $2,725^o K$, что соответствует длине волны 1,9 мм. Оно изотропно с точностью порядка 10^{-4}, т.е. среднеквадратичное отклонение температуры составляет приблизительно $1,8 \cdot 10^{-5}\ ^o K$.



- **Figure 1**. Восстановленная карта (панорама) анизотропии реликтового излучения с исключённым изображением Галактики, изображением радиоисточников и изображением дипольной анизотропии. Красные цвета означают более горячие области, а синие цвета — более холодные области. По данным спутника WMAP.

Почему наша Вселенная однородная, изотропная и не всегда была такой, как сейчас?

- Изотропия — свойства пространства в больших масштабах не зависят от направления: плотность галактик, плотность реликтового излучения, плотность космических лучей не зависят от угла зрения. Спектр реликтового излучения соответствует спектру излучения абсолютно чёрного тела с температурой $2,725^o K$, что соответствует длине волны 1,9 мм. Оно изотропно с точностью порядка 10^{-4}, т.е. среднеквадратичное отклонение температуры составляет приблизительно $1,8 \cdot 10^{-5}\ ^o K$.



- **Figure 1**. Восстановленная карта (панорама) анизотропии реликтового излучения с исключённым изображением Галактики, изображением радиоисточников и изображением дипольной анизотропии. Красные цвета означают более горячие области, а синие цвета — более холодные области. По данным спутника WMAP.

Почему наша Вселенная однородная и изотропная?

- Однородность — свойства пространства в больших масштабах не зависят от положения в нем: плотность галактик, плотность реликтового излучения, плотность космических лучей не зависят от положения.

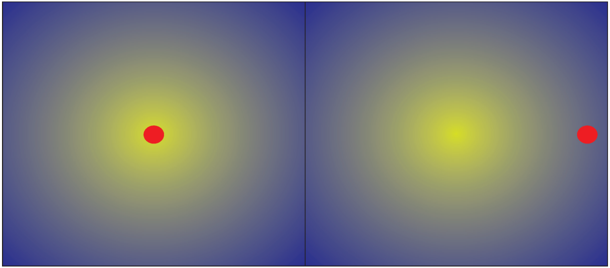


Figure 2. Иллюстрация однородности Вселенной. Если бы Вселенная была изотропной относительно Земли, но при этом – неоднородной, то Земля была бы центром Вселенной. Это — геоцентрическая точка зрения → гелиоцентрическая → галактикоцентрическая и т.п.

- Сочетание этих двух свойств (изотропности и однородности) с точки зрения геометрии приводит к тому, что метрика 3-х мерного пространства Вселенной в больших масштабах должна быть изотропной и однородной, т.е., допускать группу вращений и трансляций — при поворотах и перемещениях метрика 3-х мерного пространства должна переходить сама в себя. Этому условию соответствуют трехмерные пространства постоянной кривизны.

- Однородность — свойства пространства в больших масштабах не зависят от положения в нем: плотность галактик, плотность реликтового излучения, плотность космических лучей не зависят от положения.

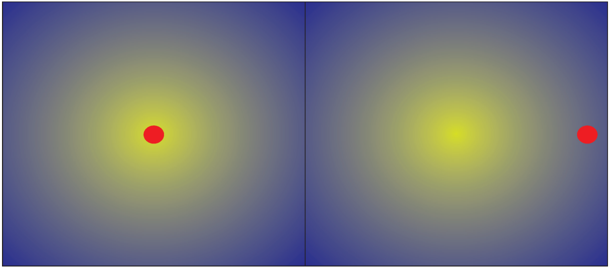


Figure 2. Иллюстрация однородности Вселенной. Если бы Вселенная была изотропной относительно Земли, но при этом – неоднородной, то Земля была бы центром Вселенной. Это — геоцентрическая точка зрения → гелиоцентрическая → галактикоцентрическая и т.п.

- Сочетание этих двух свойств (изотропности и однородности) с точки зрения геометрии приводит к тому, что метрика 3-х мерного пространства Вселенной в больших масштабах должна быть изотропной и однородной, т.е., допускать группу вращений и трансляций — при поворотах и перемещениях метрика 3-х мерного пространства должна переходить сама в себя. Этому условию соответствуют трехмерные пространства постоянной кривизны.

- Однородность — свойства пространства в больших масштабах не зависят от положения в нем: плотность галактик, плотность реликтового излучения, плотность космических лучей не зависят от положения.

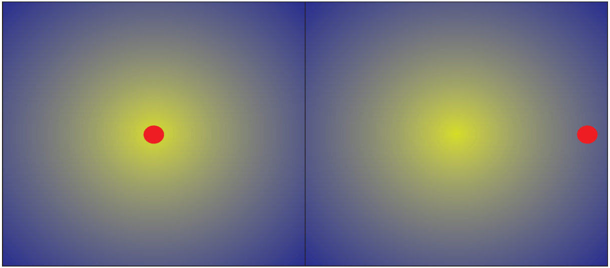


Figure 2. Иллюстрация однородности Вселенной. Если бы Вселенная была изотропной относительно Земли, но при этом – неоднородной, то Земля была бы центром Вселенной. Это — геоцентрическая точка зрения → гелиоцентрическая → галактикоцентрическая и т.п.

- Сочетание этих двух свойств (изотропности и однородности) с точки зрения геометрии приводит к тому, что метрика 3-х мерного пространства Вселенной в больших масштабах должна быть изотропной и однородной, т.е., допускать группу вращений и трансляций — при поворотах и перемещениях метрика 3-х мерного пространства должна переходить сама в себя. Этому условию соответствуют трехмерные пространства постоянной кривизны.

- Однородность — свойства пространства в больших масштабах не зависят от положения в нем: плотность галактик, плотность реликтового излучения, плотность космических лучей не зависят от положения.

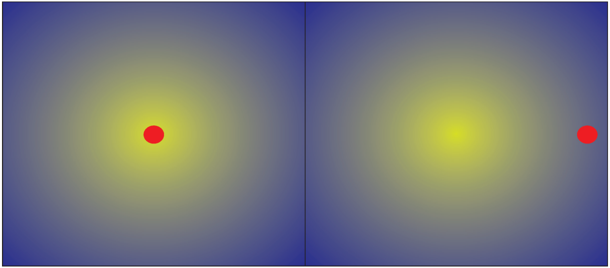


Figure 2. Иллюстрация однородности Вселенной. Если бы Вселенная была изотропной относительно Земли, но при этом – неоднородной, то Земля была бы центром Вселенной. Это — геоцентрическая точка зрения $\to$ гелиоцентрическая $\to$ галактикоцентрическая и т.п.

- Сочетание этих двух свойств (изотропности и однородности) с точки зрения геометрии приводит к тому, что метрика 3-х мерного пространства Вселенной в больших масштабах должна быть изотропной и однородной, т.е., допускать группу вращений и трансляций — при поворотах и перемещениях метрика 3-х мерного пространства должна переходить сама в себя. Этому условию соответствуют трехмерные пространства постоянной кривизны.

- В курсе Дифференциальной геометрии (Игнатьев) было показано, что поверхности постоянной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве могут быть только трех типов (в зависимости от постоянной k):

$$ds^2 = \frac{ds_0^2}{(1+k\rho^2)^2}, \qquad (1)$$

где ds_0 – метрика евклидовой плоскости E_2, k – постоянная кривизна поверхности: $k=0$ – поверхность нулевой кривизны (плоскость); $k>0$ – поверхность постоянной положительной кривизы $k=1/a^2$ (сфера), a – радиус сферы; $k<0$ – поверхность постоянной отрицательной кривизны $k=-1/a^2$ (псевдосфера), a – радиус псевдосферы; ρ^2 – квадрат длины радиуса-вектора на плоскости $\rho=\int ds_0$.

- Аналогично можно записать и метрику 3-х мерного пространства постоянной кривизны в форме (1), где ds_0^2 уже метрика плоского трехмерного евклидова пространства E_3, $\rho^2 \equiv r^2$ – квадрат длины радиуса-вектора в E_3. В сферических координатах r, θ, φ, $(z = r\sin\theta)$ таким образом, имеем:

$$ds^2 = \frac{ds_0^2}{(1+kr^2)^2} = \frac{dr^2 + r^2(\cos^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2)}{(1+kr^2)^2}. \qquad (2)$$

- Переходя от переменной r к переменной χ:

$$r = a\,\mathrm{th}\frac{\chi}{a}, \; (k=-1/a^2); \quad r = a\chi (k=0); \quad r = a\,\mathrm{tg}\frac{\chi}{a}, \; (k=1/a^2); \qquad (3)$$

- В курсе Дифференциальной геометрии (Игнатьев) было показано, что поверхности постоянной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве могут быть только трех типов (в зависимости от постоянной k):

$$ds^2 = \frac{ds_0^2}{(1+k\rho^2)^2}, \tag{1}$$

  где ds_0 – метрика евклидовой плоскости E_2, k – постоянная кривизна поверхности: $k=0$ – поверхность нулевой кривизны (плоскость); $k>0$ – поверхность постоянной положительной кривизны $k=1/a^2$ (сфера), a – радиус сферы; $k<0$ – поверхность постоянной отрицательной кривизны $k=-1/a^2$ (псевдосфера), a – радиус псевдосферы; ρ^2 – квадрат длины радиуса-вектора на плоскости $\rho=\int ds_0$.
- Аналогично можно записать и метрику 3-х мерного пространства постоянной кривизны в форме (1), где ds_0^2 уже метрика плоского трехмерного евклидова пространства E_3, $\rho^2 \equiv r^2$ – квадрат длины радиуса-вектора в E_3. В сферических координатах r, θ, φ, $(z = r\sin\theta)$ таким образом, имеем:

$$ds^2 = \frac{ds_0^2}{(1+kr^2)^2} = \frac{dr^2 + r^2(\cos^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2)}{(1+kr^2)^2} \tag{2}$$

- Переходя от переменной r к переменной χ:

$$r = a\,\mathrm{th}\frac{\chi}{a},\ (k=-1/a^2); \quad r = a\chi (k=0); \quad r = a\,\mathrm{tg}\frac{\chi}{a},\ (k=1/a^2); \tag{3}$$

- В курсе Дифференциальной геометрии (Игнатьев) было показано, что поверхности постоянной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве могут быть только трех типов (в зависимости от постоянной k):

$$ds^2 = \frac{ds_0^2}{(1 + k\rho^2)^2}, \qquad (1)$$

где ds_0 – метрика евклидовой плоскости E_2, k – постоянная кривизна поверхности: $k = 0$ – поверхность нулевой кривизны (плоскость); $k > 0$ – поверхность постоянной положительной кривизны $k = 1/a^2$ (сфера), a – радиус сферы; $k < 0$ – поверхность постоянной отрицательной кривизны $k = -1/a^2$ (псевдосфера), a – радиус псевдосферы; ρ^2 – квадрат длины радиуса-вектора на плоскости $\rho = \int ds_0$.

- Аналогично можно записать и метрику 3-х мерного пространства постоянной кривизны в форме (1), где ds_0^2 уже метрика плоского трехмерного евклидова пространства E_3, $\rho^2 \equiv r^2$ – квадрат длины радиуса-вектора в E_3. В сферических координатах r, θ, φ, $(z = r\sin\theta)$ таким образом, имеем:

$$ds^2 = \frac{ds_0^2}{(1 + kr^2)^2} = \frac{dr^2 + r^2(\cos^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2)}{(1 + kr^2)^2} \qquad (2)$$

- Переходя от переменной r к переменной χ:

Трехмерные пространства постоянной кривизны и метрики Фридмана

- В курсе Дифференциальной геометрии (Игнатьев) было показано, что поверхности постоянной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве могут быть только трех типов (в зависимости от постоянной k):

$$ds^2 = \frac{ds_0^2}{(1 + k\rho^2)^2}, \qquad (1)$$

где ds_0 – метрика евклидовой плоскости E_2, k – постоянная кривизна поверхности: $k = 0$ – поверхность нулевой кривизны (плоскость); $k > 0$ – поверхность постоянной положительной кривизы $k = 1/a^2$ (сфера), a – радиус сферы; $k < 0$ – поверхность постоянной отрицательной кривизы $k = -1/a^2$ (псевдосфера), a – радиус псевдосферы; ρ^2 – квадрат длины радиуса-вектора на плоскости $\rho = \int ds_0$.

- Аналогично можно записать и метрику 3-х мерного пространства постоянной кривизны в форме (1), где ds_0^2 уже метрика плоского трехмерного евклидова пространства E_3, $\rho^2 \equiv r^2$ – квадрат длины радиуса-вектора в E_3. В сферических координатах r, θ, φ, $(z = r\sin\theta)$ таким образом, имеем:

$$ds^2 = \frac{ds_0^2}{(1 + kr^2)^2} \equiv \frac{dr^2 + r^2(\cos^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2)}{(1 + kr^2)^2}. \qquad (2)$$

- Переходя от переменной r к переменной χ:

- В курсе Дифференциальной геометрии (Игнатьев) было показано, что поверхности постоянной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве могут быть только трех типов (в зависимости от постоянной k):

$$ds^2 = \frac{ds_0^2}{\left(1 + k\rho^2\right)^2}, \tag{1}$$

где ds_0 – метрика евклидовой плоскости E_2, k – постоянная кривизна поверхности: $k = 0$ – поверхность нулевой кривизны (плоскость); $k > 0$ – поверхность постоянной положительной кривизны $k = 1/a^2$ (сфера), a – радиус сферы; $k < 0$ – поверхность постоянной отрицательной кривизны $k = -1/a^2$ (псевдосфера), a – радиус псевдосферы; ρ^2 – квадрат длины радиуса-вектора на плоскости $\rho = \int ds_0$.

- Аналогично можно записать и метрику 3-х мерного пространства постоянной кривизны в форме (1), где ds_0^2 уже метрика плоского трехмерного евклидова пространства E_3, $\rho^2 \equiv r^2$ – квадрат длины радиуса-вектора в E_3. В сферических координатах r, θ, φ, $(z = r\sin\theta)$ таким образом, имеем:

$$ds^2 = \frac{ds_0^2}{(1 + kr^2)^2} \equiv \frac{dr^2 + r^2(\cos^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2)}{(1 + kr^2)^2}. \tag{2}$$

- Переходя от переменной r к переменной χ:

$$r = a\,\mathrm{th}\frac{\chi}{a},\ (k = -1/a^2); \quad r = a\chi\ (k = 0); \quad r = a\,\mathrm{tg}\frac{\chi}{a},\ (k = 1/a^2). \tag{3}$$

Трехмерные пространства постоянной кривизны и метрики Фридмана

- В курсе Дифференциальной геометрии (Игнатьев) было показано, что поверхности постоянной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве могут быть только трех типов (в зависимости от постоянной k):

$$ds^2 = \frac{ds_0^2}{(1+k\rho^2)^2}, \tag{1}$$

  где ds_0 – метрика евклидовой плоскости E_2, k – постоянная кривизна поверхности: $k=0$ – поверхность нулевой кривизны (плоскость); $k>0$ – поверхность постоянной положительной кривизны $k=1/a^2$ (сфера), a – радиус сферы; $k<0$ – поверхность постоянной отрицательной кривизны $k=-1/a^2$ (псевдосфера), a – радиус псевдосферы; ρ^2 – квадрат длины радиуса-вектора на плоскости $\rho=\int ds_0$.
- Аналогично можно записать и метрику 3-х мерного пространства постоянной кривизны в форме (1), где ds_0^2 уже метрика плоского трехмерного евклидова пространства E_3, $\rho^2 \equiv r^2$ – квадрат длины радиуса-вектора в E_3. В сферических координатах r,θ,φ, ($z=r\sin\theta$) таким образом, имеем:

$$ds^2 = \frac{ds_0^2}{(1+kr^2)^2} \equiv \frac{dr^2 + r^2(\cos^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2)}{(1+kr^2)^2}. \tag{2}$$

- Переходя от переменной r к переменной χ:

$$r = a\,\mathrm{th}\frac{\chi}{a},\ (k=-1/a^2); \quad r = a\chi\ (k=0); \quad r = a\,\mathrm{tg}\frac{\chi}{a},\ (k=1/a^2), \tag{3}$$

- В курсе Дифференциальной геометрии (Игнатьев) было показано, что поверхности постоянной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве могут быть только трех типов (в зависимости от постоянной k):

$$ds^2 = \frac{ds_0^2}{\left(1 + k\rho^2\right)^2}, \qquad (1)$$

  где ds_0 – метрика евклидовой плоскости E_2, k – постоянная кривизна поверхности: $k = 0$ – поверхность нулевой кривизны (плоскость); $k > 0$ – поверхность постоянной положительной кривизы $k = 1/a^2$ (сфера), a – радиус сферы; $k < 0$ – поверхность постоянной отрицательной кривизны $k = -1/a^2$ (псевдосфера), a – радиус псевдосферы; ρ^2 – квадрат длины радиуса-вектора на плоскости $\rho = \int ds_0$.

- Аналогично можно записать и метрику 3-х мерного пространства постоянной кривизны в форме (1), где ds_0^2 уже метрика плоского трехмерного евклидова пространства E_3, $\rho^2 \equiv r^2$ – квадрат длины радиуса-вектора в E_3. В сферических координатах r, θ, φ, $(z = r\sin\theta)$ таким образом, имеем:

$$ds^2 = \frac{ds_0^2}{(1 + kr^2)^2} \equiv \frac{dr^2 + r^2(\cos^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2)}{(1 + kr^2)^2}. \qquad (2)$$

- Переходя от переменной r к переменной χ:

$$r = a\,\mathrm{th}\frac{\chi}{a},\ (k = -1/a^2); \quad r = a\chi\ (k = 0); \quad r = a\,\mathrm{tg}\frac{\chi}{a},\ (k = 1/a^2), \qquad (3)$$

- получим окончательно метрику трехмерного пространства постоянной кривизны в сферических координатах доказать самостоятельно! ($d\Omega = \cos^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2$ – метрика сферы единичного радиуса):

$$ds^2 = \begin{cases} a^2(d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2), & k = 1/a^2; \\ a^2(d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2), & k = 0; \\ a^2(d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi d\Omega^2), & k = -1/a^2. \end{cases} \qquad (4)$$

- Эту метрику можно также записать эквивалентном виде:

$$ds^2 = a^2(d\chi^2 + \varrho^2(\chi)d\Omega^2); \quad \varrho(\chi) = \begin{cases} \dots \end{cases}$$

- Заметим, что метрика (2) является конформно плоской.
- Согласно (5) дифференциалы длины дуги при смещении вдоль χ ($\varphi = \mathrm{Const}, \theta = \mathrm{Const}$) и вдоль φ ($\chi = \chi_0 = \mathrm{Const}, \theta = \mathrm{Const} = \theta_0 = 0$) равны, соответственно: $ds_\chi = a d\chi$, $ds_\varphi = a\varrho(\chi)d\varphi$. Поэтому отношение длины окружности C к ее радиусу R в этом мире равно: $C/R = 2\pi\varrho(\chi_0)/\chi_0$ — равно нулю для плоского мира, меньше 2π для пространства отрицательной кривизны и больше 2π для пространства положительной кривизны (см. Игнатьев, Дифференциальная геометрия).

- получим окончательно метрику трехмерного пространства постоянной кривизны в сферических координатах доказать самостоятельно! ($d\Omega = \cos^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2$ – метрика сферы единичного радиуса):

$$ds^2 = \begin{cases} a^2(d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2), & k = 1/a^2; \\ a^2(d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2), & k = 0; \\ a^2(d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi d\Omega^2), & k = -1/a^2. \end{cases} \qquad (4)$$

- Эту метрику можно также записать эквивалентном виде:

$$ds^2 = a^2(d\chi^2 + \varrho^2(\chi)d\Omega^2), \quad \varrho(\chi) = \begin{cases} \sin\chi, & k = 1/a^2; \\ \chi, & k = 0; \\ \mathrm{sh}\chi, & k = -1/a^2. \end{cases} \qquad (5)$$

- Заметим, что метрика (2) является конформно плоской.
- Согласно (5) дифференциалы длины дуги при смещении вдоль χ ($\varphi = \mathrm{Const}, \theta = \mathrm{Const}$) и вдоль φ ($\chi = \chi_0 = \mathrm{Const}, \theta = \mathrm{Const} = \theta_0 = 0$) равны, соответственно: $ds_\chi = ad\chi$, $ds_\varphi = a\varrho(\chi)d\varphi$. Поэтому отношение длины окружности C к ее радиусу R в этом мире равно: $C/R = 2\pi\varrho(\chi_0)/\chi_0$ — равно нулю для плоского мира, меньше 2π для пространства отрицательной кривизны и больше 2π для пространства положительной кривизны (см. Игнатьев, Дифференциальная геометрия).

- получим окончательно метрику трехмерного пространства постоянной кривизны в сферических координатах доказать самостоятельно! ($d\Omega = \cos^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2$ – метрика сферы единичного радиуса):

$$ds^2 = \begin{cases} a^2(d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2), & k = 1/a^2; \\ a^2(d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2), & k = 0; \\ a^2(d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi d\Omega^2), & k = -1/a^2. \end{cases} \quad (4)$$

- Эту метрику можно также записать эквивалентном виде:

$$ds^2 = a^2(d\chi^2 + \varrho^2(\chi)d\Omega^2), \quad \varrho(\chi) = \begin{cases} \sin\chi, & k = 1/a^2; \\ \chi, & k = 0; \\ \mathrm{sh}\chi, & k = -1/a^2. \end{cases} \quad (5)$$

- Заметим, что метрика (2) является конформно плоской.
- Согласно (5) дифференциалы длины дуги при смещении вдоль χ ($\varphi = \mathrm{Const}, \theta = \mathrm{Const}$) и вдоль φ ($\chi = \chi_0 = \mathrm{Const}, \theta = \mathrm{Const} = \theta_0 = 0$) равны, соответственно: $ds_\chi = ad\chi$, $ds_\varphi = a\varrho(\chi)d\varphi$. Поэтому отношение длины окружности C к ее радиусу R в этом мире равно: $C/R = 2\pi\varrho(\chi_0)/\chi_0$ — равно нулю для плоского мира, меньше 2π для пространства отрицательной кривизны и больше 2π для пространства положительной кривизны (см. Игнатьев, Дифференциальная геометрия).

Трехмерные пространства постоянной кривизны и метрики Фридмана

- получим окончательно метрику трехмерного пространства постоянной кривизны в сферических координатах доказать самостоятельно! ($d\Omega = \cos^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2$ – метрика сферы единичного радиуса):

$$ds^2 = \left\{\begin{array}{ll} a^2(d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2), & k = 1/a^2; \\ a^2(d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2), & k = 0; \\ a^2(d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi d\Omega^2), & k = -1/a^2. \end{array}\right. \qquad (4)$$

- Эту метрику можно также записать эквивалентном виде:

$$ds^2 = a^2(d\chi^2 + \varrho^2(\chi)d\Omega^2), \quad \varrho(\chi) = \left\{\begin{array}{ll} \sin\chi, & k = 1/a^2; \\ \chi, & k = 0; \\ \mathrm{sh}\chi, & k = -1/a^2. \end{array}\right. \qquad (5)$$

- Заметим, что метрика (2) является конформно плоской.
- Согласно (5) дифференциалы длины дуги при смещении вдоль χ ($\varphi = \mathrm{Const}, \theta = \mathrm{Const}$) и вдоль φ ($\chi = \chi_0 = \mathrm{Const}, \theta = \mathrm{Const} = \theta_0 = 0$) равны, соответственно: $ds_\chi = a d\chi$, $ds_\varphi = a\varrho(\chi)d\varphi$. Поэтому отношение длины окружности C к ее радиусу R в этом мире равно: $C/R = 2\pi\varrho(\chi_0)/\chi_0$ — равно нулю для плоского мира, меньше 2π для пространства отрицательной кривизны и больше 2π для пространства положительной кривизны (см. Игнатьев, Дифференциальная геометрия).

Трехмерные пространства постоянной кривизны и метрики Фридмана

- получим окончательно метрику трехмерного пространства постоянной кривизны в сферических координатах доказать самостоятельно! ($d\Omega = \cos^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2$ – метрика сферы единичного радиуса):

$$ds^2 = \begin{cases} a^2(d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2), & k = 1/a^2; \\ a^2(d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2), & k = 0; \\ a^2(d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi d\Omega^2), & k = -1/a^2. \end{cases} \quad (4)$$

- Эту метрику можно также записать эквивалентном виде:

$$ds^2 = a^2(d\chi^2 + \varrho^2(\chi)d\Omega^2), \quad \varrho(\chi) = \begin{cases} \sin\chi, & k = 1/a^2; \\ \chi, & k = 0; \\ \mathrm{sh}\chi, & k = -1/a^2. \end{cases} \quad (5)$$

- Заметим, что метрика (2) является конформно плоской.
- Согласно (5) дифференциалы длины дуги при смещении вдоль χ ($\varphi = \mathrm{Const}, \theta = \mathrm{Const}$) и вдоль φ ($\chi = \chi_0 = \mathrm{Const}, \theta = \mathrm{Const} = \theta_0 = 0$) равны, соответственно: $ds_\chi = ad\chi$, $ds_\varphi = a\varrho(\chi)d\varphi$. Поэтому отношение длины окружности C к ее радиусу R в этом мире равно: $C/R = 2\pi\varrho(\chi_0)/\chi_0$ — равно нулю для плоского мира, меньше 2π для пространства отрицательной кривизны и больше 2π для пространства положительной кривизны (см. Игнатьев, Дифференциальная геометрия).

Трехмерные пространства постоянной кривизны и метрики Фридмана

- получим окончательно метрику трехмерного пространства постоянной кривизны в сферических координатах доказать самостоятельно! ($d\Omega = \cos^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2$ – метрика сферы единичного радиуса):

$$ds^2 = \begin{cases} a^2(d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2), & k = 1/a^2; \\ a^2(d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2), & k = 0; \\ a^2(d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi d\Omega^2), & k = -1/a^2. \end{cases} \qquad (4)$$

- Эту метрику можно также записать эквивалентном виде:

$$ds^2 = a^2(d\chi^2 + \varrho^2(\chi)d\Omega^2), \quad \varrho(\chi) = \begin{cases} \sin\chi, & k = 1/a^2; \\ \chi, & k = 0; \\ \mathrm{sh}\chi, & k = -1/a^2. \end{cases} \qquad (5)$$

- Заметим, что метрика (2) является конформно плоской.
- Согласно (5) дифференциалы длины дуги при смещении вдоль χ ($\varphi = \mathrm{Const}, \theta = \mathrm{Const}$) и вдоль φ ($\chi = \chi_0 = \mathrm{Const}, \theta = \mathrm{Const} = \theta_0 = 0$) равны, соответственно: $ds_\chi = ad\chi$, $ds_\varphi = a\varrho(\chi)d\varphi$. Поэтому отношение длины окружности C к ее радиусу R в этом мире равно: $C/R = 2\pi\varrho(\chi_0)/\chi_0$ — равно нулю для плоского мира, меньше 2π для пространства отрицательной кривизны и больше 2π для пространства положительной кривизны (см. Игнатьев, Дифференциальная геометрия).

- получим окончательно метрику трехмерного пространства постоянной кривизны в сферических координатах доказать самостоятельно! ($d\Omega = \cos^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2$ – метрика сферы единичного радиуса):

$$ds^2 = \begin{cases} a^2(d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2), & k = 1/a^2; \\ a^2(d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2), & k = 0; \\ a^2(d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi d\Omega^2), & k = -1/a^2. \end{cases} \tag{4}$$

- Эту метрику можно также записать эквивалентном виде:

$$ds^2 = a^2(d\chi^2 + \varrho^2(\chi)d\Omega^2), \quad \varrho(\chi) = \begin{cases} \sin\chi, & k = 1/a^2; \\ \chi, & k = 0; \\ \mathrm{sh}\chi, & k = -1/a^2. \end{cases} \tag{5}$$

- Заметим, что метрика (2) является конформно плоской.
- Согласно (5) дифференциалы длины дуги при смещении вдоль χ $(\varphi = \mathrm{Const}, \theta = \mathrm{Const})$ и вдоль φ $(\chi = \chi_0 = \mathrm{Const}, \theta = \mathrm{Const} = \theta_0 = 0)$ равны, соответственно: $ds_\chi = ad\chi$, $ds_\varphi = a\varrho(\chi)d\varphi$. Поэтому отношение длины окружности C к ее радиусу R в этом мире равно: $C/R = 2\pi\varrho(\chi_0)/\chi_0$ — равно нулю для плоского мира, меньше 2π для пространства отрицательной кривизны и больше 2π для пространства положительной кривизны (см. Игнатьев, Дифференциальная геометрия).

Почему наша Вселенная не всегда была такой, как сейчас?

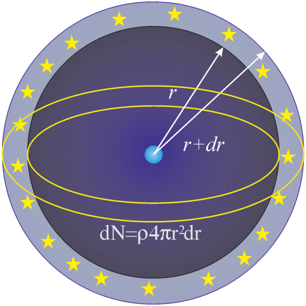
- Согласно закону сохранения энергии звезды не могли гореть бесконечно долго, так как рано или поздно, любые запасы энергии исчерпываются.
- Если же предположить, что звезды по каким-то причинам горят бесконечно долго, то это означает, что число излученных фотонов постоянно увеличивается, стало быть, увеличивается и их плотность.
- 

Figure 3. Фотометрический парадокс(парадокс Ольберса). Предположим, что звезды во Вселенной распределены в среднем равномерно с плотностью $\rho = \mathrm{Const}$, так что в сферическом слое толщиной dr находятся $dN = \rho 4\pi r^2 dr$ звезд. Пусть S_0 – средняя светимость звезд, тогда от звезды на расстоянии r на Земле будет зафиксирована интенсивность излучения $i_0 = S_0/r^2$. Таким образом, вклад в интенсивность излучения от сферического слоя будет $dI = i_0 dN = 4\pi\rho S_0 dr$, а интенсивность, создаваемая звездами, находящимися в шаре радиуса r на Земле, будет равна $I(r) = 4\pi\rho S_0 r$. При $r \to \infty$ $I \to \infty$ – тепловая смерть.

- Гравитационный парадокс(парадокс Зеелигера). Согласно теории Ньютона на тело массы m действует сила тяжести от массы, заключенной в сфере радиуса r: $F = -mM(r)G/r^2 = -mG4\pi\rho r/3$. Но в однородной Вселенной нет центра, поэтому сила становится неопределенной. На самом деле при правильной постановке задачи этот парадокс снимается в Ньютоновской теории, но при этом теория должна быть нестационарной (Боннор).

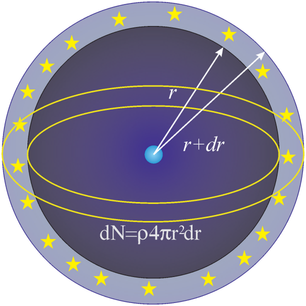
- Согласно закону сохранения энергии звезды не могли гореть бесконечно долго, так как рано или поздно, любые запасы энергии исчерпываются.
- Если же предположить, что звезды по каким-то причинам горят бесконечно долго, то это означает, что число излученных фотонов постоянно увеличивается, стало быть, увеличивается и их плотность.
- 

Figure 3. Фотометрический парадокс(парадокс Ольберса). Предположим, что звезды во Вселенной распределены в среднем равномерно с плотностью $\rho = \mathrm{Const}$, так что в сферическом слое толщиной dr находятся $dN = \rho 4\pi r^2 dr$ звезд. Пусть S_0 – средняя светимость звезд, тогда от звезды на расстоянии r на Земле будет зафиксирована интенсивность излучения $i_0 = S_0/r^2$. Таким образом, вклад в интенсивность излучения от сферического слоя будет $dI = i_0 dN = 4\pi\rho S_0 dr$, а интенсивность, создаваемая звездами, находящимися в шаре радиуса r на Земле, будет равна $I(r) = 4\pi\rho S_0 r$. При $r \to \infty$ $I \to \infty$ – тепловая смерть.

- Гравитационный парадокс(парадокс Зеелигера). Согласно теории Ньютона на тело массы m действует сила тяжести от массы, заключенной в сфере радиуса r: $F = -mM(r)G/r^2 = -mG4\pi\rho r/3$. Но в однородной Вселенной нет центра, поэтому сила становится неопределенной. На самом деле при правильной постановке задачи этот парадокс снимается в Ньютоновской теории, но при этом теория должна быть нестационарной (Боннор).

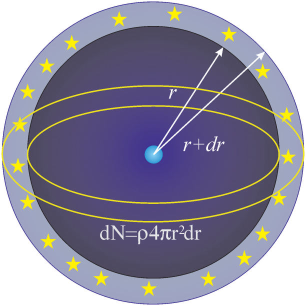
- Согласно закону сохранения энергии звезды не могли гореть бесконечно долго, так как рано или поздно, любые запасы энергии исчерпываются.
- Если же предположить, что звезды по каким-то причинам горят бесконечно долго, то это означает, что число излученных фотонов постоянно увеличивается, стало быть, увеличивается и их плотность.
- 

  Figure 3. Фотометрический парадокс(парадокс Ольберса). Предположим, что звезды во Вселенной распределены в среднем равномерно с плотностью $\rho = \mathrm{Const}$, так что в сферическом слое толщиной dr находятся $dN = \rho 4\pi r^2 dr$ звезд. Пусть S_0 – средняя светимость звезд, тогда от звезды на расстоянии r на Земле будет зафиксирована интенсивность излучения $i_0 = S_0/r^2$. Таким образом, вклад в интенсивность излучения от сферического слоя будет $dI = i_0 dN = 4\pi\rho S_0 dr$, а интенсивность, создаваемая звездами, находящимися в шаре радиуса r на Земле, будет равна $I(r) = 4\pi\rho S_0 r$. При $r \to \infty$ $I \to \infty$ – тепловая смерть.

- Гравитационный парадокс(парадокс Зеелигера). Согласно теории Ньютона на тело массы m действует сила тяжести от массы, заключенной в сфере радиуса r: $F = -mM(r)G/r^2 = -mG4\pi\rho r/3$. Но в однородной Вселенной нет центра, поэтому сила становится неопределенной. На самом деле при правильной постановке задачи этот парадокс снимается в Ньютоновской теории, но при этом теория должна быть нестационарной (Боннор).

- Согласно закону сохранения энергии звезды не могли гореть бесконечно долго, так как рано или поздно, любые запасы энергии исчерпываются.
- Если же предположить, что звезды по каким-то причинам горят бесконечно долго, то это означает, что число излученных фотонов постоянно увеличивается, стало быть, увеличивается и их плотность.
-

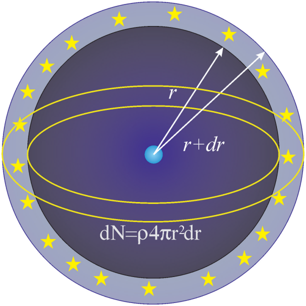


Figure 3. Фотометрический парадокс(парадокс Ольберса). Предположим, что звезды во Вселенной распределены в среднем равномерно с плотностью $\rho = \mathrm{Const}$, так что в сферическом слое толщиной dr находятся $dN = \rho 4\pi r^2 dr$ звезд. Пусть S_0 – средняя светимость звезд, тогда от звезды на расстоянии r на Земле будет зафиксирована интенсивность излучения $i_0 = S_0/r^2$. Таким образом, вклад в интенсивность излучения от сферического слоя будет $dI = i_0 dN = 4\pi\rho S_0 dr$, а интенсивность, создаваемая звездами, находящимися в шаре радиуса r на Земле, будет равна $I(r) = 4\pi\rho S_0 r$. При $r \to \infty$ $I \to \infty$ – тепловая смерть.

- Гравитационный парадокс(парадокс Зеелигера). Согласно теории Ньютона на тело массы m действует сила тяжести от массы, заключенной в сфере радиуса r: $F = -mM(r)G/r^2 = -mG4\pi\rho r/3$. Но в однородной Вселенной нет центра, поэтому сила становится неопределенной. На самом деле при правильной постановке задачи этот парадокс снимается в Ньютоновской теории, но при этом теория должна быть нестационарной (Боннор).

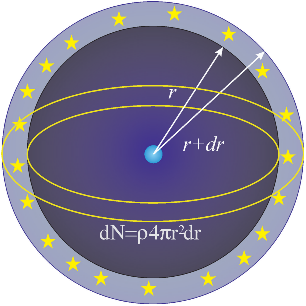
- Согласно закону сохранения энергии звезды не могли гореть бесконечно долго, так как рано или поздно, любые запасы энергии исчерпываются.
- Если же предположить, что звезды по каким-то причинам горят бесконечно долго, то это означает, что число излученных фотонов постоянно увеличивается, стало быть, увеличивается и их плотность.
- 

Figure 3. Фотометрический парадокс(парадокс Ольберса). Предположим, что звезды во Вселенной распределены в среднем равномерно с плотностью $\rho = \mathrm{Const}$, так что в сферическом слое толщиной dr находятся $dN = \rho 4\pi r^2 dr$ звезд. Пусть S_0 – средняя светимость звезд, тогда от звезды на расстоянии r на Земле будет зафиксирована интенсивность излучения $i_0 = S_0/r^2$. Таким образом, вклад в интенсивность излучения от сферического слоя будет $dI = i_0 dN = 4\pi\rho S_0 dr$, а интенсивность, создаваемая звездами, находящимися в шаре радиуса r на Земле, будет равна $I(r) = 4\pi\rho S_0 r$. При $r \to \infty$ $I \to \infty$ – тепловая смерть.

- Гравитационный парадокс(парадокс Зеелигера). Согласно теории Ньютона на тело массы m действует сила тяжести от массы, заключенной в сфере радиуса r: $F = -mM(r)G/r^2 = -mG4\pi\rho r/3$. Но в однородной Вселенной нет центра, поэтому сила становится неопределенной. На самом деле при правильной постановке задачи этот парадокс снимается в Ньютоновской теории, но при этом теория должна быть нестационарной (Боннор).

- Согласно сказанному выше, метрику четырехмерного пространства - времени следует записать в виде (Фридман, 1922)[1]:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(d\chi^2 + \rho^2(\chi)d\Omega^2), \qquad (6)$$

которую мы и будем в дальнейшем называть Метрикой Фридмана. Как известно, у победы всегда много родителей, поэтому, естественно, к фамилии Фридмана «скоро» были добавлены иностранные фамилии Леметра (1927), Робертсона - Уоккера (1935). В англоязычной литературе метрику Фридмана называют англосаксонскими именами Робертсона и Уоккера.

- Производя замену временной переменной

$$t = \int a(\eta)d\eta \leftrightarrow \eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \qquad (7)$$

эту метрику можно также записать в конформно - стационарном виде:

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\chi^2 - \rho^2(\chi)d\Omega^2). \qquad (8)$$

[1] *В 1922 г. Александр Фридман опубликовал решение уравнений Эйнштейна для пространства положительной кривизны, а в 1924 - для пространства отрицательной кривизны, причем решения сразу учитывали космологический член, и был показан предельный переход к решениям Эйнштейна и де-Ситтера.*

- Согласно сказанному выше, метрику четырехмерного пространства - времени следует записать в виде (Фридман, 1922)[1]:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(d\chi^2 + \varrho^2(\chi)d\Omega^2), \tag{6}$$

которую мы и будем в дальнейшем называть Метрикой Фридмана. Как известно, у победы всегда много родителей, поэтому, естественно, к фамилии Фридмана «скоро» были добавлены иностранные фамилии Леметра (1927), Робертсона - Уоккера (1935). В англоязычной литературе метрику Фридмана называют англосаксонскими именами Робертсона и Уоккера.

- Производя замену временной переменной

$$t = \int a(\eta)d\eta \leftrightarrow \eta = \int \frac{dt}{a(t)} \tag{7}$$

эту метрику можно также записать в конформно - стационарном виде:

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\chi^2 - \varrho^2(\chi)d\Omega^2). \tag{8}$$

[1] *В 1922 г. Александр Фридман опубликовал решение уравнений Эйнштейна для пространства положительной кривизны, а в 1924 - для пространства отрицательной кривизны, причем решения сразу учитывали космологический член, и был показан предельный переход к решениям Эйнштейна и де-Ситтера.*

Метрика Фридмана

- Согласно сказанному выше, метрику четырехмерного пространства - времени следует записать в виде (Фридман, 1922)[1]:

$$\boxed{ds^2 = dt^2 - a^2(t)(d\chi^2 + \varrho^2(\chi)d\Omega^2), \qquad (6)}$$

которую мы и будем в дальнейшем называть Метрикой Фридмана. Как известно, у победы всегда много родителей, поэтому, естественно, к фамилии Фридмана «скоро» были добавлены иностранные фамилии Леметра (1927), Робертсона - Уоккера (1935). В англоязычной литературе метрику Фридмана называют англосаксонскими именами Робертсона и Уоккера.

- Производя замену временной переменной

$$t = \int a(\eta)d\eta \leftrightarrow \eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \qquad (7)$$

эту метрику можно также записать в конформно - стационарном виде:

$$\boxed{ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\chi^2 - \varrho^2(\chi)d\Omega^2), \qquad (8)}$$

[1] *В 1922 г. Александр Фридман опубликовал решение уравнений Эйнштейна для пространства положительной кривизны, а в 1924 - для пространства отрицательной кривизны, причем решения сразу учитывали космологический член, и был показан предельный переход к решениям Эйнштейна и де-Ситтера.*

- Согласно сказанному выше, метрику четырехмерного пространства - времени следует записать в виде (Фридман, 1922)[1]:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(d\chi^2 + \varrho^2(\chi)d\Omega^2), \qquad (6)$$

которую мы и будем в дальнейшем называть Метрикой Фридмана. Как известно, у победы всегда много родителей, поэтому, естественно, к фамилии Фридмана «скоро» были добавлены иностранные фамилии Леметра (1927), Робертсона - Уоккера (1935). В англоязычной литературе метрику Фридмана называют англосаксонскими именами Робертсона и Уоккера.

- Производя замену временной переменной

$$t = \int a(\eta)d\eta \leftrightarrow \eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \qquad (7)$$

эту метрику можно также записать в конформно - стационарном виде:

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\chi^2 - \varrho^2(\chi)d\Omega^2). \qquad (8)$$

[1] *В 1922 г. Александр Фридман опубликовал решение уравнений Эйнштейна для пространства положительной кривизны, а в 1924 - для пространства отрицательной кривизны, причем решения сразу учитывали космологический член, и был показан предельный переход к решениям Эйнштейна и де-Ситтера.*

Метрика Фридмана

- Согласно сказанному выше, метрику четырехмерного пространства - времени следует записать в виде (Фридман, 1922)[1]:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(d\chi^2 + \varrho^2(\chi)d\Omega^2), \qquad (6)$$

которую мы и будем в дальнейшем называть Метрикой Фридмана. Как известно, у победы всегда много родителей, поэтому, естественно, к фамилии Фридмана «скоро» были добавлены иностранные фамилии Леметра (1927), Робертсона - Уоккера (1935). В англоязычной литературе метрику Фридмана называют англосаксонскими именами Робертсона и Уоккера.

- Производя замену временной переменной

$$t = \int a(\eta)d\eta \leftrightarrow \eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \qquad (7)$$

эту метрику можно также записать в конформно - стационарном виде:

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\chi^2 - \varrho^2(\chi)d\Omega^2). \qquad (8)$$

[1] *В 1922 г. Александр Фридман опубликовал решение уравнений Эйнштейна для пространства положительной кривизны, а в 1924 - для пространства отрицательной кривизны, причем решения сразу учитывали космологический член, и был показан предельный переход к решениям Эйнштейна и де-Ситтера.*

- Согласно сказанному выше, метрику четырехмерного пространства - времени следует записать в виде (Фридман, 1922)[1]:

$$\boxed{ds^2 = dt^2 - a^2(t)(d\chi^2 + \varrho^2(\chi)d\Omega^2), \qquad (6)}$$

которую мы и будем в дальнейшем называть Метрикой Фридмана. Как известно, у победы всегда много родителей, поэтому, естественно, к фамилии Фридмана «скоро» были добавлены иностранные фамилии Леметра (1927), Робертсона - Уоккера (1935). В англоязычной литературе метрику Фридмана называют англосаксонскими именами Робертсона и Уоккера.

- Производя замену временной переменной

$$t = \int a(\eta)d\eta \leftrightarrow \eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \qquad (7)$$

эту метрику можно также записать в конформно - стационарном виде:

$$\boxed{ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\chi^2 - \varrho^2(\chi)d\Omega^2). \qquad (8)}$$

[1] *В 1922 г. Александр Фридман опубликовал решение уравнений Эйнштейна для пространства положительной кривизны, а в 1924 - для пространства отрицательной кривизны, причем решения сразу учитывали космологический член, и был показан предельный переход к решениям Эйнштейна и де-Ситтера.*

Кинематика изотропной Вселенной Фридмана

- Легко показать, что мировые линии $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = \overrightarrow{\mathrm{const}}$ являются геодезическими мира Фридмана (доказать самостоятельно). Сеть этих геодезических, покрывающих весь мир Фридмана, реализует синхронную систему отсчета, соответствующую наблюдателям. Тогда в любой момент синхронного времени два таких наблюдателя в метрике (6) имеют постоянные пространственные координаты $\chi_0, \theta_0, \varphi_0$ и $\chi_0 + \delta\chi, , \theta_0 + \delta\theta, \varphi_0 + \delta\varphi$. Квадрат синхронного (одновременного) расстояния между этими наблюдателями в момент времени t равно:

$$\delta\ell^2 = a^2(t)(\delta\chi^2 + \varrho^2(\chi)\delta\Omega^2). \tag{9}$$

Если $\dot{a} \neq 0$ расстояние между наблюдателями в мире Фридмана изменяется. Относительную скорость двух наблюдателей получим дифференцированием (9) по времени, учитывая, что $v = d\ell/dt$:

$$2\delta\ell\frac{\delta\ell}{dt} = 2a\dot{a}(d\chi^2 + \varrho^2(\chi)d\Omega^2) \equiv 2\frac{\dot{a}}{a}\delta\ell^2$$

- Отсюда получаем линейный закон для относительной скорости:

$$\boxed{\frac{\delta\ell}{dt} = v(t) = H(t)\delta\ell; \quad \left(H(t) = \frac{\dot{a}}{a}\right),} \tag{10}$$

где $H(t)$ – так называемая постоянная Хаббла.

- Безразмерный инвариант

$$\Omega = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \tag{11}$$

называется **космологическим ускорением**. Таким образом, $H > 0$ соответствует расширению Вселенной, $H = 0$ – стационарной Вселенной, $H < 0$ – сжатию Вселенной. Эдвин Хаббл, 1929 - экспериментальное подтверждение. Современное значения $H = 67,80 \pm 0,77$ (км/с)/Мпк или $(2,197 \pm 0,025) \cdot 10^{-18} c^{-1} = \rightarrow 1.14 \cdot 10^{10}$ лет $(t \sim H^{-1})$.

- Легко показать, что мировые линии $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = \overrightarrow{\mathrm{const}}$ являются геодезическими мира Фридмана (доказать самостоятельно). Сеть этих геодезических, покрывающих весь мир Фридмана, реализует синхронную систему отсчета, соответствующую наблюдателям. Тогда в любой момент синхронного времени два таких наблюдателя в метрике (6) имеют постоянные пространственные координаты $\chi_0, \theta_0, \varphi_0$ и $\chi_0 + \delta\chi, , \theta_0 + \delta\theta, \varphi_0 + \delta\varphi$. Квадрат синхронного (одновременного) расстояния между этими наблюдателями в момент времени t равно:
$$\delta\ell^2 = a^2(t)(\delta\chi^2 + \varrho^2(\chi)\delta\Omega^2). \tag{9}$$
Если $\dot{a} \neq 0$ расстояние между наблюдателями в мире Фридмана изменяется. Относительную скорость двух наблюдателей получим дифференцированием (9) по времени, учитывая, что $v = d\ell/dt$:
$$2\delta\ell\frac{\delta\ell}{dt} = 2a\dot{a}(d\chi^2 + \varrho^2(\chi)d\Omega^2) \equiv 2\frac{\dot{a}}{a}\delta\ell^2$$
- Отсюда получаем линейный закон для относительной скорости:
$$\boxed{\frac{\delta\ell}{dt} = v(t) = H(t)\delta\ell, \quad \left(H(t) = \frac{\dot{a}}{a}\right), \tag{10}}$$
где $H(t)$ – так называемая постоянная Хаббла.
- Безразмерный инвариант
$$\Omega = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \tag{11}$$
называется **космологическим ускорением**. Таким образом, $H > 0$ соответствует расширению Вселенной, $H = 0$ – стационарной Вселенной, $H < 0$ – сжатию Вселенной. Эдвин Хаббл, 1929 - экспериментальное подтверждение. Современное значения $H = 67,80 \pm 0,77$ (км/с)/Мпк или $(2,197 \pm 0,025) \cdot 10^{-18} c^{-1} = \to 1.14 \cdot 10^{10}$ лет $(t \sim H^{-1})$.

Кинематика изотропной Вселенной Фридмана

- Легко показать, что мировые линии $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = \overrightarrow{\mathrm{const}}$ являются геодезическими мира Фридмана (доказать самостоятельно). Сеть этих геодезических, покрывающих весь мир Фридмана, реализует синхронную систему отсчета, соответствующую наблюдателям. Тогда в любой момент синхронного времени два таких наблюдателя в метрике (6) имеют постоянные пространственные координаты $\chi_0, \theta_0, \varphi_0$ и $\chi_0 + \delta\chi, , \theta_0 + \delta\theta, \varphi_0 + \delta\varphi$. Квадрат синхронного (одновременного) расстояния между этими наблюдателями в момент времени t равно:
$$\delta\ell^2 = a^2(t)(\delta\chi^2 + \varrho^2(\chi)\delta\Omega^2). \tag{9}$$
Если $\dot{a} \neq 0$ расстояние между наблюдателями в мире Фридмана изменяется. Относительную скорость двух наблюдателей получим дифференцированием (9) по времени, учитывая, что $v = d\ell/dt$:
$$2\delta\ell\frac{\delta\ell}{dt} = 2a\dot{a}(d\chi^2 + \varrho^2(\chi)d\Omega^2) \equiv 2\frac{\dot{a}}{a}\delta\ell^2$$
- Отсюда получаем линейный закон для относительной скорости:
$$\boxed{\frac{\delta\ell}{dt} = v(t) = H(t)\delta\ell; \qquad \left(H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}\right),} \tag{10}$$
где $H(t)$ – так называемая постоянная Хаббла.
- Безразмерный инвариант

[illegible] (11)

называется **космологическим ускорением**. Таким образом, $H > 0$ соответствует расширению Вселенной, $H = 0$ – стационарной Вселенной, $H < 0$ – сжатию Вселенной. Эдвин Хаббл, 1929 - экспериментальное подтверждение. Современное значения $H = 67,80 \pm 0,77$ (км/с)/Мпк или $(2,197 \pm 0,025) \cdot 10^{-18} c^{-1} = \to 1.14 \cdot 10^{10}$ лет ($t \sim H^{-1}$).

Кинематика изотропной Вселенной Фридмана

- Легко показать, что мировые линии $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = \overrightarrow{\mathrm{const}}$ являются геодезическими мира Фридмана (доказать самостоятельно). Сеть этих геодезических, покрывающих весь мир Фридмана, реализует синхронную систему отсчета, соответствующую наблюдателям. Тогда в любой момент синхронного времени два таких наблюдателя в метрике (6) имеют постоянные пространственные координаты $\chi_0, \theta_0, \varphi_0$ и $\chi_0 + \delta\chi, , \theta_0 + \delta\theta, \varphi_0 + \delta\varphi$. Квадрат синхронного (одновременного) расстояния между этими наблюдателями в момент времени t равно:
$$\delta\ell^2 = a^2(t)(\delta\chi^2 + \varrho^2(\chi)\delta\Omega^2). \tag{9}$$
Если $\dot{a} \neq 0$ расстояние между наблюдателями в мире Фридмана изменяется. Относительную скорость двух наблюдателей получим дифференцированием (9) по времени, учитывая, что $v = d\ell/dt$:
$$2\delta\ell\frac{\delta\ell}{dt} = 2a\dot{a}(d\chi^2 + \varrho^2(\chi)d\Omega^2) \equiv 2\frac{\dot{a}}{a}\delta\ell^2$$
- Отсюда получаем линейный закон для относительной скорости:
$$\boxed{\frac{\delta\ell}{dt} \equiv v(t) = H(t)\delta\ell; \quad \left(H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}\right), \tag{10}}$$
где $H(t)$ – так называемая постоянная Хаббла.
- Безразмерный инвариант
$$Q = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \tag{11}$$
называется **космологическим ускорением**. Таким образом, $H > 0$ соответствует расширению Вселенной, $H = 0$ – стационарной Вселенной, $H < 0$ – сжатию Вселенной. Эдвин Хаббл, 1929 - экспериментальное подтверждение. Современное значения $H = 67,80 \pm 0,77$ (км/с)/Мпк или $(2,197 \pm 0,025) \cdot 10^{-18} c^{-1} = \to 1.14 \cdot 10^{10}$ лет $(t \sim H^{-1})$.

Кинематика изотропной Вселенной Фридмана

- Легко показать, что мировые линии $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = \overrightarrow{\mathrm{const}}$ являются геодезическими мира Фридмана (доказать самостоятельно). Сеть этих геодезических, покрывающих весь мир Фридмана, реализует синхронную систему отсчета, соответствующую наблюдателям. Тогда в любой момент синхронного времени два таких наблюдателя в метрике (6) имеют постоянные пространственные координаты $\chi_0, \theta_0, \varphi_0$ и $\chi_0 + \delta\chi, , \theta_0 + \delta\theta, \varphi_0 + \delta\varphi$. Квадрат синхронного (одновременного) расстояния между этими наблюдателями в момент времени t равно:
$$\delta\ell^2 = a^2(t)(\delta\chi^2 + \varrho^2(\chi)\delta\Omega^2). \tag{9}$$
Если $\dot{a} \neq 0$ расстояние между наблюдателями в мире Фридмана изменяется. Относительную скорость двух наблюдателей получим дифференцированием (9) по времени, учитывая, что $v = d\ell/dt$:
$$2\delta\ell\frac{\delta\ell}{dt} = 2a\dot{a}(d\chi^2 + \varrho^2(\chi)d\Omega^2) \equiv 2\frac{\dot{a}}{a}\delta\ell^2$$
- Отсюда получаем линейный закон для относительной скорости:
$$\boxed{\frac{\delta\ell}{dt} \equiv v(t) = H(t)\delta\ell; \quad \left(H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}\right),} \tag{10}$$
где $H(t)$ – так называемая постоянная Хаббла.
- Безразмерный инвариант
$$\Omega = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \tag{11}$$
называется **космологическим ускорением**. Таким образом, $H > 0$ соответствует расширению Вселенной, $H = 0$ – стационарной Вселенной, $H < 0$ – сжатию Вселенной. Эдвин Хаббл, 1929 - экспериментальное подтверждение. Современное значения $H = 67,80 \pm 0,77$ (км/с)/Мпк или $(2,197 \pm 0,025) \cdot 10^{-18} c^{-1} = \to 1.14 \cdot 10^{10}$ лет $(t \sim H^{-1})$.

- Легко показать, что мировые линии $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = \overrightarrow{\mathrm{const}}$ являются геодезическими мира Фридмана (доказать самостоятельно). Сеть этих геодезических, покрывающих весь мир Фридмана, реализует синхронную систему отсчета, соответствующую наблюдателям. Тогда в любой момент синхронного времени два таких наблюдателя в метрике (6) имеют постоянные пространственные координаты $\chi_0, \theta_0, \varphi_0$ и $\chi_0 + \delta\chi, , \theta_0 + \delta\theta, \varphi_0 + \delta\varphi$. Квадрат синхронного (одновременного) расстояния между этими наблюдателями в момент времени t равно:
$$\delta\ell^2 = a^2(t)(\delta\chi^2 + \varrho^2(\chi)\delta\Omega^2). \tag{9}$$
Если $\dot{a} \neq 0$ расстояние между наблюдателями в мире Фридмана изменяется. Относительную скорость двух наблюдателей получим дифференцированием (9) по времени, учитывая, что $v = d\ell/dt$:
$$2\delta\ell\frac{\delta\ell}{dt} = 2a\dot{a}(d\chi^2 + \varrho^2(\chi)d\Omega^2) \equiv 2\frac{\dot{a}}{a}\delta\ell^2$$
- Отсюда получаем линейный закон для относительной скорости:
$$\boxed{\frac{\delta\ell}{dt} \equiv v(t) = H(t)\delta\ell; \quad \left(H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}\right), \qquad (10)}$$
где $H(t)$ – так называемая постоянная Хаббла.
- Безразмерный инвариант
$$\Omega \equiv \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \tag{11}$$
называется **космологическим ускорением**. Таким образом, $H > 0$ соответствует расширению Вселенной, $H = 0$ – стационарной Вселенной, $H < 0$ – сжатию Вселенной. Эдвин Хаббл, 1929 - экспериментальное подтверждение. Современное значения $H = 67,80 \pm 0,77$ (км/с)/Мпк или $(2,197 \pm 0,025) \cdot 10^{-18} c^{-1} = \rightarrow 1.14 \cdot 10^{10}$ лет $(t \sim H^{-1})$.

- Легко показать, что мировые линии $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = \overrightarrow{\mathrm{const}}$ являются геодезическими мира Фридмана (доказать самостоятельно). Сеть этих геодезических, покрывающих весь мир Фридмана, реализует синхронную систему отсчета, соответствующую наблюдателям. Тогда в любой момент синхронного времени два таких наблюдателя в метрике (6) имеют постоянные пространственные координаты $\chi_0, \theta_0, \varphi_0$ и $\chi_0 + \delta\chi, , \theta_0 + \delta\theta, \varphi_0 + \delta\varphi$. Квадрат синхронного (одновременного) расстояния между этими наблюдателями в момент времени t равно:
$$\delta\ell^2 = a^2(t)(\delta\chi^2 + \varrho^2(\chi)\delta\Omega^2). \qquad (9)$$
Если $\dot{a} \neq 0$ расстояние между наблюдателями в мире Фридмана изменяется. Относительную скорость двух наблюдателей получим дифференцированием (9) по времени, учитывая, что $v = d\ell/dt$:
$$2\delta\ell\frac{\delta\ell}{dt} = 2a\dot{a}(d\chi^2 + \varrho^2(\chi)d\Omega^2) \equiv 2\frac{\dot{a}}{a}\delta\ell^2$$
- Отсюда получаем линейный закон для относительной скорости:
$$\boxed{\frac{\delta\ell}{dt} \equiv v(t) = H(t)\delta\ell; \quad \left(H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}\right), \qquad (10)}$$
где $H(t)$ – так называемая постоянная Хаббла.
- Безразмерный инвариант
$$\Omega \equiv \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \qquad (11)$$
называется **космологическим ускорением**. Таким образом, $H > 0$ соответствует расширению Вселенной, $H = 0$ – стационарной Вселенной, $H < 0$ – сжатию Вселенной. Эдвин Хаббл, 1929 - экспериментальное подтверждение. Современное значения $H = 67,80 \pm 0,77$ (км/с)/Мпк или $(2,197 \pm 0,025) \cdot 10^{-18} c^{-1} = \rightarrow 1.14 \cdot 10^{10}$ лет $(t \sim H^{-1})$.

- Вычислим метрические величины для метрики Фридмана для метрики (8) вычислить самостоятельно отличные от нуля **символы Кристоффеля 2-го рода** для пространства Фридмана (8, принимая во внимание формулы для различных индексов кривизны (5):

$$\Gamma^1_{14} = \Gamma^2_{24} = \Gamma^3_{34} = \frac{\dot a}{a}; \qquad \Gamma^1_{22} = -\rho\rho'; \qquad \Gamma^1_{33} = -\rho\rho'\cos^2\theta;$$
$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{\rho'}{\rho}; \quad \Gamma^2_{33} = \cos\theta\sin\theta; \quad \Gamma^3_{23} = -\mathrm{tg}\theta;$$
$$\Gamma^4_{11} = a\dot a; \qquad \Gamma^4_{22} = a\dot a\rho^2; \qquad \Gamma^4_{33} = a\dot a\rho^2\cos^2\theta. \tag{12}$$

Точкой обозначены производные по конформному времени η, штрихом – производные по χ.

- Отличные от нуля **компоненты тензора Эйнштейна**: При этом надо иметь ввиду следующие полезные соотношения:

$$1-\rho'^2 = \epsilon\rho^2, \quad \rho'' = -\epsilon\rho, \tag{13}$$

где $\epsilon = 1$ в случае положительной кривизны, $\epsilon = 0$ в случае нулевой кривизны и $\epsilon = -1$ в случае отрицательной кривизны доказать самостоятельно. Таким образом, получим для отличных от нуля смешанных компонент тензора Эйнштейна[2]:

$$\boxed{G^1_1 = G^2_2 = G^3_3 = \frac{2a\ddot a - \dot a^2 + \epsilon a^2}{a^4}; \quad G^4_4 = 3\frac{\epsilon a^2 + \dot a^2}{a^4}; R = -6\frac{\epsilon a + \ddot a}{a^2}. \quad (14)}$$

[2] *При вычислениях в Maple необходимо помнить, что наше определение тензора Эйнштейна и определение Maple отличаются знаком!*

- Вычислим метрические величины для метрики Фридмана для метрики (8) вычислить самостоятельно отличные от нуля **символы Кристоффеля 2-го рода** для пространства Фридмана (8, принимая во внимание формулы для различных индексов кривизны (5):

$$\Gamma^1_{14} = \Gamma^2_{24} = \Gamma^3_{34} = \frac{\dot a}{a}; \qquad \Gamma^1_{22} = -\rho\rho'; \qquad \Gamma^1_{33} = -\rho\rho'\cos^2\theta;$$
$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{\rho'}{\rho}; \quad \Gamma^2_{33} = \cos\theta\sin\theta; \quad \Gamma^3_{23} = -\mathrm{tg}\theta;$$
$$\Gamma^4_{11} = a\dot a; \qquad \Gamma^4_{22} = a\dot a\rho^2; \qquad \Gamma^4_{33} = a\dot a\rho^2\cos^2\theta. \qquad (12)$$

Точкой обозначены производные по конформному времени η, штрихом – производные по χ.

- Отличные от нуля **компоненты тензора Эйнштейна**: При этом надо иметь ввиду следующие полезные соотношения:

$$1-\rho'^2 = \epsilon\rho^2, \quad \rho'' = -\epsilon\rho, \qquad (13)$$

где $\epsilon = 1$ в случае положительной кривизны, $\epsilon = 0$ в случае нулевой кривизны и $\epsilon = -1$ в случае отрицательной кривизны доказать самостоятельно. Таким образом, получим для отличных от нуля смешанных компонент тензора Эйнштейна[2]:

$$G^1_1 = G^2_2 = G^3_3 = \frac{2a\ddot a - \dot a^2 + \epsilon a^2}{a^4}; \quad G^4_4 = 3\frac{\epsilon a^2 + \dot a^2}{a^4}; R = -6\frac{\epsilon a + \ddot a}{a^2}. \quad (14)$$

[2] При вычислениях в Maple необходимо помнить, что наше определение тензора Эйнштейна и определение Maple отличаются знаком!

- Вычислим метрические величины для метрики Фридмана для метрики (8) вычислить самостоятельно отличные от нуля **символы Кристоффеля 2-го рода** для пространства Фридмана (8, принимая во внимание формулы для различных индексов кривизны (5):

$$\Gamma^1_{14}=\Gamma^2_{24}=\Gamma^3_{34}=\frac{\dot a}{a};\qquad \Gamma^1_{22}=-\rho\rho';\qquad \Gamma^1_{33}=-\rho\rho'\cos^2\theta;$$
$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=\frac{\rho'}{\rho};\quad \Gamma^2_{33}=\cos\theta\sin\theta;\quad \Gamma^3_{23}=-\mathrm{tg}\theta;$$
$$\Gamma^4_{11}=a\dot a;\qquad \Gamma^4_{22}=a\dot a\rho^2;\qquad \Gamma^4_{33}=a\dot a\rho^2\cos^2\theta. \qquad (12)$$

  Точкой обозначены производные по конформному времени η, штрихом – производные по χ.

- Отличные от нуля **компоненты тензора Эйнштейна**: При этом надо иметь ввиду следующие полезные соотношения:

$$1-\rho'^2=\epsilon\rho^2,\quad \rho''=-\epsilon\rho, \qquad (13)$$

  где $\epsilon=1$ в случае положительной кривизны, $\epsilon=0$ в случае нулевой кривизны и $\epsilon=-1$ в случае отрицательной кривизны доказать самостоятельно. Таким образом, получим для отличных от нуля смешанных компонент тензора Эйнштейна[2]:

$$\boxed{G^1_1=G^2_2=G^3_3=\frac{2a\ddot a-\dot a^2+\epsilon a^2}{a^4};\quad G^4_4=3\frac{\epsilon a^2+\dot a^2}{a^4};R=-6\frac{\epsilon a+\ddot a}{a^2}. \qquad (14)}$$

[2] *При вычислениях в Maple необходимо помнить, что наше определение тензора Эйнштейна и определение Maple отличаются знаком!*

- Вследствие изотропности и однородности трехмерного пространства трехмерная часть тензора энергии - импульса также должна составлять трехмерный однородный и изотропный тензор, т.е., он должен быть инвариантен относительно вращений и переносов трехмерного пространства. Это приводит к тому, что в сопутствующей системе отсчета
$$T^i_k u^k = \varepsilon\, u^i \qquad (15)$$
тензор энергии - импульса должен иметь вид:
$$T^i_k \stackrel{*}{=} \begin{pmatrix} -P(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon(\eta) \end{pmatrix} \Rightarrow T^i_k = (\varepsilon + P)u^i u_k - P\delta^i_k, \qquad (16)$$
т.е., тензор энергии - импульса изотропного однородного мира должен совпадать с тензором энергии - импульса идеальной жидкости.
- Единичный времениподобный собственный вектор матрицы T^i_k, u^i, отвечающий положительному значению собственного числа $\varepsilon > 0$, называется динамической скоростью материи, а положительное собственное число ε – плотностью энергии материи; собственные числа P, отвечающие пространственноподобным собственным векторам $\underset{(\alpha)}{v}{}^i$, называются давлениями вдоль осей $\underset{(\alpha)}{v}$.
- Из сравнения (14) и (16) следует, что имеется всего лишь 2 независимых уравнения Эйнштейна на 3 неизвестные функции: $a(\eta), \varepsilon(\eta), P(\eta)$. Поэтому для замыкания системы уравнений необходимо наложить еще одно уравнение, связывающее P и ε – уравнение состояния:
$$P = P(\varepsilon). \qquad (17)$$
Это уравнение определяется внутренним физическим состоянием материи и существенно зависит от ее модели.

- Вследствие изотропности и однородности трехмерного пространства трехмерная часть тензора энергии - импульса также должна составлять трехмерный однородный и изотропный тензор, т.е., он должен быть инвариантен относительно вращений и переносов трехмерного пространства. Это приводит к тому, что в сопутствующей системе отсчета

$$T^i_k u^k = \varepsilon\, u^i \tag{15}$$

тензор энергии - импульса должен иметь вид:

$$T^i_k \stackrel{*}{=} \begin{pmatrix} -P(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon(\eta) \end{pmatrix} \Rightarrow T^i_k = (\varepsilon + P)u^i u_k - P\delta^i_k, \tag{16}$$

т.е., тензор энергии - импульса изотропного однородного мира должен совпадать с тензором энергии - импульса идеальной жидкости.

- Единичный времениподобный собственный вектор матрицы T^i_k, u^i, отвечающий положительному значению собственного числа $\varepsilon > 0$, называется динамической скоростью материи, а положительное собственное число ε – плотностью энергии материи; собственные числа P, отвечающие пространственноподобным собственным векторам $\underset{(\alpha)}{v}{}^i$, называются давлениями вдоль осей $\underset{(\alpha)}{v}$.

- Из сравнения (14) и (16) следует, что имеется всего лишь 2 независимых уравнения Эйнштейна на 3 неизвестные функции: $a(\eta), \varepsilon(\eta), P(\eta)$. Поэтому для замыкания системы уравнений необходимо наложить еще одно уравнение, связывающее P и ε – уравнение состояния:

$$P = P(\varepsilon). \tag{17}$$

Это уравнение определяется внутренним физическим состоянием материи и существенно зависит от ее модели.

- Вследствие изотропности и однородности трехмерного пространства трехмерная часть тензора энергии - импульса также должна составлять трехмерный однородный и изотропный тензор, т.е., он должен быть инвариантен относительно вращений и переносов трехмерного пространства. Это приводит к тому, что в сопутствующей системе отсчета

$$T^i_k u^k = \varepsilon\; u^i \tag{15}$$

тензор энергии - импульса должен иметь вид:

$$T^i_k \stackrel{*}{=} \begin{pmatrix} -P(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon(\eta) \end{pmatrix} \Rightarrow T^i_k = (\varepsilon + P)u^i u_k - P\delta^i_k, \tag{16}$$

т.е., тензор энергии - импульса изотропного однородного мира должен совпадать с тензором энергии - импульса идеальной жидкости.

- Единичный времениподобный собственный вектор матрицы T^i_k, u^i, отвечающий положительному значению собственного числа $\varepsilon > 0$, называется динамической скоростью материи, а положительное собственное число ε – плотностью энергии материи; собственные числа P, отвечающие пространственноподобным собственным векторам $\underset{(\alpha)}{v}{}^i$, называются давлениями вдоль осей $\underset{(\alpha)}{v}$.

- Из сравнения (14) и (16) следует, что имеется всего лишь 2 независимых уравнения Эйнштейна на 3 неизвестные функции: $a(\eta), \varepsilon(\eta), P(\eta)$. Поэтому для замыкания системы уравнений необходимо наложить еще одно уравнение, связывающее P и ε – уравнение состояния:

  Это уравнение определяется внутренним физическим состоянием материи и существенно зависит от ее модели.

Тензор энергии - импульса и уравнения Эйнштейна

- Вследствие изотропности и однородности трехмерного пространства трехмерная часть тензора энергии - импульса также должна составлять трехмерный однородный и изотропный тензор, т.е., он должен быть инвариантен относительно вращений и переносов трехмерного пространства. Это приводит к тому, что в сопутствующей системе отсчета
$$T^i_k u^k = \varepsilon\, u^i \qquad (15)$$
тензор энергии - импульса должен иметь вид:
$$T^i_k \overset{*}{=} \begin{pmatrix} -P(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon(\eta) \end{pmatrix} \Rightarrow T^i_k = (\varepsilon + P)u^i u_k - P\delta^i_k, \qquad (16)$$
т.е., тензор энергии - импульса изотропного однородного мира должен совпадать с тензором энергии - импульса идеальной жидкости.
- Единичный времениподобный собственный вектор матрицы T^i_k, u^i, отвечающий положительному значению собственного числа $\varepsilon > 0$, называется динамической скоростью материи, а положительное собственное число ε – плотностью энергии материи; собственные числа P, отвечающие пространственноподобным собственным векторам $\underset{(\alpha)}{v}{}^i$, называются давлениями вдоль осей $\underset{(\alpha)}{v}$.
- Из сравнения (14) и (16) следует, что имеется всего лишь 2 независимых уравнения Эйнштейна на 3 неизвестные функции: $a(\eta), \varepsilon(\eta), P(\eta)$. Поэтому для замыкания системы уравнений необходимо наложить еще одно уравнение, связывающее P и ε – уравнение состояния:
$$P = P(\varepsilon). \qquad (17)$$
Это уравнение определяется внутренним физическим состоянием материи и существенно зависит от ее модели.

- Вследствие изотропности и однородности трехмерного пространства трехмерная часть тензора энергии - импульса также должна составлять трехмерный однородный и изотропный тензор, т.е., он должен быть инвариантен относительно вращений и переносов трехмерного пространства. Это приводит к тому, что в сопутствующей системе отсчета
$$T^i_k u^k = \varepsilon\, u^i \tag{15}$$
тензор энергии - импульса должен иметь вид:
$$T^i_k \overset{*}{=} \begin{pmatrix} -P(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon(\eta) \end{pmatrix} \Rightarrow T^i_k = (\varepsilon + P)u^i u_k - P\delta^i_k, \tag{16}$$
т.е., тензор энергии - импульса изотропного однородного мира должен совпадать с тензором энергии - импульса идеальной жидкости.
- Единичный времениподобный собственный вектор матрицы T^i_k, u^i, отвечающий положительному значению собственного числа $\varepsilon > 0$, называется динамической скоростью материи, а положительное собственное число ε – плотностью энергии материи; собственные числа P, отвечающие пространственноподобным собственным векторам $\underset{(\alpha)}{v}{}^i$, называются давлениями вдоль осей $\underset{(\alpha)}{v}$.
- Из сравнения (14) и (16) следует, что имеется всего лишь 2 независимых уравнения Эйнштейна на 3 неизвестные функции: $a(\eta), \varepsilon(\eta), P(\eta)$. Поэтому для замыкания системы уравнений необходимо наложить еще одно уравнение, связывающее P и ε – уравнение состояния:
$$P = P(\varepsilon). \tag{17}$$
Это уравнение определяется внутренним физическим состоянием материи и существенно зависит от ее модели.

- Вследствие изотропности и однородности трехмерного пространства трехмерная часть тензора энергии - импульса также должна составлять трехмерный однородный и изотропный тензор, т.е., он должен быть инвариантен относительно вращений и переносов трехмерного пространства. Это приводит к тому, что в сопутствующей системе отсчета
$$T^i_k u^k = \varepsilon\ u^i \tag{15}$$
тензор энергии - импульса должен иметь вид:
$$T^i_k \stackrel{*}{=} \begin{pmatrix} -P(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon(\eta) \end{pmatrix} \Rightarrow T^i_k = (\varepsilon + P)u^i u_k - P\delta^i_k, \tag{16}$$
т.е., тензор энергии - импульса изотропного однородного мира должен совпадать с тензором энергии - импульса идеальной жидкости.
- Единичный времениподобный собственный вектор матрицы T^i_k, u^i, отвечающий положительному значению собственного числа $\varepsilon > 0$, называется динамической скоростью материи, а положительное собственное число ε – плотностью энергии материи; собственные числа P, отвечающие пространственноподобным собственным векторам $\underset{(\alpha)}{v}{}^i$, называются давлениями вдоль осей $\underset{(\alpha)}{v}$.
- Из сравнения (14) и (16) следует, что имеется всего лишь 2 независимых уравнения Эйнштейна на 3 неизвестные функции: $a(\eta), \varepsilon(\eta), P(\eta)$. Поэтому для замыкания системы уравнений необходимо наложить еще одно уравнение, связывающее P и ε – уравнение состояния:
$$P = P(\varepsilon). \tag{17}$$
Это уравнение определяется внутренним физическим состоянием материи и существенно зависит от ее модели.

Тензор энергии - импульса и уравнения Эйнштейна

- На основе (14) и (16) сформулируем систему независимых уравнений Эйнштейна (в планковской системе единиц $\hbar = G = c = 1$!):

$$G^1_1 = \frac{2a\ddot{a} - \dot{a}^2 + \epsilon a^2}{a^4} = -8\pi P(\varepsilon); \tag{18}$$

$$G^4_4 = \boxed{3\frac{\epsilon a^2 + \dot{a}^2}{a^4} = 8\pi\varepsilon.} \tag{19}$$

- На основе этих уравнений можно получить их дифференциальное следствие:

$$\frac{d}{d\eta}G^4_4 \equiv 6\frac{\dot{a}}{a^5}(-\epsilon a^2 + a\ddot{a} - 2\dot{a}^2); \quad G^4_4 - G^1_1 = -\frac{2}{a^4}(-\epsilon a^2 - 2\dot{a}^2 + a\ddot{a});$$

$$\Rightarrow \frac{dG^4_4}{d\eta} + 3\frac{\dot{a}}{a}(G^4_4 - G^1_1) = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\frac{d\varepsilon}{d\eta} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + P(\varepsilon)) = 0} \tag{20}$$

— закон сохранения энергии. Этот же закон можно получить и прямым методом, вычисляя ковариантные производные $\nabla_k T^k_i = 0$ (вычислить самостоятельно).

- Закон сохранения энергии (20) можно взять вместо одного из независимых уравнений Эйнштейна. При заданном уравнении состояния уравнение (20) интегрируется в квадратурах:

$$3\ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + P(\varepsilon)} + \mathrm{Const}, \tag{21}$$

поэтому формально уравнения Эйнштейна для Вселенной Фридмана всегда сводятся к одному интегро - дифференциальному уравнению (19).

- На основе (14) и (16) сформулируем систему независимых уравнений Эйнштейна (в планковской системе единиц $\hbar = G = c = 1$!):

$$G^1_1 = \frac{2a\ddot{a} - \dot{a}^2 + \epsilon a^2}{a^4} = -8\pi P(\varepsilon); \qquad (18)$$

$$G^4_4 = \boxed{3\frac{\epsilon a^2 + \dot{a}^2}{a^4} = 8\pi\varepsilon.} \qquad (19)$$

- На основе этих уравнений можно получить их дифференциальное следствие:

$$\frac{d}{d\eta}G^4_4 \equiv 6\frac{\dot{a}}{a^5}(-\epsilon a^2 + a\ddot{a} - 2\dot{a}^2); \quad G^4_4 - G^1_1 = -\frac{2}{a^4}(-\epsilon a^2 - 2\dot{a}^2 + a\ddot{a});$$

$$\Rightarrow \frac{dG^4_4}{d\eta} + 3\frac{\dot{a}}{a}(G^4_4 - G^1_1) = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\frac{d\varepsilon}{d\eta} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + P(\varepsilon)) = 0} \qquad (20)$$

— закон сохранения энергии. Этот же закон можно получить и прямым методом, вычисляя ковариантные производные $\nabla_k T^k_i = 0$ (вычислить самостоятельно).

- Закон сохранения энергии (20) можно взять вместо одного из независимых уравнений Эйнштейна. При заданном уравнении состояния уравнение (20) интегрируется в квадратурах:

$$3\ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + P(\varepsilon)} + \mathrm{Const}, \qquad (21)$$

поэтому формально уравнения Эйнштейна для Вселенной Фридмана всегда сводятся к одному интегро - дифференциальному уравнению (19).

Тензор энергии - импульса и уравнения Эйнштейна

- На основе (14) и (16) сформулируем систему независимых уравнений Эйнштейна (в планковской системе единиц $\hbar = G = c = 1$!):

$$G^1_1 = \frac{2a\ddot{a} - \dot{a}^2 + \epsilon a^2}{a^4} = -8\pi P(\varepsilon); \qquad (18)$$

$$G^4_4 = \boxed{3\frac{\epsilon a^2 + \dot{a}^2}{a^4} = 8\pi\varepsilon.} \qquad (19)$$

- На основе этих уравнений можно получить их дифференциальное следствие:

$$\frac{d}{d\eta}G^4_4 \equiv 6\frac{\dot{a}}{a^5}(-\epsilon a^2 + a\ddot{a} - 2\dot{a}^2); \quad G^4_4 - G^1_1 = -\frac{2}{a^4}(-\epsilon a^2 - 2\dot{a}^2 + a\ddot{a});$$

$$\Rightarrow \frac{dG^4_4}{d\eta} + 3\frac{\dot{a}}{a}(G^4_4 - G^1_1) = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\frac{d\varepsilon}{d\eta} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + P(\varepsilon)) = 0} \qquad (20)$$

— закон сохранения энергии. Этот же закон можно получить и прямым методом, вычисляя ковариантные производные $\nabla_k T^k_i = 0$ (вычислить самостоятельно).

- Закон сохранения энергии (20) можно взять вместо одного из независимых уравнений Эйнштейна. При заданном уравнении состояния уравнение (20) интегрируется в квадратурах:

$$3\ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + P(\varepsilon)} + \mathrm{Const}, \qquad (21)$$

поэтому формально уравнения Эйнштейна для Вселенной Фридмана всегда сводятся к одному интегро - дифференциальному уравнению (19).

- На основе (14) и (16) сформулируем систему независимых уравнений Эйнштейна (в планковской системе единиц $\hbar = G = c = 1!$):

$$G^1_1 = \frac{2a\ddot{a} - \dot{a}^2 + \epsilon a^2}{a^4} = -8\pi P(\varepsilon); \tag{18}$$

$$G^4_4 = \boxed{3\frac{\epsilon a^2 + \dot{a}^2}{a^4} = 8\pi\varepsilon.} \tag{19}$$

- На основе этих уравнений можно получить их дифференциальное следствие:

$$\frac{d}{d\eta}G^4_4 \equiv 6\frac{\dot{a}}{a^5}(-\epsilon a^2 + a\ddot{a} - 2\dot{a}^2); \quad G^4_4 - G^1_1 = -\frac{2}{a^4}(-\epsilon a^2 - 2\dot{a}^2 + a\ddot{a});$$

$$\Rightarrow \frac{dG^4_4}{d\eta} + 3\frac{\dot{a}}{a}(G^4_4 - G^1_1) = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\frac{d\varepsilon}{d\eta} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + P(\varepsilon)) = 0} \tag{20}$$

— закон сохранения энергии. Этот же закон можно получить и прямым методом, вычисляя ковариантные производные $\nabla_k T^k_i = 0$ (вычислить самостоятельно).

- Закон сохранения энергии (20) можно взять вместо одного из независимых уравнений Эйнштейна. При заданном уравнении состояния уравнение (20) интегрируется в квадратурах:

$$3\ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + P(\varepsilon)} + \mathrm{Const}, \tag{21}$$

поэтому формально уравнения Эйнштейна для Вселенной Фридмана всегда сводятся к одному интегро - дифференциальному уравнению (19).

- На основе (14) и (16) сформулируем систему независимых уравнений Эйнштейна (в планковской системе единиц $\hbar = G = c = 1$!):

$$G^1_1 = \frac{2a\ddot{a} - \dot{a}^2 + \epsilon a^2}{a^4} = -8\pi P(\varepsilon); \tag{18}$$

$$G^4_4 = \boxed{3\frac{\epsilon a^2 + \dot{a}^2}{a^4} = 8\pi\varepsilon.} \tag{19}$$

- На основе этих уравнений можно получить их дифференциальное следствие:

$$\frac{d}{d\eta}G^4_4 \equiv 6\frac{\dot{a}}{a^5}(-\epsilon a^2 + a\ddot{a} - 2\dot{a}^2); \quad G^4_4 - G^1_1 = -\frac{2}{a^4}(-\epsilon a^2 - 2\dot{a}^2 + a\ddot{a});$$

$$\Rightarrow \frac{dG^4_4}{d\eta} + 3\frac{\dot{a}}{a}(G^4_4 - G^1_1) = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\frac{d\varepsilon}{d\eta} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + P(\varepsilon)) = 0} \tag{20}$$

— закон сохранения энергии. Этот же закон можно получить и прямым методом, вычисляя ковариантные производные $\nabla_k T^k_i = 0$ (вычислить самостоятельно).

- Закон сохранения энергии (20) можно взять вместо одного из независимых уравнений Эйнштейна. При заданном уравнении состояния уравнение (20) интегрируется в квадратурах:

$$3\ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + P(\varepsilon)} + \mathrm{Const}, \tag{21}$$

поэтому формально уравнения Эйнштейна для Вселенной Фридмана всегда сводятся к одному интегро - дифференциальному уравнению (19).

Решения уравнений Эйнштейна для частных случаев уравнения состояния

- В релятивистской гидродинамике доказывается, что соотношение
$$\frac{dP}{d\varepsilon} = \frac{v_s^2}{c^2} \tag{22}$$
определяет скорость звука v_s в изотропной материи. При этом надо помнить, что ε – есть плотность энергии материи с учетом ее массы покоя. Поскольку скорость звука должна быть меньше скорости света, имеется ограничение: $dP/d\varepsilon \leq 1$.
- **Частные случаи уравнения состояния**. Часто в модельных исследованиях используют так называемое баротропическое уравнение состояния:
$$P = k\varepsilon \tag{23}$$
где безразмерный коэффициент $k \leq 1$ называется коэффициентом баротропы.
- В частности, $k = 0 \Rightarrow P \to 0$ соответствует нерелятивистскому уравнению состояния, в этом случае $\varepsilon = \varrho c^2$ (ϱ – плотность вещества);
- $k = 1/3$ – ультрарелятивистскому уравнению состояния (это уравнение состояния получается в том случае, если масса покоя составляющих материю частиц и физических полей стремится к нулю); $k = 1$ – предельно - жесткому уравнению состояния. В настоящее время в космологии рассматриваются модели с отрицательным коэффициентом баротропы, в частности, $-1 < k < -1/3$ – квинтэссенция; $k = -1$ – вакуумное уравнение состояния, $k < -1$ – фантомная энергия (темная энергия);

- В релятивистской гидродинамике доказывается, что соотношение
$$\frac{dP}{d\varepsilon} = \frac{v_s^2}{c^2} \qquad (22)$$
определяет скорость звука v_s в изотропной материи. При этом надо помнить, что ε – есть плотность энергии материи с учетом ее массы покоя. Поскольку скорость звука должна быть меньше скорости света, имеется ограничение: $dP/d\varepsilon \leq 1$.
- **Частные случаи уравнения состояния**. Часто в модельных исследованиях используют так называемое баротропическое уравнение состояния:
$$P = k\varepsilon \qquad (23)$$
где безразмерный коэффициент $k \leq 1$ называется коэффициентом баротропы.
- В частности, $k = 0 \Rightarrow P \to 0$ соответствует нерелятивистскому уравнению состояния, в этом случае $\varepsilon = \varrho c^2$ (ϱ – плотность вещества);
- $k = 1/3$ – ультрарелятивистскому уравнению состояния (это уравнение состояния получается в том случае, если масса покоя составляющих материю частиц и физических полей стремится к нулю); $k = 1$ – предельно - жесткому уравнению состояния. В настоящее время в космологии рассматриваются модели с отрицательным коэффициентом баротропы, в частности, $-1 < k < -1/3$ – квинтэссенция; $k = -1$ – вакуумное уравнение состояния, $k < -1$ – фантомная энергия (темная энергия);

Решения уравнений Эйнштейна для частных случаев уравнения состояния

- В релятивистской гидродинамике доказывается, что соотношение
$$\frac{dP}{d\varepsilon} = \frac{v_s^2}{c^2} \tag{22}$$
определяет скорость звука v_s в изотропной материи. При этом надо помнить, что ε – есть плотность энергии материи с учетом ее массы покоя. Поскольку скорость звука должна быть меньше скорости света, имеется ограничение: $dP/d\varepsilon \leq 1$.
- **Частные случаи уравнения состояния**. Часто в модельных исследованиях используют так называемое баротропическое уравнение состояния:
$$P = k\varepsilon \tag{23}$$
где безразмерный коэффициент $k \leq 1$ называется коэффициентом баротропы.
- В частности, $k = 0 \Rightarrow P \to 0$ соответствует нерелятивистскому уравнению состояния, в этом случае $\varepsilon = \varrho c^2$ (ϱ – плотность вещества);
- $k = 1/3$ – ультрарелятивистскому уравнению состояния (это уравнение состояния получается в том случае, если масса покоя составляющих материю частиц и физических полей стремится к нулю); $k = 1$ – предельно - жесткому уравнению состояния. В настоящее время в космологии рассматриваются модели с отрицательным коэффициентом баротропы, в частности, $-1 < k < -1/3$ – квинтэссенция; $k = -1$ – вакуумное уравнение состояния, $k < -1$ – фантомная энергия (темная энергия);

- В релятивистской гидродинамике доказывается, что соотношение
$$\frac{dP}{d\varepsilon} = \frac{v_s^2}{c^2} \qquad (22)$$
определяет скорость звука v_s в изотропной материи. При этом надо помнить, что ε – есть плотность энергии материи с учетом ее массы покоя. Поскольку скорость звука должна быть меньше скорости света, имеется ограничение: $dP/d\varepsilon \leq 1$.
- **Частные случаи уравнения состояния**. Часто в модельных исследованиях используют так называемое баротропическое уравнение состояния:
$$P = k\varepsilon \qquad (23)$$
где безразмерный коэффициент $k \leq 1$ называется коэффициентом баротропы.
- В частности, $k = 0 \Rightarrow P \to 0$ соответствует нерелятивистскому уравнению состояния, в этом случае $\varepsilon = \varrho c^2$ (ϱ – плотность вещества);
- $k = 1/3$ – ультрарелятивистскому уравнению состояния (это уравнение состояния получается в том случае, если масса покоя составляющих материю частиц и физических полей стремится к нулю); $k = 1$ – предельно - жесткому уравнению состояния. В настоящее время в космологии рассматриваются модели с отрицательным коэффициентом баротропы, в частности, $-1 < k < -1/3$ – квинтэссенция; $k = -1$ – вакуумное уравнение состояния, $k < -1$ – фантомная энергия (темная энергия);

Решения уравнений Эйнштейна для частных случаев уравнения состояния

- В релятивистской гидродинамике доказывается, что соотношение
$$\frac{dP}{d\varepsilon} = \frac{v_s^2}{c^2} \tag{22}$$
определяет скорость звука v_s в изотропной материи. При этом надо помнить, что ε – есть плотность энергии материи с учетом ее массы покоя. Поскольку скорость звука должна быть меньше скорости света, имеется ограничение: $dP/d\varepsilon \leq 1$.
- **Частные случаи уравнения состояния**. Часто в модельных исследованиях используют так называемое баротропическое уравнение состояния:
$$P = k\varepsilon \tag{23}$$
где безразмерный коэффициент $k \leq 1$ называется коэффициентом баротропы.
- В частности, $k = 0 \Rightarrow P \to 0$ соответствует нерелятивистскому уравнению состояния, в этом случае $\varepsilon = \varrho c^2$ (ϱ – плотность вещества);
- $k = 1/3$ – ультрарелятивистскому уравнению состояния (это уравнение состояния получается в том случае, если масса покоя составляющих материю частиц и физических полей стремится к нулю); $k = 1$ – предельно - жесткому уравнению состояния. В настоящее время в космологии рассматриваются модели с отрицательным коэффициентом баротропы, в частности, $-1 < k < -1/3$ – квинтэссенция; $k = -1$ – вакуумное уравнение состояния, $k < -1$ – фантомная энергия (темная энергия);

- В релятивистской гидродинамике доказывается, что соотношение

$$\frac{dP}{d\varepsilon} = \frac{v_s^2}{c^2} \tag{22}$$

определяет скорость звука v_s в изотропной материи. При этом надо помнить, что ε – есть плотность энергии материи с учетом ее массы покоя. Поскольку скорость звука должна быть меньше скорости света, имеется ограничение: $dP/d\varepsilon \leq 1$.

- **Частные случаи уравнения состояния**. Часто в модельных исследованиях используют так называемое баротропическое уравнение состояния:

$$P = k\varepsilon \tag{23}$$

где безразмерный коэффициент $k \leq 1$ называется коэффициентом баротропы.

- В частности, $k = 0 \Rightarrow P \to 0$ соответствует нерелятивистскому уравнению состояния, в этом случае $\varepsilon = \varrho c^2$ (ϱ – плотность вещества);
- $k = 1/3$ – ультрарелятивистскому уравнению состояния (это уравнение состояния получается в том случае, если масса покоя составляющих материю частиц и физических полей стремится к нулю); $k = 1$ – предельно - жесткому уравнению состояния. В настоящее время в космологии рассматриваются модели с отрицательным коэффициентом баротропы, в частности, $-1 < k < -1/3$ – квинтэссенция; $k = -1$ – вакуумное уравнение состояния, $k < -1$ – фантомная энергия (темная энергия);

- Фридман получил решения для однородной космологической модели с положительной кривизной с учетом космологического члена в случае нерелятивистского уравнения состояния $P = 0,\ \varepsilon = \varrho c^2$, когда уравнение (24) легко интегрируется и дает закон сохранения массы:

$$3\ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \mathrm{Const} \Rightarrow \varepsilon a^3 = \mathrm{Const} \Leftrightarrow \varrho a^3 = \mathrm{Const} = \rho_0. \qquad (24)$$

- Мы здесь рассмотрим случаи произвольного индекса кривизны ϵ, но при $\Lambda = 0$ (случай $\Lambda \neq 0$ рассмотреть самостоятельно). Подстановка решения (24) в уравнение (25) приводит его к виду (мы положили $a(\eta_0) = 1$, $\rho(\eta_0) = \rho_0$):

$$3(\epsilon a^2 + a'^2) = 8\pi\rho_0 a. \qquad (25)$$

Совершим масштабное преобразование:

$$a \to a\frac{8\pi}{3}\rho_0, \qquad (26)$$

тогда уравнение Эйнштейна примет компактный вид:

$$\epsilon a^2 + a'^2 = a. \qquad (27)$$

- Интегрируя его, получим решение в квадратурах:

$$\int \frac{da}{\sqrt{a - \epsilon a^2}} = \eta + Const \qquad (28)$$

- Интеграл в левой части (28) надо вычислять для каждого значения ϵ (вычислить самостоятельно). В результате получим:

$$a(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos\eta), & \epsilon = +1; \\ \frac{1}{2}\eta^2, & \epsilon = 0; \\ \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,\eta - 1), & \epsilon = -1; \end{cases} \qquad (29)$$

- Фридман получил решения для однородной космологической модели с положительной кривизной с учетом космологического члена в случае нерелятивистского уравнения состояния $P = 0, \ \varepsilon = \varrho c^2$, когда уравнение (24) легко интегрируется и дает закон сохранения массы:

$$3\ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \mathrm{Const} \Rightarrow \varepsilon a^3 = \mathrm{Const} \Leftrightarrow \varrho a^3 = \mathrm{Const} = \rho_0. \qquad (24)$$

- Мы здесь рассмотрим случаи произвольного индекса кривизны ϵ, но при $\Lambda = 0$ (случай $\Lambda \neq 0$ рассмотреть самостоятельно). Подстановка решения (24) в уравнение (25) приводит его к виду (мы положили $a(\eta_0) = 1$, $\rho(\eta_0) = \rho_0$):

$$3(\epsilon a^2 + a'^2) = 8\pi\rho_0 a. \qquad (25)$$

Совершим масштабное преобразование:

$$a \to a\frac{8\pi}{3}\rho_0, \qquad (26)$$

тогда уравнение Эйнштейна примет компактный вид:

$$\epsilon a^2 + a'^2 = a. \qquad (27)$$

- Интегрируя его, получим решение в квадратурах:

$$\int \frac{da}{\sqrt{a - \epsilon a^2}} = \eta + \mathrm{Const}. \qquad (28)$$

- Интеграл в левой части (28) надо вычислять для каждого значения ϵ (вычислить самостоятельно). В результате получим:

$$\boxed{a(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos\eta), & \epsilon = +1; \\ \frac{1}{2}\eta^2, & \epsilon = 0; \\ \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\eta - 1), & \epsilon = -1. \end{cases} \qquad (29)}$$

- Фридман получил решения для однородной космологической модели с положительной кривизной с учетом космологического члена в случае нерелятивистского уравнения состояния $P = 0$, $\varepsilon = \varrho c^2$, когда уравнение (24) легко интегрируется и дает закон сохранения массы:

$$3 \ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \mathrm{Const} \Rightarrow \varepsilon a^3 = \mathrm{Const} \Leftrightarrow \varrho a^3 = \mathrm{Const} = \rho_0. \qquad (24)$$

- Мы здесь рассмотрим случаи произвольного индекса кривизны ϵ, но при $\Lambda = 0$ (случай $\Lambda \neq 0$ рассмотреть самостоятельно). Подстановка решения (24) в уравнение (25) приводит его к виду (мы положили $a(\eta_0) = 1$, $\rho(\eta_0) = \rho_0$):

$$3(\epsilon a^2 + \dot{a}^2) = 8\pi\rho_0 a. \qquad (25)$$

Совершим масштабное преобразование:

$$a \to a\frac{8\pi}{3}\rho_0, \qquad (26)$$

тогда уравнение Эйнштейна примет компактный вид:

$$\epsilon a^2 + \dot{a}^2 = a. \qquad (27)$$

- Интегрируя его, получим решение в квадратурах:

$$\int \frac{da}{\sqrt{a - \epsilon a^2}} = \eta + \mathrm{Const}. \qquad (28)$$

- Интеграл в левой части (28) надо вычислять для каждого значения ϵ (вычислить самостоятельно). В результате получим:

$$a(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos\eta), & \epsilon = +1; \\ \frac{1}{2}\eta^2, & \epsilon = 0; \\ \frac{1}{2}(ch\eta - 1), & \epsilon = -1; \end{cases} \qquad (29)$$

- Фридман получил решения для однородной космологической модели с положительной кривизной с учетом космологического члена в случае нерелятивистского уравнения состояния $P = 0,\ \varepsilon = \varrho c^2$, когда уравнение (24) легко интегрируется и дает закон сохранения массы:

$$3 \ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \mathrm{Const} \Rightarrow \varepsilon a^3 = \mathrm{Const} \Leftrightarrow \varrho a^3 = \mathrm{Const} = \rho_0. \tag{24}$$

- Мы здесь рассмотрим случаи произвольного индекса кривизны ϵ, но при $\Lambda = 0$ (случай $\Lambda \neq 0$ рассмотреть самостоятельно). Подстановка решения (24) в уравнение (25) приводит его к виду (мы положили $a(\eta_0) = 1$, $\rho(\eta_0) = \rho_0$):

$$3(\epsilon a^2 + \dot{a}^2) = 8\pi\rho_0 a. \tag{25}$$

Совершим масштабное преобразование:

$$a \to a\frac{8\pi}{3}\rho_0, \tag{26}$$

тогда уравнение Эйнштейна примет компактный вид:

$$\epsilon a^2 + \dot{a}^2 = a. \tag{27}$$

- Интегрируя его, получим решение в квадратурах:

$$\int \frac{da}{\sqrt{a - \epsilon a^2}} = \eta + \mathrm{Const}. \tag{28}$$

- Интеграл в левой части (28) надо вычислять для каждого значения ϵ (вычислить самостоятельно). В результате получим:

$$a(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos\eta), & \epsilon = +1; \\ \frac{1}{2}\eta^2, & \epsilon = 0; \\ \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\eta - 1), & \epsilon = -1; \end{cases} \tag{29}$$

- Фридман получил решения для однородной космологической модели с положительной кривизной с учетом космологического члена в случае нерелятивистского уравнения состояния $P=0,\ \varepsilon=\varrho c^2$, когда уравнение (24) легко интегрируется и дает закон сохранения массы:
$$3\ln a = -\int\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \mathrm{Const} \Rightarrow \varepsilon a^3 = \mathrm{Const} \Leftrightarrow \varrho a^3 = \mathrm{Const} = \rho_0. \qquad (24)$$
- Мы здесь рассмотрим случаи произвольного индекса кривизны ϵ, но при $\Lambda = 0$ (случай $\Lambda \neq 0$ рассмотреть самостоятельно). Подстановка решения (24) в уравнение (25) приводит его к виду (мы положили $a(\eta_0)=1$, $\rho(\eta_0)=\rho_0$):
$$3(\epsilon a^2 + \dot{a}^2) = 8\pi\rho_0 a. \qquad (25)$$
Совершим масштабное преобразование:
$$a \to a\frac{8\pi}{3}\rho_0, \qquad (26)$$
тогда уравнение Эйнштейна примет компактный вид:
$$\epsilon a^2 + \dot{a}^2 = a. \qquad (27)$$
- Интегрируя его, получим решение в квадратурах:
$$\int\frac{da}{\sqrt{a-\epsilon a^2}} = \eta + \mathrm{Const} \qquad (28)$$
- Интеграл в левой части (28) надо вычислять для каждого значения ϵ (вычислить самостоятельно). В результате получим:
$$a(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\cos\eta), & \epsilon=+1; \\ \frac{1}{4}\eta^2, & \epsilon = 0; \\ \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,\eta - 1), & \epsilon=-1. \end{cases} \qquad (29)$$

- Фридман получил решения для однородной космологической модели с положительной кривизной с учетом космологического члена в случае нерелятивистского уравнения состояния $P = 0,\ \varepsilon = \varrho c^2$, когда уравнение (24) легко интегрируется и дает закон сохранения массы:

$$3\ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \mathrm{Const} \Rightarrow \varepsilon a^3 = \mathrm{Const} \Leftrightarrow \varrho a^3 = \mathrm{Const} = \rho_0. \qquad (24)$$

- Мы здесь рассмотрим случаи произвольного индекса кривизны ϵ, но при $\Lambda = 0$ (случай $\Lambda \neq 0$ рассмотреть самостоятельно). Подстановка решения (24) в уравнение (25) приводит его к виду (мы положили $a(\eta_0) = 1$, $\rho(\eta_0) = \rho_0$):

$$3(\epsilon a^2 + \dot{a}^2) = 8\pi\rho_0 a. \qquad (25)$$

Совершим масштабное преобразование:

$$a \to a\frac{8\pi}{3}\rho_0, \qquad (26)$$

тогда уравнение Эйнштейна примет компактный вид:

$$\epsilon a^2 + \dot{a}^2 = a. \qquad (27)$$

- Интегрируя его, получим решение в квадратурах:

- Интеграл в левой части (28) надо вычислять для каждого значения ϵ (вычислить самостоятельно). В результате получим:

Решение Фридмана и другие частные космологические решения

- Фридман получил решения для однородной космологической модели с положительной кривизной с учетом космологического члена в случае нерелятивистского уравнения состояния $P = 0,\ \varepsilon = \varrho c^2$, когда уравнение (24) легко интегрируется и дает закон сохранения массы:
$$3\ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \mathrm{Const} \Rightarrow \varepsilon a^3 = \mathrm{Const} \Leftrightarrow \varrho a^3 = \mathrm{Const} = \rho_0. \qquad (24)$$
- Мы здесь рассмотрим случаи произвольного индекса кривизны ϵ, но при $\Lambda = 0$ (случай $\Lambda \neq 0$ рассмотреть самостоятельно). Подстановка решения (24) в уравнение (25) приводит его к виду (мы положили $a(\eta_0) = 1$, $\rho(\eta_0) = \rho_0$):
$$3(\epsilon a^2 + \dot{a}^2) = 8\pi\rho_0 a. \qquad (25)$$
Совершим масштабное преобразование:
$$a \to a\frac{8\pi}{3}\rho_0, \qquad (26)$$
тогда уравнение Эйнштейна примет компактный вид:
$$\epsilon a^2 + \dot{a}^2 = a. \qquad (27)$$
- Интегрируя его, получим решение в квадратурах:
$$\int \frac{da}{\sqrt{a - \epsilon a^2}} = \eta + \mathrm{Const}. \qquad (28)$$
- Интеграл в левой части (28) надо вычислять для каждого значения ϵ (вычислить самостоятельно). В результате получим:

Решение Фридмана и другие частные космологические решения

- Фридман получил решения для однородной космологической модели с положительной кривизной с учетом космологического члена в случае нерелятивистского уравнения состояния $P=0,\ \varepsilon=\varrho c^2$, когда уравнение (24) легко интегрируется и дает закон сохранения массы:

$$3\ln a = -\int\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \mathrm{Const} \Rightarrow \varepsilon a^3 = \mathrm{Const} \Leftrightarrow \varrho a^3 = \mathrm{Const} = \rho_0. \qquad (24)$$

- Мы здесь рассмотрим случаи произвольного индекса кривизны ϵ, но при $\Lambda=0$ (случай $\Lambda\neq 0$ рассмотреть самостоятельно). Подстановка решения (24) в уравнение (25) приводит его к виду (мы положили $a(\eta_0)=1$, $\rho(\eta_0)=\rho_0$):

$$3(\epsilon a^2+\dot a^2) = 8\pi\rho_0 a. \qquad (25)$$

Совершим масштабное преобразование:

$$a\to a\frac{8\pi}{3}\rho_0, \qquad (26)$$

тогда уравнение Эйнштейна примет компактный вид:

$$\epsilon a^2+\dot a^2 = a. \qquad (27)$$

- Интегрируя его, получим решение в квадратурах:

$$\int\frac{da}{\sqrt{a-\epsilon a^2}} = \eta + \mathrm{Const}. \qquad (28)$$

- Интеграл в левой части (28) надо вычислять для каждого значения ϵ (вычислить самостоятельно). В результате получим:

- Фридман получил решения для однородной космологической модели с положительной кривизной с учетом космологического члена в случае нерелятивистского уравнения состояния $P = 0,\ \varepsilon = \varrho c^2$, когда уравнение (24) легко интегрируется и дает закон сохранения массы:

$$3\ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \mathrm{Const} \Rightarrow \varepsilon a^3 = \mathrm{Const} \Leftrightarrow \varrho a^3 = \mathrm{Const} = \rho_0. \tag{24}$$

- Мы здесь рассмотрим случаи произвольного индекса кривизны ϵ, но при $\Lambda = 0$ (случай $\Lambda \neq 0$ рассмотреть самостоятельно). Подстановка решения (24) в уравнение (25) приводит его к виду (мы положили $a(\eta_0) = 1$, $\rho(\eta_0) = \rho_0$):

$$3(\epsilon a^2 + \dot{a}^2) = 8\pi\rho_0 a. \tag{25}$$

Совершим масштабное преобразование:

$$a \to a\frac{8\pi}{3}\rho_0, \tag{26}$$

тогда уравнение Эйнштейна примет компактный вид:

$$\epsilon a^2 + \dot{a}^2 = a. \tag{27}$$

- Интегрируя его, получим решение в квадратурах:

$$\int \frac{da}{\sqrt{a - \epsilon a^2}} = \eta + \mathrm{Const}. \tag{28}$$

- Интеграл в левой части (28) надо вычислять для каждого значения ϵ (вычислить самостоятельно). В результате получим:

$$a(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos\eta), & \epsilon = +1; \\ \frac{1}{2}\eta^2, & \epsilon = 0; \\ \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\eta - 1), & \epsilon = -1; \end{cases} \tag{29}$$

Решение Фридмана и другие частные космологические решения

- Фридман получил решения для однородной космологической модели с положительной кривизной с учетом космологического члена в случае нерелятивистского уравнения состояния $P = 0,\ \varepsilon = \varrho c^2$, когда уравнение (24) легко интегрируется и дает закон сохранения массы:

$$3\ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \mathrm{Const} \Rightarrow \varepsilon a^3 = \mathrm{Const} \Leftrightarrow \varrho a^3 = \mathrm{Const} = \rho_0. \qquad (24)$$

- Мы здесь рассмотрим случаи произвольного индекса кривизны ϵ, но при $\Lambda = 0$ (случай $\Lambda \neq 0$ рассмотреть самостоятельно). Подстановка решения (24) в уравнение (25) приводит его к виду (мы положили $a(\eta_0) = 1$, $\rho(\eta_0) = \rho_0$):

$$3(\epsilon a^2 + \dot{a}^2) = 8\pi\rho_0 a. \qquad (25)$$

Совершим масштабное преобразование:

$$a \to a\frac{8\pi}{3}\rho_0, \qquad (26)$$

тогда уравнение Эйнштейна примет компактный вид:

$$\epsilon a^2 + \dot{a}^2 = a. \qquad (27)$$

- Интегрируя его, получим решение в квадратурах:

$$\int \frac{da}{\sqrt{a - \epsilon a^2}} = \eta + \mathrm{Const}. \qquad (28)$$

- Интеграл в левой части (28) надо вычислять для каждого значения ϵ (вычислить самостоятельно). В результате получим:

$$a(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos\eta), & \epsilon = +1; \\ \frac{1}{2}\eta^2, & \epsilon = 0; \\ \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\eta - 1), & \epsilon = -1; \end{cases} \qquad (29)$$

- Фридман получил решения для однородной космологической модели с положительной кривизной с учетом космологического члена в случае нерелятивистского уравнения состояния $P = 0$, $\varepsilon = \varrho c^2$, когда уравнение (24) легко интегрируется и дает закон сохранения массы:

$$3\ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \mathrm{Const} \Rightarrow \varepsilon a^3 = \mathrm{Const} \Leftrightarrow \varrho a^3 = \mathrm{Const} = \rho_0. \qquad (24)$$

- Мы здесь рассмотрим случаи произвольного индекса кривизны ϵ, но при $\Lambda = 0$ (случай $\Lambda \neq 0$ рассмотреть самостоятельно). Подстановка решения (24) в уравнение (25) приводит его к виду (мы положили $a(\eta_0) = 1$, $\rho(\eta_0) = \rho_0$):

$$3(\epsilon a^2 + \dot{a}^2) = 8\pi\rho_0 a. \qquad (25)$$

Совершим масштабное преобразование:

$$a \to a\frac{8\pi}{3}\rho_0, \qquad (26)$$

тогда уравнение Эйнштейна примет компактный вид:

$$\epsilon a^2 + \dot{a}^2 = a. \qquad (27)$$

- Интегрируя его, получим решение в квадратурах:

$$\int \frac{da}{\sqrt{a - \epsilon a^2}} = \eta + \mathrm{Const}. \qquad (28)$$

- Интеграл в левой части (28) надо вычислять для каждого значения ϵ (вычислить самостоятельно). В результате получим:

$$\boxed{a(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\cos\eta), & \epsilon = +1; \\ \frac{1}{2}\eta^2, & \epsilon = 0; \\ \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\eta - 1), & \epsilon = -1; \end{cases} \qquad (29)}$$

- При получении формул (29) мы учли произвольность выбора временной переменной, т.е., инвариантность метрики Фридмана относительно сдвига $\eta \to \eta + \mathrm{Const}$, подобрав постоянную таким образом, чтобы сингулярности метрики $a = 0$ соответствовало нулевое значение временной переменной $\eta = 0$.
- Переходя к физическому времени t по формуле (7), получим «связь времен»:

$$t = \begin{cases} \frac{1}{2}(\eta - \sin\eta), & k = +1; \\ \frac{1}{6}\eta^3, & k = 0; \\ \frac{1}{2}(\sinh\eta - \eta), & k = -1; \end{cases} \qquad (30)$$

- Таким образом, при $\eta \to 0$ $t \to \eta^3/6$, и с учетом (24) найдем:

$$a(t) \simeq \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} t^{2/3} \Rightarrow \rho = \frac{16}{9t^2}. \qquad (31)$$

— в планковских единицах.

- Самостоятельно разобрать решение с космологическим членом.

- При получении формул (29) мы учли произвольность выбора временной переменной, т.е., инвариантность метрики Фридмана относительно сдвига $\eta \to \eta + \mathrm{Const}$, подобрав постоянную таким образом, чтобы сингулярности метрики $a = 0$ соответствовало нулевое значение временной переменной $\eta = 0$.
- Переходя к физическому времени t по формуле (7), получим «связь времен»:

$$t = \begin{cases} \frac{1}{2}(\eta - \sin\eta), & \epsilon = +1; \\ \frac{1}{6}\eta^3, & \epsilon = 0; \\ \frac{1}{2}(\mathrm{sh}\eta - \eta), & \epsilon = -1; \end{cases} \qquad (30)$$

- Таким образом, при $\eta \to 0$ $t \to \eta^3/6$, и с учетом (24) найдем:

$$a(t) \simeq \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} t^{2/3} \Rightarrow \rho = \frac{16}{9t^2} \qquad (31)$$

— в планковских единицах.
- Самостоятельно разобрать решение с космологическим членом.

- При получении формул (29) мы учли произвольность выбора временной переменной, т.е., инвариантность метрики Фридмана относительно сдвига $\eta \to \eta + \mathrm{Const}$, подобрав постоянную таким образом, чтобы сингулярности метрики $a = 0$ соответствовало нулевое значение временной переменной $\eta = 0$.
- Переходя к физическому времени t по формуле (7), получим «связь времен»:

$$t = \begin{cases} \frac{1}{2}(\eta - \sin\eta), & \epsilon = +1; \\ \frac{1}{6}\eta^3, & \epsilon = 0; \\ \frac{1}{2}(\mathrm{sh}\eta - \eta), & \epsilon = -1; \end{cases} \qquad (30)$$

- Таким образом, при $\eta \to 0$ $t \to \eta^3/6$, и с учетом (24) найдем:

$$a(t) \simeq \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} t^{2/3} \Rightarrow \rho = \frac{16}{9t^2}. \qquad (31)$$

— в планковских единицах.
- Самостоятельно разобрать решение с космологическим членом.

- При получении формул (29) мы учли произвольность выбора временной переменной, т.е., инвариантность метрики Фридмана относительно сдвига $\eta \to \eta + \mathrm{Const}$, подобрав постоянную таким образом, чтобы сингулярности метрики $a = 0$ соответствовало нулевое значение временной переменной $\eta = 0$.
- Переходя к физическому времени t по формуле (7), получим «связь времен»:

$$t = \begin{cases} \frac{1}{2}(\eta - \sin\eta), & \epsilon = +1; \\ \frac{1}{6}\eta^3, & \epsilon = 0; \\ \frac{1}{2}(\mathrm{sh}\eta - \eta), & \epsilon = -1; \end{cases} \tag{30}$$

- Таким образом, при $\eta \to 0$ $t \to \eta^3/6$, и с учетом (24) найдем:

$$a(t) \simeq \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} t^{2/3} \Rightarrow \rho = \frac{16}{9t^2}. \tag{31}$$

— в планковских единицах.

- Самостоятельно разобрать решение с космологическим членом.

- При получении формул (29) мы учли произвольность выбора временной переменной, т.е., инвариантность метрики Фридмана относительно сдвига $\eta \to \eta + \mathrm{Const}$, подобрав постоянную таким образом, чтобы сингулярности метрики $a = 0$ соответствовало нулевое значение временной переменной $\eta = 0$.
- Переходя к физическому времени t по формуле (7), получим «связь времен»:

$$t = \begin{cases} \frac{1}{2}(\eta - \sin\eta), & \epsilon = +1; \\ \frac{1}{6}\eta^3, & \epsilon = 0; \\ \frac{1}{2}(\mathrm{sh}\eta - \eta), & \epsilon = -1; \end{cases} \qquad (30)$$

- Таким образом, при $\eta \to 0$ $t \to \eta^3/6$, и с учетом (24) найдем:

$$a(t) \simeq \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} t^{2/3} \Rightarrow \rho = \frac{16}{9t^2}. \qquad (31)$$

— в планковских единицах.

- Самостоятельно разобрать решение с космологическим членом.

- При получении формул (29) мы учли произвольность выбора временной переменной, т.е., инвариантность метрики Фридмана относительно сдвига $\eta \to \eta + \mathrm{Const}$, подобрав постоянную таким образом, чтобы сингулярности метрики $a = 0$ соответствовало нулевое значение временной переменной $\eta = 0$.
- Переходя к физическому времени t по формуле (7), получим «связь времен»:

$$t = \begin{cases} \frac{1}{2}(\eta - \sin\eta), & \epsilon = +1; \\ \frac{1}{6}\eta^3, & \epsilon = 0; \\ \frac{1}{2}(\mathrm{sh}\eta - \eta), & \epsilon = -1; \end{cases} \tag{30}$$

- Таким образом, при $\eta \to 0$ $t \to \eta^3/6$, и с учетом (24) найдем:

$$a(t) \simeq \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} t^{2/3} \Rightarrow \rho = \frac{16}{9t^2}. \tag{31}$$

— в планковских единицах.

- Самостоятельно разобрать решение с космологическим членом.

- При получении формул (29) мы учли произвольность выбора временной переменной, т.е., инвариантность метрики Фридмана относительно сдвига $\eta \to \eta + \mathrm{Const}$, подобрав постоянную таким образом, чтобы сингулярности метрики $a = 0$ соответствовало нулевое значение временной переменной $\eta = 0$.
- Переходя к физическому времени t по формуле (7), получим «связь времен»:

$$t = \begin{cases} \frac{1}{2}(\eta - \sin\eta), & \epsilon = +1; \\ \frac{1}{6}\eta^3, & \epsilon = 0; \\ \frac{1}{2}(\mathrm{sh}\eta - \eta), & \epsilon = -1; \end{cases} \tag{30}$$

- Таким образом, при $\eta \to 0$ $t \to \eta^3/6$, и с учетом (24) найдем:

$$a(t) \simeq \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} t^{2/3} \Rightarrow \rho = \frac{16}{9t^2}. \tag{31}$$

— в планковских единицах.

- Самостоятельно разобрать решение с космологическим членом.