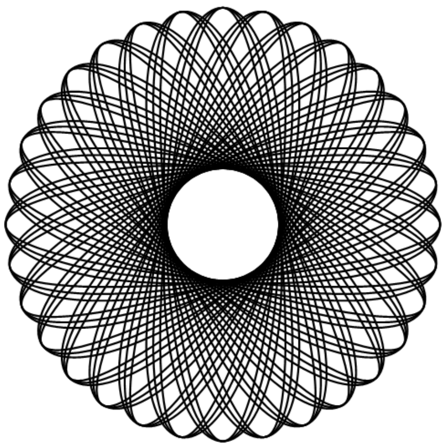
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ (ПОВОЛЖСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ
РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ОЛИМПИАДНЫЙ ЦЕНТР РТ

Математические олимпиады школьников Татарстана

2015-2016 и 2016-2017



Казань – 2017

УДК 373.167.1:51
ББК 74.200.58:22.1

Печатается по решению учебно-методической комиссии
Института математики и механики КФУ
им. Н.И. Лобачевского

Киндер М.И.

Математические олимпиады школьников Татарстана. 2015-2016 и 2016-2017: Учебно-методическое пособие / Автор–составитель М.И. Киндер. — Казань: Казанский федеральный университет, 2017. — 102 с.

Брошюра предназначена для школьников, учителей, преподавателей математических кружков и просто любителей математики. В ней представлены задачи, предлагавшиеся в 2015-2016 и 2016-2017 учебных годах на муниципальном и региональном этапах математических олимпиад школьников Татарстана, а также задачи открытой олимпиады имени В. Р. Фридлендера и задачи Турнира юных математиков им. Н. И. Лобачевского для учеников 5-7 классов. Все задачи приведены с подробными решениями, условия и решения геометрических задач сопровождаются рисунками.

2015-2016 учебный год

Муниципальный этап 42-й Всероссийской олимпиады по математике среди школьников Республики Татарстан состоялся 23 ноября 2015 г. В составлении задач муниципальной олимпиады принимали участие преподаватели Казанского университета:

И. С. Григорьева, М. И. Киндер,
В. А. Сочнева, М. В. Фалилеева.

Региональный этап этой олимпиады прошёл в феврале 2016 г.

В апреле этого же года состоялась 6-я открытая математическая олимпиада памяти В. Р. Фридлендера. По традиции на неё приглашаются, в основном, ученики 7-11 классов города Казани. Отличительная особенность этой олимпиады в том, что предлагавшиеся задачи были общими для всех участников. Именно так проходили первые появившиеся ещё в тридцатые годы прошлого века математические соревнования школьников г. Казани. В составлении задач этой олимпиады принимали участие:

И. С. Григорьева, М. И. Киндер,
В. А. Сочнева, М. Д. Бронштейн.

24-го апреля 2016 г. Институт математики и механики КФУ совместно с лицеем имени Н. И. Лобачевского КФУ и IT-лицеем КФУ организовал Турнир юных математиков им. Н. И. Лобачевского для учеников 5-7 классов. В олимпиаде приняли участие более 1200 школьников Республики Татарстан. Составитель задач Турнира юных математиков — *М. И. Киндер.*

Ниже представлены условия и подробные решения задач всех перечисленных олимпиад. В скобках после условия задачи указана фамилия её автора.

Муниципальный этап

8 класс

1. На доске написаны два числа. Одно из них увеличили в 6 раз, а другое уменьшили на 2015, при этом сумма чисел не изменилась. Найдите хотя бы одну пару таких чисел.

2. Известно,что $a^2 + b^2 = 3ab$ и $a \neq b$. Вычислите значение выражения

$$\frac{a+b}{a-b}.$$

3. Окружность катится снаружи по квадрату, длина стороны которого равна длине окружности. Сколько полных оборотов сделает эта окружность вокруг своего центра к моменту возвращения в исходное положение?

4. Дано число 2015. Разрешается за один ход либо вычесть из числа сумму его цифр, либо переставить его цифры в любом порядке. Например, из числа 13 можно за один ход получить либо число 9, либо число 31. Какое наименьшее положительное число можно получить, действуя таким образом? (*М. Киндер*)

5. Из бумаги вырезан правильный шестиугольник, то есть выпуклый шестиугольник, у которого все стороны равны и все углы равны. Можно ли, складывая его по прямым линиям, получить правильный шестиугольник, у которого площадь в три раза меньше площади исходного шестиугольника? (*М. Фалилеева*)

9 класс

6. Найдите наименьшее натуральное число, для которого 20% и 75% от него являются целыми числами.

7. Сумма 65 чисел равна 2015. Когда самое большое из них увеличили в три раза, а другое уменьшили на 62, сумма всех чисел не изменилась. Найдите наименьшее среди этих чисел.

8. Квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами удовлетворяет неравенству $f(x) \geq 0,2$ при всех x. Докажите, что $f(x) \geq 0,75$ при любом x.

(*По мотивам задачи С. Берлова*)

9. Выпуклый многоугольник, у которого n^2 сторон ($n > 2$), разрезали на n пятиугольников. Докажите, что $n = 3$.

10. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 его углов пересекают окружность в точках A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Докажите, что сумма длин биссектрис больше периметра четырёхугольника $ABCD$.

(*С. Утяганов*)

10 класс

11. Отрезок длины 1 разделили на 2015 отрезков (не обязательно равных). На каждом из них, как на диаметре, построили полуокружность. Эту же операцию повторили, разделив исходный отрезок на 2016 частей. Найдите отношение суммы длин полуокружностей в первом случае к сумме длин полуокружностей во втором.

12. Найдите все функции f, удовлетворяющие при всех x уравнению

$$4 \cdot f(x) + f(2015 - x) = x.$$

13. Найдите все действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2015}$ такие, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2015} = 2015$ и

$$|a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = \ldots = |a_{2015} - a_1|.$$

14. Рассмотрим $2n + 1$ действительных чисел в промежутке $(1;\, 2^n)$. Докажите, что из них можно выбрать три числа, которые будут длинами сторон некоторого треугольника.

15. Внутри угла 60° с вершиной A проведён луч AB. В каждый из образовавшихся острых углов вписана окружность, причём обе они касаются луча AB в точке B. Найдите длину отрезка AB, если радиусы окружностей равны 1 и 3.

11 класс

16. Отрезок длины 1 разделили на 2015 отрезков (не обязательно равных). На каждом из них, как на диаметре, построили полуокружность. Эту же операцию повторили, разделив исходный отрезок на 2016 частей. Найдите отношение суммы длин полуокружностей в первом случае к сумме длин полуокружностей во втором.

17. Найдите наименьшее (не обязательно целое) положительное число, для которого 35% и 77% от него являются целыми числами. (*С. Утяганов*)

18. Функция f непрерывна на всей числовой оси. Известно, что уравнение $f(x + f(y + f(z))) = x + y + z$ имеет хотя бы одно решение. Докажите что уравнение $f(x) = x$ также имеет решение. (*М. Киндер*)

19. Сумма положительных чисел a, b и c равна 1. Докажите неравенство:

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \leq 3(ab + bc + ca).$$

(*М. Киндер*)

20. У выпуклого многоугольника 500 сторон, его периметр равен 700. Докажите, что какие-то три его вершины образуют треугольник, площадь которого меньше 1. (*М. Киндер*)

Олимпиада имени Л. Эйлера

8 класс

21. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 записали по кругу в некотором порядке. Назовём записанное число *хорошим*, если оно равно сумме двух чисел, записанных рядом с ним. Каково наибольшее возможное количество хороших чисел среди записанных? (*Е. Бакаев*)

22. В каждой клетке таблицы 100×100 записано одно из чисел 1 или -1. Могло ли оказаться, что ровно в 99 строках суммы чисел отрицательны, а ровно в 99 столбцах — положительны? (*Д. Ненашев*)

23. В трапеции $ABCD$ точка M — середина основания AD. Известно, что $\angle ABD = 90^\circ$ и $BC = CD$. На отрезке BD выбрана точка F такая, что $\angle BCF = 90^\circ$. Докажите, что $MF \perp CD$. (*Н. Чернега*)

24. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016? (*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

25. Три спортсмена пробежали дистанцию в 3 километра. Первый километр они бежали с постоянными скоростями v_1, v_2 и v_3 соответственно, такими, что $v_1 > v_2 > v_3$. После отметки в 1 километр каждый из них изменил скорость: первый — с v_1 на v_2, второй — с v_2 на v_3, а третий — с v_3 на v_1. Кто из спортсменов пришел к финишу последним? (*Н. Чернега*)

26. Найдите все натуральные числа, которые можно представить в виде $\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}$, где x, y и z — три различных натуральных числа. (*Д. Храмцов*)

27. В ряд выложено 100 монет. Внешне все монеты одинаковы, но где-то среди них лежат подряд 50 фальшивых (а остальные — настоящие). Все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые могут весить по-разному, но каждая фальшивая легче настоящей. Можно ли с помощью одного взвешивания на чашечных весах без гирь найти хотя бы 34 настоящие монеты?

(*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

28. Точки M и N — середины биссектрис AK и CL треугольника ABC соответственно. Докажите, что угол ABC прямой тогда и только тогда, когда $\angle MBN = 45^\circ$.

(*А. Кузнецов, методкомиссия*)

Региональный этап

9 класс

29. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

(*Н. Агаханов*)

30. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. В окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведен диаметр CC'. Прямая, проходящая через точку C' параллельно BC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что M — середина отрезка $C'P$. (*Б. Обухов*)

31. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки? (*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

32. У царя Гиерона есть 11 металлических слитков, неразличимых на вид; царь знает, что их веса (в некотором порядке) равны $1, 2, \ldots, 11$ кг. Ещё у него есть мешок, который порвётся, если в него положить больше 11 кг. Архимед узнал веса всех слитков и хочет доказать Гиерону, что первый слиток имеет вес 1 кг. За один шаг он может загрузить несколько слитков в мешок и продемонстрировать Гиерону, что мешок не порвался (рвать мешок нельзя!). За какое наименьшее число загрузок мешка Архимед может добиться требуемого? (*И. Богданов, К. Кноп*)

33. В классе учится 23 человека. В течение года каждый ученик этого класса один раз праздновал день рождения, на который пришли некоторые (хотя бы один, но не все) его одноклассники. Могло ли оказаться, что каждые два ученика этого класса встретились на таких празднованиях одинаковое число раз? (Считaется, что на каждом празднике встретились любые два гостя, а также именинник встретился со всеми гостями.) (*И. Богданов*)

34. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из натуральных чисел, *полным*, если для любых натуральных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a+b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества натуральных чисел.

(*Н. Агаханов*)

35. В белой таблице 2016×2016 некоторые клетки окрасили чёрным. Назовём натуральное число k *удачным*, если $k \leq 2016$, и в каждом из клетчатых квадратов со стороной k, расположенных в таблице, окрашено ровно k клеток. (Например, если все клетки чёрные, то удачным является только число 1.) Какое наибольшее количество чисел могут быть удачными? (*Е. Бакаев*)

36. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle DAB = 90°$. Пусть M — середина стороны BC. Оказалось, что $\angle ADC = \angle BAM$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$. (*Е. Бакаев*)

10 класс

37. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

(*Н. Агаханов*)

38. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016? (*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

39. На стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K и L (точка K лежит между A и L), а на стороне CD взяты точки M и N (точка M между C и N). Известно, что $AK = KN = DN$ и $BL = BC = CM$. Докажите, что если $BCNK$ — вписанный четырехугольник, то и $ADML$ тоже вписан.

(*Т. Зиманов, П. Кожевников*)

40. Дана клетчатая таблица 100×100, клетки которой покрашены в чёрный и белый цвета. При этом во всех столбцах поровну чёрных клеток, в то время как во всех строках разные количества чёрных клеток. Каково максимальное возможное количество пар соседних по стороне разноцветных клеток? (*И. Богданов*)

41. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из натуральных чисел, *полным*, если для любых натуральных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a+b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества действительных чисел.

(*Н. Агаханов*)

42. Внутри равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD расположена окружность ω с центром I, касающаяся отрезков AB, CD и DA. Окружность, описанная около треугольника BIC, вторично пересекает сторону AB в точке E. Докажите, что прямая CE касается окружности ω. (*Б. Обухов*)

43. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовем пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.

(*Н. Власова*)

44. Найдите все пары различных действительных чисел x и y такие, что $x^{100} - y^{100} = 2^{99}(x-y)$ и $x^{200} - y^{200} = 2^{199}(x-y)$.

(*И. Богданов*)

11 класс

45. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, не имеющий корней, таков, что коэффициент b рационален, а среди чисел c и $f(c)$ ровно одно иррационально. Может ли дискриминант трехчлена $f(x)$ быть рациональным? (*Г. Жуков*)

46. Положительные числа x, y и z удовлетворяют условию $xyz \geq xy + yz + zx$. Докажите неравенство

$$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

(*А. Храбров*)

47. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. На отрезке CL выбрана точка M. Касательная в точке B к окружности Ω, описанной около треугольника ABC, пересекает луч CA в точке P. Касательные в точках B и M к окружности Γ, описанной около треугольника BLM, пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые PQ и BL параллельны. (*А. Кузнецов*)

48. Есть клетчатая доска 2015×2015. Дима ставит в k клеток по детектору. Затем Коля располагает на доске клетчатый корабль в форме квадрата 1500×1500. Детектор в клетке сообщает Диме, накрыта эта клетка кораблём или нет. При каком наименьшем k Дима может расположить детекторы так, чтобы гарантированно восстановить расположение корабля?

(*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

49. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из натуральных чисел, *полным*, если для любых натуральных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a + b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества действительных чисел.

(*Н. Агаханов*)

50. В пространстве расположены 2016 сфер, никакие две из них не совпадают. Некоторые из сфер — красного цвета, а остальные — зеленого. Каждую точку касания красной и зеленой сферы покрасили в синий цвет. Найдите наибольшее возможное количество синих точек. (*А. Кузнецов*)

51. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовем пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.

(*Н. Власова*)

52. Натуральное число N представляется в виде $N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2$, где a_1 и a_2 — квадраты, b_1 и b_2 — кубы, c_1 и c_2 — пятые степени, а d_1 и d_2 — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел a_1, b_1, c_1 и d_1 найдутся два равных? (*А. Голованов*)

Олимпиада имени В. Р. Фридлендера

53. Число 2016 делится на 9, 8, 7, 6, 4, 3, 2 и 1 без остатка. Не будет ли случайно следующий год, обладающий точно такими же свойствами, делиться и на 5 тоже?

54. Дима задумал три числа a, b и c и обнаружил, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два различных ненулевых корня: 1 и k. Саша изменил значение одного из коэффициентов a, b или c. В результате получился трёхчлен, у которого тоже два различных корня: 2 и $3k$. Чему может быть равно k?

55. Два путешественника на рассвете вышли навстречу друг другу из пунктов A и B, встретились в полдень и продолжили каждый свой путь (каждый с постоянной скоростью). Первый путешественник пришел в B в 9 часов, а второй в A — в 4 часа вечером того же дня. Во сколько в этот день был рассвет?

56. На плоскости заданы различные точки M_1, M_2, M_3, M_4. Требуется построить окружность так, чтобы её центр совпал с одной из точек, а остальные три точки лежали на окружности. Сколько таких окружностей может быть?

57. Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя *а*) ровно в шесть раз; *б*) ровно в пять раз?

58. В треугольник вписана окружность радиуса r. Касательные к этой окружности, параллельные сторонам треугольника, отсекают от него три маленьких треугольника. Пусть r_1, r_2, r_3 — радиусы вписанных в эти треугольники окружностей.

а) Докажите, что $r = r_1 + r_2 + r_3$.

б) Пусть $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 10$. Является ли исходный треугольник остроугольным, прямоугольным или тупоугольным?

59. Финансист М.А.Вроде основал финансовую пирамиду. Каждый, кто принесёт ему 1000 рублей, через 30 дней вечером в конце дня заберёт 1300 рублей. Считая, что М.А.Вроде держит все деньги в жестяной банке, найдите день, когда денег на выплаты не хватит, в предположении, что ежедневно приходит на M человек больше, чем вчера. (В первый день, 1 января 2016 года, не пришёл никто.)

60. Что больше: $\log_9 10$ или $\log_{10} 11$?

61. Пусть A, B, C и D — четыре (различные) точки в пространстве, для которых $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$. Докажите, что прямые AC и BD перпендикулярны.

62. Маша и Даша нашли бусы из 30 бусинок, из них 12 красных и 18 белых. Они хотят разрезать бусы на несколько частей так, чтобы каждой девочке досталось 6 красных и 9 белых бусинок. Какого наименьшего числа разрезов хватит для разрезания произвольных бус?

Турнир юных математиков им. Н. И. Лобачевского

5 класс

63. Разрежьте таблицу на рисунке 1 по линиям клеток на пять прямоугольников так, чтобы суммы чисел в каждом из них были равны? Укажите все способы и объясните, почему нет других.

2	1	2	1
1	1	3	1
1	1	7	4
1	1	5	3

Рис. 1

64. У Змея Горыныча x голов. Каждым ударом меча Иван-Царевич отрубает одну голову Змею Горынычу. После каждых четырех отрубленных голов у Змея Горыныча появляется одна новая. После 555 ударов змей остался без голов. Найдите x.

65. У Знайки есть 5 внешне одинаковых гирек весом 10 г, 30 г, 50 г, 70 г и 90 г. Он помнит, какая из гирек сколько весит, однако Незнайка ему не верит. Сможет ли Знайка провести одно взвешивание на чашечных весах, в результате которого будет однозначно установлен вес хотя бы одной из гирь?

66. Миша и Маша живут в доме с одним подъездом. На каждом этаже дома 9 квартир. Номер этажа Миши равен номеру квартиры Маши, а сумма номеров их квартир равна 444. Каков номер квартиры Миши? Ответ обоснуйте.

67. Букет считается *красивым*, если он состоит из трёх разных цветков. Какое наибольшее количество красивых букетов можно составить, имея 15 гвоздик, 25 ландышей, 35 роз и 45 тюльпанов? Ответ обоснуйте.

6 класс

68. Десятизначное число назовём *интересным*, если каждая из 10 цифр от 0 до 9 входит в него ровно один раз и сумма любых двух рядом стоящих цифр — простое число. Найдите наибольшее интересное число.

69. У Знайки есть 5 внешне одинаковых гирек весом 10 г, 30 г, 50 г, 70 г и 90 г. Он помнит, какая из гирек сколько весит, однако Незнайка ему не верит. Сможет ли Знайка провести одно взвешивание на чашечных весах, в результате которого будет однозначно установлен вес хотя бы одной из гирь?

70. У четырёхзначного числа вычеркнули крайнюю справа цифру, при этом полученное число оказалось делителем исходного. Сколько таких четырёхзначных чисел? Ответ обоснуйте.

71. На доске 10×10 расположен корабль в виде трёхклеточного уголка. Какое наименьшее число выстрелов требуется, чтобы наверняка его ранить?

72. Букет считается *красивым*, если он состоит из трёх разных цветков. Какое наибольшее количество красивых букетов можно составить, имея 15 гвоздик, 25 ландышей, 35 роз и 45 тюльпанов? Ответ обоснуйте.

7 класс

73. Девятизначное число назовём *интересным*, если каждая из 9 цифр от 0 до 8 входит в него ровно один раз и сумма любых двух рядом стоящих цифр — простое число. Найдите наименьшее интересное число.

74. В ряд выписали все натуральные числа от 1 до 12 в некотором порядке. Какое наименьшее значение может принимать максимальная сумма двух соседних чисел? Ответ обоснуйте.

75. В футбольном турнире участвовали 12 команд. Соревнования проходили в один круг, то есть каждая команда сыграла с каждой по одному разу, и в каждом туре играли все команды. Могло ли так случиться, что после 6 туров ровно у 6 команд было ровно по 6 побед? Если могло, приведите пример такого турнира.

76. Отрезки AB и CD пересекаются в точке N. Известно, что треугольник AND — равносторонний, а треугольник BCD — равнобедренный ($BC = BD$). Докажите, что $AB = CN$.

77. У золотой рыбки есть записная книжка, в которой перечислены все её знакомые — караси, окуни, ерши и морские коньки. Оказалось, что половина знакомых — караси, треть — окуни, одна восьмая — ерши, а каждый шестнадцатый в записной книжке — морской конёк. Сколько знакомых у золотой рыбки?

2016-2017 учебный год

Муниципальный этап 43-й Всероссийской олимпиады по математике среди школьников Республики Татарстан состоялся 15 ноября 2016 г. В составлении задач муниципальной олимпиады принимали участие преподаватели Казанского университета:

И. С. Григорьева, М. И. Киндер,
В. А. Сочнева, М. В. Фалилеева.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике прошёл в конце января 2017 г.

8 апреля этого же года состоялась 7-я ежегодная городская математическая олимпиада, посвящённая памяти В. Р. Фридлендера. По традиции на неё были приглашены ученики 8-11 классов города Казани. Отличительная особенность этой олимпиады в том, что предлагавшиеся задачи были общими для всех участников. Победители олимпиады получили приглашение в летнюю школу «Квант». В составлении задач олимпиады принимали участие:

И. С. Григорьева, М. И. Киндер,
В. А. Сочнева, М. Д. Бронштейн.

9-го апреля 2017 года Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Международный научно-образовательный математический центр КФУ совместно с лицеем имени Н. И. Лобачевского КФУ и IT-лицеем КФУ провели Турнир юных математиков имени Н. И. Лобачевского для учеников 5-7 классов. В олимпиаде приняли участие более 1500 школьников Республики Татарстан. Составители задач Турнира юных математиков:

М. И. Киндер, М. В. Фалилеева.

Ниже представлены условия и подробные решения задач всех перечисленных олимпиад. В скобках после условия задачи указана фамилия её автора.

Муниципальный этап

8 класс

78. Три пакета молока стоят на 4% дешевле, чем баночка кофе. На сколько процентов две таких же баночки кофе дороже (или дешевле) 5 пакетов молока?

79. Натуральное число n называется *полусовершенным*, если сумма всех или некоторых делителей, меньших n, совпадает с этим числом. Например, число 12 — полусовершенное, так как его можно представить в виде суммы некоторых (не всех) его делителей: $12 = 1+2+3+6$. Будет ли число 2016 полусовершенным? (*Киндер М.*)

80. Можно ли записать в клетках таблицы 20×16 числа 5 и 9 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце сумма чисел делилась на 21?

81. У Маши есть бумажный прямоугольный треугольник ABC. Она сложила его по прямой линии так, что вершины острых углов A и B совпали, при этом линия сгиба пересекла сторону в точке K, а сторону — в точке M. Даша развернула треугольник и сложила его заново так, что вершина прямого угла C совпала с точкой K. При этом оказалось, что полученная линия сгиба пересекла сторону AC в точке M. Докажите, что линия сгиба у Даши проходила через вершину B. (*М. Фалилеева*)

82. На прямой отмечены несколько точек. Для любых двух из них найдется третья (тоже отмеченная) такая, что одна из этих трех точек является серединой отрезка между двумя другими.

а) Можно ли так отметить на прямой 5 точек?

б) Покажите, что отмеченных точек не может быть ровно 4. Решение обоснуйте.

9 класс

83. Маша выбрала натуральное число. Айрат сложил один из его делителей с числом 5, полученное число увеличил в 6 раз и результат вычел из числа, предложенного Машей. Получилось число 7. Какое число выбрала Маша?

84. Пусть a — корень уравнения $x^3 - x - 1 = 0$. Найдите уравнение третьей степени с целыми коэффициентами, корнем которого является число a^3.

85. На доске записаны числа $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a, b и написать вместо них одно число $\frac{ab}{a+b}$. Так поступают до тех пор, пока на доске не останется одно число. Какие значения может принимать это число?

86. Точка M внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ такова, что площади треугольников ABM, BCM, CDM и DAM равны. Верно ли, что $ABCD$ — параллелограмм, а точка M — точка пересечения его диагоналей? Решение обоснуйте.

87. В квадрате 8×8 расположены четыре точки. Докажите, что среди них можно выбрать две точки, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{65}$.

10 класс

88. Всегда ли из 2016 отрезков можно выбрать 3 отрезка, из которых можно сложить треугольник?

89. Число a — корень уравнения $x^{11}+x^7+x^3 = 1$. При каких натуральных значениях n выполняется равенство $a^4+a^3 = a^n+1$?

90. Известно, что в остроугольном треугольнике ABC медиана, проведенная из вершины A, равна 3, а высота, опущенная из вершины B, равна 4. Может ли сторона AC иметь длину 5?

91. На доске записаны числа $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a, b и написать вместо них одно число $ab + a + b$. Так поступают до тех пор, пока на доске не останется одно число. Какие значения может принимать это число?

92. Расположим на плоскости выпуклые многоугольники так, чтобы каждые два из них имели общую сторону.

а) Приведите пример четырёх таких многоугольников.

б) Покажите, что больше четырёх многоугольников так расположить не удастся.

11 класс

93. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + x + y^2 + y = 4 \\ 1/x + 1/y = -2. \end{cases}$$

94. Что больше: $(2016!)^{2015!}$ или $(2015!)^{2016!}$? (Через $n!$ обозначается произведение первых n натуральных чисел, то есть $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.)

95. Найдите все простые числа p и q, удовлетворяющие уравнению $2^{2p} - 2^p + 1 = q$.

96. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC, кроме того, $AD = BC$. Все плоские углы при вершине D равны между собой. Чему могут быть равны эти углы?

97. Пусть x, y, z — положительные числа, и $xyz = 1$. Докажите неравенство:

$$x + y + z \le \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

(*Киндер М.*)

Олимпиада имени Л. Эйлера

8 класс

98. 10 бегунов стартуют одновременно: пятеро в синих майках с одного конца беговой дорожки, пятеро в красных майках — с другого. Их скорости постоянны и различны, причём скорость каждого бегуна больше 9 *км/ч*, но меньше 12 *км/ч*. Добежав до конца дорожки, каждый бегун сразу бежит назад, а, вернувшись к месту своего старта, заканчивает бег. Тренер ставит в блокноте галочку каждый раз, когда встречаются (лицом к лицу или один догоняет другого) двое бегунов в разноцветных майках (больше двух бегунов в одной точке за время бега не встречались). Сколько галочек поставит тренер к моменту, когда закончит бег самый быстрый из бегунов? (*И. Рубанов*)

99. Приведите пример шести различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них не делится на сумму всех чисел, а произведение любых трех из них — делится.

(*С. Волчёнков*)

100. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. На биссектрисах треугольников ABC и APQ, исходящих из вершин B и Q, выбраны точки X и Y соответственно так, что $XY \parallel BC$. Докажите, что $PX = CY$.

(*А. Кузнецов, в редакции С. Берлова и И. Богданова*)

101. Между городами страны организованы двусторонние беспосадочные авиарейсы таким образом, что от каждого города до каждого другого можно добраться (возможно, с пересадками). Более того, для каждого города A существует город B такой, что любой из остальных городов соединён напрямую с A или с B. Докажите, что от любого города можно добраться до любого другого не более, чем с двумя пересадками. (*И. Богданов*)

102. На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды все они сели по кругу, и каждый сказал: «Среди двух моих соседей есть лжец!». Затем они сели по кругу в другом порядке, и каждый сказал: «Среди двух моих соседей нет рыцаря!». Могло ли на острове быть 2017 человек? (*Л. Самойлов*)

103. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектриса угла B проходит через середину стороны AD, а $\angle C = \angle A + \angle D$. Найдите угол ACD. (*С. Берлов*)

104. Имеется клетчатая доска размером $2n \times 2n$. Петя поставил на неё $(n+1)^2$ фишек. Кот может одним взмахом лапы смахнуть на пол любую одну фишку или две фишки, стоящие в соседних по стороне или углу клетках. За какое наименьшее количество взмахов кот заведомо сможет смахнуть на пол все поставленные Петей фишки? (*С. Берлов, Н. Власова*)

105. На доске написано 100 натуральных чисел, среди которых ровно 33 нечетных. Каждую минуту на доску дописывается сумма всех попарных произведений всех чисел, уже находящихся на ней (например, если на доске были записаны числа 1, 2, 3, 3, то следующим ходом было дописано число $1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3$). Можно ли утверждать, что рано или поздно на доске появится число, делящееся на $2^{10000000}$? (*И. Богданов*)

Региональный этап

9 класс

106. В произведении трёх натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно на 2016? (*Н. Агаханов, И. Богданов*)

107. Вася задумал 8 клеток шахматной доски, никакие две из которых не лежат в одной строке или в одном столбце. За ход Петя выставляет на доску 8 ладей, не бьющих друг друга, а затем Вася указывает все ладьи, стоящие на задуманных клетках. Если количество ладей, указанных Васей на этом ходе, чётно (т.е. 0, 2, 4, 6 или 8), то Петя выигрывает; иначе все фигуры снимаются с доски и Петя делает следующий ход. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть? (*И. Богданов*)

108. Существует ли треугольник со сторонами x, y и z такой, что $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y)(y + z)(z + x)$? (*В. Сендеров*)

109. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ касается ω. Окружность Ω_b с центром P проходит через B, а окружность Ω_c с центром Q проходит через C. Докажите, что окружности Ω, Ω_b и Ω_c имеют общую точку. (*А. Акопян, П. Кожевников*)

110. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал сумму чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица сложения»). Какое наибольшее количество сумм в этой таблице могли оказаться рациональными числами? (*О. Подлипский*)

111. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH. Перпендикуляр, восстановленный в точке M к прямой AM, пересекает луч HB в точке K. Докажите, что если $\angle MAC = 30^\circ$, то $AK = BC$. (*Б. Обухов*)

112. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.

(*А. Грибалко*)

113. Изначально на стол положили 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом было ровно 43 карточки с нечётными числами. Затем каждую минуту проводилась следующая процедура. Для каждых трёх карточек, лежащих на столе, вычислялось произведение записанных на них чисел, все эти произведения складывались, и полученное число записывалось на новую карточку, которая добавлялась к лежащим на столе. Через год после начала процесса выяснилось, что на столе есть карточка с числом, делящимся на 2^{10000}. Докажите, что число, делящееся на 2^{10000}, было на одной из карточек уже через день после начала. (*И. Богданов*)

10 класс

114. В произведении пяти натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно в 15 раз? (*Н. Агаханов, И. Богданов*)

115. Окружность с центром в точке I вписана в четырёхугольник $ABCD$. Лучи BA и CD пересекаются в точке P, а лучи AD и BC пересекаются в точке Q. Известно, что точка P лежит на окружности ω, описанной около треугольника AIC. Докажите, что точка Q тоже лежит на окружности ω. (*А. Кузнецов*)

116. Паша выбрал 2017 (не обязательно различных) натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ и играет сам с собой в следующую игру. Изначально у него есть неограниченный запас камней и 2017 больших пустых коробок. За один ход Паша добавляет в любую коробку (по своему выбору) a_1 камней, в любую из оставшихся коробок (по своему выбору) — a_2 камней, ..., наконец, в оставшуюся коробку — a_{2017} камней. Пашина цель — добиться того, чтобы после некоторого хода во всех коробках стало поровну камней. Мог ли он выбрать числа так, чтобы цели можно было добиться за 43 хода, но нельзя — за меньшее ненулевое число ходов?

(*И. Богданов*)

117. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot \ldots \cdot P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным? (*Г. Жуков*)

118. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по ненулевому числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами? (*О. Подлипский*)

119. Изначально на доске записаны несколько (больше одного) натуральных чисел. Затем каждую минуту на доску дописывается число, равное сумме квадратов всех уже записанных на ней чисел (так, если бы на доске изначально были записаны числа 1, 2, 2, то на первой минуте было бы дописано число $1^2 + 2^2 + 2^2$). Докажите, что сотое дописанное число имеет хотя бы 100 различных простых делителей. (*И. Богданов, П. Кожевников*)

120. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.

(*А. Грибалко*)

121. Окружность ω описана около остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана точка D, а на стороне BC — точка E так, что $AC \parallel DE$. Точки P и Q на меньшей дуге AC окружности ω таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи QA и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XBY + \angle PBQ = 180°$. (*А. Кузнецов*)

11 класс

122. В произведении семи натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно в 13 раз? (*Н. Агаханов, И. Богданов*)

123. Вася задумал 8 клеток шахматной доски, никакие две из которых не лежат в одной строке или в одном столбце. За ход Петя выставляет на доску 8 ладей, не бьющих друг друга, а затем Вася указывает все ладьи, стоящие на задуманных клетках. Если количество ладей, указанных Васей на этом ходе, чётно (т.е. 0, 2, 4, 6 или 8), то Петя выигрывает; иначе все фигуры снимаются с доски и Петя делает следующий ход. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть? (*И. Богданов*)

124. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot \ldots \cdot P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным? (*Г. Жуков*)

125. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ проходит через центр треугольника ABC. Окружности Γ_b и Γ_c построены на отрезках BP и CQ как на диаметрах. Докажите, что окружности Γ_b и Γ_c пересекаются в двух точках, одна из которых лежит на Ω, а другая — на ω. (*А. Акопян*)

126. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами? (*О. Подлипский*)

127. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Γ с центром в точке O. Его диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P, причём точка O лежит внутри треугольника BPC. На отрезке BO выбрана точка H так, что $\angle BHP = 90°$. Окружность ω, описанная около треугольника PHD, вторично пересекает отрезок PC в точке Q. Докажите, что $AP = CQ$.

(*А. Кузнецов*)

128. На плоскости проведено несколько прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что в областях, на которые прямые поделили плоскость, можно расставить положительные числа так, чтобы суммы чисел по обе стороны относительно любой из проведённых прямых были равны. (*О. Орлов*)

129. Изначально на стол кладут 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом среди них ровно 28 карточек с нечётными числами. Затем каждую минуту проводится следующая процедура. Для каждых 12 карточек, лежащих на столе, вычисляется произведение записанных на них чисел, все эти произведения складываются, и полученное число записывается на новую карточку, которая добавляется к лежащим на столе. Можно ли выбрать исходные 100 чисел так, что для любого натурального d на столе рано или поздно появится карточка с числом, делящимся на 2^d? (*И. Богданов*)

Олимпиада имени В. Р. Фридлендера

130. Имеется квадрат $ABCD$. Точка N — середина стороны CD. Внутри квадрата выбрана точка M так, что $AM = AB$ и $NM = ND$. Найдите величину угла BMC.

131. Какие значения может принимать свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что он по модулю меньше ста, и $P(20) = P(17) = 2017$?

132. Имеется клетчатое поле размером 3×5 и три краски — чёрная, серая и белая. Надо раскрасить клетки так, чтобы все соседние клетки были разного цвета. Но при этом не было резкой смены цвета, то есть запрещено соседство чёрной и белой клеток. Клетки называются соседними, если у них есть общая сторона. Сколькими способами это можно сделать?

133. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD проведены диагонали AC и BD, пересекающиеся в точке O. Площади треугольников BCO и AOD равны соответственно S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.

134. Даны три числа. Если их все увеличить на 1, то их произведение тоже увеличится на 1. Если все исходные числа увеличить на 2, то их произведение тоже увеличится на 2. А на сколько увеличится произведение, если все исходные числа увеличить на 3?

135. Пусть $f(x) = 1 + \sqrt{x}$. Решите уравнения *а*) $f(x) = x$; *б*) $f(f(x)) = x$; *в*) $f(f(f(x))) = x$.

136. Докажите, что всякая бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит бесконечную геометрическую прогрессию.

137. Даны шесть отрезков, из любых трех из них можно составить треугольник. Верно ли, что из этих отрезков можно составить тетраэдр?

138. Из точки A на плоское зеркало под углом α падает луч света. Зеркало поворачивается на угол β вокруг проекции луча на зеркало. Найдите угол между лучами, отражёнными от исходного и повёрнутого зеркал.

139. *Симметричным разбиением* натурального числа n называется запись этого числа в виде суммы натуральных слагаемых $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k$ $(k \geq 1)$, в которой равноудаленные от концов слагаемые равны, то есть $a_1 = a_k$, $a_2 = a_{k-1}$ и вообще, $a_i = a_{k+1-i}$ при $1 \leq i \leq k$. Например, $16 = 16$, $16 = 2 + 12 + 2$ и $16 = 7 + 1 + 1 + 7$ — симметричные разбиения числа 16. Найдите количество всех симметричных разбиений числа 2017.

Турнир юных математиков им. Н. И. Лобачевского

5 класс

140. Заполните квадрат (рис. 2) буквами Б, Л, О, Х, А так, чтобы в каждой строке, каждом столбце и каждой из двух диагоналей квадрата все эти буквы встречались по одному разу.

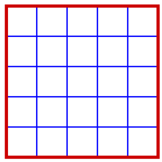


Рис. 2

141. У продавца есть 5 гирек массой 1 *г*, 2 *г*, 3 *г*, 4 *г* и 5 *г*. Все покупатели, стоящие в очереди к продавцу, купили разное целое число граммов товара. Какое наибольшее число покупателей могло стоять в очереди?

142. Мартышка, Попугай, Удав и Слонёнок устроили концерт по случаю приезда бабушки Удава. На концерте было исполнено 7 номеров, причем каждый номер представлял собой либо пение вдвоем, либо танец втроем. Никакие два номера не исполнялись одним и тем же составом. Удав участвовал в исполнении одной песни и двух танцев. Мартышка исполнила больше номеров, чем Слонёнок. Сколько номеров исполнил Слонёнок?

143. В школе 300 учеников и 150 парт. Четверть девочек сидит за одной партой с мальчиками. Можно ли пересадить учеников так, чтобы четверть мальчиков сидела за одной партой с девочками?

144. Последнюю цифру трёхзначного числа переставили в начало (например, $123 \to 312$) и полученное число сложили с исходным. Сумма оказалась равной 1000. Чему равно исходное число? Найдите все возможные варианты.

6 класс

145. Расставьте цифры от 1 до 9 так, чтобы выполнялись все неравенства (рис. 3). Найдите все способы расстановки цифр и докажите, что других нет.

146. У продавца есть 6 гирек массой 1 *г*, 2 *г*, 3 *г*, 4 *г*, 5 *г* и 6 *г*. Все покупатели, стоящие в очереди к продавцу, купили разное целое число граммов товара. Какое наибольшее число покупателей могло стоять в очереди?

147. В двузначном числе A поменяли цифры местами и получили число B. Найдите такое A, чтобы сумма $A + B$ делилась на 17.

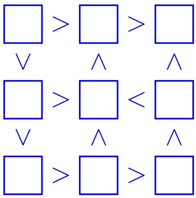


Рис. 3

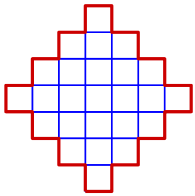


Рис. 4

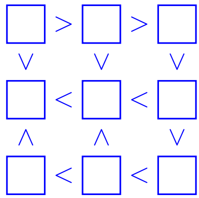


Рис. 5

148. *а*) Какое *наибольшее* количество неперекрывающихся доминошек 1×2 можно уместить на салфетке (рис. 4)?

б) Какое *наименьшее* количество доминошек потребуется, чтобы покрыть салфетку целиком, если доминошки могут перекрываться?

149. Депутаты Мамонов и Пронин ежедневно ходят на три или пять заседаний Госдумы. За время сессии Госдумы Мамонов побывал на 35 заседаниях, а Пронин — на 53 заседаниях. Сколько дней продолжалась сессия Госдумы?

7 класс

150. Расставьте цифры от 1 до 9 так, чтобы выполнялись все неравенства (рис. 5). Найдите все способы расстановки цифр и докажите, что других нет.

151. В школе 500 учеников и 250 парт. Четверть девочек сидит за одной партой с мальчиками. Можно ли пересадить учеников так, чтобы четверть мальчиков сидела за одной партой с девочками?

152. Последнюю цифру четырёхзначного числа переставили в начало (например, $1234 \to 4123$) и полученное число сложили с исходным. Сумма оказалась равной 3333. Чему равно исходное число, если известно, что в его записи нет цифры 0? Найдите все возможные варианты.

153. Пусть AE и CD — биссектрисы равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Известно, что $\angle AED = 20^\circ$. Найдите величину угла BED.

154. Депутаты Мамонов и Пронин ежедневно ходят на три или четыре заседания Госдумы. За время сессии Госдумы Мамонов побывал на 31 заседании, а Пронин — на 40 заседаниях. Сколько дней продолжалась сессия Госдумы?

Решения задач

1. *Ответ: например,* 403 *и* 0.

Обозначим искомые числа через x и y. Условие задачи равносильно равенству $6x+(y-2015) = x+y$, откуда $x = 403$. Таким образом, условию задачи удовлетворяет любая пара чисел вида $(403; y)$, где y — произвольное число.

2. *Ответ:* $\pm\sqrt{5}$.

Пусть $x = \frac{a+b}{a-b}$, тогда

$$x^2 = \frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab} = \frac{3ab+2ab}{3ab-2ab} = 5.$$

Таким образом, $x^2 = 5$, и значит, $x = \pm\sqrt{5}$.

3. *Ответ:* 5 *оборотов.*

Когда окружность прокатится по одной стороне квадрата, все её точки сделают один полный оборот вокруг центра окружности. При прохождении четырёх сторон получится 4 полных оборота. Кроме того, окружность сделает четверть оборота при вращении около каждой вершины квадрата. Всего получаем $4+4\cdot 0,25 = 5$ оборотов.

4. *Ответ:* 9.

Предположим, что из 2015 можно получить число $r < 9$. Ясно, что только перестановками цифр получить наименьшее из числа 2015 невозможно. Значит, на некотором шаге из имеющегося числа n придётся вычесть сумму его цифр. Полученное число $n - S(n)$, где $S(n)$ — сумма цифр числа n, по признаку делимости будет делиться на 9; сумма цифр числа $n - S(n)$ будет тоже делиться на 9. Дальнейшие операции перестановки цифр и вычитания суммы цифр, очевидно, не меняют остатка от деления на 9. Поэтому все последующие числа — и наименьшее тоже — будут также делиться на 9. Значит, $r \geq 9$.

Число 9 можно получить, например, так. Из 2015 перестановкой цифр сначала образуем $0152 = 152$, затем из 152 вычтем сумму его цифр: $152-8 = 144$. Вычитая четыре раза сумму цифр, равную 9, приходим к числу 108. Переставив цифры, получим $018 = 18$. Еще раз вычитая сумму его цифр, получаем 9.

5. Пусть площадь исходного шестиугольника $ABCDEF$ равна S. Сложим шестиугольник вдоль прямых AC, CE и EA, как показано на рисунке 6. Поскольку в правильном шестиугольнике все стороны равны и все углы равны, полученный треугольник ACE будет правильным, его площадь — $S/2$. В свою очередь, треугольник ACE состоит из 9 равных правильных треугольничков (рис. 7). Сложим треугольник ACE так, чтобы точки A, C и E переместились в точку O — центр исходного шестиугольника. Образовавшийся шестиугольник $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$ — искомый, его площадь равна $\frac{2}{3}S_{ACE} = \frac{1}{3}S$.

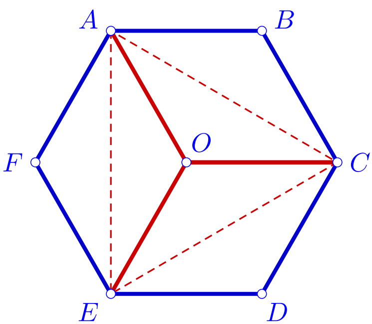


Рис. 6

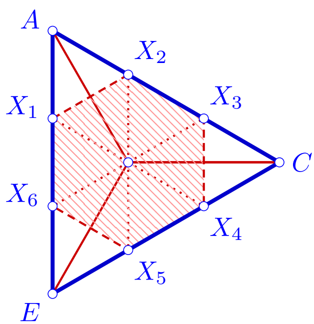


Рис. 7

6. *Ответ:* 20.

Пусть n — искомое число. Так как $0,2n = \frac{1}{5}n$ и $0,75n = \frac{3}{4}n$ — целые числа, то n делится на 5 и на 4, и значит, делится на 20. Очевидно, что любое натуральное число, кратное 20, удовлетворяет условию. Наименьшее среди них — 20.

7. *Ответ:* 31.

Пусть x — наибольшее, а y — число, которое уменьшили на 62. Так как сумма всех чисел не изменилась, то $3x+(y-62) = x+y$, откуда $x = 31$. Но тогда все 65 чисел исходного набора равны. Если это не так, хотя бы одно из них меньше x, и значит, сумма всех чисел набора меньше $65x$, то есть $2015 < 65x$, или $31 < x$, противоречие. Итак, все числа совпадают и равны 31. Значит, наименьшее число тоже равно 31.

8. Первое решение. По условию квадратный трёхчлен $x^2 + ax + b - 0,2$ принимает неотрицательные значения на всей числовой оси, поэтому его дискриминант неположителен, то есть

$$a^2 - 4(b - 0,2) \leq 0, \qquad \text{или} \qquad a^2 - 4b \leq -0,8\,.$$

Отсюда следует, что целое число $m = a^2 - 4b$ не больше -1. Кроме того, m не может равняться ни -1, ни -2, и значит, $m \leq -3$. Действительно, квадрат целого числа a^2 при делении на 4 всегда даёт в остатке 0 или 1, поэтому остатки при делении m на 4 могут быть только 0 или 1. Следовательно, $a^2 - 4b \leq -3$. Последнее равносильно утверждению о том, что квадратный трёхчлен $x^2 + ax + b - 0,75$ имеет неположительный дискриминант, и значит, принимает только неотрицательные значения; отсюда $f(x) \geq 0,75$.

Второе решение. Квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ с положительным старшим коэффициентом принимает наименьшее значение при $x = -a/2$. По условию это наименьшее значение $f(-\frac{a}{2}) = \frac{4b-a^2}{4}$ не меньше $0,2$, и значит,

$$4b - a^2 \geq 0,8.$$

Так как a и b — целые числа, то целое число $4b - a^2$ не меньше 1. Как и в первом решении, число $4b - a^2$ не может равняться ни 1, ни 2. Таким образом, $4b - a^2 \geq 3$, следовательно, $f(-a/2) \geq$ $\geq 0,75$. Итак, наименьшее значение квадратного трёхчлена $f(x)$ не меньше $0,75$, значит, $f(x) \geq 0,75$ при всех x.

Замечание. Квадратный трёхчлен $x^2 + x + 1$ удовлетворяет условию задачи; его наименьшее значение равно 0,75, так что доказанная оценка является точной.

9. Сумма внутренних углов m-угольника равна $(m-2)\cdot 180°$. Сумма внутренних углов всех n пятиугольников больше суммы углов исходного многоугольника с n^2 сторонами, поэтому

$$n \cdot 3 \cdot 180° > (n^2 - 2) \cdot 180°.$$

Отсюда следует, что $3n > n^2 - 2$, то есть $2 > n(n - 3)$, и значит, $n = 3$.

10. Лемма. *Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке A_1. Длина отрезка AA_1*

больше полусуммы длин сторон треугольника, между которыми она заключена.

Доказательство. (Рис. 8.) Так как углы BAA_1 и CAA_1 равны, то равны и соответствующие им дуги описанной окружности; из равенства этих дуг следует равенство хорд A_1B и A_1C. Теперь воспользуемся теоремой косинусов для треугольников BAA_1 и CAA_1:

$$A_1B^2 = AB^2 + AA_1^2 - 2 \cdot AB \cdot AA_1 \cos\alpha,$$
$$A_1C^2 = AC^2 + AA_1^2 - 2 \cdot AC \cdot AA_1 \cos\alpha,$$

где $\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = \alpha$. Из равенства левых частей получаем

$$AB^2 + AA_1^2 - 2 \cdot AB \cdot AA_1 \cos\alpha = AC^2 + AA_1^2 - 2 \cdot AC \cdot AA_1 \cos\alpha.$$

Отсюда

$$AA_1 = \frac{AB + AC}{2\cos\alpha} > \frac{AB + AC}{2}.$$

Замечание. Используя теорему Птолемея, можно дать другое доказательство леммы. Для сторон и диагоналей вписанного четырёхугольника ABA_1C выполняется соотношение $AB \cdot A_1C + AC \cdot A_1B = AA_1 \cdot BC$, из которого легко выражается отрезок AA_1. Так как $A_1C = A_1B$, то

$$AA_1 = \frac{(AB + AC) \cdot A_1B}{BC}.$$

Осталось воспользоваться очевидным неравенством $A_1B + A_1B > BC$, из которого следует $A_1B > \frac{1}{2}BC$.

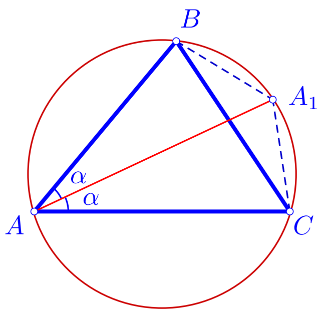


Рис. 8

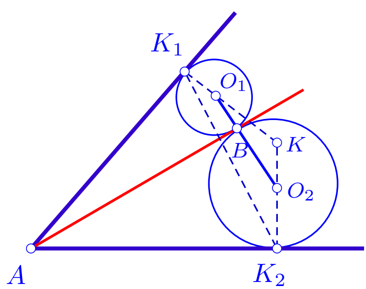


Рис. 9

Применим лемму к каждому из четырёх отрезков AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1, тогда

$$AA_1 > \tfrac{1}{2}(AD + AB), \qquad BB_1 > \tfrac{1}{2}(AB + BC),$$
$$CC_1 > \tfrac{1}{2}(BC + CD), \qquad DD_1 > \tfrac{1}{2}(CD + AD).$$

Складывая эти неравенства, получаем требуемое утверждение.

Замечание. Аналогичным образом утверждение можно доказать для любого вписанного в окружность многоугольника.

11. *Ответ:* 1.

Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_{2015}$ — длины отрезков первого разбиения и $l'_1, l'_2, \ldots, l'_{2016}$ — длины отрезков второго разбиения. Сумма длин полуокружностей в первом и во втором случаях равна

$$S_1 = \frac{\pi}{2}\,(l_1 + l_2 + \ldots + l_{2015}) = \frac{\pi}{2} \cdot 1,$$
$$S_2 = \frac{\pi}{2}\,(l'_1 + l'_2 + \ldots + l'_{2016}) = \frac{\pi}{2} \cdot 1,$$

и значит, $S_1 : S_2 = 1$.

12. *Ответ:* $f(x) = \frac{1}{3}(x - 403)$.

Исходное равенство можно рассматривать как уравнение относительно двух неизвестных $A = f(x)$ и $B = f(2015 - x)$. Поскольку оно верно при всех значениях x, заменим в нём x на $2015 - x$. Получим $4 \cdot f(2015 - x) + f(x) = 2015 - x$. Вместе с исходным, получаем систему

$$\begin{cases} 4A + B = x \\ A + 4B = 2015 - x. \end{cases}$$

Исключая из этих равенств B, получим $A = f(x) = \frac{1}{3}(x - 403)$.

13. *Ответ:* $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2015} = 1$.

Пусть $|a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = \ldots = |a_{2015} - a_1| = k$. Тогда

$$a_1 - a_2 = \pm k,$$
$$a_2 - a_3 = \pm k,$$
$$\ldots$$
$$a_{2014} - a_{2015} = \pm k,$$
$$a_{2015} - a_1 = \pm k.$$

Складывая эти равенства, слева получим 0, а справа сумму 2015 слагаемых

$$\pm k \pm k \pm \ldots \pm k = k \cdot (\pm 1 \pm 1 \pm \ldots \pm 1).$$

Сумма 2015 слагаемых ± 1 нечётная, отсюда следует, что $k = 0$. Значит, все числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{2015} равны. Поскольку $a_1 + a_2 + {} + \ldots + a_{2015} = 2015$, получаем единственный набор $a_1 = a_2 = \ldots = {} = a_{2015} = 1$.

14. Разобьём интервал $(1; 2^n)$ на n различных интервалов

$$(1;\ 2),\ [2;\ 2^2),\ [2^2;\ 2^3), \ldots,\ [2^{n-1};\ 2^n).$$

По *принципу Дирихле* найдётся интервал вида $[2^k;\ 2^{k+1})$, где $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, содержащий три числа из данного набора, скажем, a, b, c. Поскольку

$$a + b \geq 2^k + 2^k = 2^{k+1} > c,$$
$$b + c \geq 2^k + 2^k = 2^{k+1} > a,$$
$$c + a \geq 2^k + 2^k = 2^{k+1} > b,$$

числа a, b, c — искомые.

15. *Ответ:* $2\sqrt{3} + \sqrt{15}$.

(Рис. 9.) Пусть O_1 и O_2 — центры меньшей и большей окружностей соответственно, K_1 и K_2 — точки их касания со сторонами угла, $AK_1 = AK_2 = AB = x$.

Первое решение. Продолжим прямые K_1O_1 и K_2O_2 до пересечения в точке K. Прямоугольные треугольники AK_1K и AK_2K равны: у них общая гипотенуза AK, а катеты AK_1 и AK_2 равны общей касательной AB. Значит, $\angle K_1AK = \angle K_2AK = 30^\circ$, $K_1K = K_2K = x \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$. По условию $\angle K_1AK_2 = 60^\circ$, поэтому треугольник K_1AK_2 — равносторонний и $K_1K_2 = x$.

В треугольнике KO_1O_2 известны его стороны:

$$KO_1 = KK_1 - K_1O_1 = x \operatorname{tg} 30^\circ - 1,$$
$$KO_2 = KK_2 - K_2O_2 = x \operatorname{tg} 30^\circ - 3,$$

$O_1O_2 = 1 + 3$ и $\angle O_1KO_2 = 120^\circ$. Воспользуемся теоремой косинусов в этом треугольнике:

$$O_1O_2^2 = KO_1^2 + KO_1^2 - 2 \cdot KO_1 \cdot KO_2 \cdot \cos 120^\circ.$$

Подставляя указанные величины и решая полученное квадратное уравнение относительно x, находим $x = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$.

Второе решение. Отметим, что AO_1 и AO_2 — биссектрисы углов K_1AB и K_2AB соответственно. Так как $\angle K_1AK_2 = 60°$, то $\angle O_1AB + \angle O_2AB = 30°$. Тогда

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\operatorname{tg}\angle O_1AB + \operatorname{tg}\angle O_2AB}{1 - \operatorname{tg}\angle O_1AB \cdot \operatorname{tg}\angle O_2AB}\,.$$

Поскольку $\operatorname{tg}\angle O_1AB = \frac{O_1B}{AB} = \frac{1}{x}$ и $\operatorname{tg}\angle O_2AB = \frac{O_2B}{AB} = \frac{3}{x}$, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4x}{x^2 - 3}\,.$$

Отсюда находим положительный корень $x = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$.

16. Совпадает с задачей **11**.

17. *Ответ:* $\frac{100}{7}$.

Пусть x — искомое число и $0,35x = n$, $0,77x = m$. Отсюда $x = \frac{100}{35}n = \frac{100}{77}m$. Из последнего равенства находим $11n = 5m$. Числа n и m — натуральные, поэтому n делится на 5, а m — на 11. Значит, $n \geq 5$, и поэтому $x = \frac{100}{35}n \geq \frac{100}{7}$ (*оценка*).

Легко проверяется, что число $x = \frac{100}{7}$ удовлетворяет условию задачи.

18. Предположим, что уравнение $f(x) = x$ не имеет корней. Значит, график непрерывной функции $g(x) = f(x) - x$ целиком расположен либо в верхней, либо в нижней полуплоскости, то есть для всех x выполняется одно из двух неравенств: $f(x) > x$ или $f(x) < x$. В обоих случаях получаем противоречие. Например, если $f(x) > x$, то для всех x, y и z имеем

$$f(x + f(y + f(z))) > x + f(y + f(z)) > x + y + f(z) > x + y + z,$$

и значит, уравнение $f(x + f(y + f(z))) = x + y + z$ не имеет корней, что противоречит условию. Во втором случае рассуждения аналогичные.

19. Умножим неравенство на 2 и преобразуем числители каждой дроби в левой части, используя тождество $4ab = (a + b)^2 -$

$-(a-b)^2$. Тогда для первой дроби имеем

$$\frac{4ab}{a+b} = (a+b) - \frac{(a-b)^2}{a+b} \leq (a+b) - \frac{(a-b)^2}{a+b+c}.$$

Поскольку $a+b+c=1$, первая дробь не превосходит $(a+b)-(a-b)^2$. Аналогичные неравенства запишем для двух других дробей, входящих в левую часть неравенства:

$$\frac{4bc}{b+c} \leq (b+c) - (b-c)^2,$$
$$\frac{4ca}{c+a} \leq (c+a) - (c-a)^2.$$

Теперь сложим полученные три неравенства и учтём, что $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a+b+c)^2 - 6(ab+bc+ca)$. Снова используем равенство $a+b+c=1$, и после очевидных преобразований получим неравенство

$$\frac{4ab}{a+b} + \frac{4bc}{b+c} + \frac{4ca}{c+a} \leq 6(ab+bc+ca),$$

равносильное исходному, что и требовалось.

20. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_{500}$ — вершины исходного многоугольника. Докажем, что среди всех треугольников $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $\ldots$, $A_{499}A_{500}A_1$, $A_{500}A_1A_2$, образованных тремя последовательными вершинами многоугольника, обязательно найдется треугольник площади меньше 1.

Предположим противное, и площади всех этих треугольников не меньше 1. Заметим, что для площади произвольного треугольника ABC справедливо неравенство

$$2 \cdot S_{ABC} = AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC \leq AB \cdot BC,$$

из которого, в частности, следует $2 \leq 2 \cdot S_{A_1A_2A_3} \leq A_1A_2 \cdot A_2A_3$. Используя неравенство о среднем арифметическом и геометрическом, получим:

$$A_1A_2 + A_2A_3 \geq 2\sqrt{A_1A_2 \cdot A_2A_3} \geq 2\sqrt{2}.$$

Аналогичные неравенства запишем для каждой пары последовательных сторон:

$$
\begin{aligned}
A_2A_3 + A_3A_4 &\geq 2\sqrt{2},\\
&\dots\\
A_{499}A_{500} + A_{500}A_1 &\geq 2\sqrt{2},\\
A_{500}A_1 + A_1A_2 &\geq 2\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Просуммируем все эти 500 неравенств, тогда в левой части получим удвоенное значение периметра многоугольника, то есть число $2\cdot 700$. Поэтому $2\cdot 700 \geq 2\sqrt{2}\cdot 500$, или $1{,}4 \geq \sqrt{2}$. Это даёт $1{,}4^2 \geq 2$, противоречие. Таким образом, по крайней мере, у одного из треугольников площадь меньше 1.

21. *Ответ:* 3.

Если числа записать, например, в порядке 2, 7, 5, 6, 1, 4, 3, то числа 7, 6 и 4 окажутся хорошими. Осталось показать, что больше трёх чисел быть не может.

Заметим, что хорошее число больше обоих своих соседей, значит, два хороших числа не могут стоять рядом. Поэтому число, следующее по часовой стрелке за хорошим, не должно быть хорошим, причём за разными хорошими числами следуют разные нехорошие. Следовательно, среди всех написанных чисел хороших — не больше половины, а значит, не больше трёх.

22. *Ответ: нет, не могло.*

Пусть искомая расстановка существует. Поскольку в каждой строке и в каждом столбце таблиц стоит чётное количество нечётных чисел, все суммы чисел в строках и столбцах чётны. Поэтому в каждой строке с отрицательной суммой эта сумма не больше -2. Следовательно, сумма всех чисел в таблице не превосходит $99\cdot(-2)+100 = -98$. С другой стороны, в каждом столбце с положительной суммой эта сумма не меньше 2, и потому сумма всех чисел в таблице не меньше $99\cdot 2 - 100 = 98$. Противоречие.

23. (Рис. 10.) Рассмотрим прямоугольный треугольник ABD. В нем M — середина гипотенузы, а значит, $AM = MD = BM$. Тогда M лежит на серединном перпендикуляре к BD. С другой стороны, поскольку $BC = CD$, точка C также лежит на серединном перпендикуляре к BD. Получаем, что $MC \perp BD$. Поскольку $AD \parallel BC$ и $CF \perp BC$, получаем, что $CF \perp AD$. Итак, CF и DF — высоты треугольника CMD. Значит, MF — также высота, что и означает, что $MF \perp CD$.

Замечание. Можно показать, что четырёхугольник $BCDM$ является ромбом.

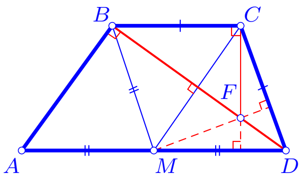


Рис. 10

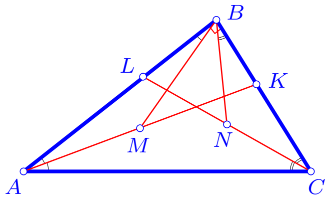


Рис. 11

24. *Ответ: нет, не может.*

Предположим противное. Заметим, что число, оканчивающееся на 2016, обязательно делится на 16.

Среди десяти петиных чисел есть либо одно, либо два числа, делящихся на 8. В первом случае одно из полученных наименьших общих кратных (НОК) делится на 8, а второе — нет, и потому их сумма не делится даже на 8. Во втором же случае разность двух петиных чисел, делящихся на 8, равна 8, поэтому одно из них делится на 16, а другое — нет. Следовательно, одно из НОК делится на 16, а другое — нет. Значит, и в этом случае сумма НОК делиться на 16 не может.

25. *Ответ: второй.*

Первый спортсмен пробежал дистанцию быстрее второго, так как его скорость была выше скорости второго как на первом километре дистанции, так и на двух последних. Третий спортсмен на первый километр потратил столько же времени, сколько второй — на второй километр, а второй и третий километры бежал быстрее, чем второй — первый и третий километры. Поэтому он также пришёл к финишу раньше второго, откуда и вытекает ответ.

26. *Ответ: все натуральные числа, кроме* 1.

Любое натуральное число $n > 1$ получается, если положить $x = 1$, $y = n$ и $z = n^2$:

$$\frac{xy+yz+zx}{x+y+z} = \frac{n(1+n^2+n)}{1+n+n^2} = n.$$

Покажем, что число 1 получить нельзя. Для этого достаточно показать, что если натуральные числа x, y и z различны, то $xy+yz+zx > x+y+z$. В самом деле, $xy \geq x$, $yz \geq y$ и $zx \geq z$, и эти неравенства обращаются в равенства только при $x = y = z = 1$.

Замечание. Приведём другой способ представить любое число $n > 1$. Выберем для начала числа x и y так, что $x > y$ и $x + y = n + 1$ (тогда $x \geq 2$). Заметим, что

$$\frac{xy+yz+zx}{x+y+z} = (x+y) - \frac{x^2+xy+y^2}{x+y+z}.$$

Значит, полагая $z = (x^2+xy+y^2) - (x+y)$, мы получаем требуемую тройку, если проверим, что z отлично от x и y. Так как $x \geq 2$, имеем $x^2 - x \geq x$ и $y^2 - y \geq 0$, откуда $z = (x^2 - x) + (y^2 - y) + xy \geq x + 0 + y > \max(x, y)$. Отсюда и следует требуемое.

27. *Ответ: можно.*

Пронумеруем монеты слева направо числами от 1 до 100. Сравним монеты 17 и 84. Хотя бы одна из них — настоящая. Поэтому, если весы в равновесии, то обе монеты — настоящие; в этом случае настоящими будут 34 монеты с номерами 1–17 и 84–100, так как 50 фальшивых монет в этих промежутках не умещаются.

Пусть теперь перевесила монета 17. Тогда она — настоящая, а монета 84 — фальшивая. Так как номера любых двух фальшивых монет отличаются не более чем на 49, в этом случае наименьший номер фальшивой монеты не меньше $84 - 49 = 35$, то есть монеты 1–34 обязательно настоящие. Если же перевесила монета 84, аналогичные рассуждения показывают, что настоящими являются монеты 67–100.

28. Пусть угол ABC — прямой (рис. 11). Тогда BM и BN — медианы в прямоугольных треугольниках ABK и CBL, откуда $\angle MBA = \angle MAB = \angle BAC/2$ и $\angle NBC = \angle NCB = \angle BCA/2$. Значит, $\angle MNB = 90° - (\angle BAC + \angle BCA)/2 = 45°$.

Пусть угол ABC — тупой (рис. 12). Обозначим через R и T середины сторон AB и AC соответственно. Тогда точка M лежит на средней линии TR треугольника ABC. Как известно, в тупоугольном треугольнике медиана тупого угла короче половины стороны, к которой она проведена, то есть $TB < TA$. Поскольку TR — медиана в треугольнике ATB, отсюда следует, что основание биссектрисы этого треугольника, проведённой из вершины T, лежит на отрезке RB. Значит, точка пересечения биссектрис этого треугольника лежит на отрезке MK. Аналогично, точка пересечения биссектрис треугольника CTB лежит на отрезке NL. Следовательно, $\angle MBN = \angle MBT + \angle NBT > (\angle ABT + \angle CBT)/2 = \angle ABC/2 > 45^\circ$.

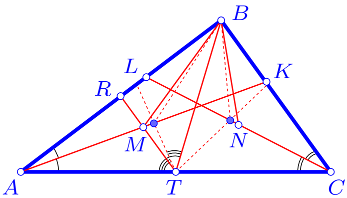


Рис. 12

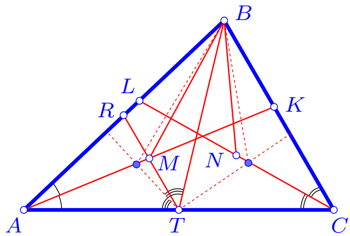


Рис. 13

Аналогично доказывается, что если угол ABC — острый (рис. 13), то точки пересечения биссектрис треугольников ATB и BTC лежат на отрезках AM и CN соответственно, откуда $\angle MBN < \angle ABC/2 < 45^\circ$.

29. *Ответ: только* 0.

Пусть i-й трёхчлен имеет вид $f_i(x) = ax^2 + bx + c_i$. Тогда

$$f_2(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c_2 = (ax_1^2 + bx_1 + c_1) + (c_2 - c_1) = c_2 - c_1,$$

поскольку $f_1(x_1) = 0$. Аналогично получаем равенства $f_3(x_2) = c_3 - c_2, \ldots, f_{100}(x_{99}) = c_{100} - c_{99}$ и $f_1(x_{100}) = c_1 - c_{100}$.

Складывая полученные равенства, получаем

$$f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_1(x_{100}) = (c_2 - c_1) + \ldots + (c_1 - c_{100}) = 0.$$

Значит, единственное возможное значение суммы — ноль.

30. Так как CC' — диаметр Ω, имеем $\angle C'AC = 90^\circ$. Поскольку $MP \parallel BC$, получаем $\angle MPA = \angle BCA = \angle BAC$ (рис. 14). Значит, треугольник AMP — равнобедренный, и поэтому его высота MD является и медианой. Так как $AD = DP$ и $AC' \parallel DM$, по теореме Фалеса получаем, что $C'M = MP$.

Замечание. Есть и другие решения, например, с использованием подсчёта углов в прямоугольном треугольнике PAC'; именно, $\angle MAC' = 90^\circ - \angle MAP = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \angle MPA = \angle MC'A$, откуда $MP = MA = MC'$.

31. *Ответ: нет, не может.*

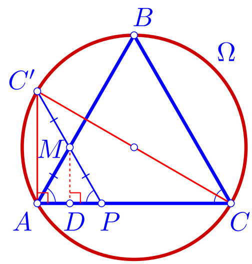


Рис. 14

Предположим противное. Рассмотрим степени двойки, на которые делятся выписанные числа; пусть 2^k — наибольшая из них. Если хотя бы два выписанных числа делятся на 2^k, то два соседних таких числа будут различаться на 2^k. Значит, одно из них будет делиться на 2^{k+1}, что невозможно в силу выбора k. Значит, среди выписанных чисел ровно одно делится на 2^k.

Наименьшее общее кратное (НОК) группы, содержащей это число, будет делиться на 2^k, а НОК оставшейся группы — не будет. Значит, сумма этих НОК не делится на 2^k; с другой стороны, эта сумма больше, чем 2^k. Поэтому эта сумма не может быть степенью двойки.

32. *Ответ: за 2 загрузки.*

Покажем, что Архимеду достаточно использовать мешок дважды. Пусть он сначала положит в мешок слитки с весами 1, 2, 3 и 5 кг, а потом — слитки с весами 1, 4 и 6 кг. В обоих случаях мешок не порвётся.

Докажем, что это могло произойти только в том случае, если дважды был использован слиток веса 1 кг. Действительно, если бы Архимед в эти два раза вместо слитков с весами $1, \ldots, 6$ кг использовал соответственно слитки с весами $w_1, \ldots, w_6$ кг, то эти веса удовлетворяли бы системе неравенств $w_1 + w_2 + w_3 + w_5 \leq 11$, $w_1 + w_4 + w_6 \leq 11$. Складывая эти неравенства, получаем $w_1 + (w_1 + w_2 + \ldots + w_6) \leq 22$. В скобках стоит сумма шести различных натуральных чисел, то есть она не меньше $1 + 2 + \ldots + 6 = 21$. Отсюда следует, что $w_1 \leq 22 - 21 = 1$. Значит, $w_1 = 1$, то есть слиток веса 1 кг однозначно определён.

Осталось показать, что одной загрузки недостаточно. Если Архимед загрузит один слиток, то мешок не порвётся в любом случае, то есть никакой слиток идентифицировать не удастся.

Пусть Архимед загрузит больше одного слитка, и мешок не порвётся. Если слиток в 1 кг не загружен в мешок, то при замене им любого слитка из мешка результат не изменится; значит, в этом случае Гиерон даже не сможет понять, находится ли этот слиток в мешке. Если же искомый слиток в мешке, то Гиерон не сможет понять, какой из (хотя бы двух) загруженных слитков — требуемый.

Замечание. После указанных двух загрузок также однозначно определяется группа гирь с весами 2, 3 и 5 кг, а также группа с весами 4 и 6 кг.

33. *Ответ: да, могло.*

Первое решение. Предъявим пример, как такое могло произойти. Выстроим учеников по кругу. Предположим, что к каждому на день рождения пришли все одноклассники, кроме следующего за ним по часовой стрелке. Тогда любые два ученика A и B встретились на всех празднованиях, кроме двух: того, на которое не пришёл A, и того, на которое не пришёл B. Значит, любая пара учеников встретилась 21 раз.

Второе решение. Предъявим другой возможный пример. Выделим из класса двух учеников A и B. Пусть на день рождения к A пришли все одноклассники, кроме B, на день рождения к B пришёл только A, а на остальные дни рождения приходил только B. Тогда любая пара, в которой нет B, встретилась только на дне рождения A, а все пары, содержащие B, встречались ровно по разу на остальных празднованиях. Итого, каждая пара встретилась ровно по разу.

34. *Ответ: множество всех натуральных чисел, а также множества* $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$ *и* $\{1,2,3,4\}$.

Для начала проверим, что множества $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,3,4\}$, а также множество всех натуральных чисел — полные. Для последнего множества это очевидно; для первых четырёх заметим, что если натуральные числа a и b таковы, что $a+b \le 4$, то либо они оба равны 2, либо одно из них равно 1; в любом из этих случаев имеем $ab \le a+b$. Значит, если $a+b \le A$, то и $ab \in A$.

Пусть теперь A — произвольное полное множество. Если A содержит некоторое число $k \ge 2$, то по условию оно также содержит число $1 \cdot (k-1) = k-1$. Продолжая этот процесс, получаем, что все натуральные числа, не превосходящие k, лежат в A. В частности, если A не содержит чисел, больших 4, то множество A уже перечислено в ответе.

Пусть теперь в A есть число $l \geq 5$. Зададим последовательность $l_1, l_2, \ldots$ соотношениями $l_1 = l$ и $l_{n+1} = 2(l_n - 2)$. Все эти числа лежат в A. Действительно, l_1 лежит в A по нашему предположению, а если $l_n = 2 + (l_n - 2) \in A$, то и $l_{n+1} = 2(l_n - 2) \in A$. Кроме того, $l_{n+1} = l_n + (l_n - 4)$; по индукции теперь получаем, что $l_{n+1} > l_n \geq 5$. Значит, для любого натурального n имеем $l_n > n$; из рассуждений предыдущего абзаца понимаем теперь, что и $n \in A$. Итак, все натуральные числа лежат в A.

35. *Ответ:* 1008 *чисел.*

Рассмотрим произвольное окрашивание таблицы. Пусть нашлось хотя бы два удачных числа, и a — наименьшее из них, а b — наибольшее.

Поделим b на a с остатком: $b = qa + r$, где $0 \leq r < a$. Предположим, что $q \geq 2$. В произвольном квадрате $b \times b$ можно расположить q^2 непересекающихся квадратов $a \times a$. В этих квадратах будет ровно $q^2 a$ чёрных клеток. Однако $q^2 a > (q+1)a > qa+r = b$; значит, в квадрате $b \times b$ будет больше, чем b чёрных клеток, что невозможно. Итак, $q < 2$, то есть $b < 2a$.

Общее количество удачных чисел не превосходит количества натуральных чисел от a до b, то есть оно не больше $b - a + 1 < b - b/2 + 1 = b/2 + 1 \leq 1009$. Значит, это количество не больше 1008.

Осталось привести пример раскраски, для которой найдутся 1008 удачных чисел. Окрасим чёрным все клетки 1008-й строки и только их. Рассмотрим произвольный квадрат со стороной $d \geq 1009$. Он пересекается с 1008-ой строкой, значит в нём есть целая строка отмеченных клеток, то есть их как раз d штук. Значит, все числа от 1009 до 2016 являются удачными, и таких чисел как раз 1008.

36. Первое решение. На продолжении отрезка AB за точку A отметим точку K так, что $AB = AK$ (см. рис. 15). Тогда AM — средняя линия в треугольнике BCK, откуда $AM \parallel CK$. Значит, $\angle BKC = \angle BAM = \angle ADC$. Отсюда следует, что четырёхугольник $AKDC$ вписан.

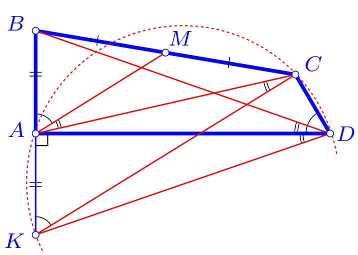


Рис. 15

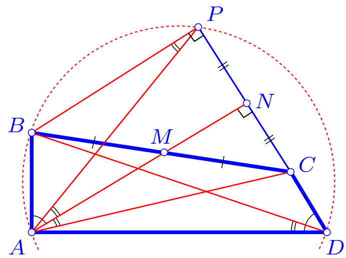


Рис. 16

Опять же используя параллельность AM и CK, получаем $\angle CAM = \angle ACK = \angle ADK$. Наконец, DA — медиана и высота в треугольнике BDK, поэтому DA является и биссектрисой; отсюда $\angle ADB = \angle ADK = \angle CAM$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Заметим, что $\angle ADC + \angle DAM = \angle BAM + \angle DAM = 90°$; это значит, что $AM \perp CD$. Опустим перпендикуляры MN и BP из точек M и B на прямую CD; тогда точки A, M и N лежат на одной прямой (см. рис. 16).

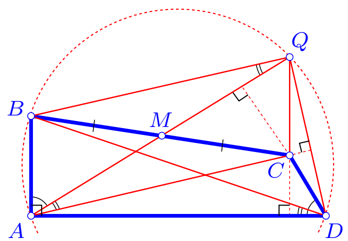


Рис. 17

Поскольку $BM = MC$, по теореме Фалеса получаем $PN = NC$. Значит, AN — высота и медиана в треугольнике APC, откуда $\angle CAM = \angle MAP$. Так как $BP \parallel AN$, получаем $\angle MAP = \angle APB$. Наконец, поскольку $\angle BPD = \angle BAD = 90°$, четырёхугольник $ABPD$ вписан; поэтому $\angle APB = \angle ADB$. Итак, мы получили, что $\angle CAM = \angle MAP = \angle APB = \angle ADB$, что и требовалось.

Третье решение. Отложим на луче AM точку Q так, что $AQ = 2AM$ (см. рис. 17). Тогда в четырёхугольнике $ABQC$ диагонали делятся точкой пересечения пополам, то есть он — параллелограмм; значит, $\angle CAQ = \angle AQB$.

Так как $QC \parallel AB$, получаем $QC \perp AD$. Так как $\angle QAD = 90^\circ - \angle BAQ = 90^\circ - \angle ADC$, имеем $DC \perp AQ$. Значит, C — точка пересечения высот в треугольнике AQD, откуда $AC \perp QD$ (и, значит, $BQ \perp QD$).

Поскольку $\angle BAD = \angle BQD = 90^\circ$, четырёхугольник $ABQD$ вписан. Значит, $\angle ADB = \angle AQB = \angle CAQ$, что и требовалось доказать.

37. Совпадает с задачей **29**.

38. Совпадает с задачей **24**.

39. В случае $AB \parallel CD$ имеем $BC = KN$, поэтому $AK = BL = CM = DN$. Значит, четырёхугольник $LMDA$ получается из $BCNK$ параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{BL}$.

Пусть теперь AB и CD не параллельны; обозначим через P точку пересечения прямых AB и CD. Так как четырёхугольник $BCNK$ вписан, треугольники PBC и PNK подобны; отсюда

$$\frac{PB}{BL} = \frac{PB}{BC} = \frac{PN}{NK} = \frac{PN}{ND}\,.$$

Значит, $BN \parallel LD$ (см. рис. 18). Аналогично, $CK \parallel MA$. Отсюда получаем $\angle ALD = \angle KBN$ и $\angle KCN = \angle AMD$.

Так как четырёхугольник $BCNK$ — вписанный, то $\angle KBN = \angle KCN$. Поэтому и $\angle ALD = \angle AMD$, то есть $ADML$ — также вписанный.

Замечание. Есть и другие решения; например, из равенств $\angle AKN = \angle NCB$ и $\angle DNK = \angle KBC$ следует, что четырехугольники $BCML$ и $NKAD$ подобны, поэтому $\angle BLM = \angle MDA$.

40. *Ответ:* $6 \cdot 50^2 - 5 \cdot 50 + 1 = 14\,751$ *пар.*

Обозначим длину стороны таблицы через $2n = 100$ (так что $n = 50$) и пронумеруем строки сверху вниз, а столбцы — слева направо числами от 1 до $2n$.

В каждой строке может быть от 0 до $2n$ чёрных клеток. Так как количества чёрных клеток во всех строках различны, эти количества — все числа от 0 до $2n$, кроме одного (скажем, кроме k). Тогда общее число чёрных клеток равно $(0 + 1 + \ldots +$

$+2n)-k = 2n^2+n-k$. С другой стороны, так как во всех столбцах клеток поровну, общее число чёрных клеток должно делиться на $2n$. Значит, $k = n$, и во всех столбцах по $2n^2/(2n) = n$ чёрных клеток.

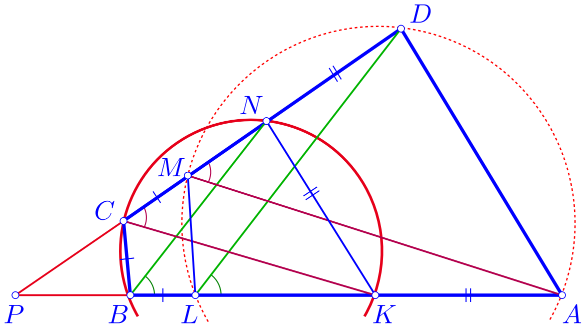


Рис. 18

Оценим теперь сверху количество пар соседних по стороне разноцветных клеток, считая отдельно пары клеток, соседних по горизонтали и по вертикали.

Если в строке $i \le n-1$ чёрных клеток, то они могут участвовать не более, чем в $2i$ горизонтальных парах. Если в строке $i \ge n+1$ чёрных клеток, аналогичное рассуждение можно применить к белым клеткам, количество которых равно $2n-i \le$ $\le n-1$. Итого, горизонтальных разноцветных пар не больше, чем $2\cdot(2\cdot 0+2\cdot 1+\ldots+2\cdot(n-1)) = 2n(n-1)$.

Оценим теперь количество вертикальных пар. Рассмотрим любую строку с чётным номером от 2 до $2(n-1)$; пусть в ней i чёрных клеток. Тогда либо в строке сверху, либо в строке снизу от неё число чёрных клеток не равно $100-i$; значит, одна из вертикальных пар, в которых участвуют клетки нашей строки, будет одноцветной. Итого, есть хотя бы $n-1$ одноцветных вертикальных пар. Так как общее число вертикальных пар равно $2n(2n-1)$, то разноцветных из них — не больше, чем $2n(2n-1)-(n-1)$. Значит, общее число разноцветных пар не больше, чем

$$2n(n-1)+(4n^2-3n+1) = 6n^2-5n+1 = 14751.$$

Осталось привести пример, в котором указанное число пар достигается.

Проведём в нашей таблице $2n \times 2n$ диагональ из верхнего левого угла в нижний правый. Все клетки, лежащие на или ниже диагонали, покрасим в чёрный цвет, если они лежат в чётных строках, и в белый — иначе (раскраска «по строкам»). Все клетки, лежащие выше диагонали, покрасим в чёрный цвет, если сумма номеров их строки и столбца чётна, и в белый иначе («шахматная» раскраска). Пример такой раскраски при $n = 4$ показан на рис. 19. Нетрудно проверить, что в каждом столбце ровно по n чёрных клеток, в $2i$-й строке есть $n+i$ чёрных клеток, а в $(2i-1)$-й строке — $(n-i)$ чёрных клеток. Кроме того, все оценки выше достигаются.

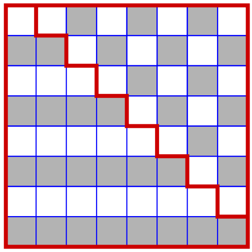


Рис. 19

41. *Ответ: такое множество одно — это множество* $\mathbb{R}$ *всех действительных чисел.*

Первое решение. Пусть A — полное множество. Поскольку оно непусто, то можно выбрать элемент $a \in A$. Тогда $a + 0 = a \in A$, значит, $a \cdot 0 = 0 \in A$. Так как $(-x) + x = 0 \in A$, получаем теперь, что $(-x) \cdot x = -x^2 \in A$ при всех действительных x. В силу произвольности выбора x отсюда следует, что любое отрицательное число также принадлежит множеству A.

Наконец, для любого $b > 0$ из того, что число $(-b) + (-b) = -2b$ лежит в A, получаем, что $b^2 = (-b) \cdot (-b) \in A$. Значит, и произвольное положительное число также лежит в A. Итак, в A входят все действительные числа.

Второе решение. Как и в первом решении, выберем произвольный элемент $s \in A$. Докажем, что любое $t \geq 0$ лежит в A. Рассмотрим уравнение $x^2 - sx + t = 0$; его дискриминант неотрицателен, так что оно имеет два (возможно, совпадающих) корня a и b. Тогда по теореме Виета имеем $a + b = t$ и $ab = s$. Поскольку $a + b = s \in A$, получаем, что и $t \in A$.

Осталось показать, что любое $u > 0$ также лежит в A. По доказанному выше, $(-u) + (-1) \in A$; значит, и $(-u) \cdot (-1) = u$ также лежит в A.

42. (Рис. 20.) Заметим, что I лежит на оси симметрии трапеции, поэтому $\angle ICD = \angle IBA$. Пользуясь вписанностью четырехугольника $CBEI$, получаем $\angle ICD = \angle IBA = \angle IBE = \angle ICE$. Так как прямая CD касается окружности ω, то и прямая CE, симметричная ей относительно CI, также касается ω.

Замечание. Есть и другие решения, например, с использованием равенств $\angle IEA = \angle ICB = \angle IBC = \angle IEC$.

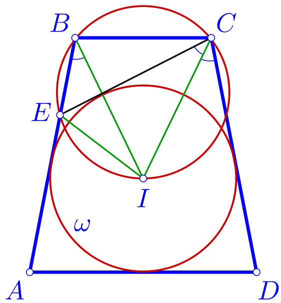


Рис. 20

43. Заметим сразу, что на *любой* дуге между членами хорошей пары поровну девочек и мальчиков.

Пусть D — девочка, участвующая в 10 хороших парах. Обозначим всех детей по часовой стрелке $K_1, K_2, \ldots, K_{2n}$ так, что K_1 — это D, и продолжим нумерацию циклически (например, $K_0 = K_{2n}$ и $K_{2n+1} = K_1$). При $i = 1, 2, \ldots, 2n$ обозначим через d_i разность между количествами девочек и мальчиков среди $K_1, K_2, \ldots, K_i$; в частности, $d_1 = 1 - 0 = 1$ и $d_{2n} = 0$ (поэтому можно продолжить эту последовательность, полагая $d_{2n+1} = d_1$ и т.д.). Девочка D образует с K_i хорошую пару тогда и только тогда, когда $d_i = 0$ и K_i — мальчик, т.е. $d_i = 0$ и $d_{i-1} = 1$. Итак, найдутся ровно 10 индексов i с такими свойствами.

Рассмотрим любого мальчика $M = K_s$, образующего с D хорошую пару; тогда $d_s = 0$ и $d_{s-1} = 1$. Аналогично получаем, мальчик M образует хорошую пару с K_i ровно тогда, когда $d_s = d_{i-1}$ и K_i — девочка (то есть $d_{i-1} = 0$ и $d_i = 1$).

Заметим, что любые два числа d_i и d_{i+1} отличаются на единицу. Разобьём их на группы последовательных чисел, не меньших единицы, и группы последовательных чисел, не бóльших нуля. Тогда при обходе круга по часовой стрелке «переходов» из первых групп во вторые будет столько же, сколько и «переходов» из вторых групп в первые. Значит, у M столько же хороших напарниц, сколько у D хороших напарников. Это и требовалось доказать.

Замечание 1. Это решение можно визуализировать, нарисовав «график» последовательности (d_i) (см. рис. 21). Тогда появление хорошего напарника у D означает, что график пересекает прямую $d = 1/2$ сверху вниз, а появление хорошей напарницы у M — пересечение той же прямой снизу вверх.

Замечание 2. Из решения следует, что, если девочка образует хорошую пару с двумя мальчиками, то любая девочка, образующая хорошую пару с одним из этих мальчиков, образует её и с другим. Более того, все дети разбиваются на непересекающиеся группы (в каждой группе поровну мальчиков и девочек) так, что каждый мальчик образует хорошие пары со всеми девочками из своей группы и только с ними, и то же верно для любой девочки. При этом, при обходе по кругу мальчики и девочки из одной группы чередуются.

Существуют решения, доказывающие этот факт напрямую (например, индукцией по числу детей).

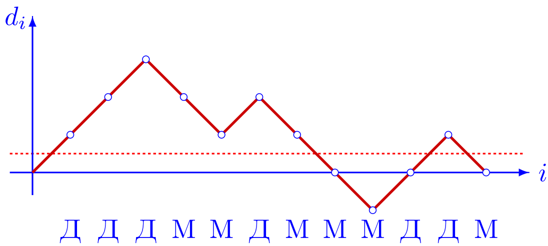


Рис. 21

44. *Ответ:* $(x, y) = (2, 0)$ *и* $(x, y) = (0, 2)$.

Для удобства сделаем замену $x = 2a$ и $y = 2b$. Тогда из условия имеем $(2a)^{100} - (2b)^{100} = 2^{99} \cdot (2a - 2b)$ и $(2a)^{200} - (2b)^{200} = 2^{199} \cdot (2a - 2b)$. Сократив оба равенства на степени двойки, получаем $a^{100} - b^{100} = a^{200} - b^{200} = a - b \neq 0$. Поделив второе выражение на первое, получаем $a^{100} + b^{100} = 1$; значит, каждое из чисел a и b по модулю не превосходит 1.

Если $b = 0$, то $a^{100} = a$, откуда $a = 1$. Аналогично, если $a = 0$, то $b = 1$; это приводит к двум ответам $(x, y) = (2, 0)$ и $(x, y) = (0, 2)$.

Пусть теперь $ab \neq 0$; тогда $|a|, |b| < 1$. Заметим, что значения функции $f(x) = x^{100} - x = x(x^{99} - 1)$ положительны при $x \in (-1, 0)$ и отрицательны при $x \in (0, 1)$. Поскольку $a^{100} - b^{100} = a - b$, имеем $f(a) = f(b)$, поэтому числа a и b имеют одинаковый знак.

С другой стороны,

$$1 = \frac{a^{100} - b^{100}}{a - b} = a^{99} + a^{98}b + a^{97}b^2 + \ldots + b^{99}. \qquad (*)$$

Если a и b отрицательны, то правая часть в $(*)$ также отрицательна, что невозможно. Если же a и b положительны, то все слагаемые в правой части $(*)$ положительны, поэтому она больше, чем $a^{99}+b^{99}$; итак, $a^{99}+b^{99}<1$. С другой стороны, поскольку $0<|a|,|b|<1$, имеем $a^{99}+b^{99}>a^{100}+b^{100}=1$. Противоречие.

Замечание. После получения неравенства $(*)$ решение можно завершить разными способами — например, с использованием неравенства

$$(a^{99}+a^{98}b+a^{97}b^2+\ldots+b^{99})^{100}>(a^{100}+b^{100})^{99},$$

справедливого при $ab>0$. Это неравенство можно доказать, раскрыв скобки и установив, что коэффициент при любом одночлене слева не меньше, чем коэффициент при таком же одночлене справа.

45. *Ответ: нет, не может.*

Так как трёхчлен $f(x)$ не имеет корней, то $c=f(0)=0$ и $f(c)=0$. Тогда выражение $\frac{f(c)}{c}$ иррационально как отношение рационального и иррационального чисел. Но

$$\frac{f(c)}{c}=\frac{ac^2+bc+c}{c}=ac+b+1.$$

Так как $b+1$ рационально, то ac — иррационально. Получаем, что дискриминант $D=b^2-4ac$ иррационален как разность рационального и иррационального чисел.

46. По неравенству о средних имеем

$$\begin{aligned}xy+xz&\geq 2\sqrt{xy\cdot xz},\\ xy+yz&\geq 2\sqrt{xy\cdot yz},\\ xz+yz&\geq 2\sqrt{xz\cdot yz}.\end{aligned}$$

Сложим эти три неравенства и разделим полученное на 2. С учётом условия получаем

$$xyz\geq xy+xz+yz\geq x\sqrt{yz}+y\sqrt{xz}+z\sqrt{xy}.$$

Деля полученное неравенство на $\sqrt{xyz}$, получаем требуемое.

Замечание. Это решение легче придумать, если переписать данное и требуемое неравенства в виде

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{xz}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}\leq 1.$$

47. Так как BL – биссектриса $\angle ABC$, имеем $\angle ABL = \angle LBC$. Поскольку PB — касательная к Ω, имеем $\angle PBA = \angle BCA$ (см. рис. 22). Кроме того, $\angle PBL = \angle PBA + \angle ABL = \angle BCA + \angle LBC = \angle BLP$, значит, $\angle BPM = 180^\circ - (\angle PBL + \angle BLP) = 180^\circ$.

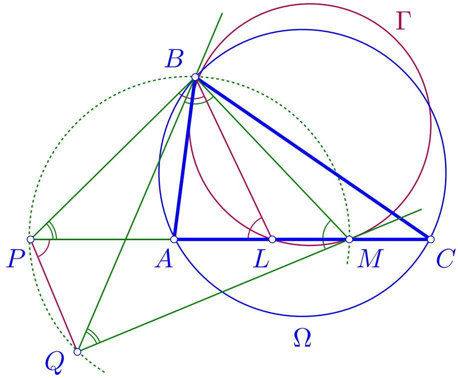


Рис. 22

Так как $\angle BLM = 180^\circ - \angle BLP$ тупой, касательные к Γ в точках B и M пересекаются в точке Q, лежащей по ту же сторону от BM, что и точка L (а значит — по ту же сторону, что и P). Далее, имеем $\angle QBM = \angle QMB = 180^\circ - \angle BLM = \angle BLP$. Значит, $\angle BQM = 180^\circ - 2\angle QBM = 180^\circ - 2\angle BLP = \angle BPM$. Поэтому точки B, M, P и Q лежат на одной окружности. Отсюда следует, что $\angle QPM = \angle QBM = \angle BLP$. Это и означает, что $PQ \parallel BL$.

48. *Ответ:* $k = 2(2015 - 1500) = 1030$.

Покажем, что 1030 детекторов Диме хватит. Пусть он расположит 515 детекторов в 515 левых клетках средней строки квадрата, а остальные 515 детекторов — в 515 верхних клетках среднего столбца. Заметим, что при любом положении корабля его левый столбец лежит в одном из 516 левых столбцов доски. Если этот столбец — один из 515 самых левых, то корабль накроет детектор из этого столбца, лежащий в средней строке, иначе ни одного детектора из этой строки корабль не накроет. Значит, по показаниям детекторов из этой строки восстанавливается, в каких столбцах лежит корабль. Аналогично, строки, в которых он находится, восстанавливаются по показаниям детекторов из среднего столбца.

Рассмотрим теперь произвольную расстановку k детекторов, удовлетворяющих требованиям. Рассмотрим два положения корабля, отличающихся горизонтальным сдвигом на 1. Показания какого-то детектора для них будут различаться, только если этот детектор лежит в самом левом столбце левого корабля или в самом правом столбце правого. Значит, в любых двух вертикальных прямоугольниках 1500×1, отличающихся горизонтальным сдвигом на 1500, есть хотя бы один детектор. Аналогично, в любых двух горизонтальных прямоугольниках 1×1500, отличающихся вертикальным сдвигом на 1500, есть хотя бы один детектор. Назовём такие пары прямоугольников *вертикальными* и *горизонтальными*, соответственно.

Выделим все вертикальные пары, лежащие в нижних 1500 и в верхних 1500 строках доски (таких пар $2 \cdot 515 = 1030$). Аналогично, выделим все 1030 горизонтальных пар, лежащих в левых 1500 и в правых 1500 столбцах. Разобьём доску на 9 прямоугольных областей так, как показано на рис. 23. Выделенные пары не покрывают клеток из E; каждая же клетка в остальных областях покрыта двумя выделенными парами (в D и F — двумя вертикальными, в B и H — двумя горизонтальными, а в областях A, C, G и I — одной горизонтальной и одной вертикальной). Итак, каждый детектор лежит не более, чем в двух выделенных парах; значит, чтобы в каждой выделенной паре был хотя бы один детектор, требуется не менее $2 \cdot 1030/2 = 1030$ детекторов.

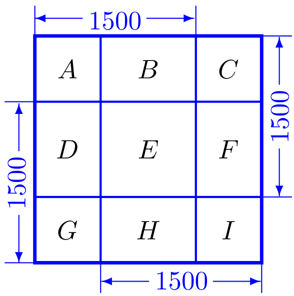


Рис. 23

Замечание. Существует много других примеров расположения 1030 детекторов, удовлетворяющих требованиям.

49. Совпадает с задачей **41**.

50. *Ответ:* $1008^2 = 1\,016\,064$ *точек.*

Пусть среди сфер есть r красных и $2016 - r$ зелёных. Так как у любых двух сфер максимум одна точка касания, количество синих точек не превосходит $r(2016 - r) = 1008^2 - (1008 - r)^2 \leq$ $\leq 1008^2$.

Приведём пример с таким количеством синих точек. Пусть l — некоторая прямая, α — плоскость, перпендикулярная l и пересекающая её в точке O, а ω — окружность с центром O и радиусом 1, лежащая в α. Построим 1008 красных сфер одинакового радиуса $r < 1$ с различными центрами $R_1, R_2, \ldots, R_{1008}$, лежащими на ω (рис. 24).

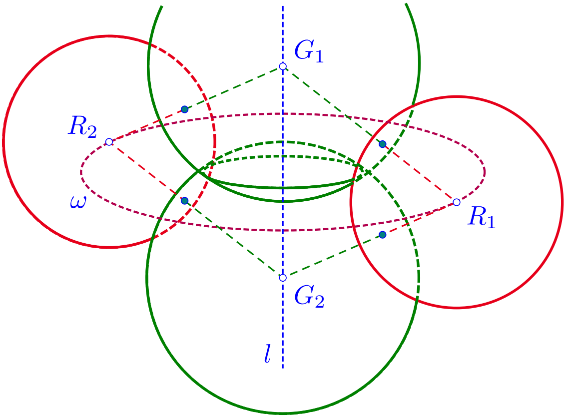


Рис. 24

Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_{1008}$ — различные точки на l, удалённые от O на расстояния $d_1, d_2, \ldots, d_{1008}$. Тогда расстояние между G_i и любой точкой R_j равно $\sqrt{1+d_i^2}$. Значит, если мы построим зелёную сферу с центром G_i и радиусом $\sqrt{1+d_i^2} - r$, она будет касаться всех синих сфер. При этом все точки касания будут попарно различными, поскольку они лежат на отрезках вида R_jG_i, которые не имеют общих точек, кроме концов. Значит, в нашей конструкции действительно будут отмечены 1008^2 синих точек.

Замечание. Все красные сферы в этом примере получаются друг из друга вращением вокруг прямой l. Поэтому, если зелёная сфера, центр которой лежит на l, касается одной красной сферы, то она касается и всех красных сфер.

51. Совпадает с задачей **43**.

52. *Ответ: нет, не обязательно.*

Приведём пример числа N, для которого все указанные числа будут различными. Положим

$$N = (3^2 - 2^2)^{105}(3^3 - 2^3)^{70}(3^5 - 2^5)^{126}(3^7 - 2^7)^{120}.$$

Тогда

$$N = M_2^2(3^2 - 2^2) = M_3^3(3^3 - 2^3) = M_5^5(3^5 - 2^5) = M_7^7(3^7 - 2^7)$$

при некоторых натуральных M_2, M_3, M_5 и M_7, не делящихся ни на 2, ни на 3. Отсюда

$$N = (3M_2)^2 - (2M_2)^2 = (3M_3)^3 - (2M_3)^3 = \\ = (3M_5)^5 - (2M_5)^5 = (3M_7)^7 - (2M_7)^7.$$

Даже все восемь чисел, участвующих в представлениях, различны, поскольку у любых двух из них разная степень вхождения либо двойки, либо тройки.

Замечание. Подобный пример можно построить из следующих соображений (все упоминающиеся числа — натуральные). Рассмотрим какие-нибудь числа вида $K_2 = x_1^2 - x_2^2$, $K_3 = y_1^3 - y_2^3$, $K_5 = z_1^5 - z_2^5$ и $K_7 = t_1^7 - t_2^7$. Чтобы, скажем, получить число, представимое в виде разности как третьих, так и пятых степеней, достаточно взять число, имеющее вид $K_3 A^3$ и одновременно $K_5 B^5$. Значит, подойдёт число вида $K_3^\alpha K_5^\beta$, где α делится на 5 и даёт остаток 1 при делении на 3, а β делится на 3 и даёт остаток 1 при делении на 5.

Аналогично, чтобы получить число, требуемое в задаче, достаточно взять число $K_2^{\alpha_2} K_3^{\alpha_3} K_5^{\alpha_5} K_7^{\alpha_7}$, где α_2 даёт остаток 1 при делении на 2 и делится на $3 \cdot 5 \cdot 7$, а остальные показатели обладают аналогичными свойствами. Доказать существование таких показателей можно разными способами — в частности, неконструктивно, с использованием китайской теоремы об остатках. После этого нужно ещё проверить, что полученные степени различны.

53. *Ответ: будет.*

Числа, которые делятся на 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 и 9, делятся и на их наименьшее общее кратное $\text{НОК}(1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9) = 504$. После 2016 следующим таким числом будет $2016 + 504 = 2520$, и оно как раз делится ещё и на 5.

54. *Ответ:* $k = -\frac{4}{3}$ *или* $k = -\frac{1}{2}$.

По теореме Виета произведению корней квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ равно c/a. Для исходного и изменённого трёхчлена произведения $1 \cdot k$ и $2 \cdot 3k$ отличаются друг от друга. Значит, Саша изменил значение коэффициента a или c. Рассмотрим два случая:

а) Саша заменил значение коэффициента a на A.

Так как коэффициенты b и c квадратного трёхчлена $f(x)$ остались прежними, то по теореме Виета получаем, что $b = -(1+k)\cdot a = -(2+3k)\cdot A$, а также $c = 1\cdot k\cdot a = 2\cdot 3k\cdot A$, откуда

$$\frac{a}{A} = \frac{2+3k}{1+k} = \frac{c/k}{c/(6k)} = 6.$$

Значит, $k = -\frac{4}{3}$. В качестве исходного трёхчлена, удовлетворяющего условию, можно взять, например, $f(x) = 6x^2 + 2x - 8$, который получается при $A = 1$. После замены старшего коэффициента на 1 получается трёхчлен $x^2 + 2x - 8$ с корнями 2 и $3\cdot(-\frac{4}{3}) = -4$.

б) Саша заменил значение коэффициента c на C.

Тогда $b = -(1+k)\cdot a = -(2+3k)\cdot a$, и значит, $k = -\frac{1}{2}$. Взяв, например, $a = 2$, получим исходный трёхчлен $f(x) = 2x^2 - x - 1$ с корнями 1 и $-\frac{1}{2}$. После замены свободного коэффициента на -6 получим трёхчлен $2x^2 - x - 6$ с корнями 2 и $3\cdot(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$.

55. *Ответ: в 6 утра.*

Обозначим скорости путешественников через v_1 и v_2, а расстояния, пройденные ими до встречи, — через s_1 и s_2 соответственно. На путь до встречи они затратили одинаковое время x, то есть

$$\frac{S_1}{v_1} = \frac{S_2}{v_2} = x.$$

С другой стороны, по условию $\frac{S_2}{v_1} = 9$ и $\frac{S_1}{v_2} = 4$. Перемножая эти равенства, получим, что $x^2 = 36$, то есть первую часть пути путешественники прошли за 6 часов. Поскольку они встретились в полдень, значит, вышли они на рассвете в 6 утра.

56. *Ответ: не более одной.*

Предположим, что возможно провести две окружности в соответствии с условием задачи. Пусть, для определённости, на окружности ω_1 с центром M_1 лежат точки M_2, M_3, M_4, а на окружности ω_2 с центом в M_2 — точки M_1, M_3, M_4. Значит, точки M_3 и M_4 лежат на пересечении окружностей ω_1 и ω_2 одинакового радиуса $r = M_1M_2$. Тогда точки M_1, M_3, M_2, M_4 образуют ромб с углами 60° и 120°, причём диагональ M_3M_4 длиннее его сторон.

Но тогда точки M_1, M_2, M_4 не лежат на окружности с центром в M_3, а точки M_1, M_2, M_3 — на окружности с центром в M_4. Таким образом, условие задачи не выполняется, противоречие.

Легко привести расположения точек, для которых существует только одна искомая окружность или ни одной.

57. *Ответ: а) существуют; б) не существуют.*

а) В качестве искомого набора можно, например, взять 10 чисел $1, 2, \ldots, 9, 15$, их сумма равна 60, среднее арифметическое — 6, а НОД равен 1.

б) Пусть НОД десяти чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$ равен d. Тогда каждое натуральное число a_i этого набора делится на d, причём частные от деления этих чисел на d также образуют возрастающую последовательность натуральных чисел; значит, $a_1 \geq d$, $a_2 \geq 2d, \ldots, a_{10} \geq 10d$. Но тогда сумма этих чисел не меньше $d + 2d + \ldots + 10d = 55d$, а их среднее арифметическое не меньше $5,5d$, то есть больше $5d$.

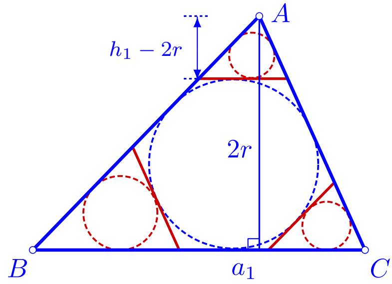


Рис. 25

58. *Ответ: б) треугольник прямоугольный.*

а) (Рис. 25.) Обозначим стороны треугольника через a_i, а опущенные на них высоты — через h_i. Используя формулы для площади треугольника, получим, что $2S = a_i \cdot h_i = r(a_1+a_2+a_3)$. Из подобия треугольников следует, что радиусы вписанных в них окружностей относятся так же, как и высоты:

$$\frac{r_i}{r} = \frac{h_i - 2r}{h_i} = 1 - 2 \cdot \frac{a_i}{a_1 + a_2 + a_3} \qquad (1 \leq i \leq 3).$$

Суммируя эти равенства по i, мы получаем искомое соотношение.

б) Из полученной формулы выразим a_i:

$$a_i = \frac{(a_1 + a_2 + a_3)(r - r_i)}{2r} = k \cdot (r - r_i).$$

Другими словами, стороны a_1, a_2 и a_3 треугольника ABC пропорциональны числам $r - r_1, r - r_2$ и $r - r_3$. Поскольку $r = r_1 + r_2 + r_3$, они будут пропорциональны $r_2+r_3=13, r_1+r_3=12$ и $r_1+r_2=5$. Числа $5, 12$ и 13 служат сторонами прямоугольного треугольника, так как $5^2+12^2=13^2$; значит, треугольник ABC — также прямоугольный.

59. *Ответ:* 1 *сентября.*

Подсчитаем количество денег, принесенных к концу n-го дня для хранения в жестяной банке:

$$1000\cdot(M+2M+\ldots+(n-1)M)=\frac{n(n-1)}{2}\cdot 1000M.$$

Количество денег, оттуда же забранных, составляет

$$1300\cdot(M+2M+\ldots+(n-31)M)=\frac{(n-30)(n-31)}{2}\cdot 1300M.$$

Теперь найдем такое значение n, при котором вторая величина больше первой:

$$\frac{(n-30)(n-31)}{2}\cdot 1300M>\frac{n(n-1)}{2}\cdot 1000M.$$

После упрощений получаем неравенство $n^2-261n+4030>0$, которое не зависит от M. Положительный корень этого уравнения больше $\frac{1}{2}(261+\sqrt{52001})=244,519\ldots$, и значит, всё рухнет в 245-й день года, то есть 1-го сентября — в День знаний.

60. *Ответ:* $\log_9 10>\log_{10} 11$.

Вычтем из данных величин по 1, тогда получим значения

$$\log_9\left(1+\frac{1}{9}\right)=\frac{\ln(1+1/9)}{\ln 9}\quad\text{и}\quad\log_{10}\left(1+\frac{1}{10}\right)=\frac{\ln(1+1/10)}{\ln 10}.$$

У второй дроби числитель меньше, чем у первой, а знаменатель — больше, поэтому вторая дробь меньше.

61. Опустим перпендикуляры BK и DM на прямую AC. По теореме Пифагора

$$BK^2=AB^2-AK^2=BC^2-KC^2,$$
$$DM^2=AD^2-AM^2=CD^2-MC^2,$$

или $AK^2 - KC^2 = AB^2 - BC^2$ и $AM^2 - MC^2 = AD^2 - CD^2$. По условию разности $AB^2 - BC^2$ и $AD^2 - CD^2$ совпадают, поэтому

$$AK^2 - KC^2 = AM^2 - MC^2.$$

Поскольку $AK + KC = AM + MC = AC$, отсюда легко получаем, что $AK - KC = AM - MC$, или $AK - AM = KC - MC$. Так как точки A, K, M и C лежат на одной прямой, то отсюда следует, что $KM = -KM$, и значит, точки K и M совпадают.

Таким образом, обе прямые BK и DK перпендикулярны AC. Если точки B, D и K лежат на одной прямой, то эта прямая — BD и она перпендикулярна AC. Если же эти точки лежат на разных прямых, то плоскость BDK перпендикулярна AC. Но тогда и прямая BD, лежащая в этой же плоскости, перпендикулярна AC.

62. *Ответ: достаточно двух разрезов.*

Ясно, что каждая девочка должна получить 15 бусинок, из которых 6 — красных. Выберем произвольный отрезок из 15 бусинок, и обозначим его «концевые» бусинки через A и B. Пусть на отрезке AB оказалось k красных бусинок, тогда в оставшейся части бус их $12 - k$. Разница между числом красных бусинок, попавших в эти отрезки, равна $|k - (12 - k)| = 2|k - 6|$. Если $k = 6$, эта разница равна 0, и отрезки бус искомые.

Предположим теперь, что $k \neq 6$; пусть, например, $k > 6$. Будем одновременно двигать точки разреза A и B вдоль бус (скажем, по часовой стрелке). Заметим, что при сдвиге на одну бусину число k может либо не измениться, либо увеличиться или уменьшиться на 1. Через 15 шагов отрезки бус поменяются местами: «первым» станет тот, в котором $12 - k$ красных бусинок, а «вторым» — тот, в котором их k. Разница между числом красных бусинок на «втором» и «первом» отрезках вначале была $2(6 - k)$, теперь же она равна $2(k - 6)$. Ясно, что эти числа противоположного знака. Значит, на каком-то шаге разность числа красных бус была равна 0. Этот момент и определяет точки разреза A и B бус.

63. *Ответ: единственный способ указан на рисунке* 26.

Сумма всех чисел в таблице равна 35, поэтому сумма чисел в каждом из пяти прямоугольников должна быть равна $35 : 5 = 7$. Значит, клетка с цифрой 7 составляет отдельную часть. Цифру

5 нельзя объединить с 3, поэтому 5 нужно объединить с двумя единицами. Теперь однозначно восстанавливается часть с 3 и 4. Если цифру 1, стоящую над 4, не объединить с единицей в левом нижнем углу, то можно получить максимум $1 + 3 + 1 + 1 = 6$, поэтому нужно объединить их вместе, и тогда к ним однозначно добавляется 3 и 2.

64. *Ответ:* 417.

После каждых четырёх ударов меча количество голов у змея уменьшится на $4 - 1 = 3$ головы, и значит, после $138 \cdot 4 = 552$ ударов Горыныч лишится $138 \cdot 3 = 414$ голов. Последними $555 - 552 = 3$ ударами Иван-Царевич отрубит ещё 3 головы. Значит, $x = 414 + 3 = 417$.

2	1	2	1
1	1	3	1
1	1	7	4
1	1	5	3

Рис. 26

65. *Ответ: да, сможет.*

Знайка может положить на одну чашу весов гирьки в 10, 30 и 50 граммов, а на другую — гирьку в 90 граммов. Комбинация $10 + 30 + 50 = 90$ определяет единственную четвёрку гирь, в которой суммарный вес трёх гирь совпадает с весом четвёртой гири. (Это следует из того, что у любых трёх гирь общий вес не меньше $10 + 30 + 50 = 90$ граммов, то есть не меньше веса самой тяжелой гири.) Значит, оставшаяся гиря однозначно будет гирей в 70 граммов.

Замечание. Комбинация $10 + 70 = 30 + 50$ не позволяет определить оставшуюся гирю, так как есть и другие четвёрки гирь с таким свойством. Например, $10 + 90 = 30 + 70$ и $30 + 90 = 50 + 70$.

66. *Ответ:* 399.

Пусть Миша живёт на этаже с номером x в квартире с номером $9x - k$, где $0 \leq k \leq 8$. Тогда Маша живёт в квартире с номером x и по условию $(9x - k) + x = 10x - k = 444$. Поскольку $0 \leq k \leq 8$, получаем единственное решение $x = 45$, $k = 6$. Поэтому Миша живёт в квартире с номером $9x - k = 399$.

67. *Ответ:* 37 *букетов.*

Покажем, как получить 30 букетов. Один красивый букет составим из гвоздики, ландыша и розы, два букета — из 2 гвоздик, 2 ландышей и 2 тюльпанов, 12 букетов — из 12 гвоздик, 12 роз и 12 тюльпанов, оставшиеся 22 букета — из 22 ландышей, 22 роз и 22 тюльпанов, всего $1+2+12+22 = 37$ красивых букетов. Докажем теперь, что более 37 красивых букетов получить нельзя.

Первое решение. Поделим цветы на две группы: в первую включим гвоздики, ландыши и розы, а во вторую — тюльпаны. Во второй группе только один вид цветков, поэтому в каждый красивый букет входит не менее двух цветков первой группы. Но из цветков первой группы можно составить не более $(15 + 25 + 35) : 2 < 38$ пар. Значит, более 37 красивых букетов получить невозможно.

Второе решение. Так как общее количество цветков $15 + +25+35+45 = 120$ и в каждом букете только три цветка, то можно составить не более $120 : 3 = 40$ букетов. Если в каждом из них будет по одному тюльпану, то $45 - 40 = 5$ тюльпанов останутся неиспользованными. Поэтому при составлении букетов использовано не более $120 - 5 = 115$ цветков, и значит, имеем не более 38 букетов. Теперь у нас 40 тюльпанов, и значит, при составлении букетов, по крайней мере $40 - 38 = 2$ тюльпана снова не будут использованы. Из оставшихся $115 - 2 = 113$ цветков нельзя получить 38 букетов по три цветка в каждом.

68. *Ответ:* 9 856 743 021.

Первая (слева) цифра числа x не больше 9, а вторая — не больше 8. Следующая цифра не может быть ни 7, ни 6, и значит, она не превосходит 5. Теперь в качестве четвёртой цифры нельзя использовать 7, но можно взять 6, так как $5 + 6 = 11$ — простое число. Следующая цифра не больше 7, пятая — не больше 4, а за ней — не больше 3. Оставшиеся три цифры 0, 2 и 1 располагаются в этом же порядке. Итак, наибольшее интересное число 9 856 743 021.

69. Совпадает с задачей **65**.

70. *Ответ:* 900. *Условию задачи удовлетворяют все четырёхзначные числа, которые делятся на* 10.

Пусть $\overline{xyzt}$ — искомое четырёхзначное число. По условию оно делится на $\overline{xyz}$. На это же число делится и $\overline{xyz0}$, а значит, и разность, $\overline{xyzt}-\overline{xyz0}$. Но эта разность меньше 10. Значит, она равна 0, то есть $\overline{xyzt} = \overline{xyz0}$. Получается, что надо найти все четырёхзначные числа, оканчивающиеся нулем. Таких чисел столько же, сколько трёхзначных чисел, то есть 900.

71. *Ответ:* 50 *выстрелов.*

Разобьем доску на 25 квадратов размером 2×2. В каждый такой квадрат нужно сделать не менее двух выстрелов, иначе в нём можно разместить трёхклеточный уголок, в который не будет произведено ни одного выстрела. Таким образом, нужно сделать не менее $25 \cdot 2 = 50$ выстрелов. С другой стороны, если раскрасить клетки доски в «шахматном» порядке и стрелять только по чёрным клеткам, то за 50 выстрелов корабль будет наверняка ранен.

72. Совпадает с задачей **67**.

73. *Ответ:* 120 347 658.

Первая (слева) цифра числа x не меньше 1, вторая — не меньше 2, так как комбинация цифр 1 и 0 даёт непростое число 1. В качестве третьей цифры можно взять 0, так как $2 + 0 = 2$ — простое число. Следующая цифра не меньше 3, пятая цифра — не меньше 4. Шестая цифра не может быть ни 5, ни 6, и значит, она не меньше 7, за ней — не меньше 6. Оставшиеся две цифры 5 и 8 располагаются в этом же порядке. Итак, наименьшее интересное число 120 347 658.

74. *Ответ:* 13.

Сумма всех натуральных чисел от 1 до 12 равна 78. Разбив их на 6 пар, заметим, что сумма хотя бы в одной из них должна быть не меньше 13, то есть искомое наименьшее значение не меньше 13. Осталось привести пример, когда максимальная сумма равна 13:

$$12,\ 1,\ 11,\ 2,\ 10,\ 3,\ 9,\ 4,\ 8,\ 5,\ 7,\ 6.$$

75. *Ответ: могло.*

Разобьем 12 команд на две группы по 6 команд в каждой. Если *каждая* команда первой группы выиграет у *каждой* команды второй группы, то после этих 6 туров будет ровно 6 команд, которые выиграли у других 6 команд.

76. (Рис. 27.) Отложим на луче NC отрезок $NE = NB$. Поскольку $\angle BNE = \angle AND = 60^\circ$ и $NE = NB$, то треугольник BNE — равносторонний, и значит, $BE = BN$. Так как $\angle BND = 120^\circ$, то в треугольнике BND оставшиеся два угла в сумме меньше 60°. В частности, угол BDN и равный ему угол BCD

тоже меньше 60°. Так как $\angle BEN = 60^\circ$, то $\angle BEN > \angle BD$, и значит, точка E лежит на отрезке NC и $\angle BEC = 120^\circ$.

В треугольниках CBE и DBN отметим пары равных сторон $BE = BN$ и $BC = BD$, а также пары равных углов $\angle BND = \angle BEC = 120^\circ$ и $\angle BDN = \angle BCE$, и значит, $\angle NBD = \angle CBE$. Значит, треугольники CBE и DBN равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $EC = ND = AN$, поэтому $AB = AN + NB = EC + NE = NC$, то есть $AB = CN$.

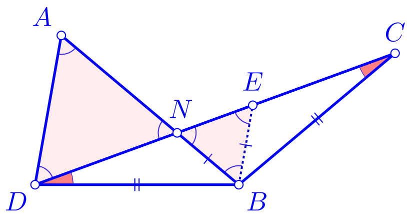


Рис. 27

77. *Ответ:* 24.

Пусть x — количество знакомых золотой рыбки. Это число делится на 2, 3 и 8, и поэтому x делится на 24, то есть $x = 24m$. Таким образом, число знакомых карасей $12m$, окуней — $8m$, ершей — $3m$, морских коньков —

$$24m - (12m + 8m + 3m) = m.$$

По условию число m не превосходит одной шестнадцатой числа x, причем если m увеличить на единицу, то полученное число будет больше одной шестнадцатой x, то есть

$$m \leq \frac{24m}{16} < m + 1,$$

откуда $m \leq 2$, и значит, $m = 1$. Следовательно, $x = 24$.

78. *Ответ: на* 25%.

Пусть баночка кофе стоит 100 каких-то условных денежных единиц (д.е.). Тогда три пакета молока обойдутся в 96 д.е., так что каждый стоит 32 д.е. Пять пакетов стоят 160 д.е., а две банки кофе — 200 д.е., что больше 160 д.е. на 40 единиц, то есть на $40/160 \cdot 100\% = 25\%$.

79. *Ответ: да.*

Число $2016 = 12 \cdot 168$ делится на 12, поэтому умножая данное в условии равенство на 168, получим $2016 = 168 + 336 + 504 + 1008$.

Замечание. Несложно доказать, что любое число n, кратное 6, является полусовершенным. Действительно, если $n = 6k$, то число n можно представить в виде суммы его собственных делителей: $n = k + 2k + 3k$. Число 2016 кратно 6, поэтому его тоже можно представить в виде суммы делителей.

80. *Ответ: нет.*

Первое решение. Предположим, что это возможно. Заметим, что 5 и 9 дают остатки 1 при делении на 4. Количество чисел в столбцах и строках кратно 4, поэтому и суммы в них кратны 4, а значит, кратны и 84. Заметим, что сумма в строке может принимать лишь значения, принадлежащие отрезку $[100; 180]$. Тогда она может быть равна лишь 168, а сумма всех чисел в таблице $168 \cdot 16 = 2688$. С другой стороны, сумма чисел в столбцах может принимать лишь значения, принадлежащие отрезку $[80; 144]$. Значит, она может быть равна лишь 84. Сумма всех чисел в таблице при этом будет $84 \cdot 20 = 1680$, что противоречит утверждению выше.

Второе решение. Заполним столбец таблицы одними пятерками, сумма чисел в нем будет равна $5 \cdot 16 = 80$. Заменяя одну пятерку на девятку, мы увеличим сумму на 4. Значит, сумма может равняться 80, 84, 88, …, 144, все числа кратны 4. Среди этих чисел на 21 делится только 84. Значит, в каждом столбце сумма чисел равна 84, а во всей таблице — $20 \cdot 84$. Аналогично, сумма чисел в строке может принимать значения 100, 104, 108, …, 180, на 21 среди этих чисел делится только 168, так что сумма во всей таблице равна $168 \cdot 16$. Результаты подсчета двумя способами не совпадают.

81. Первый сгиб — это серединный перпендикуляр к стороне AB (рис. 28). Второй сгиб — это серединный перпендикуляр к медиане CK. По условию эти серединные перпендикуляры пересекаются в точке M на стороне AC, поэтому $MK = MC$. Значит, треугольник KMC — равнобедренный, и $\angle MKC = \angle MCK$. Тогда $\angle BKC = 90° - \angle CKM = 90° - \angle KCM = \angle BCK$, то есть треугольник BKC — равнобедренный. Отсюда следует, что серединный перпендикуляр к KC пройдет через вершину B.

82. Будем рассматривать прямую как числовую и обозначать точки их координатами. Условие «одна из этих трех точек является серединой отрезка между двумя другими» означает, что три точки образуют арифметическую прогрессию, они равноотстоящие.

а) Покажем, что условию удовлетворяют точки 0, 1/3, 1/2, 2/3, 1 или (что практически то же самое) 0, 2, 3, 4, 6. Действительно, числа 0, 2, 4, 6 образуют арифметическую прогрессию. Любая пара из них кроме $(0, 6)$ входит в тройку $(0, 2, 4)$ или $(2, 4, 6)$. Пара $(0, 6)$ входит в тройку $(0, 3, 6)$. С другой стороны, точка 3 входит в прогрессии $(0, 3, 6)$ и $(2, 3, 4)$, которые содержат все пары с числом 3.

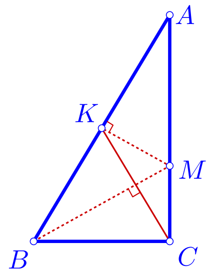


Рис. 28

б) Пусть на прямой расставлено 4 точки, удовлетворяющие условию. Рассмотрим крайние из них. Можно считать, что это точки -1 и 1. Тогда для пары $(-1, 1)$ третьей точкой может служить только середина отрезка между ними, то есть точка 0. Куда можно поставить четвертую точку? Пусть, для определенности, она соответствует положительному числу x (случай отрицательного числа рассматривается аналогично). Паре $(x, 1)$ должна в качестве третьей соответствовать точка, лежащая левее x, ею может быть только 0. Значит, $x = 1/2$. С другой стороны, паре $(-1, 1/2)$ может соответствовать либо $-1/4$ (середина отрезка), либо $1/2 + (1/2 - (-1)) = 2$. Но эти точки не являются отмеченными. Значит, четверки точек, удовлетворяющей условиям, не существует.

83. *Ответ:* 43 *или* 259.

Обозначим число Маши через m, а его делитель — через p. Айрат проделал следующие действия с числом p: $p \to p + 5 \to$ $\to 6(p + 5) \to m - 6(p + 5)$. Последнее выражение равно 7, то есть получаем уравнение $m - 6p = 37$. Число p — делитель m, и значит, $m - 6p$ кратно p. Поэтому p является также делителем числа 37, то есть $p = 1$ или $p = 37$. Отсюда число $m = 6p + 37$ равно $6 \cdot 1 + 37 = 43$ или $6 \cdot 37 + 37 = 259$. Каждое из найденных чисел удовлетворяет условию.

84. *Ответ:* $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$.

Введем обозначение $a^3 = t$. Составим кубическое уравнение, корнем которого является число t. Поскольку a — корень уравнения, для него выполняется равенство $a^3 = a + 1$, и значит, $a = a^3 - 1 = t - 1$. Подставив это выражение в исходное уравнение, получим $(t-1)^3 - (t-1) - 1 = 0$, что после упрощения приводится к виду $t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 0$.

85. *Ответ:* $\frac{1}{5050}$.

При стирании двух дробей $a = \frac{1}{m}$ и $b = \frac{1}{n}$ будет записано число

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{\frac{1}{mn}}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = \frac{1}{m+n} .$$

Другими словами, после указанного преобразования числитель полученной дроби остаётся равным единице, а знаменатель превращается в сумму знаменателей стираемых дробей. Значит, независимо от порядка выбора пар числитель конечной дроби останется равным единице, а знаменатель будет равен

$$1 + 2 + \ldots + 100 = 5050.$$

86. *Ответ: нет.*

Построим пример искомого четырехугольника.

Первое решение. Рассмотрим треугольник ABC, и пусть BM — его медиана (рис. 29). Она делит треугольник на части одинаковой площади. Отразим точку B симметрично относительно прямой AC, получим точку D. По построению треугольники BCM и DCM равны, следовательно, их площади совпадают. То же верно для треугольников AMD и ABD.

Проверим, является ли четырехугольник $ABCD$ параллелограммом. Если да, то должно выполняться равенство $BC = AD$, что равносильно $BC = AB$. Значит, если исходный треугольник ABC не равнобедренный, то четырехугольник $ABCD$ — не параллелограмм.

Второе решение. Рассмотрим параллелограмм $ABCF$, и пусть M — точка пересечения его диагоналей (рис. 30). Площади треугольников ABM, BCM, CFM и FAM равны. Сдвинем теперь точку F параллельно диагонали AC, получим некоторую точку D. Всегда можно выбрать ее так, чтобы четырехугольник оставался выпуклым. В треугольниках CFM и CDM общее основание CM и одинаковые высоты, значит, их площади равны. То же верно и для треугольников FAM и DAM. Значит, четырехугольник $ABCD$ — искомый. В силу того, что точка D не лежит на прямой CF, сторона CD не параллельна AB, так что $ABCD$ — не параллелограмм. Заметим, что четырехугольник, построенный первым способом — частный случай второго решения. Он получается из параллелограмма «переворачиванием» треугольника AFC и прикладыванием его к той же диагонали. В этом случае $CD = AF$ и $AD = CF$, тогда треугольники CFM и CDM равны, так же, как и треугольники FAM и DAM.

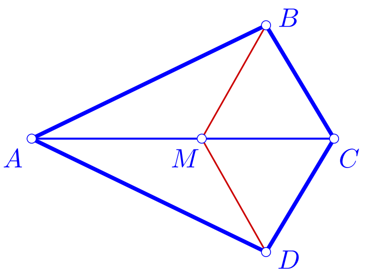


Рис. 29

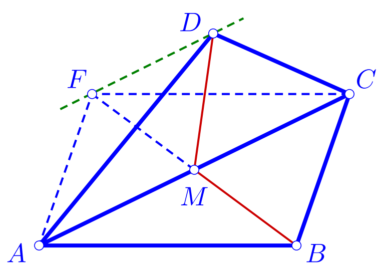


Рис. 30

87. Разделим квадрат 8×8 на три прямоугольника размерами 4×7, 4×7 и 1×8. Расстояния между любыми двумя точками внутри каждого прямоугольника по теореме Пифагора не превосходит $\sqrt{4^2+7^2} = \sqrt{1^2+8^2} = \sqrt{65}$. Из четырёх данных точек, по крайней мере, две попадут в один из этих прямоугольников, и поэтому расстояние между ними будет не более $\sqrt{65}$.

88. *Ответ: не всегда.*

Из трех отрезков можно составить треугольник тогда и только тогда, когда наибольший из них по длине меньше, чем сумма длин двух других. Рассмотрим отрезки с длинами 1, 2, 4, 8, ..., 2^{2015}. Пусть $k > l > m$ — степени двойки. В силу целочисленности имеем $l \le k-1, m \le k-2$. Тогда $2^k = 2^{k-1} + 2^{k-1} > 2^l + 2^m$.

Замечание. В качестве примера можно приводить и другие наборы быстрорастущих чисел, например, последовательность Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, ..., $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$.

89. *Ответ:* $n = 15$.

Для корня уравнения выполняется равенство $a^{11}+a^7+a^3 = 1$, или $a^3(a^8+a^4+1) = 1$. В скобках записан неполный квадрат суммы, поэтому после умножения равенства на a^4-1, получим $a^3(a^{12}-1) = a^4-1$. Это равенство можно переписать в виде $a^4+a^3 = a^{15}+1$. Сравнивая полученное равенство с искомым, получаем, что $a^{15} = a^n$ или $a^{n-15} = 1$. Если показатель степени не равен 0, то последнее равенство выполняется только при $a = 1$. Но единица не является корнем уравнения $x^{11}+x^7+x^3 = 1$. Значит, $n-15 = 0$.

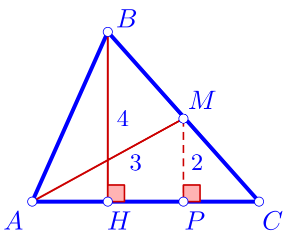


Рис. 31

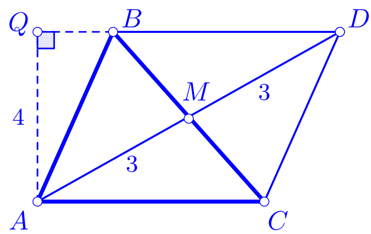


Рис. 32

90. *Ответ: не может.*

Первое решение. Пусть BH — высота треугольника ABC (рис. 31). Отметим, что для остроугольного треугольника точка H лежит между вершинами A и C. Из точки M опустим перпендикуляр MP на сторону AC; по построению $MP \parallel BH$, так что MP — средняя линия треугольника BHC, поэтому $MP = 2$ и P — середина HC. Тогда $AP > HP = PC$, и значит, $AC < 2 \cdot AP = 2\sqrt{3^2-2^2} = 2\sqrt{5}$. Но последнее число меньше 5.

Второе решение. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ (рис. 32), и пусть AQ — его высота, проведённая из точки A к стороне BD. Отрезок AQ перпендикулярен прямым BD и AC, так что он равен высоте треугольника ABC, опущенной из вершины B. Поскольку угол BAC — острый, сторона BD равна AC и меньше, чем QD.

Однако по теореме Пифагора $QD = \sqrt{6^2-4^2} = \sqrt{20}$, что меньше 5.

91. *Ответ:* 100.

Сначала заметим, что операцию преобразования

$$(a, b) \to ab + a + b$$

можно записать в виде $a * b = (a+1)(b+1) - 1$. Это выражение не зависит от порядка следования чисел: $a * b = b * a$, то есть пара (b, a) также переходит в $(a+1)(b+1) - 1$. Если теперь применить это преобразование к паре чисел $a * b$ и c, то результат «произведения» $a * b * c$ не будет зависеть от порядка выполнения операции $*$:

$$(a * b) * c = (a * b + 1)(c + 1) - 1 = (a+1)(b+1)(c+1) - 1.$$

Таким образом, независимо от порядка выбора пар чисел после 99 шагов на доске останется одно число

$$\left(\frac{1}{1} + 1\right)\left(\frac{1}{2} + 1\right)\ldots\left(\frac{1}{100} + 1\right) - 1 = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{101}{100} - 1 = 100.$$

Замечание. Ответ можно легко угадать, если выполнять действия последовательно, $(1, 1/2) \to 2$, $(2, 1/3) \to 3$, $(3, 1/4) \to 4$, и так далее. Однако по условию порядок действий с числами не фиксирован, и при таком способе рассуждений остаётся невыясненным вопрос, будет ли окончательный результат другим при иной группировке чисел.

92. *а*) Например, многоугольники можно расположить, как показано на рисунке 33.

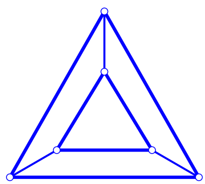


Рис. 33

б) Предположим, что существуют хотя бы 5 таких многоугольников. Рассмотрим один из них, P_0. Кроме него существуют еще не менее 4-х многоугольников, каждый из которых примыкает к одной из сторон P_0. Пронумеруем эти стороны против часовой стрелки, считая, что многоугольник P_k имеет с P_0 общую сторону с номером k. Каждая такая сторона лежит на прямой; эта прямая делит плоскость на две полуплоскости, в одной из которых находится P_0, в другой (назовем ее π_k) — P_k.

Рассмотрим прямые с номерами 1 и 3. Они пересекаются либо в π_2, либо в π_4; пусть, для определенности, в π_2. Тогда многоугольник P_2 лежит внутри треугольника, образованного прямыми 1, 2 и 3, и не может иметь общих точек с многоугольником P_4.

В случае, когда прямые 1 и 3 параллельны, треугольник можно заменить соответствующей полуполосой.

Замечание. Требуемое свойство вытекает также из известной теоремы теории графов. Выберем внутри каждого многоугольника точку. Если два многоугольника имеют общую сторону, то соединим соответствующие точки отрезком. Ясно, что эти отрезки не пересекаются. Если многоугольников не менее 5, получим полный граф 5-го порядка. Но этот граф, как известно, не планарный (не вкладывается в плоскость без пересечения ребер). Противоречие.

93. *Ответ:* $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}; \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}; \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$.

Ясно, что x и y отличны от нуля. При этом условии второе уравнение можно переписать в виде $x+y=-2xy$, а первое после замены суммы $x+y$ равным ему слагаемым $-2xy$ приобретает вид $x^2-2xy+y^2=4$ или $(x-y)^2=4$. Рассмотрим два случая.

1) $\begin{cases} x-y=2 \\ 2xy+x+y=0. \end{cases}$

Из первого уравнения выражаем $y=x-2$ и подставляем во второе. Полученное уравнение $2x(x-2)+2x-2=0$ после упрощения сводится к $x^2-x-1=0$. Его корнями будут $x = \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$, соответствующие значения y равны $\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{5})$.

2) $\begin{cases} x-y=-2 \\ 2xy+x+y=\ 0. \end{cases}$

Первое уравнение можно переписать в виде $y-x=2$, так что эта система отличается от предыдущей только переобозначением переменных x и y.

94. *Ответ: второе число больше.*

Обозначим 2015! через n, тогда $2016! = 2016\cdot n$. Заданные в условии числа принимают вид $(2016n)^n = 2016^n\cdot n^n$ и $n^{2016n} = (n^{2016})^n$. Чтобы узнать, какое из чисел больше, поделим второе число на первое. Частное будет равно

$$\frac{(n^{2016})^n}{2016^n\cdot n^n} = \left(\frac{n^{2016}}{2016n}\right)^n = \left(\frac{n^{2015}}{2016}\right)^n.$$

Ясно, что n^{2015} гораздо больше, чем 2016, так что эта дробь больше 1.

95. *Ответ:* $p = 2, q = 13$.

Сначала докажем, что при нечётных p левая часть делится на 3. Имеем

$$2^{2p} - 2^p + 1 = 4^p - 2^p + 1 = (3+1)^p - (3-1)^p + 1.$$

Раскрывая скобки в первых двух слагаемых, получим слагаемые, содержащие степени 3, кроме свободных членов. Свободные члены в сумме равны $1^p - (-1)^p + 1$.

Если p — чётно, то $p = 2$ и $2^{2p} - 2^p + 1 = 13$ — простое число. Если же p — нечётно, то $1^p - (-1)^p + 1 = 3$, так что левая часть делится на 3. Она может быть простым числом только тогда, когда в точности равна 3. Заметим, что при $p > 2$ имеем $2^p > p+2$, так что левая часть больше, чем $2^{p+2} - 2^p + 1 = 3 \cdot 2^p + 1 > 13$, так что она не может быть простым числом.

Замечание. Факт делимости на 3 можно установить и перебором. Заметим, что число 4^p всегда имеет остаток 1 при делении на 3, а числа 2^p, то есть 2, 4, 8, ..., имеют поочередно остатки 2 и 1. В частности, при нечетных p числа 2^p имеют остаток 2, и значит, выражение $2^{2p} - 2^p + 1$ при делении на 3 даёт остаток $1 - 2 + 1 = 0$.

96. *Ответ:* 60° *или* 36°.

Обозначим длину ребра BC через a, а углы при вершине D — через α (рис. 34). Треугольники CDA и BDA — равнобедренные и равны между собой. Значит, $CD = BD = b$, и треугольник BDC — также равнобедренный, но угол α у него расположен при вершине.

Итак, две боковые грани — равнобедренные треугольники со сторонами a, a, b и с углом α при основании, а третья — также равнобедренный треугольник со сторонами a, b, b и с углом α при вершине.

Если $a = b$, то эти треугольники правильные, и угол при вершине равен 60°.

Пусть теперь $a \neq b$. Заметим, что в обоих треугольниках сторона a видна под углом α. Если совместить равные стороны треугольников (на рисунке 35 это отрезок PQ), третьи вершины D_1 и D_2 будут лежать на одной и той же окружности. Мы видим, что треугольник PD_1D_2 — равнобедренный с боковой стороной b, причем он вписан в ту же окружность, что и треугольник PQD_2. Значит, эти треугольники равны между собой. (Для доказательства достаточно заметить, что равные хорды стягивают равные дуги). Значит, $\angle P = \angle Q = 2\alpha$, а сумма углов треугольника PQD_1 составляет 5α. Следовательно, $\alpha = 180^\circ/5 = 36^\circ$.

Заметим, что во втором случае пирамида получается «сильно скошенной». Проекция вершины D на плоскость основания попадает на ось симметрии треугольника ABC, вне него, с другой стороны от точки A.

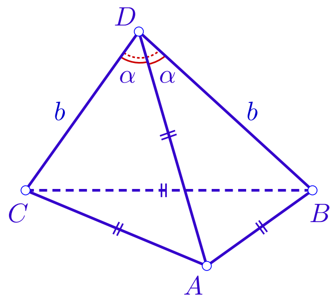


Рис. 34

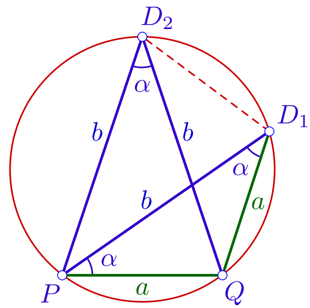


Рис. 35

97. Оценим каждое из положительных чисел x, y и z с помощью неравенства о среднем арифметическом и геометрическом. По условию $xyz = 1$, поэтому

$$x = \sqrt[3]{\frac{x^3}{xyz}} = \sqrt[3]{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{x}{y}} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{y}\right).$$

Аналогичные неравенства запишем для переменных y и z:

$$y \leq \frac{1}{3}\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z}\right) \quad \text{и} \quad z \leq \frac{1}{3}\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{x}\right).$$

Складывая эти соотношения, получим неравенство

$$x + y + z \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{y} + \frac{y}{z}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2y}{z} + \frac{z}{x}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2z}{x} + \frac{x}{y}\right),$$

которое легко приводится к требуемому.

98. *Ответ:* 50.

Покажем, что к моменту финиша самого быстрого бегуна любые двое разноцветных бегунов встретились ровно два раза, откуда и будет вытекать ответ $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$.

Пусть s (*км*) — длина дорожки. Положим $T = 2s/12$ (*ч*). Так как скорость самого быстрого бегуна меньше 12 *км/ч*, он дважды пробежит дорожку за время, большее T. Покажем, что все возможные встречи бегунов случатся раньше, чем после старта истечёт T часов.

Возьмём двух разноцветных бегунов. Первая их встреча случится, когда они вместе пробегут длину дорожки, и это произойдёт раньше, чем через $s/18 = T/3 < T$ часов. Когда более быстрый из этих двоих пробежит всю дорожку, более медленный, скорость которого составляет более $9/12 = 3/4$ скорости более быстрого, пробежит уже больше $3/4$ длины дорожки и потому более быстрый, повернув, не успеет его догнать (для этого он должен был бы бежать по крайней мере вчетверо быстрее более медленного). Значит, вторая встреча этих двоих случится, когда оба будут бежать назад. К этому моменту они вместе пробегут расстояние $3s$, и это произойдёт раньше, чем через $3s/18 = T$ часов, что и завершает доказательство.

99. *Ответ:* 5, 10, 15, 20, 30, 45.

Пусть p — достаточно большое нечётное простое число. Представим число p^2 в виде суммы $a_1+\ldots+a_6$ различных натуральных чисел, не делящихся на p. Числа $pa_1, \ldots, pa_6$ будут искомыми: произведение любых двух из них не делится на их сумму, равную p^3, а произведение любых трёх — делится. Пример получается уже при $p = 5$: разложение $25 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 9$ даёт набор чисел 5, 10, 15, 20, 30, 45.

100. Обозначим через M и N точки пересечения прямой XY со сторонами AB и AC соответственно (рис. 36). Заметим, что $\angle MXB = \angle XBC = \angle MBX = \angle NQY = \angle YQP = \angle NYQ$, поэтому $MX = MB = NC$ и $NY = NQ = MP$. Кроме того, $\angle CNY = \angle PMX$. Следовательно, треугольники PMX и YNC равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $PX = YC$.

Замечание. Аналогичное решение можно получить, обозначив через T точку пересечения BX и PQ и доказав, что треугольники PTX и CQY равны.

101. Пусть X и Y — произвольные два города, а $X, Z_1, \ldots, Z_k, Y$ — маршрут между ними с наименьшим числом пересадок. Предположим, что $k \geq 3$. Тогда Z_2 не соединён рейсом ни с X, ни с

Y, иначе наш маршрут можно бы было бы сократить, воспользовавшись этим рейсом. По условию, существует город B такой, что каждый город, отличный от Z_2 и B, соединён рейсом хотя бы с одним из них. Значит, каждый из городов X и Y либо соединён с B, либо сам является городом B. Но, если $X \neq B \neq Y$, то существует маршрут X, B, Y с одной пересадкой, в противном случае существует даже рейс между X и Y. В любом случае мы получили противоречие с выбором k. Значит, предположение неверно, и $k \leq 2$. В силу произвольности выбора X и Y требуемое утверждение доказано.

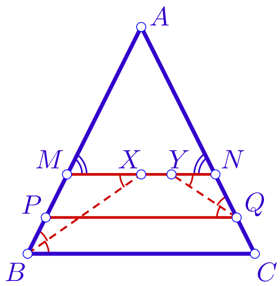


Рис. 36

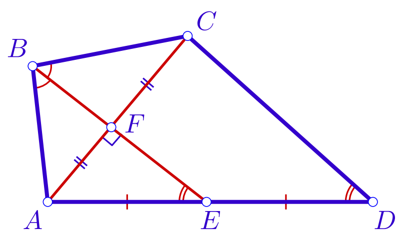


Рис. 37

102. *Ответ: нет, не могло.*

В первом круге обоими соседями каждого лжеца были рыцари. Сопоставив каждому лжецу его правого соседа в этом круге, убеждаемся, что рыцарей на острове не меньше, чем лжецов. В втором круге обоими соседями каждого рыцаря были лжецы. Сопоставив каждому рыцарю его правого соседа в этом круге, убеждаемся, что рыцарей на острове не больше, чем лжецов. Получается, что рыцарей и лжецов на острове поровну. Но тогда на острове чётное число жителей, а число 2017 — нечётное.

103. *Ответ:* $\angle ACD = 90°$.

Пусть E — середина стороны AD, а F — точка пересечения BE и AC (рис. 37). Из условия имеем: $\angle B = 360° - 2(\angle A + \angle D)$, откуда $\angle AEB = 180° - \angle A - \frac{1}{2}\angle B = \angle D$. Значит, $BE \parallel CD$, и EF — средняя линия треугольника ACD, то есть $AF = FC$. Таким образом, BF — биссектриса и медиана треугольника ABC, а, значит, и его высота. Следовательно, прямая CD, параллельная BF, также перпендикулярна AC, откуда и вытекает ответ.

104. *Ответ:* $n^2 + n$.

Оценка. Разделим доску на n^2 квадратов 2×2. Кот может смахнуть любые две фишки, стоящие в одном квадрате. Пока фишек на доске больше, чем n^2, у него есть возможность смахнуть две фишки, то есть он сможет сделать это по крайней мере $n+1$ раз (после n таких действий на доске ещё остаётся $n^2+1 > n^2$ фишек). Смахивая оставшиеся фишки поодиночке, кот обойдётся $(n+1)+(n^2-1) = n^2+n$ взмахами.

Пример. Разобьём доску на квадраты 2×2. Рассмотрим диагональ, идущую из левого нижнего угла в правый верхний. В левый нижний квадрат поставим 4 фишки, а в остальные, которые пересекает эта диагональ — по 3 фишки так, чтобы левая нижняя клеточка осталась пустой. Во все квадраты выше диагонали поставим по одной фишке в левый верхний угол, во все квадраты ниже — в правый нижний угол. Получим ровно $(n^2-n)+3n+1 = (n+1)^2$ фишек. При данной расстановке кот не может одним взмахом сбить фишки из разных квадратов, поэтому чтобы сбить все диагональные фишки, необходимо хотя бы $2n$ взмахов, на остальные фишки — ещё n^2-n взмахов, то есть всего n^2+n взмахов.

105. *Ответ: можно.*

Так как на доске написано 33 нечётных числа, в первую минуту будет дописана сумма попарных произведений, среди которых $33 \cdot 32/2$ нечётных. Значит, дописанное число будет чётным, и на доске останется ровно 33 нечётных числа. Повторяя эти рассуждения, получаем, что на доске в любой момент будет ровно 33 нечётных числа.

Пусть A_n — число, записанное на n-й минуте, а S_n — сумма всех чисел на доске перед дописыванием A_n. По доказанному, число S_n нечётно. Число A_{n+1} отличается от A_n на сумму всех попарных произведений, в которых участвует A_n, то есть на S_nA_n. Итак, $A_{n+1} = A_n + A_nS_n = A_n(1+S_n)$. Поскольку число $1+S_n$ чётно, получаем, что степень двойки, на которую делится A_{n+1}, больше, чем степень двойки, на которую делится A_n. Итак, эта степень возрастает с каждой минутой хотя бы на 1, и через 10000000 минут A_n наверняка будет делиться на $2^{10000000}$.

106. *Ответ: да, могло.*

В качестве примера подходит произведение $1 \cdot 1 \cdot 676$. После указанной операции получается $(-2) \cdot (-2) \cdot 673 = 2692 = 676 + 2016$.

Замечание. Приведённый пример — единственный. Укажем, как его придумать. Предположим, что два из сомножителей равнялись 1, а третий — a. Их произведение было равно a, а после уменьшения превратилось в $(-2)^2(a-3) = 4a - 12$. Значит, при $4a - 12 = a + 2016$ условие соблюдается. Решая это уравнение, получаем $a = 676$.

107. *Ответ: за 2 хода.*

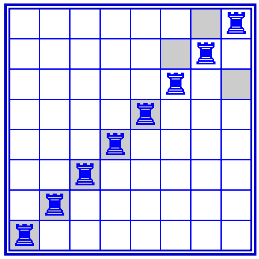


Рис. 38

Покажем сначала, как Пете выиграть за 2 хода. Первым ходом он выставит 8 ладей по диагонали доски. Если он ещё не выиграл, то на диагонали есть нечётное число задуманных Васей клеток. В частности, на ней есть как клетка A, задуманная Васей, так и клетка B, не задуманная им.

Пусть на втором ходу Петя поставит ладьи на 6 диагональных клеток, кроме A и B, а также на клетки C и D, лежащие в тех же строках, что A и B соответственно, и в тех же столбцах, что B и A соответственно. Каждая новая ладья стоит или в одной строке, или в одном столбце с A, то есть их клетки Вася задумать не мог. Значит, в новой конфигурации ладей количество клеток, задуманных Васей, уменьшилось ровно на одну, то есть стало чётным, и Петя выиграл.

Осталось показать, что Петя не может гарантированно выиграть за один ход. Пусть у него это получилось. Переставив столбцы доски, можно считать, что он сделал первый ход так, как показано на рис. 38; тогда он не выиграет, если Васины клетки — отмеченные серым на том же рисунке.

108. *Ответ: нет, не существует.*

Первое решение. Пусть такой треугольник существует. Можно считать, что $x \geq y \geq z$. Тогда по неравенству треугольника $y + z > x$, откуда

$$(x+y)(x+z)(y+z) > (x+y)(x+z)x =$$

$$= x^3 + x^2y + x^2z + xyz > x^3 + x^2y + x^2z > x^3 + y^3 + z^3.$$

Противоречие.

Замечание. В подобном решении можно обойтись и без упорядочения переменных. Именно, группируя слагаемые и используя неравенство треугольника, получим

$$(x+y)(x+z)(y+z) = x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y) + 2xyz >$$
$$> x^2 \cdot x + y^2 \cdot y + z^2 \cdot z + 0.$$

Второе решение. Пусть такой треугольник существует. Отметим точки касания его сторон со вписанной окружностью. Пусть отрезки касательных от вершин до этих точек точек касания равны a, b и c, тогда $x = b + c$, $y = a + c$ и $z = a + b$. Имеем

$$(x+y)(y+z)(z+x) = (a+2b+c)(a+b+2c)(2a+b+c) =$$
$$= 2(a^3+b^3+c^3) + 7(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2) + 16abc$$

и

$$x^3+y^3+z^3 = (a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3 =$$
$$= 2(a^3+b^3+c^3) + 3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2).$$

Значит, разность $(x+y)(y+z)(z+x) - x^3 - y^3 - z^3$ после подстановки и приведения подобных слагаемых приобретает вид $4(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) + 16abc$, что, очевидно, больше 0. Противоречие.

Замечание. Существуют три положительных числа x, y, z такие, что равенство из условия выполнено — например, 1, 1, $1+\sqrt{5}$. Таким образом, условие, что x, y, z являются длинами сторон треугольника, существенно.

109. Первое решение. Пусть O — центр треугольника ABC, и пусть ω касается отрезков BQ, QP и PC в точках K, L и M соответственно (рис. 39). В силу симметрии равностороннего треугольника прямые BO и CO проходят через точки M и K соответственно.

Отложим на луче LO отрезок OX, равный OA (так что X лежит на окружности Ω). Поскольку PL и PM — касательные к ω, имеем $\angle POL = \angle POM$, а значит, $\angle POB = \angle POX$. Тогда треугольники POB и POX равны по двум сторонам ($OB = OX$, сторона OP — общая) и углу между ними. Итак, $PX = PB$, то есть точка X лежит на окружности Ω_b. Аналогично, X лежит и на окружности Ω_c.

Второе решение. Пусть O — центр треугольника ABC. Окружности Ω и Ω_b пересекаются в точке B. Вторая точка их пересечения — обозначим её через B' — симметрична точке B относительно линии центров PO (рис. 40). Аналогично, вторая точка пересечения окружностей Ω и Ω_c — это точка C', симметричная точке C относительно QO.

Мы докажем, что $B' = C'$ (тогда эта точка и будет общей у трёх окружностей). Имеем $OB' = OB = OC = OC'$; значит, достаточно понять, что $\angle BOB' + \angle COC' = \angle BOC\,(= 120^\circ)$. Поскольку прямые PO и QO — биссектрисы углов BOB' и COC', последнее равенство равносильно равенству $\angle POQ = 60^\circ$.

Это равенство нехитро проверяется. Так как $\angle A = 60^\circ$, то $\angle BQP + \angle CPQ = 240^\circ$, поэтому $\angle POQ = 180^\circ - (\angle OQP + + \angle OPQ) = 180^\circ - (\angle BQP + \angle CPQ)/2 = 60^\circ$, что и требовалось.

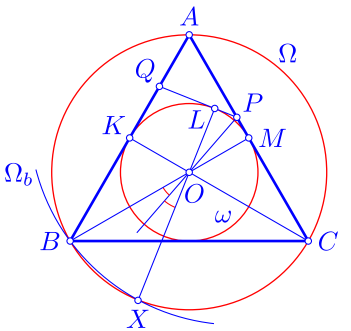


Рис. 39

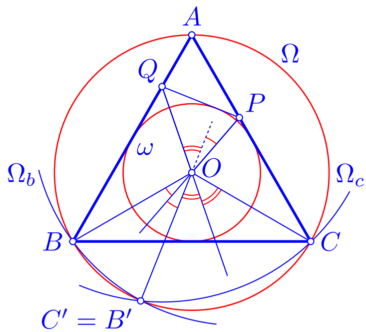


Рис. 40

110. *Ответ:* 1250 *сумм.*

Сначала покажем, что иррациональных чисел в таблице не меньше 1250. Пусть вдоль левой стороны таблицы выписано x иррациональных и $50-x$ рациональных чисел. Тогда вдоль верхней стороны выписаны $50-x$ иррациональных и x рациональных чисел. Поскольку сумма рационального и иррационального чисел всегда иррациональна, в таблице стоит хотя бы $x^2+(50-x)^2$ иррациональных чисел. При этом $x^2+(50-x)^2 = 2x^2-100x+50^2 = 2(x-25)^2 + 2\cdot 25^2 \geq 2\cdot 25^2 = 1250$, что и требовалось. Отсюда следует, что в таблице не более $2500 - 1250 = 1250$ рациональных чисел.

Ровно 1250 рациональных чисел в таблице может быть, например, в таком случае. Вдоль левой стороны стоят числа 1, 2, $\ldots$, 24, 25, $1+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, $\ldots$, $25+\sqrt{2}$, а вдоль верхней стороны — числа 26, 27, $\ldots$, 49, 50, $26-\sqrt{2}$, $27-\sqrt{2}$, $\ldots$, $50-\sqrt{2}$. Тогда иррациональными будут только $2 \cdot 25^2 = 1250$ сумм рационального и иррационального чисел.

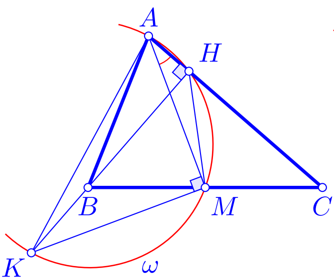


Рис. 41

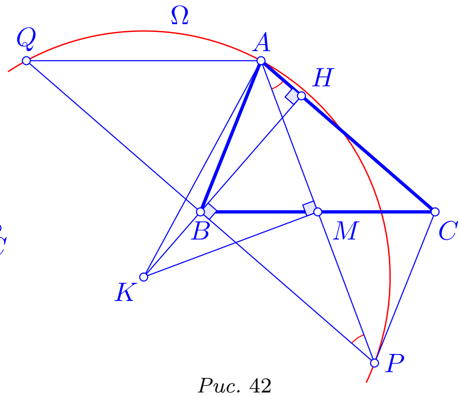


Рис. 42

111. Первое решение. Поскольку $\angle AHK = \angle AMK = 90°$, точки A, H, M и K лежат на окружности ω с диаметром AK (рис. 41). По условию, хорда HM этой окружности стягивает угол MAH, равный $30°$, поэтому $HM = 2R\sin 30° = AK/2$. С другой стороны, HM — медиана в прямоугольном треугольнике BHC, поэтому $BC = 2HM = AK$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Достроим треугольник ABC до параллелограммов $ABPC$ и $AQBC$ (рис. 42); тогда $BP = AC = BQ$ и $KH \perp PQ$. Кроме того, точка M — середина AP (как точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABPC$). Значит, прямые MK и HK — серединные перпендикуляры к отрезкам AP и PQ. Следовательно, точка K — центр окружности Ω, описанной около треугольника APQ. Далее, $\angle APQ = \angle PAC = 30°$, поэтому хорда AQ окружности Ω равна радиусу AK. Наконец, из параллелограмма $AQBC$ получаем $BC = AQ = AK$.

112. Докажем утверждение задачи индукцией по количеству n сторон многоугольника. База индукции $n = 3$ очевидна. Теперь выведем утверждение для k-угольника ($k \geq 4$), предполагая, что оно верно для многоугольников с количеством сторон меньшим, чем k.

Итак, пусть выпуклый k-угольник P разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Рассмотрим одну из этих диагоналей, назовем её d. Диагональ d делит P на два многоугольника P_1 и P_2. У каждого из многоугольников P_1 и P_2 количество сторон меньше k, и каждый из них разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. По нашему предположению, в многоугольнике P_1 имеются равные стороны a_1 и b_1. Если ни a_1, ни b_1 не совпадает с d, то a_1 и b_1 — стороны P, и наше утверждение доказано.

Иначе пусть, например, b_1 совпадает с d. Аналогично, в многоугольнике P_2 найдутся равные стороны a_2 и b_2, и если ни a_2, ни b_2 не совпадает с d, то утверждение доказано. Наконец, пусть, например, b_2 совпадает с d. Но тогда a_1 и a_2 — различные стороны многоугольника P, каждая из которых равна d, то есть a_1 и a_2 — требуемая пара сторон.

113. Если в некоторый момент среди чисел на карточках есть ровно k нечётных, то среди произведений троек чисел ровно C_k^3 нечётных; поэтому число на очередной добавляемой карточке будет нечётным ровно тогда, когда C_k^3 нечётно (и тогда k в эту минуту увеличится на 1).

Заметим, что число $C_{43}^3 = \frac{43 \cdot 42 \cdot 41}{6}$ нечётно, а число $C_{44}^3 = \frac{44}{41} \cdot C_{43}^3$ чётно. Значит, в первую минуту добавится нечётное число, а дальше будут добавляться только чётные. Итак, после первой минуты среди чисел на карточках всегда будет ровно 44 нечётных.

Рассмотрим числа на карточках после n минут. Пусть T_n — сумма всех произведений троек этих чисел, а D_n — сумма всех произведений пар этих чисел. Число T_{n+1} отличается от T_n прибавлением всех произведений троек чисел, среди которых есть только что добавленное, то есть прибавлением D_nT_n; итак, $T_{n+1} = T_n + D_nT_n = T_n(1 + D_n)$. Заметим при этом, что $D_n \equiv C_{44}^2 = 22 \cdot 43 \equiv 0 \pmod 2$ при $n \geq 1$. Значит, при $n \geq 1$ число $1 + D_n$

нечётно, и степень двойки, на которую делится T_{n+1}, равна степени двойки, на которую делится T_n.

Итак, после первой минуты степень двойки, на которую делится добавляемое число T_n, всегда равна степени двойки, на которую делится T_1. Значит, если бы после второй минуты на карточках не было числа, делящегося на 2^{10000}, то и впоследствии такого числа бы не появилось. Отсюда и следует требуемое.

114. *Ответ: да, могло.*

В качестве примера подходит произведение $1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot48$. После указанной операции получается $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot45 = 720 = 15\cdot48$.

Замечание. Приведённый пример — единственный. Укажем, как его придумать. Предположим, что четыре из сомножителей равнялись 1, а пятый — a. Их произведение было равно a, а после уменьшения превратилось в $(-2)^4(a-3) = 16a - 48$. Значит, при $16a - f = 15a$ условие соблюдается. Решая это уравнение, получаем $a = 48$.

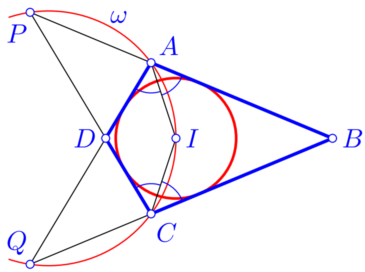


Рис. 43

115. Так как четырёхугольник $AICP$ вписанный, то $\angle PCI = 180^\circ - \angle PAI = \angle BAI$; иначе говоря, $\angle DCI = \angle BAI$ (рис. 43). Центр I вписанной окружности четырёхугольника лежит на биссектрисах его углов, поэтому $\angle DCI = \angle BCI$ и $\angle DAI = \angle BAI$. Отсюда следует, что $\angle DAI = \angle BCI$, а значит, $\angle QAI = \angle BCI = 180^\circ - \angle QCI$.

Из полученного равенства вытекает, что четырёхугольник $AICQ$ вписанный. Тем самым, точка Q лежит на окружности ω (проходящей через точки A, I и C).

116. *Ответ: да, мог.*

Заметим, что $2017 = 43\cdot46+39$. Приведём пример Пашиных чисел, при которых требуемое выполняется. Пусть среди его чисел будут 39 двоек, 46 чисел, равных 44, а остальные — единицы.

Чтобы добиться требуемого за 43 хода, Паша выбирает 39 коробок, в которые он всегда кладёт по 2 камня — через 43 хода в них окажется по $43 \cdot 2 = 86$ камней. Остальные коробки он разбивает на 43 группы по 46 коробок; на i-м ходу он положит по 44 камня во все коробки i-й группы и по одному камню — в коробки остальных групп. Тогда через 43 хода в каждой коробке каждой группы будет по $44 + 42 \cdot 1 = 86$ камней, то есть во всех коробках будет поровну камней.

Осталось доказать, что за меньшее число ходов требуемое невыполнимо. Пусть Паша сделал $k < 43$ ходов. Тогда в какую-то коробку A попало 44 камня на одном ходу, и в ней будет не меньше, чем $44 + (k-1) \cdot 1 = 43 + k$ камней. С другой стороны, поскольку $46k < 2017$, в какую-то коробку B ни на одном из ходов не попадёт 44 камня, то есть в ней будет не больше $2k$ камней. Поскольку $k < 43$, имеем $2k < k + 43$, а значит, в коробке B меньше камней, чем в A. Таким образом, Паша ещё не добился требуемого.

Замечание. Приведённый пример — не единственный. Например, подойдёт также набор чисел, состоящий из 42 единиц, $2017 - 43 = 1974$ чисел, равных $a > 1$, и одного числа, равного $43a - 42$. Существуют даже примеры с попарно различными числами; однако проверка того, что они подходят, несколько труднее, чем для примеров, приведённых выше.

117. *Ответ: при* $k = 2017$.

Сначала докажем, что $k > 2016$. Пусть учитель использовал некоторое $k \leq 2016$, задумав многочлен $P(x)$. Рассмотрим многочлен $Q(x) = P(x) + (x - n_1)(x - n_2)\ldots(x - n_k)$. Заметим, что степень многочлена $Q(x)$ также равна 2017, а его старший коэффициент также равен 1. При этом $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k) = Q(n_1)Q(n_2)\ldots Q(n_k)$, но $P(x) \neq Q(x)$. Значит, дети могли бы найти многочлен $Q(x)$ вместо $P(x)$, то есть учитель не добился требуемого.

Осталось доказать, что при $k = 2017$ учитель сможет придумать требуемую задачу.

Лемма. *Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, и пусть a и b — различные целые числа. Тогда $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$.*

Доказательство. В разности $P(a)-P(b)$ сгруппируем слагаемые по степеням: если $P(x)=p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\ldots+p_1x+p_0$, то $P(a)-P(b)=p_n(a^n-b^n)+p_{n-1}(a^{n-1}-b^{n-1})+\ldots+p_1(a-b)$, где каждое слагаемое делится на $a-b$.

Пусть $k=2017$. Положим $n_i=4i$ при $i=1,2,\ldots,k$; пусть учитель сообщит детям, что $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k)=1$. Тогда многочлен $P(x)=(x-n_1)(x-n_2)\ldots(x-n_k)+1$ под условие подходит. Предположим, что ещё какой-то многочлен $Q(x)$ также подходит под условие. Тогда, так как $Q(n_1)Q(n_2)\ldots Q(n_k)=1$ и коэффициенты многочлена $Q(x)$ — целые числа, то $Q(n_i)=\pm1$ при любом $i=1,2,\ldots,k$.

Если найдутся i и j такие, что $Q(n_i)=1$, а $Q(n_j)=-1$, то разность $Q(n_i)-Q(n_j)=2$ не делится на n_i-n_j, что противоречит лемме. Поэтому все значения $Q(n_i)$ равны между собой и все равны либо 1, либо -1. Однако все значения не могут быть равны -1, так как в произведении $Q(n_1)Q(n_2)\ldots Q(n_k)$ множителей нечётное количество и произведение было бы равно -1. Значит, $Q(n_i)=1$ при любом $i=1,2,\ldots,k$. Тогда разность $P(x)-Q(x)$ — многочлен степени менее k, имеющий хотя бы k корней, то есть этот многочлен тождественно равен 0, и $P(x)=Q(x)$. Противоречие.

Замечание. С использованием леммы можно показать, что многочлен $P(x)=(x-n_1)(x-n_2)\ldots(x-n_{2017})\pm1$ подходит при любых различных целых числах $n_1,n_2,\ldots,n_{2017}$.

118. *Ответ:* 1250 *произведений.*

Сначала покажем, что иррациональных чисел в таблице не меньше 1250. Пусть вдоль левой стороны таблицы выписано x иррациональных и $50-x$ рациональных чисел. Тогда вдоль верхней стороны выписаны $50-x$ иррациональных и x рациональных чисел. Поскольку произведение ненулевого рационального и иррационального чисел всегда иррационально, в таблице стоит хотя бы $x^2+(50-x)^2$ иррациональных чисел. При этом $x^2+(50-x)^2=2x^2-100x+50^2=2(x-25)^2+2\cdot25^2\geq2\cdot25^2=1250$, что и требовалось. Отсюда следует, что в таблице не более $2500-1250=1250$ рациональных чисел.

Ровно 1250 рациональных чисел в таблице может быть, например, в таком случае. Вдоль левой стороны стоят числа 1, 2,

$\ldots, 24, 25, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \ldots, 25\sqrt{2}$, а вдоль верхней стороны — числа $26, 27, \ldots, 49, 50, 26\sqrt{2}, 27\sqrt{2}, \ldots, 50\sqrt{2}$. Тогда иррациональными будут только $2 \cdot 25^2 = 1250$ произведений рационального и иррационального чисел.

119. Пусть $S_1, \ldots, S_{100}$ — числа, которые были записаны на доске в первые 100 минут. Пусть перед дописыванием числа S_i на доске были числа $a_1, \ldots, a_k$. Тогда $S_i = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$, а следующее дописанное число есть $S_{i+1} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + S_i^2 = S_i + S_i^2$.

Итак, $S_{i+1} = S_i(S_i + 1)$. Значит, S_{i+1} содержит в своем разложении на простые множители все простые числа, на которые делится S_i; кроме того, поскольку S_i и S_{i+1} взаимно просты, S_{i+1} содержит хотя бы один новый простой множитель (делитель числа $1+S_i$). Так как $S_1 > 1$, то S_1 содержит в своем разложении хотя бы один простой множитель. Отсюда последовательно получаем, что для $i = 1, 2, \ldots, 100$ число S_i содержит в своем разложении хотя бы i различных простых множителей. При $i = 100$ это дает решение задачи.

120. Совпадает с задачей **112**.

121. (Рис. 44.) Так как четырёхугольник $ABCQ$ вписан и $AC \parallel DE$, имеем $\angle BEX = \angle BCA = \angle BQA = \angle BQX$. Следовательно, четырёхугольник $XBEQ$ вписан, откуда $\angle XBQ = \angle XEQ = \angle DEQ$. Аналогично, четырёхугольник $YBDP$ вписан, и $\angle PBY = \angle PDE$. По условию, $PD \parallel EQ$. Значит, $180° = \angle PDE + \angle DEQ = \angle XBQ + \angle PBY$.

Таким образом, $\angle XBY + \angle PBQ = \angle XBP + 2\angle PBQ + \angle QBY = \angle XBQ + \angle PBY = 180°$.

122. *Ответ: да, могло.*

В качестве примера подходит произведение $1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot2\cdot16 = 32$. После указанной операции получается $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot 13 = 13 \cdot 32$.

Замечание 1. Укажем, как придумать этот пример. Предположим, что пять из сомножителей равнялись 1, шестой — 2, а седьмой — a. Их произведение было равно $2a$, а после уменьшения превратилось в $(-2)^5(-1)(a-3) = 32a - 96$. Значит, при $32a - 96 = 26a$ условие соблюдается. Решая это уравнение, получаем $a = 16$. Итак, числа 1, 1, 1, 1, 1, 2, 16 удовлетворяют требованиям.

Замечание 2. Приведённый пример — не единственный. Например, подойдёт также произведение $1^4 \cdot 29 \cdot 61 \cdot 64$, после вычитания переходящий в $(-2)^4 \cdot 26 \cdot 58 \cdot 61$.

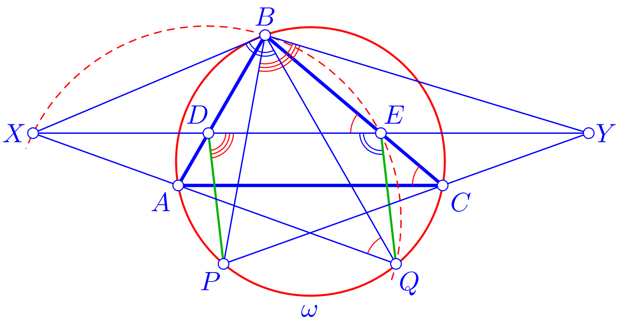


Рис. 44

123. Совпадает с задачей **107**.

124. Совпадает с задачей **117**.

125. Пусть O — центр треугольника ABC. Обозначим через B_2 и C_2 точки касания ω с AC и AB соответственно, а через B_1 и C_1 — точки Ω, диаметрально противоположные точкам B и C соответственно (рис. 45). Тогда точки B_1 и C_1 симметричны O относительно сторон AC и AB соответственно, откуда $\angle OB_1P = \angle B_1OP$ и $\angle OC_1Q = \angle C_1OQ$.

Пусть лучи B_1P и C_1Q пересекают Ω в точках B' и C' соответственно; тогда $\angle PB'B = \angle B_1B'B = 90°$, то есть B' лежит на Γ_b. Аналогично, C' лежит на Γ_c. С другой стороны,

$$\smile BB' + \smile CC' = 2(\angle BB_1B' + \angle CC_1C') =$$

$$= 2(\angle B_1OP + \angle C_1OQ) = 2(180° - \angle B_1OC_1) = 120° = \smile BC.$$

Это означает, что точки B' и C' совпадают. Итак, Γ_b и Γ_c пересекаются в точке B', лежащей на Γ.

Поскольку $\angle BB_2P = \angle CC_2Q = 90°$, точки B_2 и C_2 лежат на Γ_b и Γ_c соответственно. Пусть продолжение отрезка $B'O$ за точку O пересекает ω в точке X. Тогда $OX = OB_2 = OC_2$ и $OB' = OB = OC$, откуда $OB \cdot OB_2 = OB' \cdot OX = OC \cdot OC_2$. Первое из этих равенств означает, что точки B, B_2, B' и X лежат на одной окружности, то есть X лежит на окружности Γ_b. Аналогично, из второго равенства следует, что X лежит на Γ_c. Значит, X и является второй точкой пересечения Γ_b и Γ_c, лежащей на ω.

Замечание 1. После доказательства того, что окружности Ω, Γ_b и Γ_c пересекаются в одной точке B', можно завершить решение и по-другому. Пусть X — вторая точка пересечения Γ_b и Γ_c. Нетрудно видеть, что точка X лежит в угле C_2OB_2. Тогда $\angle B_2XC_2 = \angle B_2XB' + \angle C_2XB' = (180^\circ - \angle B_2PB') + (180^\circ - \angle C_2QB') = (90^\circ - \angle PB_1O) + (90^\circ - \angle QC_1O) = 120^\circ$, что и означает, что X лежит на ω.

Замечание 2. Пусть прямая PQ пересекает прямую BC в точке R. Аналогично можно показать, что окружность Γ_a с диаметром AR также проходит через две общих точки B' и X окружностей Γ_b и Γ_c.

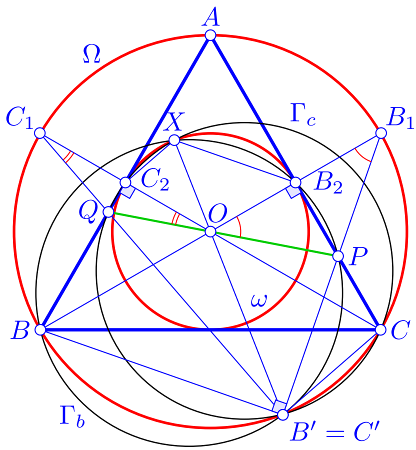


Рис. 45

126. *Ответ:* 1275 *произведений.*

Сначала покажем, что иррациональных чисел в таблице не меньше 1225. Предположим, что среди рациональных чисел есть ноль и он выписан у верхней стороны таблицы.

Пусть вдоль левой стороны таблицы выписано x иррациональных и $50 - x$ рациональных чисел. Тогда вдоль верхней стороны выписаны $50 - x$ иррациональных и x рациональных чисел (среди которых есть ноль). Заметим, что произведение ненулевого рационального и иррационального чисел всегда иррационально. Тогда в таблице есть как минимум $x(x-1) + (50-x)^2$ иррациональных чисел. Заметим, что

$$f(x) = x(x-1) + (50-x)^2 = 2x^2 - 101x + 50^2.$$

Вершина параболы $f(x)$ находится в точке $101/4 = 25,25$, поэтому минимальное значение $f(x)$ в целой точке достигается при $x = 25$ и оно равно $25 \cdot 24 + 25^2 = 1225$.

Если же ноль заменить ненулевым рациональным числом, то количество иррациональных чисел может только увеличиться. Поэтому в таблице в любом случае не менее 1225 иррациональных чисел. Значит, в таблице не более $2500 - 1225 = 1275$ рациональных чисел.

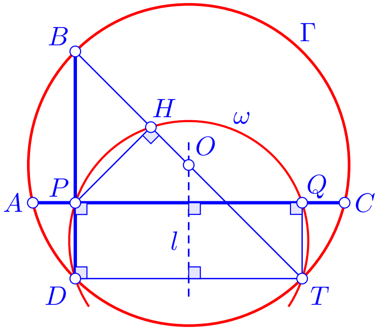


Рис. 46

Ровно 1275 рациональных чисел в таблице может быть, например, в таком случае. Вдоль левой стороны стоят числа 1, 2, ..., 24, 25, $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, ..., $25\sqrt{2}$, а вдоль верхней стороны — числа 0, 26, 27, ..., 49, $26\sqrt{2}$, $27\sqrt{2}$, ..., $50\sqrt{2}$. Тогда иррациональными будут только $25 \cdot 24 + 25^2 = 1225$ произведений ненулевого рационального и иррационального чисел.

127. Проведём в окружности Γ диаметр BT (рис. 46). Заметим, что $\angle PDT = \angle BDT = 90°$. Значит, $\angle PHT + \angle PDT = 180°$, то есть точка T лежит на окружности ω. Поэтому $\angle PQT = \angle PHT = 90°$, и четырёхугольник $PQTD$ — прямоугольник.

Рассмотрим общий серединный перпендикуляр l к отрезкам DT и PQ. Он проходит через O, а значит, является и серединным перпендикуляром к AC. Значит, отрезки AP и CQ симметричны относительно l и потому равны.

128. Обозначим проведённые прямые $l_1, l_2, \ldots, l_n$, упорядочив их направления по часовой стрелке (рис. 47). Формально это означает следующее. Рассмотрим произвольную точку плоскости O. Проведем через неё прямые, параллельные нашим, занумеруем их по часовой стрелке, а потом присвоим нашим прямым те же номера, которые получили соответствующие им новые прямые.

Среди областей, на которые наши прямые разрезали плоскость, есть $2n$ бесконечных кусков; обозначим их по часовой стрелке $S_1, S_2, \ldots, S_{2n}$ так, что прямая l_i разделяет куски S_i и S_{i+1}, а также куски S_{i+n} и S_{i+n+1}. (Здесь и далее мы считаем, что $S_{2n+1} = S_1$.)

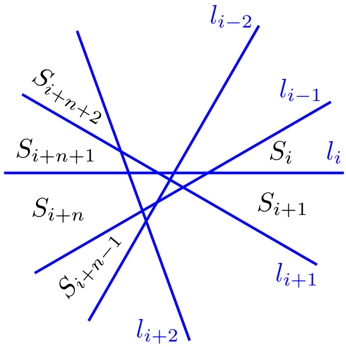


Рис. 47

Для начала во все области (конечные и бесконечные) поставим по 1. Для каждой прямой l_i обозначим через Σ_i разность сумм чисел справа и слева от l_i (мы считаем, что куски S_i и S_{i+n+1} лежат слева от l_i). Если $\Sigma_i > 0$, то прибавим по $\frac{1}{2}\Sigma_i$ к числам, стоящим в S_i и S_{i+1+n}. При этом все числа Σ_j при $j \neq i$ не изменились, поскольку области S_i и S_{i+1+n} лежат по разные стороны относительно любой прямой, кроме l_i. Число же Σ_i стало равно нулю. Аналогично, если $\Sigma_i < 0$, то прибавим по $\frac{1}{2}\,|\Sigma_i|$ к числам, стоящим в S_{i+1} и S_{i+n}; опять же значение Σ_i станет равным 0, а остальные Σ_j не изменятся.

Такими операциями мы последовательно сделаем каждое Σ_i равным нулю, не меняя остальных.

129. *Ответ: нет, нельзя.*

Если в некоторый момент среди чисел на карточках есть ровно k нечётных, то среди произведений чисел по 12 ровно C_k^{12} нечётных; поэтому число на очередной добавляемой карточке будет нечётным ровно тогда, когда C_k^{12} нечётно (и тогда k в эту минуту увеличится на 1).

Нетрудно заметить, что число C_{28}^{12} нечётно (это следует из того, что степени двойки, входящие в произведения $28 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot 17$ и $12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 1$, равны). Далее, поскольку

$$C_{28+t}^{12} = \frac{(28+1)(28+2)\ldots(28+t)}{(16+1)(16+2)\ldots(16+t)} \cdot C_{28}^{12},$$

получаем, что наименьшее t, при котором C_{28+t}^{12} чётно, равно 4. Итак, количество нечётных чисел на карточках будет расти, пока не достигнет 32 (на 4-й минуте), а после этого на карточках всегда будет ровно 32 нечётных числа.

Рассмотрим числа на карточках после $n \geq 4$ минут. Пусть T_n — сумма всех произведений 12 из этих чисел, а D_n — сумма всех произведений 11 из этих чисел. Число T_{n+1} отличается от T_n прибавлением всех произведений по 12 чисел, среди которых есть только что добавленное, то есть прибавлением $T_n E_n$; итак, $T_{n+1} = T_n + E_n T_n = T_n(1 + E_n)$. Заметим при этом, что $E_n \equiv$ $\equiv C_{32}^{11} \pmod 2$ при $n \geq 4$, а число $C_{32}^{11} = \frac{12}{21} \cdot C_{32}^{12}$ чётно. Значит, при $n \geq 4$ число $1 + E_n$ нечётно, и степень двойки, на которую делится T_{n+1}, равна степени двойки, на которую делится T_n.

Выберем теперь d так, чтобы после пятой минуты ни одно из чисел на карточках не делилось на 2^d; в частности, только что добавленное число T_4 также не будет делиться на 2^d. Значит, и все числа T_5, T_6, $\ldots$ не будут делиться на 2^d, а это в точности числа, написанные на карточках, добавляемых после пятой минуты. Итак, на карточках никогда не появится числа, делящегося на 2^d.

130. *Ответ:* 135°.

Угол BMD равен 135°, так как он является вписанным в окружность с центром в точке A и опирается на дугу в 270°. Точка N является центром описанной окружности вокруг треугольника CMD, значит угол CMD — прямой. Искомый угол BMC равен $360^\circ - \angle BMD - \angle CMD = 135^\circ$.

131. *Ответ:* -23.

Для целочисленных многочленов разность $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$, поэтому $P(20) - P(0) = P(17) - P(0) = 2017 - a_0$ делится на 20 и на 17, значит, и на $17 \cdot 20 = 340$, то есть $2017 = 340k + a_0$. Так как $|a_0| < 100$, то $k = 6$, $a_0 = -23$.

132. *Ответ:* 384 *способами.*

Отметим прежде всего, что между двумя серыми клетками стоит ровно одна белая или чёрная клетка. Значит, серые клетки стоят на доске в шахматном порядке. Рассмотрим 2 случая:

а) в левом нижнем углу стоит серая клетка. Тогда число возможных несерых клеток равно 7, их можно закрасить в чёрный или белый цвет $2^7 = 128$ способами;

б) в левом нижнем углу стоит несерая клетка, тогда общее число несерых клеток равно 8, число способов их закрасить — $2^8 = 256$.

Всего получаем $128 + 256 = 384$ варианта раскраски.

133. *Ответ:* $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

Треугольники BCO и AOD подобны по трём углам. Если коэффициент подобия равен k, то $AD = kBC$, $S_2 = k^2 S_1$, то есть $k = \sqrt{S_2/S_1}$. Высота исходной трапеции равна $h = h_1 + h_2$, где h_1 и h_2 — высоты треугольников BCO и AOD, проведенные к основаниям трапеции, причём в силу подобия этих треугольников $h_2 = kh_1$. Площадь трапеции равна

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC)h = \frac{1}{2}(1 + k) \cdot BC \cdot (1 + k) \cdot h_1 = S_1(1 + k)^2.$$

Заменяя k на отношение корней из S_2 и S_1, получаем требуемое.

134. *Ответ: на* 9.

Пусть нам даны изначально числа a, b и c. Обозначим $ab + bc + ca = x$ и $a + b + c = y$. По условию

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) = abc + 1,$$

$$(a + 2)(b + 2)(c + 2) = abc + 2.$$

Раскрывая скобки и сокращая подобные слагаемые, получим, что $x + y = 0$, и $2x + 4y = -6$, откуда $x = 3$, $y = -3$. Тогда нужная нам разность равна $(a + 3)(b + 3)(c + 3) - abc = 3x + 9y + 27 = 3 \cdot 3 + 9 \cdot (-3) + 27 = 9$.

135. *Ответ: во всех случаях* $x = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$.

В случае *а*) получаем обычное квадратное уравнение относительно $\sqrt{x}$, его неотрицательный корень равен $\sqrt{x} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, откуда $x = \sqrt{x} = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$.

В случае *б*) уравнение имеет вид $1 + \sqrt{1+\sqrt{x}} = x$. Можно решить его стандартным способом, избавляясь от корней: $\sqrt{1+\sqrt{x}} = x - 1$, и значит, $x \geq 1$ и $1 + \sqrt{x} = (x-1)^2$. Полагая $t = \sqrt{x}$, получаем уравнение

$$t^4 - 2t^2 - t = 0,$$

его корни 0 и -1 находятся подбором, поэтому уравнение принимает вид $t(t+1)(t^2-t-1) = 0$. Поскольку $t = \sqrt{x} \geq 1$, корни 0 и -1 — посторонние. Оставшееся уравнение $t^2 - t - 1 = 0$ сводится к $x = \sqrt{x} + 1$, то есть приходим к случаю *а*).

В случае *в*) такой подход бесполезен, так как приводит нас к уравнению 8-ой степени. Заметим, однако, что в пунктах *а*) и *б*) ответы одинаковые. Случайно ли это? Видимо, нет. Функция f в данном случае — возрастающая. Покажем, что в этом случае уравнения $f(x) = x$ и $f(f(\ldots f(x)\ldots)) = x$ (k экземпляров функции f) равносильны.

Действительно, если x является корнем первого уравнения, то $f(f(x)) = f(x) = x$, аналогично $f(f(f(x))) = x$ и так далее. Предположим, что у второго уравнения есть корень, не удовлетворяющий условию $f(x) = x$. Пусть, для определенности, $x_1 = f(x) > x$. Но тогда $x_2 = f(f(x)) = f(x_1) > f(x) = x_1$. Аналогично получаем что $x < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = f(f(\ldots f(x)\ldots))$. Значит, равенство $f(f(\ldots f(x)\ldots)) = x$ не выполняется.

136. Пусть первый член прогрессии есть $a_0 = n$, а разность равна d. Тогда в прогрессии есть также член $a_n = n + n\cdot d = n(1+d)$. Покажем, что $(1+d)$ можно рассматривать как знаменатель искомой геометрической прогрессии. Действительно, по формуле бинома Ньютона число

$$n(1+d)^k = n(1 + C_k^1 d + C_k^2 d^2 + \ldots + d^k) = \\ = n + (nC_k^1 + nC_k^2 d + \ldots + nd^{k-1})d.$$

имеет вид $a_0 + l\cdot d$, то есть входит в исходную арифметическую прогрессию.

137. *Ответ: нет, неверно.*

В качестве одного из контрпримеров рассмотрим набор отрезков с длинами $(1, 1, 1, 1, 1, \sqrt{3})$. Если тетраэдр с такими рёбрами существует, то две грани у него — правильные треугольники со стороной 1, имеющие общее основание. Высоты этих треугольников равны $\sqrt{3}/2$, поэтому расстояние между их вершинами меньше, чем $\sqrt{3}/2 + \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$.

Замечание. Не существует также тетраэдра с длинами рёбер (1, 1, 1, 1, a, a), $1 < a < 2$. Это утверждение несложно доказать рассмотрением двух случаев расположения рёбер.

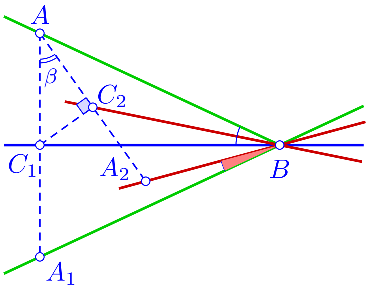


Рис. 48

138. *Ответ:* $2 \arcsin(\sin\alpha \sin\beta)$.

Пусть B — точка падения луча на зеркало, C_1 — проекция точки A на зеркало, A_1 и A_2 — точки, симметричные A относительно исходного и повёрнутого (в пространстве) зеркала (рис. 48). Отрезки A_1B и A_2B направлены по отражённым лучам, то есть искомый угол — это $\angle A_1BA_2$. Обозначим середину AA_2 через C_2, эта точка будет проекцией A на повёрнутое зеркало. По условию AC_1 и AC_2 перпендикулярны соответственно исходному и повёрнутому зеркалу, следовательно $\angle C_1AC_2 = \beta$. Остаётся заметить, что $AC_1 = AB\sin\alpha$, $C_1C_2 = AC_1 \sin\beta = AB \sin\alpha \sin\beta$; $A_1A_2 = 2C_1C_2$, и треугольник A_1BA_2 — равнобедренный со сторонами $A_1B = A_2B = AB$, откуда и следует ответ.

139. *Ответ:* 2^{1008}.

Представим число 2017 в виде ряда из единиц, расставим плюсы между некоторыми из них. Серию из k единичек, не разделенных плюсами, будем считать числом k. Например, запись

$111 + 11 + 111$ соответствует разбиению $3 + 2 + 3$.

Между 2017 единичками есть 2016 мест для вставки плюсов. Каждому симметричному разбиению числа 2017 соответствует расстановка плюсов в первых 1008 местах в ряду из 2017 единиц. На последних 1008 местах плюсы ставятся симметрично первым 1008 плюсам относительно середины ряда. Но в каждое из 1008 первых мест плюс либо ставится, либо не ставится, поэтому получается всего 2^{1008} вариантов.

Замечание. В энциклопедии http://oeis.org целочисленных последовательностей симметричные разбиения натуральных чисел составляют последовательность A016116. Для подсчёта её элементов несложно вывести формулу $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$, где $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое число, не превосходящее x.

140. *Ответ: один из способов указан на рисунке* 49.

Б	Л	О	Х	А
Х	А	Б	Л	О
Л	О	Х	А	Б
А	Б	Л	О	Х
О	Х	А	Б	Л

Рис. 49

141. *Ответ:* 15.

Масса всех гирек равна $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ (*г*), поэтому число покупателей *не больше* 15. Покажем, что очередь могла состоять из 15 покупателей.

Действительно, с помощью гирек 1 *г*, 2 *г*, 3 *г* и 4 *г* можно взвесить любой вес от 1 до 10 граммов, а все остальные массы от 11 *г* до 15 *г* можно получить из них добавлением ещё одной гирьки массой 5 граммов.

142. *Ответ:* 4.

Рассмотрим 4 номера, в которых не принимал участия Удав. Из трёх зверей — Мартышки, Попугая и Слонёнка — можно составить три различных коллектива из двух участников и ровно один — из трёх. Все эти 4 коллектива исполнили 4 номера (без Удава): три песни и один танец, причём и Слонёнок, и Мартышка приняли участие ровно в трёх из них.

Рассмотрим номера с участием Удава. Заметим, что Слонёнок не мог участвовать в обоих танцах, так как в этом случае Мартышка также могла участвовать не более чем в двух номерах, и значит, не могла исполнить номеров больше, чем Слонёнок. Другими словами, в одном из номеров танцевали Попугай, Мартышка и Удав. В двух оставшихся номерах Мартышка участвовала не меньше, чем Слонёнок, значит, Слонёнок выступал ровно в одном из них. Следовательно, Слонёнок исполнил 4 номера.

143. *Ответ: нельзя.*

Девочек, сидящих за одной партой с другими девочками, в два раза больше, чем парт, за которыми они сидят. Значит, их чётное число. Кроме того, количество таких девочек составляет три четверти от общего числа девочек. Значит, их количество делится ещё и на 3, то есть делится на 6. Итак, число девочек, сидящих вместе с другими девочками, равно $6x$. Отсюда число девочек, сидящих за одной партой с мальчиками, равно $2x$, а общее число всех девочек — $8x$, то есть делится на 8. Если бы мальчиков можно было рассадить таким же образом, то и количество мальчиков было бы кратно 8. Однако общее количество учеников (300) не делится на 8, поэтому такое пересаживание невозможно.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{\text{А}} & > & \boxed{\text{Б}} & > & \boxed{\text{В}} \\ \vee & & \wedge & & \wedge \\ \boxed{\text{Г}} & > & \boxed{\text{Д}} & < & \boxed{\text{Е}} \\ \vee & & \wedge & & \wedge \\ \boxed{\text{Ж}} & > & \boxed{\text{З}} & > & \boxed{\text{И}} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} \boxed{9} & > & \boxed{2} & > & \boxed{1} \\ \vee & & \wedge & & \wedge \\ \boxed{8} & > & \boxed{3} & < & \boxed{4} \\ \vee & & \wedge & & \wedge \\ \boxed{7} & > & \boxed{6} & > & \boxed{5} \end{array}$$

Рис. 50,*а* *Рис.* 50,*б*

144. *Ответ: только* 455.

Пусть $\overline{xyz}$ — искомое трёхзначное число и $\overline{zxy}$ — полученное из него. Их сумма равна $S = \overline{xyz} + \overline{zxy} = 11(10x + y) + 101z = 11(\overline{xy} + 9z) + 2z = 1\,000$. Число 1 000 даёт остаток 10 при делении на 11. Так как число $11(\overline{xy} + 9z)$ кратно 11, то слагаемое $2z$ должно иметь остаток 10. Единственная цифра z с таким свойством — это 5, то есть $z = 5$. Из равенства $11\overline{xy} + 101z = 1\,000$ теперь находим $\overline{xy} = 45$, и значит, $\overline{xyz} = 455$.

145. *Ответ: единственный способ на рис.* 50,*б.*

Расставим в клетки таблицы буквы от А до И, как показано на рисунке 50,*а*. В соответствии с условием задачи расположим эти буквы в порядке «возрастания»:

$$\text{В} < \text{Б} < \text{Д} < \text{Е} < \text{И} < \text{З} < \text{Ж} < \text{Г} < \text{А}.$$

Цифры от 1 до 9 можно расположить по возрастанию только одним способом: $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9$. Отсюда получаем единственный способ заполнения (рис. 50,*б*).

146. *Ответ:* 21.

Масса всех гирек равна $1+2+3+4+5+6=21$ (*г*), поэтому число покупателей *не больше* 21. Покажем, что очередь могла состоять из 21 покупателей.

Действительно, с помощью гирек 1 *г*, 2 *г*, 3 *г* и 4 *г* можно взвесить любой вес от 1 до 10 граммов. Все остальные массы от 11 *г* до 21 *г* можно получить из них добавлением ещё двух гирек массой 5 *г* и 6 *г* общей массой $5+6=11$ граммов.

147. *Ответ:* 89 *или* 98.

Пусть $A=\overline{xy}=10x+y$ — искомое двузначное число, тогда $B=\overline{yx}=10y+x$. По условию сумма $A+B=11(x+y)$ делится на 17, и значит, число $x+y$ делится на 17. Это условие выполняется только для цифр 8 и 9. Значит, $A=89$ или $A=98$. В обоих случаях $A+B=89+98=17\cdot 11$.

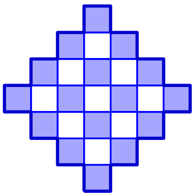


Рис. 51,*а*

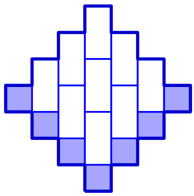


Рис. 51,*б*

148. *Ответ: а)* 9; *б)* 16.

а) Раскрасим клетки на салфетке в «шахматном» порядке, как показано на рисунке 51,*а*. Каждая доминошка содержит одну черную и одну белую клетку. Поскольку белых клеток всего 9, мы не можем уместить на салфетке более 9 доминошек (*оценка*). На рисунке 51,*б* приведен *пример* 9 доминошек, которые можно разместить на салфетке.

б) Так как чёрных клеток 16, то для покрытия салфетки понадобится не менее 16 доминошек (*оценка*). На рисунке 51,*б* приведен *пример* 9 доминошек, которые можно разместить на салфетке. Для 7 незакрытых чёрных клеток салфетки можно использовать еще 7 доминошек.

149. *Ответ:* 11 *дней.*

Ясно, что сессия длится *не более* 11 дней, иначе Мамонов смог бы посетить не менее $12 \cdot 3 = 36$ заседаний, противоречие. Аналогично, выводим, что сессия длится *не менее* 11 дней, так как в противном случае Пронин смог бы посетить не более $10 \cdot 5 = 50$ заседаний, противоречие. Отсюда следует, что сессия длится в точности 11 дней.

Приведём пример, для которого выполняются все условия задачи. Пусть Мамонов первые 10 дней посещает по 3 заседания, а последний — 5 заседаний, всего $10 \cdot 3 + 5 = 35$ заседаний. Пронин, наоборот, первые 10 дней посещает по 5 заседаний, а последний — 3 заседания, всего $10 \cdot 5 + 3 = 53$ заседания.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{\text{А}} & > & \boxed{\text{Б}} & > & \boxed{\text{В}} \\ \vee & & \vee & & \vee \\ \boxed{\text{Г}} & < & \boxed{\text{Д}} & < & \boxed{\text{Е}} \\ \wedge & & \wedge & & \vee \\ \boxed{\text{Ж}} & < & \boxed{\text{З}} & < & \boxed{\text{И}} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} \boxed{9} & > & \boxed{8} & > & \boxed{7} \\ \vee & & \vee & & \vee \\ \boxed{1} & < & \boxed{3} & < & \boxed{6} \\ \wedge & & \wedge & & \vee \\ \boxed{2} & < & \boxed{4} & < & \boxed{5} \end{array}$$

Рис. 52,*а* *Рис.* 52,*б*

150. *Ответ: один способ на рис.* 52,*б; второй способ — поменять местами цифры* 2 *и* 3 *на рис.* 52,*б.*

Расставим в клетки таблицы буквы от А до И, как показано на рисунке 52,*а*. В соответствии с условием задачи расположим эти буквы в порядке «возрастания»:

$$\text{Г} < \text{Ж} < \text{З} < \text{И} < \text{Е} < \text{В} < \text{Б} < \text{А}, \quad \text{Г} < \text{Д} < \text{З}.$$

Из этих цепочек неравенств следует, что буквы З, И, Е, В, Б, А следует заменить цифрами 4, 5, 6, 7, 8, 9. Для букв Д, Ж, Г выполняются неравенства Г < Д и Г < Ж. Значит, на месте буквы Г стоит 1. Для оставшихся букв Д и Ж возможны 2 варианта: Д = 2, Ж = 3 и Д = 3, Ж = 2 (рис. 52,*б*).

151. *Ответ: нельзя.*

Девочек, сидящих за одной партой с другими девочками, в два раза больше, чем парт, за которыми они сидят. Значит, их чётное число. Кроме того, количество таких девочек составляет три четверти от общего числа девочек. Значит, их количество делится ещё и на 3, то есть делится на 6. Итак, число девочек, сидящих вместе с другими девочками, равно $6x$. Отсюда число девочек, сидящих за одной партой с мальчиками, равно $2x$, а общее число всех девочек — $8x$, то есть делится на 8. Если бы мальчиков можно было рассадить таким же образом, то и количество мальчиков было бы кратно 8. Однако общее количество учеников (500) не делится на 8, поэтому такое пересаживание невозможно.

152. *Ответ:* 1212 *и* 2121.

Пусть $\overline{xyzt}$ — искомое четырёхзначное число, и $\overline{txyz}$ — полученное из него. Их сумма равна

$$S = \overline{xyzt} + \overline{txyz} = 11(100x + 10y + z) + 1001t = \\ = 11(\overline{xyz} + 91t) = 3333.$$

Поскольку $3333 = 11 \cdot 303$, отсюда получаем $\overline{xyz} + 91t = 303$. Цифра t отлична от нуля и может принимать только значения 1 и 2. (Если $t \geq 3$, то $\overline{xyz} < 100$.) Если $t = 1$, то $\overline{xyz} = 212$, и значит, $\overline{xyzt} = 2121$. Если $t = 2$, то $\overline{xyz} = 121$, и значит, $\overline{xyzt} = 1212$. Таким образом, условию удовлетворяют только два числа: 1212 и 2121.

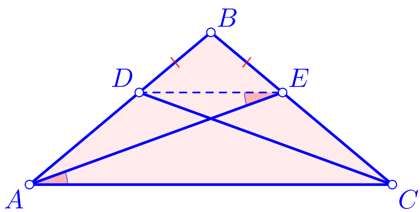


Рис. 53

153. *Ответ:* 40°.

На рисунке 53 треугольники ABE и CBD равны по стороне ($AB = BC$) и двум углам, значит, $BD = BE$. Треугольники DBE и ABC — равнобедренные с общим углом при вершине B, поэтому $\angle BED = \angle BCA$. Значит, $DE \parallel AC$. Следовательно,

$$\angle AED = \angle EAC = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BCA = \frac{1}{2}\angle BED = 20^\circ.$$

Отсюда $\angle BED = 40^\circ$.

154. *Ответ:* 10 *дней.*

Ясно, что сессия длится *не более* 10 дней, иначе Мамонов смог бы посетить не менее $11 \cdot 3 = 33$ заседаний, противоречие. Аналогично, выводим, что сессия длится *не менее* 10 дней, так как в противном случае Пронин смог бы посетить не более $9 \cdot 4 = 36$ заседаний, противоречие. Отсюда следует, что сессия длится в точности 10 дней.

Приведём пример, для которого выполняются условия задачи. Пусть Мамонов первые 9 дней посещает по 3 заседания, а в последний день — 4 заседания, всего $9 \cdot 3 + 4 = 31$ заседание. Пронин все 10 дней посещает по 4 заседания, всего $10 \cdot 4 = 40$ заседаний.

Оглавление