МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский)
федеральный университет»

Набережночелнинский институт (филиал)

Кафедра Бизнес-информатики и математических методов в экономике

Лабораторный практикум по дисциплине «Пакеты прикладных программ (MathCad)»

Учебно-методическое пособие

Набережные Челны
2019 г.

УДК 5519.6
ББК 32.81. 3-15

Печатается по решению учебно-методической комиссии экономического отделения Набережночелнинского института (филиала) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет», от «15» марта 2019г. (протокол №7)

Рецензенты:
Доктор физ.-мат. наук, профессор А.Г. Исавнин
Доктор экономических наук, профессор А.Н. Макаров

Карамышев А.Н., Махмутов И.И. Лабораторный практикум по дисциплине «Пакеты прикладных программ (MathCad)»: учебно-методическое пособие / А.Н. Карамышев, И.И. Махмутов – Набережные Челны: Изд-во Набережночелнинского института КФУ, 2019. – 76 с.

Учебно-методическое пособие содержит последовательное изложение базовых понятий теории. В учебном пособии кратко рассматриваются возможности, интерфейс, компоненты системы MathCAD 2000 Professional и основные приемы работы при реализации математических задач. Приведенный в пособии материал без дополнительной переработки может быть использован и в более поздних версиях системы MathCAD.

Учебно-методическое пособие предназначено для использования в учебном процессе студентами технических направлений в экономике и экономического отделения дневной, заочной и дистанционной форм обучения.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Решение многих задач, встречающихся в практике экономиста и отличающихся зачастую высоким уровнем сложности и оперативности решения, просто не мыслимо без широкого использования методов экономико-математического моделирования, которые являются в основной массе довольно трудоемкими. В связи с этим знание компьютерных пакетов, позволяющих эффективно реализовывать экономико-математические модели и методы, являются неотъемлемой составляющей квалификации экономиста, одними из его ключевых компетенций.

В учебном пособии рассматривается популярная система компьютерной математики – MathCAD известной фирмы MathSoft Engineering&Education, Inc., отличающаяся простотой освоения, удобством в эксплуатации и эффективностью решения различных математических задач, в том числе и прикладных.

В пособии кратко рассматриваются возможности, интерфейс, компоненты системы MathCAD 2000 Professional и основные приемы работы при решении математических задач. При разработке учебного пособия автор не ставил цель подробного рассмотрения всех возможностей системы MathCAD. Для более глубокого изучения данной системы можно порекомендовать замечательные учебники В.П. Дьяконова, Д.В. Кирьянова, А.И. Плиса и Н.А. Сливиной и др., приведенные в списке рекомендованной литературы в конце пособия. Отдельные материалы трудов данных специалистов с определенной творческой переработкой использованы и в данном пособии.

В учебном пособии большое внимание уделяется изложению практических аспектов реализации оптимизационных экономико-математических моделей линейного и динамического программирования в MathCAD. Приведенный в пособии материал без дополнительной переработки может быть использован и в более поздних версиях системы MathCAD.

Учебное пособие включает восемь глав. В главе 1 обзорно рассматриваются основные возможности, элементы интерфейса и компоненты системы MathCAD. В главе 2 рассматриваются основные приемы работы с текстовым, формульным и графическим редакторами системы MathCAD.

Главы 3 и 4 посвящены рассмотрению реализации задач элементарной математики и линейной алгебры в системе MathCAD. В главе 5 излагаются основы программирования, которые существенно расширяют возможности данной системы при решении различных экономических задач. Приводятся примеры программных модулей, наглядно реализующие основные возможности инструментария программирования.

В главе 6 и 7 излагаются практические аспекты реализации оптимизационных экономико-математических моделей линейного и динамического программирования в MathCAD. Рассмотрены задачи планирования производства, загрузки мощностей, составления смесей, раскроя материала, транспортная задача и др. Приведена реализация геометрического метода решения задач линейного программирования в MathCAD. Большое внимание уделяется использованию инструментария программирования при реализации задач динамического и целочисленного линейного программирования.

Глава 8 «Лабораторный практикум» предназначена для закрепления студентами материала, содержащегося в предыдущих главах, и выработки практических навыков реализации рассмотренных задач. Каждый лабораторный практикум ориентирован на самостоятельную работу студентов, задания по каждой теме разбиты на варианты. С целью проверки корректности MathCAd-реализации приведенных заданий студентам рекомендуется также решить их и вручную.

В конце каждой главы приведен перечень контрольных вопросов, призванный выявить уровень усвоения материала студентами.

В приложениях приведена справочная информация, а также емкие программные модули, реализующие отдельные задачи.

Автор выражает огромную благодарность рецензентам д.ф.-м.н., профессору Габбасову Назиму Салиховичу, д.ф.-м.н., профессору Исавнину Алексею Геннадьевичу, д.э.н., профессору Садриеву Дуферу Сабировичу за ценные замечания, позволившие существенно улучшить данное пособие. Автор будет признателен за любые конструктивные замечания и пожелания по совершенствованию материала пособия, которые можно направлять по электронному адресу iln-m@yandex.ru.

Глава 1. Основные возможности и интерфейс системы MathCAD

MathCAD – это популярная система компьютерной математики, предназначенная для автоматизации решения массовых математических задач в самых различных областях науки, техники и образования.

Название системы происходит от слов – **Math**ematica (математика) и CAD (Computer Aided Design – системы автоматического проектирования).

MathCAD может:

использоваться в качестве калькулятора для простых вычислений;

заменить компьютерные программы, выполняющие более сложные вычисления. Начиная с версии 7.0, в MathCAD предусмотрена возможность программирования с использованием таких управляющих структур, как ветвление, циклы, подпрограммы и т.д., что существенно расширяет возможности пользователей;

определять значения выражений, заданных в символьном виде (символьное исчисление), определять вид производной сколь угодно сложной функции, а не только находить ее численные значения в отдельных точках, вычислять определенные и неопределенные интегралы или выражать одну переменную через остальные в уравнении с несколькими неизвестными и т.д.;

заменить справочные таблицы (например, таблицу интегралов или таблицы значений стандартных распределений в прикладной статистике);

строить графики, которые как визуальное вспомогательное средство могут существенно облегчить дальнейшие вычисления, а также гистограммы и трехмерные столбчатые диаграммы для представления статистической информации;

создавать документы, качество оформления которых позволяет непосредственно включать их в отчеты;

разнообразными способами вступать в контакт с внешним компьютеризированным миром. Это может быть обмен данными с другими приложениями (например, Excel, MATLAB и др.) или с использованием MathCAD-документов, полученных через Internet.

В состав MathCAD входят следующие основные компоненты:

редактор документов – редактор с возможностью вставки математических выражений, шаблонов графиков и текстовых комментариев;

центр ресурсов – интегратор ресурсов системы;

электронные книги – электронные книги с описанием типовых расчетов в различных областях науки и техники;

справочная система – система для получения справочных данных по тематическому и индексному каталогу, а также для поиска нужных данных по ключевому слову или фразе;

«быстрые шпаргалки» - короткие примеры с минимальными комментариями, описывающие применение всех встроенных операторов и функций системы;

браузер Интернета – собственное средство выхода в Интернет.

Запуск программы MathCAD осуществляется выбором команды **Mathcad 2000** (или, к примеру, MathCAD 12, MathCAD 13, MathCAD 14, в зависимости от установленной версии) в подменю **MathSoft Apps** меню **Программы**. При частом использовании данной программы целесообразно создать соответствующий ярлык на рабочем столе. После запуска программы на экране появится окно, представленное на рис. 1.

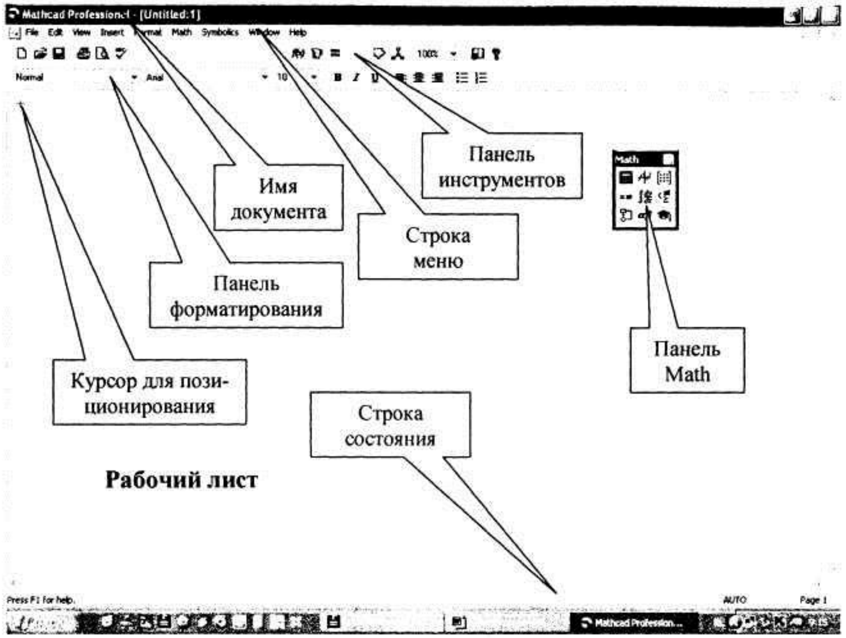


Рис. 1. Элементы интерфейса системы MathCAD 2000 Professional

В строке меню системы MathCAD 2000 представлены следующие пункты меню:

File (Файл) – работа с файлами, Интернетом и электронной почтой;

Edit (Правка) – редактирование документов;

View (Вид) – изменение способов представления документов и скрытие/отображение элементов интерфейса;

Insert (Вставка) – вставка объектов и их шаблонов (включая графику);

Format (Формат) – изменение формата объектов;

Math (Математика) – управление процессом вычислений (начиная с версии MathCAD 11 данный пункт заменен на Tools (Инструментарий));

Graphics (Графика) – работа с графическим редактором;

Symbolic (Символьные вычисления) – выбор операций символьного процессора;

Window (Окно) – управление окнами системы;

Help (Справка) – работа со справочной базой данных о системе, центром ресурсов и электронными книгами.

Одна из сильных сторон MathCAD – это представление и ввод математических символов и выражений в привычной форме. Наиболее простой способ ввода математических символов и выражений заключается в использовании панели **Math** (Математика), которая состоит из элементов, представленных на рис. 2.

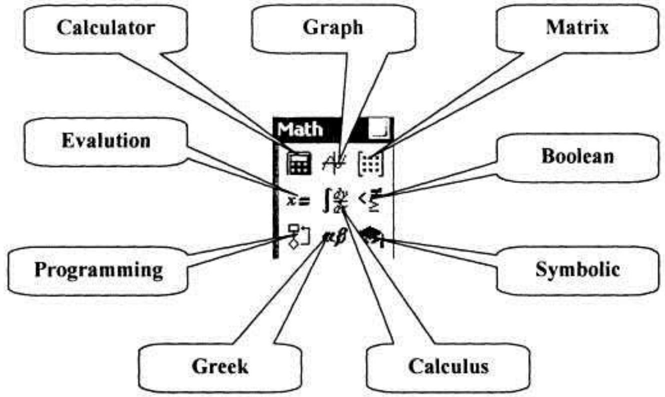


Рис. 2. Элементы панели Math

Calculator (Калькулятор) – вызов панели для задания арифметических операций, а также некоторых часто используемых функций, например факториала, логарифма и т.п. Эту панель можно использовать как калькулятор. Кнопка с пиктограммой «:=» предназначена для ввода оператора локального присвоения, задающего определенное значение для переменной или функции.

Boolean (Булева) – вызов панели, содержащей кнопки для ввода операторов сравнения (больше, меньше и т.д.) и кнопки ввода логических операторов (и, или, не).

Evalution (Вычисление) – вызов панели, содержащей кнопки ввода операторов локального и глобального присвоения значений переменных и функций, кнопку со стрелкой для символьного вычисления выражений и четыре кнопки, позволяющие самостоятельно определять операторы.

Graph (Графики) – вызов панели, содержащей инструменты для построения графиков.

Matrix (Матрицы) – вызов панели, содержащей инструменты для ввода векторов и матриц, а также для вычислений, связанных с матрицами.

Calculus (Исчисление) – вызов панели, содержащей инструменты для дифференцирования, интегрирования, а также определения суммы и произведения, вычисления пределов. На этой же панели находится кнопка ввода символа бесконечность.

Greek (Греческий алфавит) – вызов панели, предназначенной для ввода греческих букв.

Programming (Программирование) – вызов панели инструментов, позволяющих встраивать в документ собственные запрограммированные функции.

Symbolic (Символы) – вызов панели инструментов, предназначенных для осуществления символьных вычислений.

Все вышеперечисленные панели инструментов представлены на рис. 3.

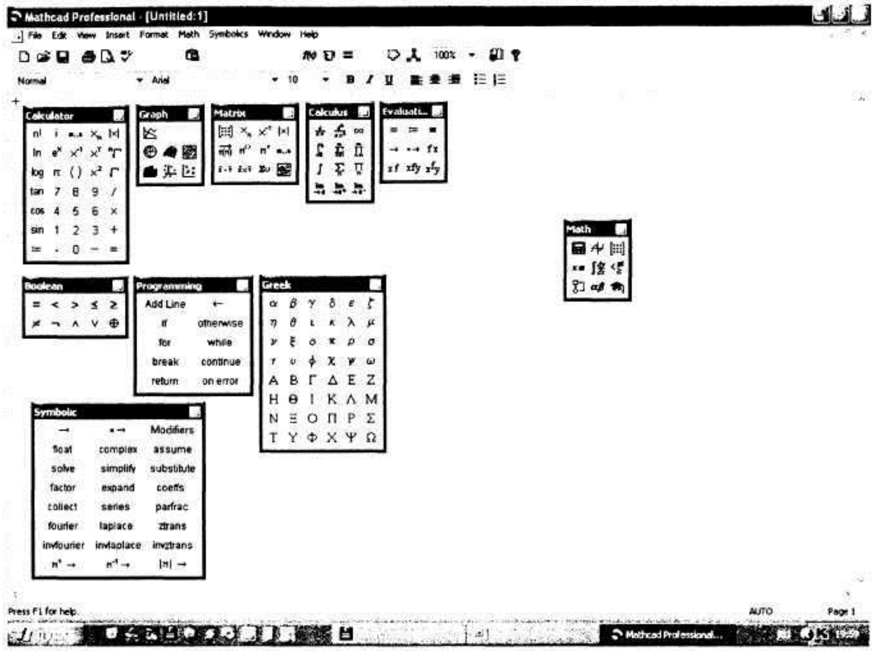


Рис. 3. Панели инструментов MathCAD 2000 Professional

Контрольные вопросы

1) Что представляет собой система MathCAD?
2) Основные возможности системы MathCAD?
3) Основные компоненты, входящие в состав системы MathCAD?
4) Основные элементы интерфейса системы MathCAD?
5) Основные компоненты панели **Math**?

Глава 2. Основы работы с системой MathCAD

2.1. Текстовый редактор

Тексты в системе MathCAD лишь на первый взгляд имеют второстепенное значение. На самом деле профессионально сделанные в MathCAD документы, прежде всего, должны иметь достаточно подробные текстовые комментарии.

В простейшем случае для ввода текстового комментария достаточно ввести символ " (одна двойная кавычка). В появившемся прямоугольном окне можно начинать вводить текст. В текстовом блоке курсор имеет вид красной вертикальной черты и отмечает место ввода. Текст редактируется общепринятыми средствами – перемещением курсора ввода клавишами управления курсором, установкой режима вставки и замещения (клавиша Insert), стиранием (клавиши Del и Backspace), выделением, копированием в буфер обмена («Ctrl» + «C»), вставкой из буфера («Ctrl» + «V») и т.д.

Удобно осуществлять управление стилем текста с помощью панели форматирования. В текстовом блоке есть также возможность выровнять текст по левой его границе, правой границе или по центру.

Клавиши перемещения курсора можно использовать с нажатой клавишей Shift, что обеспечивает ускоренное перемещение в текстовом блоке.

В самом общем случае при вводе текста можно руководствоваться следующими правилами:

1) введите знак двойной кавычки " – появится прямоугольное окно с курсором ввода;
2) на панели форматирования с помощью раскрывающегося списка выбора шрифта установите необходимый шрифт;
3) начните посимвольно набирать текст, используя типовые средства текстового редактора (клавиши Пробел, Del, Backspace и т.д.);

4) нажимайте клавишу Enter для перехода на новую строку (если этого не делать, переход на новую строку будет осуществляться автоматически);
5) для завершения ввода текста отведите указатель мыши в сторону от текстового блока и щелкните левой кнопкой мыши.

Текстовый блок в ходе набора текста автоматически расширяется. Блок имеет маркеры изменения размера в виде маленьких черных прямоугольников, уцепившись за которые, блок можно растягивать в том или ином направлении.

Выделенные рамкой текстовые блоки можно перетаскивать на другое место, уцепившись за рамку указателем мыши – он при этом превращается в изображение черной ладошки. Если в начале перемещения нажать и удерживать клавишу «Ctrl», то будет выполняться перенос блока с его сохранением на первоначальном месте.

Для корректировки текста надо подвести указатель мыши к нужному месту и щелкнуть левой кнопкой мыши. Появится рамка текстового блока, а на месте указателя мыши – курсор ввода.

2.2. Формульный редактор

Фактически система MathCAD интегрирует в себе три редактора: текстовый, формульный и графический. Для запуска формульного редактора достаточно установить указатель мыши в любом свободном месте окна редактирования и щелкнуть левой кнопкой мыши. В этом месте окажется курсор ввода в виде маленького красного крестика. Его можно перемещать клавишами перемещения курсора.

Курсор (маркер) ввода указывает место, с которого можно начинать набор формул – вычислительных блоков. В зависимости от места расположения курсор ввода может менять свою форму.

Ввод и редактирование математических выражений во многом напоминает редактирование текстовых комментариев.

Рассмотрим пример вычисления отношения суммы чисел 2 и 3 к корню квадратному из числа 5. Вначале введем подряд символы 2+3. Вид формульного блока представлен на рис. 4. Особое внимание заслуживает то, что при таком последовательном вводе курсор-уголок охватывает последний операнд.

$$\boxed{2+3}$$

Рис. 4. Фрагмент MathCAD-документа: создание формульного блока и ввод в него суммы чисел 2 и 3

Теперь необходимо ввести знак деления. Однако если сделать это сразу, то данный знак будет относиться не ко всей сумме, а только к последнему операнду – числу 3. Чтобы знак деления относился ко всей сумме, надо выделить все выражение 2+3. Для этого достаточно нажать клавишу Пробел (рис. 5).

$$\boxed{\underline{2+3}}$$

Рис. 5. Фрагмент MathCAD-документа: выделение всей суммы курсором ввода

Далее можно ввести знак деления, нажав клавишу /. Формульный блок приобретает вид, представленный на рис. 6. Примечательно, что знак деления в виде наклонной черты автоматически приобрел вид длинной горизонтальной черты под суммой, а под ним появилось место для ввода знаменателя дроби в виде черного квадрата, охваченного курсором ввода. Разумеется, как это принято даже при работе с калькулятором, можно было бы выделить сумму скобками, записав ее в виде (2+3), тогда знак деления относился бы ко всей сумме. Однако в плане рекомендации не следует вводить скобки там, где без них легко можно обойтись.

$$\boxed{\frac{2+3}{\blacksquare}}$$

Рис. 6. Фрагмент MathCAD-документа: формульный блок после ввода знака деления

Следующий этап – ввод знака квадратного корня и подкоренного выражения. Одним из способов является использование панели Math (кнопка - Calculate). Также для ввода квадратного корня можно использовать кнопку на клавиатуре со знаком обратной косой черты \. Далее вводится подкоренное выражение – в нашем примере число 5. Результат ввода знаменателя дроби представлен на рис. 7.

$$\boxed{\frac{2+3}{\sqrt{5}}}$$

Рис. 7. Фрагмент MathCAD-документа: формульный блок с заданным выражением

Теперь выражение, по существу, введено полностью, осталось увидеть результат его вычисления. Для этого в конце выражения нужно поставить оператор вывода – знак равенства =. Однако сразу его вводить нельзя, поскольку маркер вывода установлен на последнем операторе. Необходимо выделить все выражение: нажав клавишу Пробел – будет выделен весь числитель, а затем повторным нажатием данной клавиши будет выделено все выражение. Затем, при вводе знака равенства =, MathCAD автоматически отобразит результат вычислений (по умолчанию десятичные числа имеют представление с тремя знаками после разделительной точки, при необходимости результаты вычислений можно отформатировать в меню **Format→Result**). Вид формульного блока представлен на рис. 8.

$$\frac{2+3}{\sqrt{5}} = 2.236$$

Рис. 8. Фрагмент MathCAD-документа:
формульный блок после введения оператора вывода

MathCAD можно легко использовать для различных экспериментов вычислительного характера. Допустим, мы решили вычислить результат, когда подкоренным выражением в знаменателе должно быть число 5 в степени 1.25, причем ввод нового формульного выражения не требуется, т.е. достаточно отредактировать имеющееся. Для этого необходимо аккуратно поместить указатель мыши после числа 5 и щелкнуть левой кнопкой, при этом курсор ввода отметит это число (рис. 9).

$$\frac{2+3}{\sqrt{5}} = 2.236$$

Рис. 9. Фрагмент MathCAD-документа:
изменение одного из операндов в формульном блоке

Далее вводится знак возведения в степень. Его можно выбрать на панели Math (Calculate) или просто нажать клавишу со знаком ^. При этом в формульном блоке появится запись возведения числа 5 в некую степень (рис. 10).

$$\frac{2+3}{\sqrt{5^{\blacksquare}}} = \blacksquare$$

Рис. 10. Фрагмент MathCAD-документа:
вид формульного блока после введения оператора возведения в степень

После ввода степени 1.25 (следует обратить внимание, что в качестве разделителя целой и дробной частей используется точка, а не запятая), выде-

лив весь формульный блок (клавишей Пробел) и введя оператор вывода =, MathCAD автоматически вычислит полученное выражение (рис. 11).

$$\frac{2+3}{\sqrt{5^{1.25}}} = 1.829$$

Рис. 11. Фрагмент MathCAD-документа:
вычисление скорректированного выражения

2.2.1. Операции ввода и присваивания

Для вычисления любого выражения достаточно установить после него оператор вывода (знак =). Покажем это на нескольких примерах простых вычислений.

Ввод	На экране дисплея
`1.234*2.345=`	$1.234 \cdot 2.345 = 2.894$
`1/7=`	$\frac{1}{7} = 0.143$
`cos(0.5)=`	$\cos(0.5) = 0.878$
`e^2=`	$e^2 = 7.389$

В математике для придания вычислениям общности часто используются переменные в виде некоторых обобщенных обозначений данных определенного типа. Переменные имеют имена (идентификаторы), и для них характерна операция присваивания значений. Ниже приведены простейшие примеры использования переменных.

Ввод	На экране дисплея
`a=2`	$a := 2$
`b=3`	$b := 3$
`a+b=`	$a + b = 5$

Далее если попытаться присвоить переменным a и b новые значения с помощью оператора =, то система выдаст их старые значения.

Ввод	**На экране дисплея**
a=	a = 2
b=	b = 3

Чтобы все же присвоить переменным новые значения, необходимо использовать стандартный оператор присваивания :=, который вводится своим первым символом : (двоеточие).

Ввод	**На экране дисплея**
a:1	a := 1
b:1	b := 1
a+b=	a + b = 2

Из данных примеров можно заметить некоторые особенности работы MathCAD при выполнении простых вычислений:

некоторые комбинированные операторы (например, :=) вводятся одним символом;

MathCAD вставляет пробелы до и после арифметических операторов;

оператор умножения вводится как звездочка, но представляется точкой в середине строки;

оператор деления вводится как косая черта, но заменяется горизонтальной чертой;

оператор возведения в степень вводится знаком ^, но число в степени представляется в обычном виде (степень как верхний индекс);

MathCAD понимает наиболее распространенные константы, например e – основание натурального логарифма;

математические выражения могут редактироваться внутри формульного блока с использованием типовых приемов редактирования.

2.2.2. Использование шаблонов математических операторов и символов

Построение вычислительных блоков в MathCAD фактически обеспечивается благодаря использованию шаблонов математических операторов и символов, расположенных на панелях **Calculus**, **Evaluation**, **Boolean** и др. На рис. 12 приведены примеры использования отдельных шаблонов.

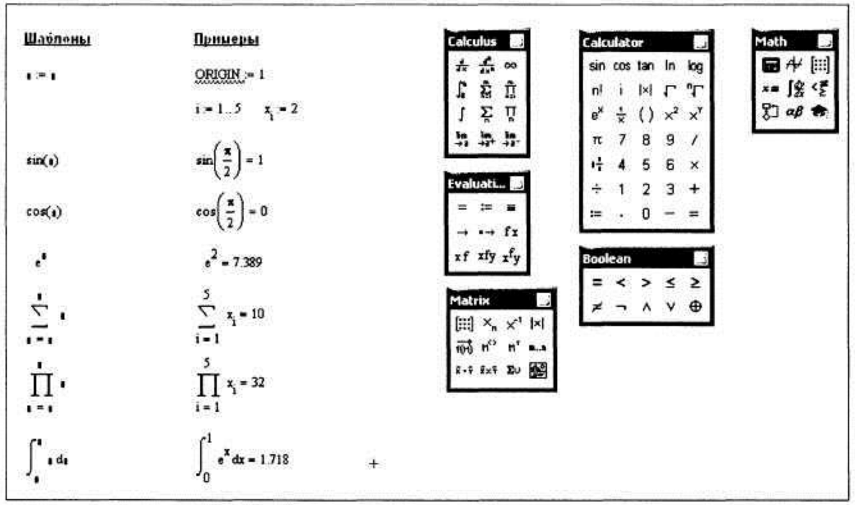


Рис. 12. Фрагмент MathCAD-документа: примеры использования шаблонов математических операторов

После выбора шаблона на соответствующей панели инструментов, он появляется с пустыми полями для ввода данных. Для заполнения шаблона необходимо последовательно установить курсор мыши в каждое поле и ввести данные. Вычисления выполняются после выделения всего блока (охвата выражения синим уголком) и установки оператора вывода – знака =.

2.2.3. Использование ранжированных переменных и векторов

В практических задачах часто используются переменные, которым задаются ранжированные значения. Например, если записать n:=1..5 (для ввода знака **..** (две точки) используется клавиша **;** (точка с запятой)), то переменная n будет представлять целые числа от 1 до 5 с шагом 1, т.е. значения 1, 2, 3, 4, 5. Возможность доступа отдельно к каждому значению отсутствует.

Если требуется задать ряд чисел с шагом *d*, то ранжированная переменная записывается следующим образом:

$$x := x_{start},\, x_{start} + d \,..\, x_{end}, \qquad (2.1)$$

где x_{start} – начальное значение переменной x;

x_{end} – конечное значение переменной x.

Например, x:=1,1.25..2 дает ранжированную переменную x со значениями 1, 1.25, 1.5, 1.75 и 2. Примеры задания и вывода ранжированных переменных и вектора V представлены на рис. 13.

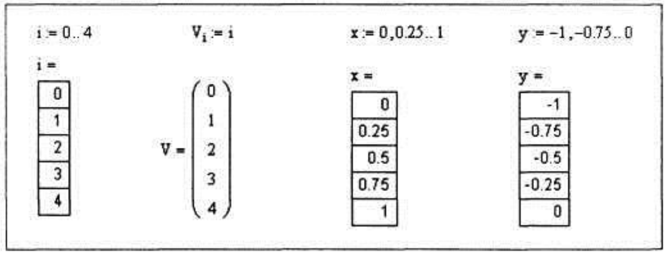


Рис. 13. Фрагмент MathCAD-документа: примеры задания и вывода ранжированных переменных и вектора V

2.2.4. Ввод матриц и векторов

Матрицы в виде двумерных массивов широко применяются при решении задач различных областей науки и техники.

Матрицу можно представить как таблицу, имеющую m строк (rows) и n столбцов (columns). Если m=n, то матрицу именуют квадратной. Число элементов или размер матрицы есть $m \times n$. Вектор с длиной m рассматривается как одномерная матрица размера $m \times 1$. Для операций с матрицами, включая их ввод, служит панель матричных операций – **Matrix** (Матрицы). В ней, в частности, имеется шаблон для ввода матриц – он имеет вид удлиненных скругленных скобок с местами для ввода элементов матриц. При вводе шаблона появляется небольшое окно, запрашивающее число строк и столбцов матрицы. На рис. 14 представлены шаблоны ввода матриц и простейшие векторные и матричные операции.

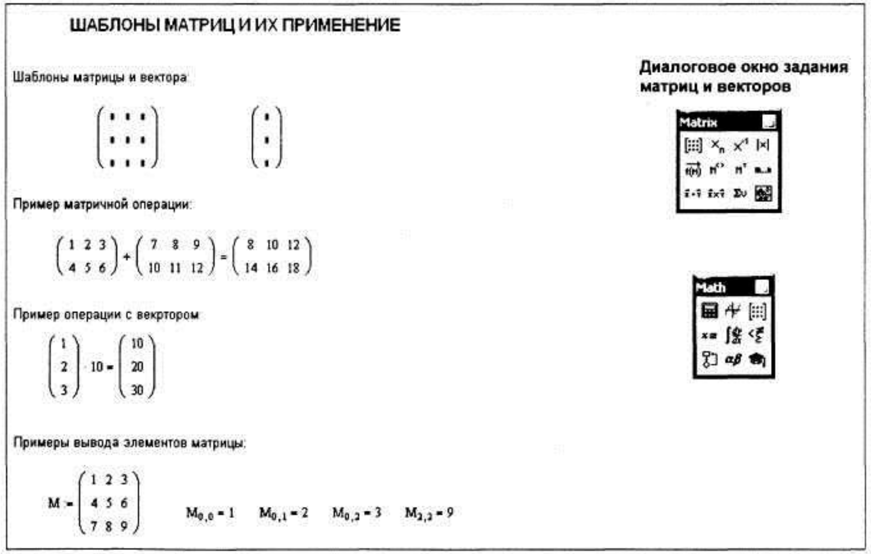


Рис. 14. Фрагмент MathCAD-документа: примеры простейших операций с матрицами

Элементы матриц являются индексированными переменными и характеризуются двумя индексами – номером строки и номером столбца. Например, $M_{i,j}$ – означает элемент матрицы, расположенный в строке i и столбце j. Матрицы одного размера можно складывать и вычитать. Возможна замена строк на столбцы – операция транспонирования (значок M^T на панели **Matrix**).

Элементы векторов и матриц можно задавать явно, присваивая индексированной переменной то или иное значение. Аналогично можно получать или выводить значение нужного элемента (рис. 15).

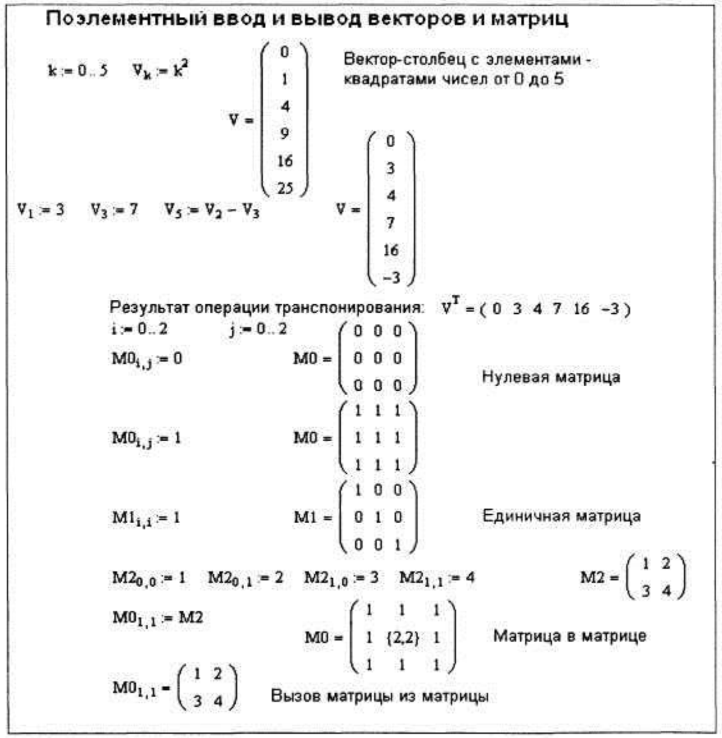


Рис. 15. Фрагмент MathCAD-документа: примеры поэлементного создания и вывода векторов и матриц

2.3. Графический редактор

Система MathCAD позволяет быстро строить графики различных функций. Инструменты для построения графиков содержатся на панели **Graph** (графики), в том числе:

1) XY-Plot – график функции одной переменной в системе координат Декарта;
2) Polar Plot – график в полярной системе координат;
3) Surface Plot – график поверхности (функции двух переменных);
4) Contour Plot – контурный график (линий равного уровня);
5) 3D Bar Plot – график поверхности в виде трехмерных столбиков;
6) 3D Scatter Plot – график поверхности, построенный точками.

2.3.1. Построение двумерного графика одной функции

Рассмотрим пример построения двумерного графика на примере функции $\sin(x)^3$. Процесс построения графика осуществляется по следующему алгоритму:

1) вводится функция, т.е. набирается формульный блок: `sin(x)^3`

2) на панели математических знаков необходимо выбрать панель **Graph** (Графики);

3) на панели графиков необходимо выбрать кнопку с изображением двумерного графика – на экране появится шаблон графика (рис. 16) с уже введенной по оси Y функцией;

4) в место ввода шаблона по оси X вводится имя независимого аргумента – x, далее, нажав клавишу Enter, автоматически выводится график функции.

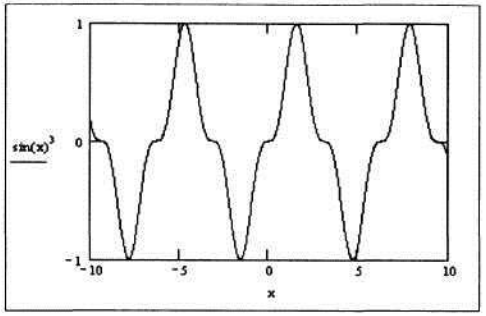


Рис. 16. Фрагмент MathCAD-документа: результат построения графика функции $\sin(x)^3$

MathCAD позволяет изменять размеры графика и перемещать их по рабочему листу. Принципы выполнения данных операций аналогичны подобным операциям, выполняемых, к примеру, в MS Word.

2.3.2. Построение графиков ряда функций

Рассмотрим построение графиков нескольких функций. Пусть в полученном графике необходимо отобразить еще две функции, например $\sin(x)^2$ и $\cos(x)$. Для этого их надо просто перечислить после первой функции в месте ввода возле оси Y, отделяя выражения функций запятыми. Данную задачу можно выполнить следующим образом:

1) поместите указатель мыши точно после выражения $\sin(x)^3$ и щелкните левой кнопкой мыши – появится синий уголок в конце выражения;

2) введите знак запятой (при этом первое выражение переместится вверх и под ним появится новое поле ввода);

3) введите выражение: `sin(x)^2`

4) аналогично введите выражение `cos(x)` и нажмите клавишу Enter – появится график с тремя кривыми (рис. 17).

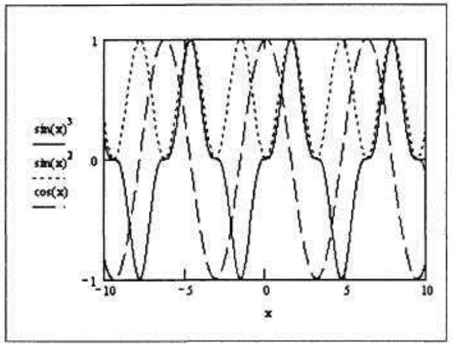


Рис. 17. Фрагмент MathCAD-документа: двумерный график с тремя кривыми

2.3.3. Построение графиков поверхностей

MathCAD наряду с двумерными графиками позволяет эффективно строить и графики поверхностей (их называют также трехмерными или 3D-графиками). Рассмотрим пример построения графика поверхности, описываемой функцией $z = x^2 + y^2$. Построение данного графика можно представить в виде следующего алгоритма:

1. Необходимо определить функцию z двух переменных x и y, для нашего примера: $z(x, y) := x^2 + y^2$.

2. Используя палитру **Graph** на панели **Math**, вводится шаблон трехмерного графика **Surface Plot** (или клавишами «Ctrl» + «2»).

3. В поле ввода под шаблоном вводится имя функции: z (на одном графике можно располагать и несколько функций: для этого каждую функцию необходимо сначала также определить, затем в поле ввода через запятую ввести имя каждой функции). Далее щелкнув левой кнопкой мыши вне поля графика, будет построен сам график (в виде «проволочного каркаса»).

После того как график будет построен, можно его переместить или скопировать в нужное место, увеличить или уменьшить до нужных размеров, повернуть для наглядности (нажать левой кнопкой мыши на графике и, удерживая ее, перемещать указатель мыши до нужного угла), отформатировать (панель форматирования вызывается двойным нажатием левой кнопки мыши на графике). Результаты построения и форматирования графика рассматриваемой функции, а также панель форматирования, приведены на рис. 18. Рекомендуется поэкспериментировать с панелью форматирования графиков (удобно использовать при этом кнопку «**Применить**») и ознакомиться с основными возможностями.

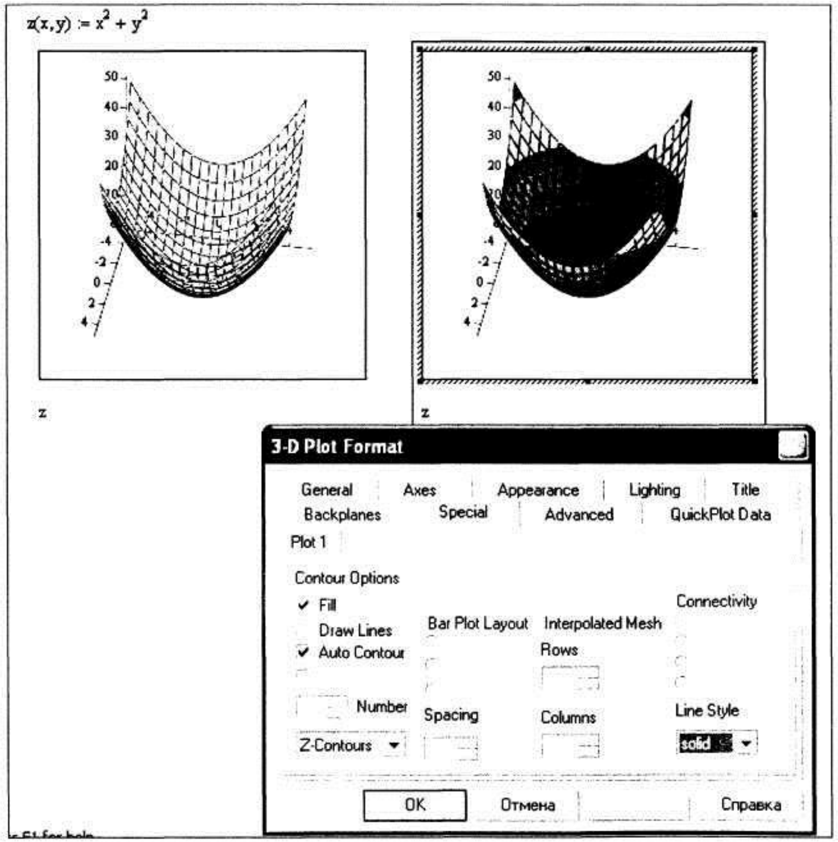


Рис. 18. Фрагмент MathCAD-документа: график функции $z = x^2 + y^2$ и панель форматирования

Контрольные вопросы

1) Способы ввода текстовых комментариев в системе MathCAD?

2) Форматирование текстовых комментариев в MathCAD?

3) Перемещение и копирование текстовых, формульных и графических объектов в MathCAD?

4) Операторы ввода (присваивания), вывода, символьного равенства?

5) Назначение клавиши Пробел в формульном редакторе?

6) Назначение и виды шаблонов в MathCAD?

7) Понятие ранжированной переменной в MathCAD? Ввод и вывод ранжированных переменных?

8) Виды графиков в MathCAD? Создание и форматирование графиков?

Глава 3. Решение задач элементарной математики в MathCAD

3.1. Преобразование алгебраических выражений

В MathCAD можно выполнить следующие символьные преобразования алгебраических выражений:

simplify (упростить) – выполнить арифметические операции, привести подобные, сократить дроби, использовать для упрощения основные тождества (формулы сокращенного умножения, тригонометрические тождества и т.п.);

expand (развернуть) – раскрыть скобки, перемножить и привести подобные;

factor (разложить на множители) – представить, если возможно, выражение в виде произведения простых сомножителей;

substitute (подставить) – заменить в алгебраическом выражении букву или выражение другим выражением;

convert to partial fraction – разложить рациональную дробь на простейшие дроби.

Если MathCAD не может выполнить требуемую операцию, то он выводит в качестве результата вычислений исходное выражение.

Следует помнить, что MathCAD далеко не всегда преобразует выражение к самому простейшему виду.

Пример 3.1.

Рассмотрим следующий пример, в котором требуется упростить выражение:

$$\frac{3a^2+3ab+3b^2}{4a+4b}\times\frac{2a^2-2b^2}{9a^3-9b^3}.$$

Для удобства установим режим отображения результатов вычислений по горизонтали (в меню выбрать **Symbolic→Evaluation Style→** установить опцию Horizontally).

Введем исходное выражение как показано на рис. 19.

$$\frac{3\cdot a^2+3\cdot a\cdot b+3\cdot b^2}{4\cdot a+4\cdot b}\cdot\frac{2\cdot a^2-2\cdot b^2}{9a^3-9\cdot b^3}$$

Рис. 19. Фрагмент MathCAD-документа: формульный блок с заданным выражением

Для того, чтобы упростить данное выражение необходимо сначала выделить клавишей Пробел все выражение, далее в меню выбрать **Symbolic→ Simplify**. Результат (преобразованное выражение) будет отображен в рабочем документе справа от исходного выражения (рис. 20).

$$\frac{3\cdot a^2+3\cdot a\cdot b+3\cdot b^2}{4\cdot a+4\cdot b}\cdot\frac{2\cdot a^2-2\cdot b^2}{9a^3-9\cdot b^3} \qquad \frac{1}{6}$$

Рис. 20. Фрагмент MathCAD-документа: результат упрощения алгебраического выражения

Пример 3.2. Упростить следующее выражение:

$$(x+y)\times\left(x^2-xy+y^2\right)-(x-1)\times\left(x^2+x+1\right).$$

Упростим данное выражение, используя функцию Expand.

Введем исходное выражение, выделяем его клавишей Пробел, далее выбираем в меню **Symbolic→Expand**. Результат (преобразованное выражение) будет отображен в рабочем документе справа от исходного выражения (рис. 21).

$$(x+y)\cdot\left(x^2-x\cdot y+y^2\right)-(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right) \qquad y^3+1$$

Рис. 21. Фрагмент MathCAD-документа: результат упрощения алгебраического выражения

Пример 3.3. Разложить на множители следующее выражение:

$$a^2b+ab^2+2abc+b^2c+a^2c+ac^2+bc^2.$$

Для разложения на множители данного выражения используем функцию **Factor** в меню **Symbolics**, предварительно выделив все выражение. Результат упрощения выражения приведен на рис. 22.

$$a^2\cdot b+a\cdot b^2+2\cdot a\cdot b\cdot c+b^2\cdot c+a^2\cdot c+a\cdot c^2+b\cdot c^2 \quad (b+c)\cdot(c+a)\cdot(a+b)$$

Рис. 22. Фрагмент MathCAD-документа: результат упрощения выражения с использованием функции Factor

Пример 3.4. Разложить на простейшие дроби рациональную дробь

$$\frac{x^2-3x+7}{(x-1)^2\times\left(x^2+x+1\right)}.$$

Введите аналогично как и в предыдущих примерах алгебраическое выражение, выделите с помощью мыши переменную x, далее выберите в меню **Symbolic→Variable→Convert to Partial Fraction**. Ниже приведен фрагмент рабочего документа MathCAD с соответствующими вычислениями.

$$\frac{x^2-3\cdot x+7}{(x-1)^2\cdot\left(x^2+x+1\right)} \quad \boxed{\frac{5}{3\cdot(x-1)^2}-\frac{2}{(x-1)}+\frac{2}{3}\cdot\frac{(5+3\cdot x)}{\left(x^2+x+1\right)}}$$

Рис. 23. Фрагмент MathCAD-документа: результат разложения рациональной дроби на простейшие дроби

3.2. Символьное решение уравнений и систем

Пример 3.5. Решить следующее уравнение:

$$\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}=0.$$

Введите левую часть алгебраического выражения, далее символьный знак равенства (клавиши «Ctrl» + «=») и правую часть уравнения (нуль). Выделите с помощью мыши переменную x, далее выберите в меню **Symbolic→Variable→Solve** (решить). Ниже приведен фрагмент рабочего документа MathCAD с соответствующими вычислениями.

$$\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}=0 \quad \boxed{\frac{5}{2}}$$

Рис. 24. Фрагмент MathCAD-документа: результат решения уравнения

Пример 3.6. Решить ниже приведенную систему уравнений

$$\begin{cases} x(z+1)^2-2z(x+z)=0, \\ (1+x^2)\sqrt[3]{(y-2)}-2x^2=0, \\ \sqrt{y-2}(z-2)+z=0. \end{cases}$$

Введите с клавиатуры ключевое слово Given (дано), затем правее и ниже ключевого слова – левую часть первого уравнения системы, далее символьный знак равенства («Ctrl» + «=») и правую часть уравнения (нуль). Аналогично вводятся остальные уравнения системы.

Правее или ниже последнего уравнения системы введите имя функции Find (найти), затем перечислите в скобках через запятую имена переменных, значения которых нужно вычислить. Далее выделите Find(x, y, z), выберите на панели **Math** панель **Symbolics** и кнопку . Вычисленное решение системы будет отображено после щелчка мышью вне выделяющей рамки в рабочем документе справа от стрелки – в виде матрицы, каждый столбец которой содержит одно из решений системы (если система уравнений не имеет решений или имеет их бесчисленное множество, то результат функции Find не отображается, а сама функция выделяется красным цветом). В нашем примере два решения системы: x=0, y=2, z=0 и x=1, y=3, z=1. Результаты вычислений приведены на рис. 25.

Given

$$x\cdot(z+1)^2-2\cdot z\cdot(x+z)=0$$

$$\left(1+x^2\right)\cdot\sqrt[4]{y-2}-2\cdot x^2=0$$

$$\sqrt{y-2}\cdot(z-2)+z=0$$

$$\mathrm{Find}(x,y,z)\rightarrow\begin{pmatrix}1&0\\3&2\\1&0\end{pmatrix}$$

Рис. 25. Фрагмент MathCAD-документа: результат решения системы уравнений

Контрольные вопросы

1) Назначение команды **simplify**?

2) Назначение команды **expand**?

3) Назначение команды **factor**?

4) Назначение команды **substitute**?

5) Назначение команды **convert to partial fraction**?

6) Назначение команды **Given**?

7) Назначение команды **Find**?

Глава 4. Решение задач линейной алгебры в MathCAD

Задачи линейной алгебры сопряжены с различными операциями с матрицами, большинство вычислений с которыми, как и другие вычисления в MathCAD, можно выполнить тремя способами: 1) с помощью панелей инструментов; 2) выбором операции в меню; 3) обращением к соответствующим функциям.

4.1. Панель инструментов для работы с матрицами

Панель операций с матрицами и векторами вызывается с панели **Math** кнопкой **Matrix** - [:::]. За кнопками данной панели закреплены следующие функции:

[:::] - определение размеров матрицы;

X_n - ввод нижнего индекса;

x^{-1} - вычисление обратной матрицы;

$|x|$ - вычисление определителя матрицы: $|A|=\det A$; вычисление длины вектора X: $|X|=\sqrt{XX}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$;

$\overrightarrow{f(M)}$ - поэлементные операции с матрицами: если $A=\{a_{ij}\}$, $B=\{b_{ij}\}$, то $\overline{AB}=\{a_{ij}b_{ij}\}$;

$M^{\langle\rangle}$ - определение столбца матрицы: $M^{\langle j\rangle}$ - j-ый столбец матрицы;

M^T - транспонирование матрицы: если $M=\{m_{ij}\}$, то $M^T=\{m_{ji}\}$;

m..n - определение диапазона изменения переменной;

$\vec{x}\cdot\vec{y}$ - вычисление скалярного произведения векторов: $xy=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$;

$\vec{x}\times\vec{y}$ - вычисление векторного произведения двух векторов: $a\times b=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$;

Σv - вычисление суммы компонент вектора: $\sum V = \sum_{i=1}^{n} x_i$;

- визуализация цифровой информации, сохраненной в матрице.

Для того чтобы выполнить какую-либо операцию с помощью панели инструментов, нужно выделить матрицу и щелкнуть мышью на панели по кнопке операции, либо выбрать операцию на панели инструментов и ввести в помеченной позиции имя матрицы.

4.2. Меню Matrix

Меню символьных операций с матрицами (рис. 26) содержит три функции: 1) транспонирование (**Transpose**); 2) обращение матрицы (**Invert**); 3) вычисление определителя матрицы (**Determinant**).

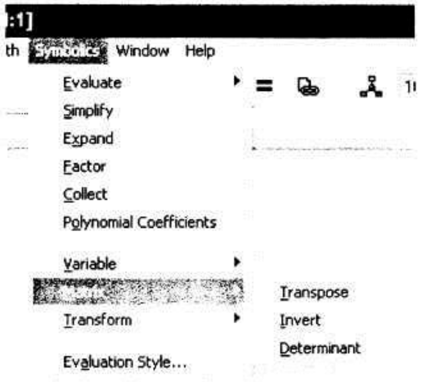


Рис. 26. Меню символьных операций с матрицами

Если требуется произвести какую-либо операцию через меню, то необходимо выделить матрицу и щелкнуть мышью в меню по строке операции.

4.3. Использование функций при работе с матрицами и векторами

Функции, предназначенные для решения задач линейной алгебры, собраны в разделе Векторы и матрицы (Vector and Matrix); их можно разделить на три группы: 1) функции определения матриц и операции с блоками матриц; 2) функции вычисления различных числовых характеристик матриц; 3) функции, реализующие численные алгоритмы решения задач линейной алгебры. Рассмотрим наиболее часто используемые функции.

Функции определения матриц и операции с блоками матриц:

matrix(m, n, f) – создает и заполняет матрицу размерности $m \times n$, элемент которой, расположенный в i-ой строке, j-ом столбце, равен значению некоторой функции $f(i, j)$, причем i=0,1.. m и j =0,1.. n;

diag(v) – создает диагональную матрицу, элементы главной диагонали которой хранятся в векторе v;

identity(n) – создает единичную матрицу порядка n;

augment(A, B) – формирует матрицу, в первых **столбцах** которой содержится матрица A, а в последних матрица B (матрицы A и B должны иметь одинаковое количество строк);

stack(A, B) – формирует матрицу, в первых **строках** которой содержится матрица A, а в последних матрица B (матрицы A и B должны иметь одинаковое количество стлбцов);

submatrix(A, ir, jr, ic, jc) – формирует матрицу, которая является блоком матрицы A, расположенным в строках с ir по jr и в столбцах с ic по jc, $ir \le jr$, $ic \le jc$.

Номер первой строки (столбца) матрицы или первой компоненты вектора хранится в MathCAD в переменной **ORIGIN** (имя данной переменной необходимо записывать заглавными буквами). По умолчанию в MathCAD координаты векторов, столбцы и строки матрицы нумеруются начиная с нуля (**ORIGIN:=0**). Поскольку в математической записи чаще используется нумерация с 1, то необходимо перед началом работы с матрицами, векторами, ранжированными переменными задавать данной переменной значение 1 (**ORIGIN:=1**).

Фрагменты документа MathCAD, содержащего примеры с использованием перечисленных выше функций, приведены на рис. 27 и 28.

ORIGIN := 1

$f(x,y) := x + y$ — Задание функции f(x,y)

A := matrix(3,4,f) — Создание матрицы A размерностью 3x4, элементы которой определяются функцией f(i,j) (где i=0.1..3: j=0.1..4)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$i := 1..4$ $V_i := i$ B := diag(V) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ — Создание диагональной матрицы B, элементы которой хранятся в векторе V

E := identity(3) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — Создание единичной матрицы E порядка 3

D := augment(A,E) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — Создание объединенной матрицы D (объединение матриц A и E по столбцам)

F := stack(A,B) $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ — Создание объединенной матрицы F (объединение матриц A и B по строкам)

Рис. 27. Фрагмент MathCAD-документа: примеры использования функций определения матриц и операций с блоками матриц

ORIGIN := 1

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2 \quad 3} & 4 \\ 5 & \boxed{6 \quad 7} & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$ — Создание матрицы A

B := submatrix(A,1,2,2,3) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ — Выделение из матрицы A блока 2x2

submatrix(A,2,2,1,4) = (5 6 7 8) — Выделение из матрицы A второй строки

submatrix(A,1,3,3,3) = $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$ — Выделение из матрицы A третьего столбца

Рис. 28. Фрагмент MathCAD-документа: примеры использования функции submatrix

Наиболее часто используемые функции вычисления различных числовых характеристик матриц:

last(v) – вычисление номера последней компоненты вектора v;

length(v) – вычисление количества компонент вектора v;

rows(A) – вычисление числа строк в матрице A;

cols(A) – вычисление числа столбцов в матрице A;

max(A) – вычисление наибольшего элемента в матрице A;

min(A) – вычисление наименьшего элемента в матрице A;

tr(A) – вычисление следа квадратной матрицы A (след матрицы равен сумме ее диагональных элементов);

rank(A) – вычисление ранга матрицы A.

Примеры использования вышеприведенных функций приведены на рис. 29.

ORIGIN := 1

$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **Создание матрицы A**

$i := 1..4$ **Создание ранжированной переменной i**

$V_i := i$ **Создание вектора V, компонентами которого являются значения ранжированной переменной i**

last(V) = 4 **Значение последнего элемента вектора V**

length(V) = 4 **Количество компонент вектора V**

rows(A) = 3 **Количество строк матрицы A**

cols(A) = 3 **Количество столбцов матрицы A**

max(A) = 5 **Максимальный элемент матрицы A**

tr(A) = 6 **След матрицы A**

rank(A) = 3 **Ранг матрицы A**

Рис. 29. Фрагмент MathCAD-документа: примеры использования функций вычисления различных числовых характеристик матриц

Наиболее часто используемые функции, реализующие численные алгоритмы решения задач линейной алгебры:

rref(A) – приведение матрицы к ступенчатому виду с единичным базисным минором (выполняются элементарные преобразования со строками матрицы);

lsolve(A,b) – решение системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$, где A – матрица коэффициентов при переменных; b – матрица-столбец свободных чисел. Если система уравнений не имеет решений или имеет их бесчисленное множество, то результат функции lsolve не отображается, а сама функция выделяется красным цветом.

Пример 4.1. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Для решения данной системы создадим матрицы: A (матрица коэффициентов при переменных), B (матрица свободных чисел), AB (расширенная матрица). Для решения данной системы уравнений методом Гаусса используем функцию rref. Фрагмент документа MathCAD с результатами вычислений представлен на рис. 30.

Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса:

$-2 \cdot x_1 + x_2 - 3 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 - 4 \cdot x_5 = 1$

$4 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + x_4 + 7 \cdot x_5 = 2$ **Исходная система линейных уравнений.**

$2 \cdot x_1 - x_2 + x_3 + 8 \cdot x_4 + 2 \cdot x_5 = 1$

ORIGIN := 1

$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **Создание матрицы коэффициентов (A) и матрицы свободных чисел (B).**

AB := augment(A,B) $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 2 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **Создание расширенной матрицы AB для использования в вычислениях.**

Проверка совеместности системы уравнений:

rank(A) = 2 rank(AB) = 3 **В соответствии с теоремой Кронекера-Капелли для того, чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы был равен рангу ее расширенной матрицы.**

Так как условие теоремы Кронекера-Капелли не выполняется, то исходная система уравнений не совместна.

Result := rref(AB) **Создание матрицы Result для отображения результатов вычислений.**

$Result = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 6.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **Метод Гаусса также выявил несовместность системы уравнений (имеется уравнение, в котором все коэффициенты при переменных равны нулю, а свободное число отлично от нуля).**

<u>Ответ:</u> данная система уравнений несовместна, т.е. не имеет решения.

Рис. 30. Фрагмент MathCAD-документа: пример использования функции rref

Пример 4.2. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Результаты вычислений в MathCAD представлены на рис. 31, 32.

Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса:

$2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + x_4 = 6$

$3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = 4$ **Исходная система линейных уравнений.**

$9 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_3 + 7 \cdot x_4 = 2$

ORIGIN := 1

$A := \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ **Создание матрицы коэффициентов (А) и матрицы свободных чисел (В).**

$AB := \text{augment}(A, B) \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ **Создание расширенной матрицы АВ для использования в вычислениях.**

Проверка совместности системы уравнений:

$\text{rank}(A) = 2 \quad \text{rank}(AB) = 2$ **В соответствии с теоремой Кронекера-Капелли для того, чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы был равен рангу ее расширенной матрицы.**

Так как условие теоремы Кронекера-Капелли выполняется, то исходная система уравнений совместна.

Рис. 31. Фрагмент MathCAD-документа: проверка совместности системы линейных уравнений (продолжение на рис. 32)

$\text{Result} := \text{rref}(AB)$ **Создание матрицы Result для отображения результатов вычислений.**

$$\text{Result} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.091 & 0.818 & -0.182 \\ 0 & 1 & 0.455 & -0.091 & 0.909 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 - 0.091 \cdot x_3 + 0.818 \cdot x_4 = -0.182$

$x_2 + 0.455 \cdot x_3 - 0.091 \cdot x_4 = 0.909$ **Разрешенная система уравнений относительно переменных x_1 и x_2**

Ответ: **данная система уравнений совместна, но неопределенная, т.е. имеет бесконечное множество решений.**
Найдем общее решение. Выразим разрешенные переменные через свободные:

$x_1 = -0.182 + 0.091 \cdot x_3 - 0.818 \cdot x_4$

$x_2 = 0.909 - 0.455 \cdot x_3 + 0.091 \cdot x_4$

Найдем частное решение:
Пусть $x_3 := 0 \quad x_4 := 0$

тогда $x_1 := -0.182 + 0.091 \cdot x_3 - 0.818 \cdot x_4 \quad x_1 = 0$

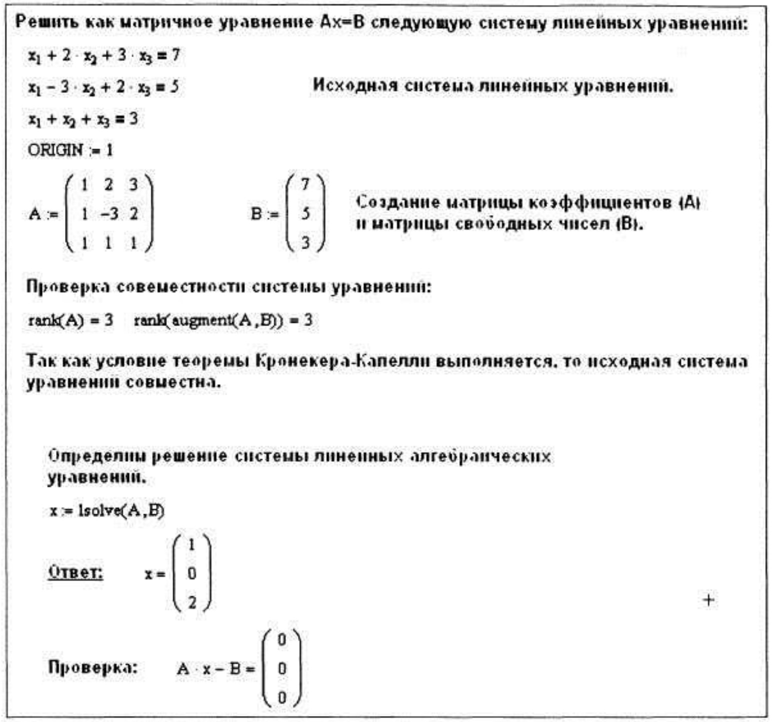
$x_2 := 0.909 - 0.455 \cdot x_3 + 0.091 \cdot x_4 \quad x_2 = 0.909$

Рис. 32. Фрагмент MathCAD-документа: решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Пример 4.3. Решите как матричное уравнение $Ax = B$ следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Результаты вычислений в MathCAD представлены на рис. 33.



Решить как матричное уравнение Ax=B следующую систему линейных уравнений:

$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 7$

$x_1 - 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 5$ Исходная система линейных уравнений.

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$

ORIGIN := 1

$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ Создание матрицы коэффициентов (A) и матрицы свободных чисел (B).

Проверка совместности системы уравнений:

rank(A) = 3 rank(augment(A,B)) = 3

Так как условие теоремы Кронекера-Капелли выполняется, то исходная система уравнений совместна.

Определим решение системы линейных алгебраических уравнений.

x := lsolve(A,B)

Ответ: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Проверка: $A \cdot x - B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Рис. 33. Фрагмент MathCAD-документа:
пример использования функции lsolve

Контрольные вопросы

1) Основные команды панели **Matrix**?

2) Назначение системной переменной **ORIGIN**?

3) Поэлементный ввод и вывод матриц и векторов?

4) Основные функции работы с матрицами (**matrix**, **diag**, **identity**, **augment**, **stack**, **submatrix**)?

5) Функции вычисления числовых характеристик матриц (**last**, **length**, **rows**, **cols**, **max**, **min**, **tr**, **rank**)?

6) Основные функции, реализующие численные алгоритмы решения задач линейной алгебры (**rref**, **lsolve**)?

Глава 5. Основы программирования в MathCAD

Система MathCAD обладает мощнейшим математическим инструментарием, позволяющим охватить достаточно большой круг различных задач. Вместе с тем в практике встречаются задачи, решение которых требует использования специальных методов, не реализованных в MathCAD в виде стандартных функций и команд. Для решения таких задач MathCAD предоставляет определенный инструментарий создания программных модулей, включенных в панель **Programming** (Программирование) (рис. 34).

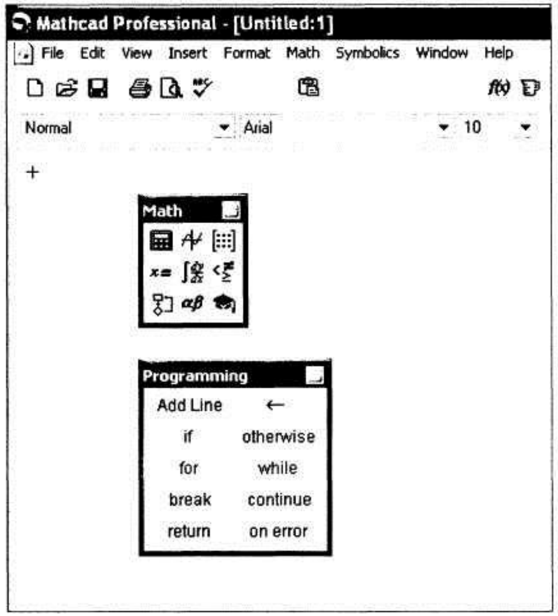


Рис. 34. Панель Programming

Набор инструкций для создания программных модулей содержит следующие элементы:

Add Line – создает и при необходимости удлиняет утолщенную вертикальную линию, справа от которой в местах ввода производится запись программного блока;

$\leftarrow$ – символ локального (т.е. действителен только в рамках программного модуля) присваивания;

if – условная инструкция;

otherwise – инструкция иного выбора (обычно применяется с **if**);

for – инструкция задания цикла с фиксированным числом повторений;

while – инструкция задания цикла, действующего до тех пор, пока выполняется некоторое условие;

break – инструкция прерывания;

continue – инструкция продолжения;

return – инструкция возврата;

on error – инструкция обработки ошибок.

Рассмотрим данные инструкции.

5.1. Инструкция Add Line

Инструкция **Add Line** выполняет функции создания и расширения программного блока. Расширение фиксируется удлинением вертикальной черты программных блоков или их древовидным расширением. Благодаря этому в принципе можно создавать сколь угодно большие программные модули.

5.2. Оператор внутреннего присваивания

Оператор $\leftarrow$ выполняет функции внутреннего (локального) присваивания. Например, выражение $x \leftarrow 346$ присваивает переменной x значение 346. Локальный характер присваивания означает, что такое значение переменной x хранится только в теле программного модуля. За пределами тела програм-

мы значение переменной x может быть неопределенным или равным значению, которое было задано вне программного блока операторами локального (:=) или глобального (≡) присваивания.

5.3. Инструкция if

Инструкция **if** позволяет выстраивать условные выражения. Она задается в виде:

Выражение **if** *Условие*

Если условие выполняется, то возвращается значение *Выражения*, иначе – 0. Совместно с этой инструкцией часто используются инструкции прерывания **break** и иного выбора **otherwise**.

5.4. Инструкция otherwise

Инструкция иного выбора **otherwise** обычно используется совместно с инструкцией **if**. Пример создания простейшего программного модуля с использованием данной инструкции представлен на рис. 35.

$$F(x) := \left|\begin{array}{l} 0 \ \text{ if } \ x < 0 \\ 1 \ \text{ otherwise} \end{array}\right.$$

Рис. 35. Фрагмент MathCAD-документа: пример использования инструкций if и otherwise

Согласно данному примеру, функция F(x) принимает значение 0, если $x < 0$, и 1 во всех остальных случаях.

5.5. Инструкция for

Инструкция **for** служит для организации циклов с заданным числом повторений. Она записывается в следующем виде:

for *VAR* ∈ *VARmin* .. *VARmax*

Данная запись означает, что выражение, помещенное в расположенное ниже место ввода, будет выполняться для значений переменной *VAR*, меняющихся от *VARmin* до *VARmax* с шагом +1. Переменную-счетчик VAR можно использовать в исполняемом выражении.

Пример создания простейшего программного модуля с использованием данной инструкции представлен на рис. 36.

Програмный модуль, реализующий функцию суммирования положительных четных чисел меньших или равных x.

```
sum(x) := | S ← 0
          | for i ∈ 1..x
          |   S ← S + i  if mod(i,2) = 0
          | S
```

Примеры использования функции sum(x): sum(4) = 6

sum(5) = 6

sum(10) = 30

Рис. 36. Фрагмент MathCAD-документа: пример использования инструкции for

В вышеприведенном примере была использована функция **mod**(*n*, *k*), возвращающая остаток от деления *n* на *k* (результат имеет тот же знак, что и *n*). Если результат деления целое число, то функция выдает результат – 0, в противном случае – значение числителя дроби со знаменателем, равным *k*.

5.6. Инструкция while

Инструкция **while** служит для организации циклов, действующих до тех пор, пока выполняется некоторое *Условие*. Она записывается в следующем виде:

while *Условие*

Выполняемое выражение записывается в расположенное ниже место ввода. Пример создания программного модуля с использованием инструкции **while** представлен на рис. 37.

Найти сумму всех положительных четных чисел, меньших или равных x, если x - четное, или сумму всех положительных нечетных чисел, меньших или равных x, если x - нечетное.

```
sum_(x) := | S ← 0
           | i ← 0
           | while i ≤ x
           |   | if mod(x,2) = 0
           |   |   | S ← S + i
           |   |   | i ← i + 2
           |   | otherwise
           |   |   | i ← 1  if i = 0
           |   |   | S ← S + i
           |   |   | i ← i + 2
           | S
```

Примеры использования функции sum_(x): sum_(0) = 0

sum_(1) = 1	sum_(2) = 2
sum_(3) = 4	sum_(4) = 6
sum_(5) = 9	sum_(6) = 12

Рис. 37. Фрагмент MathCAD-документа: пример использования инструкции while

5.7. Инструкция break

Инструкция **break** вызывает прерывание выполнения программы. Чаще всего эта инструкция используется совместно с условной инструкцией **if** и инструкциями циклов **for** и **while**, обеспечивая переход в конец тела цикла.

5.8. Инструкция continue

Инструкция continue используется для продолжения работы после прерывания программы. Она также чаще всего используется совместно с инструкциями циклов **for** и **while**, обеспечивая возвращение в точку прерывания и продолжение вычислений.

5.9. Инструкция return

Инструкция **return** прерывает выполнение программы и возвращает значение операнда, стоящего следом за ней. В приведенном ниже примере будет возвращаться значение 0 при x > 0:

return 0 **if** x>0

5.10. Инструкция on error и функция error

Инструкция **on error** позволяет создавать процедуры обработки ошибок. Данная инструкция задается в следующем виде:

Выражение_1 **on error** *Выражение_2*

Если при выполнении *Выражения_1* возникает ошибка, то выполняется *Выражение_2*. Для обработки ошибок также полезна функция **error**(*S*), которая, будучи помещенной в программный модуль, при возникновении

ошибки выводит всплывающую подсказку с сообщением, хранящимся в символьной переменной *S*.

Контрольные вопросы

1) Назначение и синтаксис инструкции **Add Line**?
2) Назначение и синтаксис оператора ←?
3) Назначение и синтаксис инструкции **if**?
4) Назначение и синтаксис инструкции **otherwise**?
5) Назначение и синтаксис инструкции **for**?
6) Назначение и синтаксис инструкции **while**?
7) Назначение и синтаксис инструкции **break**?
8) Назначение и синтаксис инструкции **continue**?
9) Назначение и синтаксис инструкции **return**?
10) Назначение и синтаксис инструкции **on error** и функции **error**?

Глава 6. Решение задач линейного программирования в MathCAD

Линейное программирование является одним из разделов математического программирования – дисциплины, занимающейся изучением экстремальных задач и разработкой методов их решения.

В общем виде постановка экстремальной задачи математического программирования состоит в определении максимального или минимального значения целевой функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ при условиях-ограничениях $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\{\le,\ge,=\}b_i$, $(i=\overline{1,m})$, где f и g_i – заданные функции, а b_i – заданные постоянные величины. При этом условия-ограничения определяют множество допустимых решений (проектных параметров) $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

В системе MathCAD для поиска значений переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$, при которых некоторая функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ принимает максимальное или минимальное значение, используются функции $Maximize(f,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $Minimize(f,x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Эти функции возвращают массив неизвестных, при котором заданная функция принимает максимальное или минимальное значение соответственно.

Данные функции используются в составе блока *Given*, внутри которого могут задаваться различные ограничения в виде равенств и неравенств. Перед данным блоком решения необходимо задать начальные значения искомых переменных. Чем они ближе к верному решению, тем быстрее будет получен искомый результат.

6.1. Задача планирования производства

Предприятие выпускает n видов продукции (P_1, P_2, ..., P_n) используя для производства m видов ресурсов (S_1, S_2, ..., S_m). Известны данные о нормах расхода ресурсов на единицу продукции каждого вида и их запасах на пред-

приятии, т.е.: a_{ij} $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ – норма расхода ресурса S_i для производства единицы продукции P_j; b_i $(i=\overline{1,m})$ – запас ресурса S_i на предприятии.

Цена единицы продукции P_j составляет c_j $(j=\overline{1,n})$.

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором выручка от ее реализации была бы максимальной.

Обозначим через x_j $(j=\overline{1,n})$ – объем продукции P_j, запланированный к производству – искомые величины. Тогда математическая модель данной задачи будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\le b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\le b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\le b_m, \end{cases} \tag{6.1}$$

$$x_j\ge 0\ (j=\overline{1,n}), \tag{6.2}$$

$$F(x)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to\max. \tag{6.3}$$

Полученная задача, является задачей линейного программирования, записанной в стандартной форме. Для удобства задачу (6.1)–(6.3) можно представить в компактной форме:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i\ \ (i=\overline{1,m}), \tag{6.4}$$

$$x_j\ge 0\ (j=\overline{1,n}), \tag{6.5}$$

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max. \tag{6.6}$$

В итоге математическая модель задачи планирования производства может быть сформулирована следующим образом: составить такой план производства продукции $X=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений (6.4), условию (6.5), при котором целевая функция (6.6) принимает наибольшее значение.

Пример 6.1. Фирма выпускает изделия четырех типов. На изготовление изделий расходуются основные четыре группы ресурсов: материалы (S_1), полуфабрикаты (S_2), энергия (S_3), труд (S_4). Исходные данные приведены в нижеследующей таблице.

Таблица 6.1

Исходные данные

Ресурсы	Затраты ресурсов на единицу изделия, усл. ед.				Запасы ресурсов, усл. ед.
	I	II	III	IV	
S_1	2	3	1	2	30
S_2	4	2	1	2	40
S_3	1	2	3	1	25
S_4	3	4	2	1	35

От реализации единицы каждого вида изделия фирма получает прибыль соответственно 2, 1, 3, 5 условных денежных единиц.

Спланируйте производство изделий с учетом ресурсных ограничений так, чтобы прибыль от их реализации была наибольшей.

Фрагмент MathCAD-документа, реализующего решение данной задачи, представлен на рис. 38.

ORIGIN := 1 **ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ**

$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **Матрица норм расхода ресурсов.**

$B := (30\ 40\ 25\ 35)^T$ **Матрица запасов ресурсов.**

$C := (2\ 1\ 3\ 5)^T$ **Матрица прибылей.**

$n := 4$ **Количество видов продукции.**

$i := 1..n$ **Вспомогательная индексная переменная.**

$X_i := 0$ **Начальные значения искомых переменных.**

$F(X) := C \cdot X$ **Целевая функция.**

Given

$A \cdot X \le B$

$X \ge 0$ **Ограничения по использованию ресурсов.**

Result := Maximize(F, X)

$Result = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}$ **Оптимальный план производства.**

F(Result) = 77 **Оптимальное значение суммарной прибыли.**

Ответ: искомый план производства следующий:
изделий III вида - 4 шт., изделий IV - 13 шт., изделий I и II видов не производить.
Данный план производства принесет наибольшую прибыль: 77 усл. ден. ед.

Рис. 38. Фрагмент MathCAD-документа: задача планирования производства

6.2. Задача о загрузке мощностей

Предприятию задан план производства продукции по времени и номенклатуре, т.е. требуется за время T выпустить $n_1, n_2, \ldots, n_k$ единиц продукции $P_1, P_2, \ldots, P_k$.

Продукция производится на однотипных станках $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Для каждого станка известны данные о производительности и затратах, т.е.:

a_{ij} $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,k})$ – число единиц продукции P_j, которое можно произвести на станке S_i в единицу времени;

b_{ij} $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,k})$ – затраты на изготовление продукции P_j на станке S_i в единицу времени.

Необходимо составить такой план загрузки станков, чтобы затраты на производство всей продукции были минимальными.

Обозначим через x_{ij} $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,k})$ – время, в течение которого станок S_i будет занят изготовлением продукции P_j $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,k})$.

В силу ограниченности времени выполнения заказа величиной T, будет справедлива следующая система ограничений:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1k}\le T,\\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2k}\le T,\\ \vdots\\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mk}\le T. \end{cases} \tag{6.7}$$

Для выполнения плана выпуска по номенклатуре необходимо, чтобы выполнялась следующая система условий:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}+\ldots+a_{m1}x_{m1}=n_1,\\ a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22}+\ldots+a_{m2}x_{m2}=n_2,\\ \vdots\\ a_{1k}x_{1k}+a_{2k}x_{2k}+\ldots+a_{mk}x_{mk}=n_k. \end{cases} \tag{6.8}$$

Условие неотрицательности искомых величин:

$$x_{ij}\ge 0\ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,k}). \tag{6.9}$$

Целевая функция, выражающая суммарные затраты на производство, будет иметь вид:

$$F(x)=(b_{11}x_{11}+b_{12}x_{12}+\ldots+b_{1k}x_{1k})+(b_{21}x_{21}+b_{22}x_{22}+\ldots+b_{2k}x_{2k})+\ldots+ \\ +(b_{m1}x_{m1}+b_{m2}x_{m2}+\ldots+b_{mk}x_{mk})\to\min. \tag{6.10}$$

Для удобства запишем данную модель в компактной форме:

$$\sum_{j=1}^{k}x_{ij}\le T\quad (\forall i=\overline{1,m}), \tag{6.11}$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_{ij}=n_j\quad (\forall j=\overline{1,k}), \tag{6.12}$$

$$x_{ij}\ge 0\ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,k}), \tag{6.13}$$

$$F(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}b_{ij}x_{ij}\to\min. \tag{6.14}$$

Математическая модель задачи о загрузке мощностей примет следующий вид: составить такой план загрузки станков $X=\{x_{ij}\}$ $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,k})$, удовлетворяющий системам ограничений (6.11), (6.12), условию (6.13), при котором целевая функция (6.14) принимает наименьшее значение.

Пример 6.2. На двух однотипных производственных линиях компании выпускаются три типа деталей. Исходные данные приведены в нижеследующей таблице.

Таблица 6.2

Исходные данные

Код детали	Производительность линий, шт./сут.		Затраты на работу линий, ден. ед./сут.		План, шт.
	I	II	I	II	
A	5	6	150	200	75
B	9	8	200	150	50
C	7	3	250	300	60

Составить такой план загрузки станков, при котором затраты будут минимальными, а задание будет выполнено не более чем за 15 суток.

Фрагмент MathCAD-документа, реализующего решение данной задачи, представлен на рис. 39.

$ORIGIN := 1$

$m := 2$ **Количество производственных линий.**

$k := 3$ **Количество типов изготавливаемых деталей.**

$T := 15$ **Время исполнения заказа.**

$A := \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ **Матрица производительности линий.**

$B := \begin{pmatrix} 150 & 200 & 250 \\ 200 & 150 & 300 \end{pmatrix}$ **Матрица затрат линий.** $N := \begin{pmatrix} 75 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix}$ **Плановое задание.**

$i := 1..m \quad j := 1..k \quad X_{i,j} := 0$ **Матрица начальных значений искомых величин.**

$K1_i := 1 \quad K2_j := 1$ **Вспомогательные вектора.**

$F(X) := \sum \left(\overrightarrow{(B \cdot X)} \cdot K2 \right)$ **Целевая функция.**

Given

$X \cdot K2 \le T \cdot K1$ **Ограничения по времени выполнения планового задания.**

$\left(\overrightarrow{(A \cdot X)} \right)^T \cdot K1 = N$ **Ограничения по выпуску.**

$X \ge 0$ **Время работы станков не может быть отрицательным.**

$Result := Minimize(F, X)$ $Result = \begin{pmatrix} 6.429 & 0 & 8.571 \\ 7.143 & 6.25 & 0 \end{pmatrix}$ **Оптимальный план загрузки станков.**

$F(Result) = 5.473 \times 10^3$ **Оптимальное значение суммарных затрат.**

Ответ: искомый план загрузки станков следующий:
x_{11}=6.429, x_{12}=0, x_{13}=8.571, x_{21}=7.143, x_{22}=6.25, x_{23}=0.
Данный план загрузки станков обеспечит наименьшие затраты: 5473 ден. ед.

Рис. 39. Фрагмент MathCAD-документа: задача загрузки мощностей

6.3. Задача о смесях

Фабрика производит фасованную смесь, состоящую из n видов компонентов (P_1, P_2, …, P_n), содержащих вещества S_1, S_2, …, S_m. Содержание веществ в 1 кг каждого вида компонента задано величиной $a_{ij}\,(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ – число единиц вещества S_i $(i=\overline{1,m})$, содержащееся в 1 кг компонента вида $P_j\,(j=\overline{1,n})$.

Совокупный объем фасованной смеси должен содержать не менее b_1 единиц вещества S_1, b_2 единиц вещества S_2, …, b_m единиц вещества S_m.

Стоимость 1 кг компонента вида $P_j\,(j=\overline{1,n})$ задана величиной $c_j\,(j=\overline{1,n})$.

Необходимо определить состав смеси (т.е. объем каждого компонента, входящего в состав смеси), имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида веществ было бы не менее установленного предела.

Пусть $x_j\,(j=\overline{1,n})$ – объем компонента вида P_j, входящего в состав смеси.

Ограничения по минимально необходимому объему содержания веществ может быть выражено следующей системой ограничений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i\ (i=\overline{1,m}), \tag{6.15}$$

По своей сути искомые величины не могут быть отрицательными, т.е.:

$$x_j \ge 0\,(j=\overline{1,n}), \tag{6.16}$$

Целевая функция, выражающая стоимость смеси, будет иметь вид:

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min. \tag{6.17}$$

Тогда математическую модель данной задачи можно сформулировать следующим образом: найти такой состав смеси $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений (6.15), условию (6.16), при котором целевая функция (6.17) принимает наименьшее значение.

Пример 6.3. Рацион для питания животных на ферме состоит из двух видов кормов I и II. Один килограмм корма I стоит 80 ден. ед. и содержит: 1 ед. жиров, 3 ед. белков, 1 ед. углеводов, 2 ед. нитратов. Один килограмм корма II стоит 10 ден. ед. и содержит: 3 ед. жиров, 1 ед. белков, 8 ед. углеводов, 4 ед. нитратов.

Составить наиболее дешевый рацион питания, обеспечивающий жиров не менее 6 ед., белков не менее 9 ед., углеводов не менее 8 ед., нитратов не более 16 ед.

Фрагмент MathCAD-документа, реализующего решение данной задачи, представлен на рис. 40.

ORIGIN := 1 **Исходные данные:**

$n := 2$ **Количество видов кормов.**

$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}^T$ **Матрица содержания веществ в каждом виде корма.**

$B := (6 \ 9 \ 8 \ -16)^T$ **Матрица минимально необходимой концентрации веществ.**

$C := (80 \ 10)^T$ **Матрица стоимости кормов.**

$j := 1..n$ $X_j := 0$ **Задание начальных значении искомыы параметрам (x_j - объем корма j-го вида).**

$F(X) := C \cdot X$ **Целевая функция, выражающая стоимость кормовой смеси.**

Given

$A \cdot X \geq B$ **Ограничения по содержанию веществ в кормовой смеси.**

$X \geq 0$

Result := Minimize(F, X) $\text{Result} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **Оптимальный состав кормовой смеси.**

F(Result) = 190 **Наименьшая стоимость кормовой смеси.**

Ответ: оптимальный рацион питания составит 2 кг корма I вида и 3 кг корма II вида. Данный рацион питания будет иметь наименьшую стоимость 190 ден. ед.

Рис. 40. Фрагмент MathCAD-документа: задача о смеси

6.4. Задача о раскрое материала

На механическом участке производятся комплекты, состоящие из деталей P_1, P_2, …, P_n, изготавливаемые из одного и того же материала. В производство данный материал поступает в виде стандартных заготовок в количестве s единиц.

Требуется изготовить из них максимально возможное число комплектов, каждый из которых должен состоять из b_1 шт. деталей вида P_1, b_2 шт. деталей вида P_2, …, b_n шт. деталей вида P_n (условие комплектности).

Каждая единица материала может быть раскроена m различными способами, причем использование i-го способа раскроя ($i = \overline{1,m}$) обеспечивает получение a_{ij} шт. деталей вида P_j ($j = \overline{1,n}$).

Необходимо найти такой план раскроя материала, обеспечивающего максимальное число комплектов.

Пусть x_i ($i = \overline{1,m}$) – число единиц материала, раскраиваемых i-ым способом; k – число изготавливаемых комплектов изделий.

Число использованных стандартных заготовок не может быть больше имеющегося в наличии:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \leq s. \qquad (6.18)$$

Требование комплектности будет выражено следующей системой уравнений:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i = b_j k \quad (j = \overline{1,n}). \qquad (6.19)$$

По своей сути искомые величины x и k не отрицательны, т.е.:

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1,m}). \qquad (6.20)$$

Условие неотрицательности величины k достигается автоматически из системы ограничений (6.19).

Целевая функция, выражающая количество полученных комплектов деталей, будет иметь вид:

$$F = k \to \max. \qquad (6.21)$$

Тогда математическую модель данной задачи можно сформулировать следующим образом: найти такой план раскроя материалов $X=(x_1, x_2, \dots, x_m)$, удовлетворяющий условию (6.18), системе ограничений (6.19), условию (6.20), при котором целевая функция (6.21) принимает наибольшее значение.

Пример 6.4. На заготовительный участок предприятия каждый месяц поступают 300 стальных труб диаметром 50 мм и длиной 6 м, которые необходимо нарезать на заготовки длиной 500 мм, 1250 мм, 1500 мм в соотношении 4:2:2. Составьте план распила материала, обеспечивающий максимальное число комплектов.

Фрагменты MathCAD-документа, реализующего решение данной задачи, представлены на рис. 41, 42.

Определим всевозможные рациональные способы распила материала. Для удобства результаты оформим в таблицу.

Таблица 6.3

Способы распила материала

Способ распила	Число получаемых заготовок			Длина остатка, мм
	1500 мм	1250 мм	500 мм	
1.	4	–	–	0
2.	3	1	–	250
3.	3	–	3	0
4.	2	2	1	0
5.	2	1	3	250
6.	2	–	4	0
7.	1	3	1	250
8.	1	2	4	0
9.	1	1	6	250
10.	1	–	9	0
11.	–	4	2	0
12.	–	3	4	250
13.	–	2	7	0
14.	–	1	9	250
15.	–	–	12	0

Рис. 41. Фрагмент MathCAD-документа: задача о раскрое материала (продолжение - рис. 42)

Исходные данные для решения: ORIGIN := 1

$m := 15$ **Количество способов распила материала.**

$s := 300$ **Количество единиц исходного материала.**

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 4 & 1 & 4 & 6 & 9 & 2 & 4 & 7 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$ **Матрица раскроя материала.**

$B := (4\ 2\ 2)^T$ **Матрица комплектности деталей.**

$i := 1..m$ **Счетчик способов распила.**

$X_i := 0 \quad k := 0$ **Начальные значения искомых параметров.**

$F(k, X) := k$ **Целевая функция, выражающая искомое количество комплектов.**

Given

$\sum X \le s$ **Число использованных единиц материала не может больше имеющегося в наличии.**

$A^T \cdot X = B \cdot k$ **Условия комплектности.**

$X \ge 0$

$Result := Maximize(F, k, X)$ $Result = \begin{pmatrix} 240 \\ \{15,1\} \end{pmatrix}$ **Оптимальный план распила.**

$Result_2^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	120	0	0	0	0	0	0	0	0	0	120	0	0	0	60

$F(Result_1, Result_2) = 240$ **Наибольшее число комплектов.**

Ответ: **для получения наибольшего числа комплектов необходимо 120 ед. материала распилить по 1-му способу, 120 ед. - по 11-му способу, 60 ед. - по 15-му. В результате будет получено наибольшее число комплектов равное 240.**

Рис. 42. Фрагмент MathCAD-документа: задача о раскрое материала

6.5. Транспортная задача

Задачи линейного программирования транспортного типа образуют широкий круг задач, общим для которых является, как правило, распределение ресурсов, находящихся у *m* производителей (поставщиков), по *n* потребителям этих ресурсов.

Классическая транспортная задача имеет следующий вид.

Имеются *m* пунктов (складов) отправления груза (некоторого однородного ресурса), запасы в каждом из которых составляют соответственно a_1, a_2,

…, a_m. Известна потребность в грузах b_1, b_2, …, b_n по каждому из n пунктов назначения (потребителей).

Задана матрица стоимостей доставки по каждому варианту (паре склад-поставщик – потребитель): $C=\{c_{ij}\}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, где c_{ij} – себестоимость перевозки единицы груза от i-го склада-поставщика до j-го потребителя.

Необходимо построить оптимальный план перевозок, т.е. определить, сколько груза должно быть отправлено из каждого i-го склада-поставщика каждому j-му потребителю с учетом минимизации транспортных затрат.

Пусть x_{ij} ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$) – искомый объем транспортируемого груза от i-го склада-поставщика j-му потребителю.

Исходные данные по задаче удобно представлять в виде следующей таблицы, которую называют таблицей поставок или транспортной таблицей.

Таблица 6.4

Таблица поставок

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	…	B_n	Запасы поставщиков
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности потребителей	b_1	b_2	…	b_n	

Задача линейного программирования транспортного типа называется **закрытой**, если суммарные запасы поставщиков равны суммарной потребности потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \qquad (6.22)$$

Если такое равенство не соблюдается, то задача является **открытой**.

Для того чтобы потребности всех потребителей были удовлетворены, необходимо выполнение следующей системы условий:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; (j=\overline{1,n}). \qquad (6.23)$$

Аналогично, для того чтобы были задействованы все запасы складов-поставщиков, необходимо выполнение следующей системы условий:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; (i=\overline{1,m}). \qquad (6.24)$$

По своей сущности искомые переменные не могут быть отрицательными величинами, т.е.

$$x_{ij} \ge 0, \; (\forall i=\overline{1,m}, \; j=\overline{1,n}). \qquad (6.25)$$

Введем функцию, отражающие суммарные транспортные затраты:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} . \qquad (6.26)$$

Таким образом, математическая модель данной задачи будет иметь вид:

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; (j=\overline{1,n}), \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; (i=\overline{1,m}), \\
\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j , \\
x_{ij} \ge 0, \; (\forall i=\overline{1,m}, \; j=\overline{1,n}), \\
F(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min .
\end{gathered} \qquad (6.27)$$

Необходимо определить такой план перевозок $X = \{x_{ij}\}$, $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$, удовлетворяющий системам (6.23), (6.24), условию (6.25), при котором суммарные транспортные затраты будут минимальными, т.е. минимизирующий целевую функцию (6.26).

Примечания:

1) Теорема: для того чтобы транспортная задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (6.22).

Поэтому если транспортная задача открытого типа, то

а) при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ (т.е. если суммарная потребность потребителей превышает суммарные запасы складов-поставщиков) вводится фиктивный склад-поставщик, запас которого составляет $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$.

б) при $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ (т.е. если суммарные запасы складов-поставщиков превышают суммарную потребность потребителей) вводится фиктивный потребитель, потребность которого составляет $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

При этом стоимости перевозок для каждой фиктивной пары склад-поставщик – потребитель принимаются, как правило, равными нулю.

2) Теорема: ранг r системы уравнений (6.23), (6.24) при условии (6.22) равен $m+n-1$.

Следовательно, опорный план (базисное решение) транспортной задачи должен содержать $m+n-1$ отличных от нуля неизвестных. Если в опорном плане число отличных от нуля компонент равно $m+n-1$, то план является невырожденным, а если меньше – то вырожденным.

3) Рассмотренная транспортная задача является по своей сути целочисленной, так как перевозимые грузы в большинстве случаев представляют собой упаковки, ящики, контейнеры и т.д.

Один из важнейших теоретических результатов исследования операций может быть сформулирован следующим образом:

Теорема: если для транспортной задачи (6.27) выполняются условия

$$a_i \in N,\ i = \overline{1,m} \text{ и } b_j \in N,\ j = \overline{1,n}, \tag{6.28}$$

(где N – множество натуральных чисел), то в любом ее допустимом базисном решении базисные переменные принимают значения из множества $N \cup \{0\}$, т.е. являются целыми положительными числами или равны нулю.

Поскольку оптимальное решение транспортной задачи (6.27) является допустимым, то при выполнении условий (6.28) оно удовлетворяет требованию целочисленности. Следовательно, условие целочисленности переменных в транспортной задаче (6.27) можно опустить.

4) В модели (6.27) вместо матрицы стоимостей перевозок (*C*) может задаваться матрица расстояний. В данном случае в качестве целевой функции рассматривается минимум суммарной транспортной работы.

Пример 6.5. На три базы поступили ящики с заготовками деталей, которые необходимо доставить на четыре завода. Исходные данные представлены в нижеследующей транспортной таблице.

Таблица 6.5

Таблица поставок

Заводы-потребители / Базы-поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы баз-поставщиков
A_1	1	2	3	1	100
A_2	2	3	4	6	200
A_3	3	4	7	12	300
Потребности заводов-потребителей	100	100	300	300	

Определите оптимальный план доставки заготовок на заводы с учетом минимизации стоимости суммарных транспортных затрат.

Представленная транспортная задача является открытой, т.к. суммарная мощность баз-поставщиков меньше суммарной потребности заводов-потребителей на 200 ящиков. Сведем данную транспортную задачу к закрытой: введем фиктивную базу с недостающей мощностью в 200 ящиков и зададим значения условных транспортных затрат на единицу груза от данной базы к заводам-потребителям равными нулю.

Фрагмент MathCAD-документа, реализующего решение данной задачи, представлен на рис. 43.

ORIGIN := 1

$m := 4$ **Определение количества поставщиков.**

$n := 4$ **Определение количества потребителей.**

$A := (100\ \ 200\ \ 300\ \ 200)^T$ **Матрица мощностей поставщиков.**

$B := (100\ \ 100\ \ 300\ \ 300)^T$ **Матрица потребностей потребителей.**

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ **Матрица транспортных затрат.**

$i := 1..m \quad j := 1..n \quad X_{i,j} := 0$ **Искомые переменные (объемы поставок) и их начальные значения.**

$K1_i := 1 \quad K2_j := 1$ **Вспомогательные вектора.**

$F(X) := \sum \left[\overrightarrow{(C \cdot X)} \cdot K1 \right]$ **Целевая функция - суммарные затраты транспортной сети.**

Given

$X \cdot K1 = A$ **Условия загрузки мощности поставщиков.**

$X^T \cdot K2 = B$ **Условия удовлетворения спроса потребителей.**

$X \geq 0$ **Условие неотрицательности объемов поставок.**

$Result := Minimize(F, X) \quad F(Result) = 2.3 \times 10^3$ **Суммарные оптимальные затраты транспортной сети.**

$$Result = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 200 & 0 \\ 100 & 100 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 \end{pmatrix}$$ **Искомый оптимальный план поставок.**

Рис. 43. Фрагмент MathCAD-документа: транспортная задача

6.6. Геометрический метод решения задач линейного программирования

Геометрический (графический) метод можно использовать для решения:

1) задач линейного программирования с двумя переменными, представленных в стандартной форме;
2) задач линейного программирования со многими переменными при условии, что в их канонической записи содержится не более двух свободных переменных

Решение задач линейного программирования графическим методом в общем виде можно представить последовательностью следующих этапов:

1. Записать в виде $y=kx+b$ уравнения прямых, ограничивающих область допустимых значений переменных.
2. Изобразить на графике соответствующие прямые и определить область допустимых значений переменных.
3. Построить для одного или нескольких значений C линии уровня целевой функции $f(x, y)=C$ (несколько линий уровня необходимо построить для того, чтобы понять, имеет ли задача решение и где достигается искомый экстремум).
4. Если задача имеет единственное решение, найти вершину, в которой достигается искомое экстремальное значение (максимум или минимум) целевой функции, и определить ее координаты.
5. Вычислить значение целевой функции в найденной точке.
6. Если задача имеет бесконечное множество решений (т.е. экстремум достигается на отрезке, луче или прямой), то вычислить значение целевой функции в одной из точек, принадлежащих данному отрезку (лучу, прямой) и описать множество решений.
7. Сформулировать общий вывод по задаче линейного программирования.

Пример 6.6. Решить следующую задачу линейного программирования графическим методом:

$$\begin{cases} x+3y\le 18, \\ 2x+y\le 16, \\ y\le 5, \\ 3x\le 21, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0. \end{cases}$$

$$F(x)=2x+3y\to \max$$

Фрагменты рабочего документа MathCAD с решением данной задачи представлены на рис. 44 – 49.

Система ограничений и целевая функция созданы в редакторе формул MS Word и скопированы в MathCAD.

$$\begin{cases} x+3y\le 18, \\ 2x+y\le 16, \\ y\le 5, \\ 3x\le 21, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0. \end{cases}$$

Исходная задача линейного программирования.

$F(x)=2x+3y\to \max$

Запишем уравнения прямых, ограничивающих область допустимых значений переменных:

1)	$x+3\cdot y=18$ solve,y $\to \frac{-1}{3}\cdot x+6$	$y1(x):=\frac{-1}{3}\cdot x+6$
2)	$2\cdot x+y=16$ solve,y $\to -2\cdot x+16$	$y2(x):=-2\cdot x+16$
3)	$y=5$	$y3(x):=5$
4)	$3\cdot x=21$ solve,x $\to 7$	
5)	$x=0$	
6)	$y=0$	

Рис. 44. Фрагмент MathCAD-документа: определение уравнений прямых, ограничивающих область допустимых решений задачи

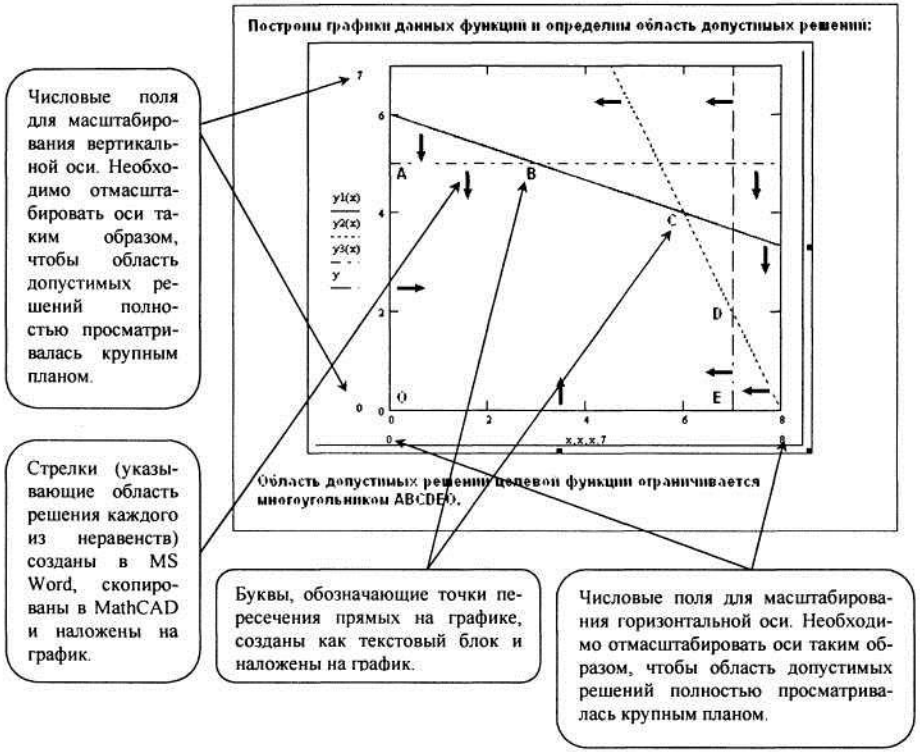
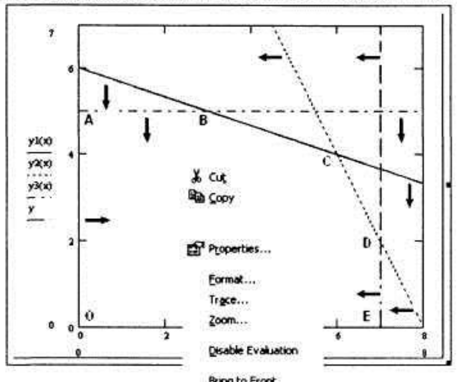


Рис. 45. Фрагмент MathCAD-документа: область допустимых решений задачи

Для удобства работы MathCAD позволяет перемещать любые графические объекты на передний или задний план рисунка. Для этого необходимо навести курсор мыши на графической объект, щелкнуть правой кнопкой мыши и выбрать пункт меню **Bring to Front** (на передний план), **Send to Back** (на задний план). Поэтому для того, чтобы в дальнейшем буквы, обозначающие точки на графике, или стрелки были доступны для редактирования и перемещения необходимо график, на который они наложены, поместить на задний план. Для этого на графике необходимо щелкнуть правой кнопкой мыши и выбрать пункт меню **Send to Back** (рис. 46).

Построны графики данных функции и определины область допустимых решении:



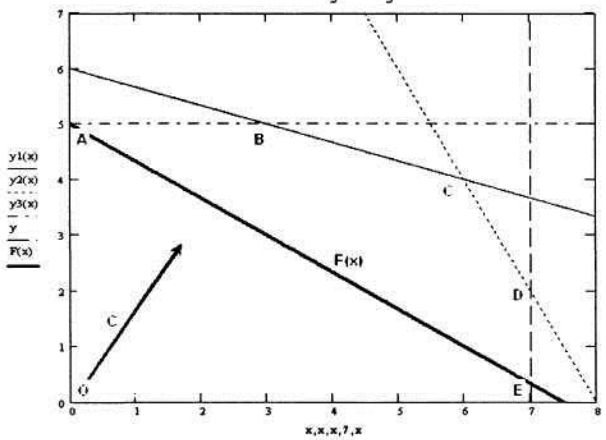
Область допустимых решении ц... ничивается многоугольником ABCDEO.

Рис. 46. Фрагмент MathCAD-документа: использование контекстного меню для перемещения графических объектов на передний или задний план

Целевая функция: $2 \cdot x + 3 \cdot y = C \text{ solve}, y \rightarrow \frac{-2}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot C$

Строны целевую функцию: задаем какое-либо значение параметру C так, чтобы целевая функция оказалась в области допустимых решении:

$C := 15 \qquad F(x) := \frac{-2}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot C$



Вектор-градиент C(2, 3) с точкой приложения в начале координат показывает, что целевая функция принимает свое максимальное значение в точке C многоугольника решении.

Рис. 47. Фрагмент MathCAD-документа: построение целевой функции F(x) и вектора-градиента C

Определины координаты точки C, решив систему из следующих уравнении:

Given

$$x + 3 \cdot y = 18$$

$$2 \cdot x + y = 16 \qquad \text{Find}(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Таким образом координаты точки C(6, 4).

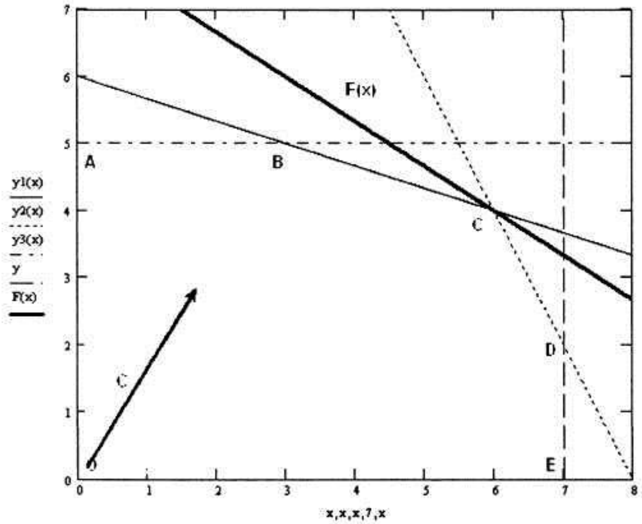
Подставив данные координаты в целевую функцию, определины ее максимальное значение:

$$2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 24$$

Рис. 48. Фрагмент MathCAD-документа: нахождение координат точки C и максимума целевой функции

Задав параметру C значение 24, построны окончательный график.

$C := 24 \qquad F(x) := \frac{-2}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot C$



<u>Ответ:</u> при заданных ограничениях максимальное значение целевой функции $F_{max}(x)=24$, которое достигается в точке C с координатами x=6, y=4.

Рис. 49. Фрагмент MathCAD-документа: построение окончательного графика

Пример 6.7. Решить следующую задачу линейного программирования графическим методом:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -3, \\ x_j \ge 0, \ (j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

$$F(x) = -4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max$$

Фрагменты рабочего документа MathCAD с решением данной задачи представлены на рис. 50 – 53.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -3, \\ x_j \ge 0, \ (j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

Исходная задача линейного программирования, заданная в канонической форме.

$$F(x) = -4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max$$

Приведем исходную задачу к стандартной форме.

$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B := \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad AB := \text{augment}(A,B)$ $\quad AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

$Result := \text{rref}(AB)$ $\quad Result = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2.6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Запишем полученную систему уравнений:

$x_1 + 1.4x_3 = -1$

$x_2 - 2.6x_3 + 2x_4 = 0$

Учитывая, что x_1 и x_2 неотрицательные переменные, то данную систему уравнений можно записать в виде следующей системы неравенств:

$1.4x_3 \le -1$

$-2.6x_3 + 2x_4 \le 0$

Выразим в полученной выше системе уравнений разрешенные переменные через свободные:

$x_1 + 1.4x_3 = -1 \text{ solve}, x_1 \to -1.4000000000000000000x_3 - 1.$

$x_2 - 2.6x_3 + 2x_4 = 0 \text{ solve}, x_2 \to 2.6000000000000000000x_3 - 2.x_4$

Подставим полученные выражения в целевую функцию (выразим ее через свободные переменные):

$F(x) = -4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \text{ substitute}, x_1 = -1.4x_3 - 1, x_2 = 2.6x_3 - 2x_4 \to F(x) = 1.4x_3 + 4 + 3x_4$

Рис. 50. Фрагмент MathCAD-документа: приведение исходной задачи линейного программирования к стандартной форме

В результате исходная задача в стандартной форме будет иметь следующий вид:

$F(x) = 1.4x_3 + 3x_4 + 4$

$1.4x_3 \le -1$

$-2.6x_3 + 2x_4 \le 0$

$x_3 \ge 0$

$x_4 \ge 0$

Рис. 51. Фрагмент MathCAD-документа: исходная задача линейного программирования в стандартной форме

Запишем уравнения прямых, ограничивающих область допустимых значений переменных:

1) $1.4x_3 = -1 \text{ solve}, x_3 \to -.71428571428571428571$

2) $-2.6x_3 + 2x_4 = 0 \text{ solve}, x_4 \to 1.3000000000000000000x_3$

3) $x_3 = 0$

4) $x_4 = 0$

Для удобства обозначим x_3 через x, а x_4 через y, тогда полученные уравнения будут иметь следующий вид:

1) $x = -.71428571428571428571$

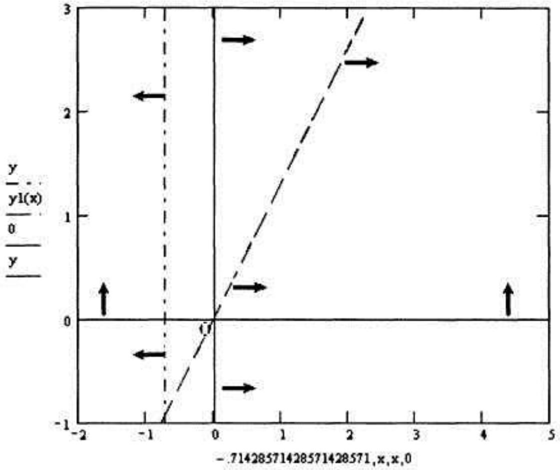
2) $y1(x) := 1.3x$

3) $x = 0$

4) $y = 0$

Рис. 52. Фрагмент MathCAD-документа: определение уравнений прямых, ограничивающих область допустимых решений задачи

Построим графики данных функций и определим область допустимых решений:



Область допустимых решений задачи не согласована (т.е. нет общей области) в силу несовместности системы ограничений исходной задачи. Следовательно данная задача линейного программирования не имеет решения.

<u>Ответ:</u> рассматриваемая задача линейного программирования не имеет решений в силу несовместности системы ограничений.

Рис. 53. Фрагмент MathCAD-документа: построение области допустимых решений задачи

6.7. Решение задач целочисленного линейного программирования в MathCAD

По смыслу значительной части экономических задач, относящихся к задачам линейного программирования, компоненты решения должны выражаться в целых числах, т.е. быть целочисленными. К ним относятся, например, задачи, в которых переменные означают количество единиц неделимой продукции, число станков при загрузке оборудования, объем грузов (ящиков, упаковок, контейнеров) и т.д.

В общем виде задача целочисленного линейного программирования имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&F(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min),\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge) b_i,\ (\forall\ i=\overline{1,k}),\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ (\forall\ i=\overline{k+1,m},\ m\le n),\\
&x_j \ge 0,\ x_j \in N\cup\{0\}\ (\forall\ j=\overline{1,l},\ l\le n).
\end{aligned}
\qquad (6.29)
$$

Если требование целочисленности распространяется на все переменные, то задачу целочисленного программирования называют **полностью целочисленной**. Если требование целочисленности относится лишь к части переменных, то задачу называют **частично целочисленной**.

Методы целочисленной оптимизации можно разделить на следующие основные группы: 1) методы отсечения (к примеру, метод Гомори); 2) комбинаторные методы (к примеру, метод «ветвей и границ»); 3) приближенные методы; 4) метод сплошного перебора.

К сожалению, в стандартной поставке пакет MathCAD не обладает специализированным инструментарием реализации данных методов, а использование универсальных средств позволяет решать задачи целочисленного линейного программирования лишь в частном виде. Наиболее компактной формой реализации данных задач в системе MathCAD является метод сплошного перебора целочисленных значений переменных, реализация которого представлена на рис. 54-56.

Пример 6.8. Решить следующую задачу целочисленного линейного программирования в системе MathCAD методом сплошного перебора:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 60, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 27, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 1, \\ x_1, x_2 - \textit{целые числа.} \end{cases}$$

$$F(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

Из решения, представленного на рис. 54, следует, что данная задача имеет конечный оптимум, однако найденное оптимальное решение нецелочисленное.

ORIGIN := 1

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 60 \\ 27 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$i := 1..2 \quad X_i := 0$

$F(X) := C \cdot X$

Given

$A \cdot X \le B$

$X \ge 0 \qquad R := \mathrm{Maximize}(F, X)$

$F(R) = 27 \qquad R = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 8 \end{pmatrix}$ Задача имеет конечный оптимум, однако оптимальное решение не целочисленное.

Рис. 54. Фрагмент MathCAD-документа:

решение задачи без учета условия целочисленности переменных

Определим оптимальное целочисленное решение методом сплошного перебора.

Определим прямоугольную область целочисленных решений, покрывающую область допустимых решений рассматриваемой задачи. Для этого определим минимально возможные и максимально возможные значения каждой из переменных.

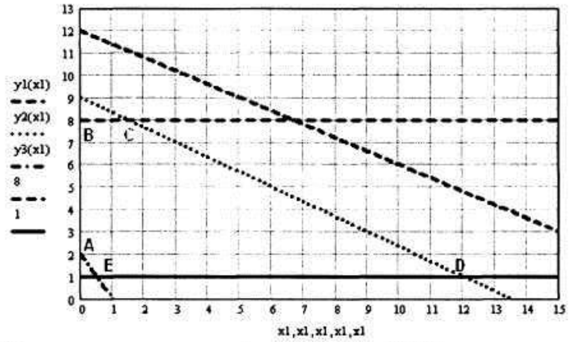
Построим область допустимых решений рассматриваемой задачи.

Для удобства обозначим переменную x_1 через x1, а переменную x_2 через y.

1) $3 \cdot x1 + 5 \cdot y = 60$ solve,y $\to \frac{-3}{5} \cdot x1 + 12$ $\qquad y1(x1) := \frac{-3}{5} \cdot x1 + 12$

2) $2 \cdot x1 + 3 \cdot y = 27$ solve,y $\to \frac{-2}{3} \cdot x1 + 9$ $\qquad y2(x1) := \frac{-2}{3} \cdot x1 + 9$

3) $2 \cdot x1 + y = 2$ solve,y $\to -2 \cdot x1 + 2$ $\qquad y3(x1) := -2 \cdot x1 + 2$



Область допустимых решений - многоугольник ABCDE.

Анализируя область допустимых решений можно определить диапазон изменения целочисленных значений каждой из переменных:

1) переменная x_1 может принимать целочисленные значения в диапазоне от 0 до 12;

2) переменная x_2 может принимать целочисленные значения в диапазоне от 1 до 8;

Рис. 55. Фрагмент MathCAD-документа:

определение диапазона изменения целочисленных значений переменных

Использование графического метода для определения границ диапазона изменения целочисленных значений переменных не всегда удобно и возможно. Границы данного диапазона можно определить на основе анализа системы ограничений. Однако необходимо учитывать, что чем точнее будут определены границы искомого диапазона, тем быстрее будет реализовываться расчетный алгоритм поиска оптимального целочисленного решения.

MathCAD-реализация метода сплошного перебора применительно к рассматриваемой задаче приведена на рис. 56.

```
Result := | F ← 0
          | for x1 ∈ 0..12
          |   for x2 ∈ 1..8
          |     if (3·x1 + 5·x2 ≤ 60) ∧ (2·x1 + 3·x2 ≤ 27) ∧ (x2 ≤ 8) ∧ (2·x1 + x2 ≥ 2) ∧ (x1 ≥ 0) ∧ (x2 ≥ 1)
          |       | s ← 2·x1 + 3·x2
          |       | if s > F
          |       |   | F ← s
          |       |   | K ← (x1 x2)
          |     s ← 0  otherwise
          | K

Result = (3 7)   Оптимальное целочисленное решение.

F(Result) = 27
```

Рис. 56. Фрагмент MathCAD-документа: определение оптимального целочисленного решения задачи методом сплошного перебора целочисленных значений переменных

6.8. Задача о коммивояжере

Имеется n городов, условно пронумерованных от 1 до n. Коммивояжер, выезжая из города 1, должен посетить каждый город один раз и вернуться в исходный пункт. Пусть известны расстояния (или транспортные затраты) c_{ij} между городами ($i,j=\overline{1,n};\ i\neq j$). Требуется найти самый короткий маршрут (или маршрут, обеспечивающий минимальные транспортные затраты).

Введем переменные:

$$x_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если в маршрут входит переезд из города } i \text{ в город } j,\\ 0, \text{ в противном случае,}\end{cases} \qquad (6.30)$$

где $i,j=\overline{1,n};\ i\neq j$.

Требование однократного посещения каждого города можно представить в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ (\forall\, j=\overline{1,n}),\\ &\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ (\forall\, i=\overline{1,n}).\end{aligned} \qquad (6.31)$$

Однако ограничения (6.31) полностью не определяют допустимые маршруты, так как не исключают возможности разрыва пути, т.е. появления нескольких не связанных между собой подмаршрутов для части городов. Поэтому следует ввести *n-1* дополнительных переменных u_i, принимающих только целые неотрицательные значения, и записать следующие $(n-1)\times(n-2)$ ограничений, исключающие возможность существования подмаршрутов:

$$u_i-u_j+n\times x_{ij}\le n-1,\ (i,j=\overline{2,n};\ i\neq j)\,. \qquad (6.32)$$

Таким образом, задача о коммивояжере состоит в минимизации целевой функции:

$$F(X,U)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\times x_{ij}\to\min \qquad (6.33)$$

при условиях (6.30) – (6.32).

Пример 6.8. Коммивояжеру, находящемуся в Париже, необходимо посетить три города и вернуться обратно. Имеется информация о стоимости перелета из одного города в другой (таблица 6.6). Необходимо составить маршрут посещения городов, чтобы затраты на дорогу были минимальными и каждый пункт посещался только один раз.

Таблица 6.6

Матрица стоимостей перелета (усл. ден. ед.)

Пункты	Париж	Берлин	Рим	Лондон
Париж	0	270	430	160
Берлин	70	0	160	100
Рим	200	130	0	350
Лондон	210	160	250	0

Фрагмент MathCAD-документа, реализующий решение данной задачи, приведен в приложении 3.

На рис. 57 представлены результаты решения, в соответствии с которыми оптимальным маршрутом будет: $x_{14} \to x_{43} \to x_{32} \to x_{21}$, т.е. (исходя из индексов переменных) из Парижа (город, условно обозначен № 1) необходимо залететь в Лондон (город № 4), далее в Рим (город № 3), затем в Берлин (город № 2), и обратно в Париж. Данный маршрут обеспечит минимальные транспортные затраты в объеме 610 усл. ден. ед.

$$\text{Result}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ Оптимальный маршрут.

$\text{Result}_0 = 610$ Оптимальные транспортные затраты.

Рис. 57. Фрагмент MathCAD-документа: результаты решения задачи о коммивояжере

Контрольные вопросы

1) Задача планирования производства?

2) Задача о загрузке мощностей?

3) Задача о смесях?

4) Задача о раскрое материала?

5) Транспортная задача?

6) Раскройте суть и особенности применения графического метода решения задач линейного программирования, охарактеризуйте основные его этапы?

7) Сформулируйте в общем виде задачу линейного целочисленного программирования?

8) Раскройте суть и особенности метода сплошного перебора решения задач линейного целочисленного программирования?

9) Задача о коммивояжере?

Глава 7. Решение задач динамического программирования в MathCAD

Во многих управляемых процессах (например, процесс распределения средств между предприятиями; использования ресурсов в течение ряда лет; замены оборудования; найма работников; управления запасами и др.) принимать управленческие решения можно поэтапно, в различные, заранее выбранные моменты времени. Подобного рода задачи называют многошаговыми. Динамическое программирование представляет собой метод поиска оптимальных решений многошаговых задач.

Реализация задач динамического программирования в системе MathCAD эффективно осуществляется с использованием инструментария программирования. Рассмотрим в качестве примеров реализацию задач распределения ресурсов и замены оборудования.

7.1. Задача распределения ресурсов между предприятиями

Имеется определенное количество ресурсов s_0, которое необходимо распределить между n хозяйствующими субъектами на текущую деятельность в течение рассматриваемого периода (месяц, квартал, полугодие, год и т.д.) с целью получения совокупной максимальной прибыли. Размеры вложений ресурсов x_i ($i=\overline{1,n}$; $\sum_{i=1}^{n} x_i = s_o$) в деятельность каждого хозяйствующего субъекта кратны некоторой величине h. Известно, что каждый хозяйствующий субъект в зависимости от объема используемых средств x_i за рассматриваемый период приносит прибыль в размере $f_i(x_i)$ (не зависит от вложения ресурсов в другие хозяйствующие субъекты). Исходные данные приведены в таблице 7.1.

Таблица 7.1

Исходные данные (усл. ед.)

s_0=400, h=80				
x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
80	30	28	35	27
160	57	62	67	73
240	120	122	130	125
320	150	146	144	152
400	180	175	180	178

Необходимо определить, какой объем ресурсов нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была наибольшей.

Представим процесс распределения ресурсов между хозяйствующими субъектами как n-шаговый процесс управления (номер шага совпадает с условным номером хозяйствующего субъекта). Пусть s_k ($k=\overline{1,n}$) – параметр состояния, т.е. количество свободных средств после k-го шага для распределения между оставшимися ($n-k$) хозяйствующими субъектами. Тогда уравнения состояний можно записать в следующем виде:

$$s_k = s_{k-1} - x_k,\ (k=\overline{1,n}). \tag{7.1}$$

Введем в рассмотрение функцию $Z_k^*(s_{k-1}), (k=\overline{1,n})$ – условно оптимальная совокупная прибыль, полученная от k-го, (k+1)-го, …, n-го хозяйствующих субъектов, если между ними оптимальным образом распределялись ресурсы в объеме s_{k-1} ($0 \le s_{k-1} \le s_0$). Множество возможных управленческих решений относительно размера распределяемых ресурсов на k-ом шаге можно представить следующим образом: $0 \le x_k \le s_{k-1}$.

Тогда рекуррентные уравнения Р.Э. Беллмана (обратная схема) будут иметь вид:

$$
\begin{aligned}
&Z_n^*(s_{n-1}) = \max_{0 \le x_n \le s_{n-1}} f_n(x_n),\\
&Z_k^*(s_{k-1}) = \max_{0 \le x_k \le s_{k-1}} \{f_k(x_k) + Z_{k+1}^*(s_k)\},\ (k = \overline{2, n-1}),\\
&Z_{\max} = Z_1^*(s_0) = \max_{0 \le x_1 \le s_0} \{f_1(x_1) + Z_2^*(s_1)\}.
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

Далее по полученным результатам условной оптимизации можно определить оптимальное распределение ресурсов $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ по следующей схеме:

$$s_0 \Rightarrow Z_{\max} = Z_1^*(s_0) \Rightarrow x_1^* \Rightarrow s_1 = s_0 - x_1^* \Rightarrow Z_2^*(s_1) \Rightarrow x_2^* \ldots \Rightarrow s_{n-1} = s_{n-2} - x_{n-1}^* \Rightarrow Z_n^*(s_{n-1}) \Rightarrow x_n^*.$$

Фрагмент MathCAD-документа, реализующий решение данной задачи, приведен в приложении 4. На рис. 58 представлен блок ввода исходных данных. Вектор Q представляет множество возможных управленческих решений x_i, матрица F определяет прибыльность предприятий в зависимости от выделенных ресурсов (размерности Q и F можно изменять). Особенностью программы является то, что первые компоненты вектора Q и матрицы F должны быть нулевыми, несоблюдение данного условия приведет к ошибочным результатам.

ORIGIN := 1

Матрица распределяемых ресурсов:

$$Q := \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \\ 160 \\ 240 \\ 320 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Матрица доходности предприятий в зависимости от выделенных ресурсов:

$$F := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 28 & 35 & 27 \\ 57 & 62 & 67 & 73 \\ 120 & 122 & 130 & 125 \\ 150 & 146 & 144 & 152 \\ 180 & 175 & 180 & 178 \end{pmatrix}$$

Рис. 58. Фрагмент MathCAD-документа: система исходных данных задачи распределения ресурсов

На рис. 59 представлены результаты решения, в соответствии с которыми оптимальным распределением является: выделение 240 усл. ед. третьему хозяйствующему субъекту и 160 усл. ед. – четвертому. Данное распределение обеспечит максимум прибыли в размере 203 усл. ед.

Матрица условных максимумов:

$(Result_{3,1})_{1,1} = (0\ \ 0)$ $(Result_{3,1})_{1,2} = (0\ \ 0)$ $(Result_{3,1})_{1,3} = (0\ \ 0)$ $(Result_{3,1})_{1,4} = (0\ \ 0)$

$(Result_{3,1})_{2,1} = (35\ \ 0)$ $(Result_{3,1})_{2,2} = (35\ \ 0)$ $(Result_{3,1})_{2,3} = (35\ \ 80)$ $(Result_{3,1})_{2,4} = (27\ \ 80)$

$(Result_{3,1})_{3,1} = (73\ \ 0)$ $(Result_{3,1})_{3,2} = (73\ \ 0)$ $(Result_{3,1})_{3,3} = (73\ \ 0)$ $(Result_{3,1})_{3,4} = (73\ \ 160)$

$(Result_{3,1})_{4,1} = (130\ \ 0)$ $(Result_{3,1})_{4,2} = (130\ \ 0)$ $(Result_{3,1})_{4,3} = (130\ \ 240)$ $(Result_{3,1})_{4,4} = (125\ \ 240)$

$(Result_{3,1})_{5,1} = (160\ \ 0)$ $(Result_{3,1})_{5,2} = (160\ \ 0)$ $(Result_{3,1})_{5,3} = (160\ \ 80)$ $(Result_{3,1})_{5,4} = (152\ \ 320)$

$(Result_{3,1})_{6,1} = (203\ \ 0)$ $(Result_{3,1})_{6,2} = (203\ \ 0)$ $(Result_{3,1})_{6,3} = (203\ \ 240)$ $(Result_{3,1})_{6,4} = (178\ \ 400)$

Ответ: $Result_{1,1} = 203$ **Максимальная прибыль.**

$Result_{2,1}{}^T = (0\ \ 0\ \ 240\ \ 160)$ **Оптимальное распределение ресурсов: 240 усл. ед. выделить третьему хозяйствующему субъекту, 160 ед. - четвертому.**

Рис. 59. Фрагмент MathCAD-документа: результаты решения задачи распределения ресурсов

7.2. Задача замены оборудования

Оборудование эксплуатируется в течение *T* лет, после чего продается (считается, что после *T* лет оборудование в результате морального износа не способно обеспечить выпуск конкурентоспособной продукции). В начале каждого года принимается решение сохранить оборудование или заменить его новым аналогичным (при этом старое оборудование продается, а вырученные средства направляются на покрытие части стоимости нового оборудования).

Известны (таблица 7.2):

- стоимость нового оборудования *p*;
- первоначальные затраты по новому оборудованию *r(0)*, включающие затраты на доставку, монтаж оборудования, пуско-наладочные работы и др.;

- эксплуатационные затраты *r(t)* (осуществляются в начале каждого периода, зависят от возраста оборудования *t*);
- рыночная (ликвидная) стоимость оборудования, эксплуатировавшегося *t* лет *φ(t)*,
- прогнозные годовые темпы инфляции *R*.

Таблица 7.2

Исходные данные

T=5 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5
R (% годовых)		15	15	15	15	15
(в ценах на настоящий момент времени, усл. ден. ед.)						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5
p	8000					
$r(t)$	600	800	1100	1500	2000	–
$\varphi(t)$	–	6000	5000	3000	1000	500

Необходимо определить оптимальную стратегию замены оборудования, обеспечивающую минимальные суммарные затраты на эксплуатацию в течение рассматриваемого периода T в условиях текущих цен (рассчитанных с учетом прогнозных годовых темпов инфляции R – условно приняты постоянными).

Примем способ деления управления на шаги – по годам. Исходя из заданной величины горизонта планирования T=5 лет, соответственно k=1, 2, ..., 5, где k – рассматриваемый шаг управления (начало k-го года).

В качестве параметра состояния системы примем возраст оборудования: s_k – возраст оборудования t к концу k-го года ($s_0 = 0$ – начальное состояние системы). Причем s_k зависит от управления (управленческого решения) $X_k(s_{k-1})$, принимаемого на k-ом управленческом шаге (в начале k-го года).

Управление $X_k(s_{k-1})$ в зависимости от возраста оборудования может принимать одно из следующих значений $X_k(s_{k-1}) \in \{"P", "S", "Z"\}$, где P – приобрести оборудование, при k=1; S – сохранить оборудование, при k=2, 3, ..., 5; Z – заменить оборудование новым, при k=2, 3, ..., 5. Тогда уравнения состояний можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &s_0 = 0, \\ &s_1 = 1, \text{ при } X_1(s_0) = "P", \\ &s_k = \begin{cases} t+1, \text{ при } X_k(s_{k-1}) = "S", \\ 1, \text{ при } X_k(s_{k-1}) = "Z", \end{cases} \quad (k = \overline{2,5};\ t = \overline{1,k-1}). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Показатели эффективности k-го шага в постоянных ценах:

$$f_1(X_1(s_0), s_0) = p + r(0),\ X_1(s_0) = "P",$$

$$f_k(X_k(s_{k-1}), s_{k-1}) = \begin{cases} r(s_{k-1}), \text{ при } X_k(s_{k-1}) = "S", \\ p + r(0) - \varphi(s_{k-1}), \text{ при } X_k(s_{k-1}) = "Z", \end{cases} \quad (k = \overline{2,4}), \tag{7.4}$$

$$f_5(X_5(s_4), s_4) = \begin{cases} r(s_4) - \varphi(s_5), \text{ при } X_5(s_4) = "S", \\ p + r(0) - \varphi(s_4) - \varphi(1), \text{ при } X_5(s_4) = "Z". \end{cases}$$

Показатели эффективности k-го шага в текущих ценах:

$$f_1(X_1(s_0), s_0) = p + r(0),\ X_1(s_0) = "P",$$

$$f_k(X_k(s_{k-1}), s_{k-1}) = \begin{cases} r(s_{k-1}) \times K_{k-1}, \text{ при } X_k(s_{k-1}) = "S", \\ p \times K_{k-1} + r(0) \times K_{k-1} - \varphi(s_{k-1}) \times K_{k-1}, \text{ при } X_k(s_{k-1}) = "Z", \end{cases} \quad (k = \overline{2,4}), \tag{7.5}$$

$$f_5(X_5(s_4), s_4) = \begin{cases} r(s_4) \times K_{k-1} - \varphi(s_5) \times K_k, \text{ при } X_5(s_4) = "S", \\ p \times K_{k-1} + r(0) \times K_{k-1} - \varphi(s_4) \times K_{k-1} - \varphi(1) \times K_k, \text{ при } X_5(s_4) = "Z", \end{cases}$$

где K_k $(k = 0, 1, 2, ..., 5)$ – коэффициент, учитывающий инфляцию (рассчитывается по методу сложных процентов на конец года):

для 1 года: $K_1 = (1 + \frac{R_1}{100})$;

для 2 года: $K_2 = (1+\frac{R_1}{100}) \times (1+\frac{R_2}{100})$;

$\vdots$

для *n* года: $K_n = (1+\frac{R_1}{100}) \times (1+\frac{R_2}{100}) \times \ldots \times (1+\frac{R_n}{100})$.

Если темпы инфляции постоянные или приблизительно постоянные, то можно воспользоваться следующей формулой:

$$K_k = (1+\frac{R}{100})^k, \ (k=\overline{1,n}). \tag{7.6}$$

Пусть $Z_k^*(s_{k-1})$ – условно-оптимальные затраты на эксплуатацию оборудования, начиная с *k*-го шага до конца, при условии, что к началу *k*-го шага оборудование имеет возраст *t* лет, т.е. $s_{k-1} = t$.

Тогда рекуррентные уравнения (в соответствии с обратной схемой Р.Э. Беллмана) будут иметь вид (в постоянных ценах):

$$Z_5^*(s_4) = \min \begin{cases} r(s_4) - \varphi(s_5), \ \text{при} \ X_5(s_4) = "S", \\ p + r(0) - \varphi(s_4) - \varphi(1), \ \text{при} \ X_5(s_4) = "Z", \end{cases}$$

$$Z_k^*(s_{k-1}) = \min \begin{cases} r(s_{k-1}) + Z_{k+1}^*(s_k), \ \text{при} \ X_k(s_{k-1}) = "S", \\ p + r(0) - \varphi(s_{k-1}) + Z_{k+1}^*(1), \ \text{при} \ X_k(s_{k-1}) = "Z", \end{cases} \quad (k = \overline{4,2}), \tag{7.7}$$

$$Z_{\min} = Z_1^*(s_0) = f_1(X_1(s_0), s_0) + Z_2^*(s_1) = p + r(0) + Z_2^*(s_1), \quad X_1^*(s_0) = "P".$$

В условиях текущих цен рекуррентные уравнения (в соответствии с обратной схемой Р.Э. Беллмана) будут иметь вид:

$$Z_5^*(s_4) = \min \begin{cases} r(s_4) \times K_4 - \varphi(s_5) \times K_5, \ \text{при} \ X_5(s_4) = "S", \\ p \times K_4 + r(0) \times K_4 - \varphi(s_4) \times K_4 - \varphi(1) \times K_5, \ \text{при} \ X_5(s_4) = "Z", \end{cases}$$

$$Z_k^*(s_{k-1}) = \min \begin{cases} r(s_{k-1}) \times K_{k-1} + Z_{k+1}^*(s_k), \ \text{при} \ X_k(s_{k-1}) = "S", \\ p \times K_{k-1} + r(0) \times K_{k-1} - \varphi(s_{k-1}) \times K_{k-1} + Z_{k+1}^*(1), \ \text{при} \ X_k(s_{k-1}) = "Z", \end{cases} \quad (k = \overline{4,2}), \tag{7.8}$$

$$Z_{\min} = Z_1^*(s_0) = f_1(X_1(s_0), s_0) + Z_2^*(s_1) = p + r(0) + Z_2^*(s_1), \quad X_1^*(s_0) = "P".$$

Далее по полученным результатам условной оптимизации можно определить оптимальную стратегию замены оборудования $X^* = (X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*)$ по следующей схеме:

$$s_0 \Rightarrow Z_{\min} = Z_1^*(s_0) \Rightarrow X_1^*(s_0) \Rightarrow s_1 \Rightarrow Z_2^*(s_1) \Rightarrow X_2^*(s_1) \ldots \Rightarrow s_{n-1} \Rightarrow Z_n^*(s_{n-1}) \Rightarrow X_n^*(s_{n-1}).$$

Для рассматриваемого примера значения коэффициентов, учитывающих инфляцию и рассчитанных по формуле (7.6), будут следующими:

Таблица 7.3

Коэффициенты, учитывающие инфляцию

T =5 лет (горизонт планирования) k	1	2	3	4	5
R (% годовых)	15	15	15	15	15
K_k	1,15	1,32	1,52	1,75	2,01

Фрагмент MathCAD-документа, реализующего решение данной задачи, приведен в приложении 5. На рис. 60 представлен блок ввода исходных данных. Программа позволяет вести расчет в текущих (с учетом инфляции) или постоянных ценах, задавать горизонт планирования (в программе эффективный горизонт планирования условно принят до 7 лет, при необходимости его можно увеличить, изменив размерность вектора *R* и задав соответствующее значение параметру *T*), выбирать способы ввода ликвидной стоимости оборудования, эксплуатировавшегося *t* лет (с помощью «жестко» заданного вектора ликвидной стоимости *F*, либо (при отсутствии данной информации) использовать остаточную стоимость оборудования, рассчитанную на основе определенного способа (линейного или уменьшаемого остатка) начисления амортизации).

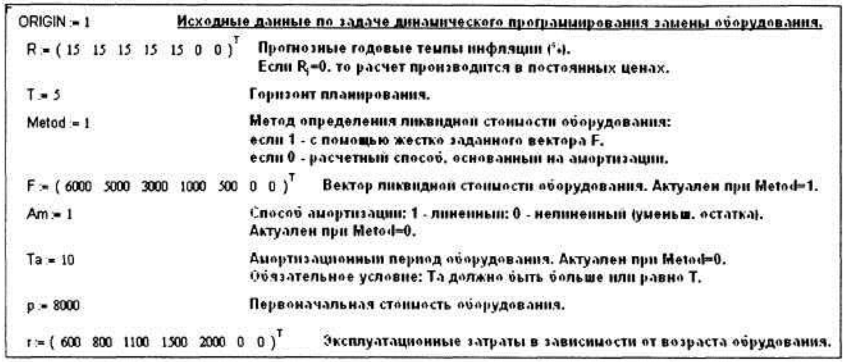


Рис. 60. Фрагмент MathCAD-документа: система исходных данных задачи замены оборудования

На рис. 61 представлены результаты решения, в соответствии с которыми имеется только одна оптимальная стратегия (заменить оборудование вначале второго и четвертого годов). Придерживаясь данной стратегии в течение рассматриваемого пятилетнего периода, компания обеспечит минимум затрат в размере 9466 усл. ден. ед.

Рис. 61. Фрагмент MathCAD-документа: результаты решения задачи замены оборудования

Глава 8. Лабораторный практикум

Практикум 1: Решение систем линейных уравнений в MathCAD

Задание 1. Найти общее решение нижеприведенных систем линейных уравнений или установить несовместность, используя функции: **find, lsolve** и **rref** (оформить решение по каждой функции в отдельном файле). В качестве образца для оформления решения рекомендуется использовать решение примеров 4.1 – 4.3 (из раздела 4.3), представленных на рис. 30 – 33.

Таблица 8.1

Варианты заданий

№	Задание	№	Задание
1	2	3	4
1)	$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5, \\ -2x_1 - 4x_2 - 9x_3 = -1. \end{cases}$	2)	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 7. \end{cases}$
3)	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$	4)	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$
5)	$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 4, \\ 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 5. \end{cases}$	6)	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -2, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$
7)	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 = 8. \end{cases}$	8)	$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 7, \\ 7x_1 + 5x_2 - 9x_3 = -1. \end{cases}$
9)	$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -5, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$	10)	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$
11)	$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ -3x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -3, \\ -2x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -8. \end{cases}$	12)	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 2, \\ 7x_1 + 8x_2 - 9x_3 = 3. \end{cases}$

Продолжение таблицы 8.1

1	2	3	4
13)	$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -8, \\ 2x_1 - 8x_2 - 6x_3 = 3, \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = -1. \end{cases}$	14)	$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6, \\ -3x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 2, \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -8. \end{cases}$
15)	$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 1, \\ -3x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 2, \\ -3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9. \end{cases}$	16)	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 7. \end{cases}$
17)	$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$	18)	$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 2, \\ -3x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9. \end{cases}$
19)	$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 = -4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 17, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$	20)	$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -8. \end{cases}$
21)	$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 11, \\ 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 = -9, \\ 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3. \end{cases}$	22)	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$
23)	$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -21, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$	24)	$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -1, \\ 7x_1 + 9x_2 - 8x_3 = 6. \end{cases}$
25)	$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 28, \\ 7x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1, \\ 7x_1 + 9x_2 - 9x_3 = 5. \end{cases}$	26)	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 16, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$
27)	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -12, \\ -2x_1 - 6x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 12. \end{cases}$	28)	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$
29)	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 - 9x_3 = -1. \end{cases}$	30)	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 22, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 47, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 18. \end{cases}$
31)	$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 2. \end{cases}$	32)	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -5, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

Задание 2. Найти общее решение нижеприведенных систем линейных уравнений или установить несовместность, используя функцию **rref**. В качестве образца для оформления решения рекомендуется использовать решение примеров 4.1, 4.2 (из раздела 4.3), представленных на рис. 30 – 32.

Таблица 8.2

Варианты заданий

№	Задание	№	Задание
1	2	3	4
1)	$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -1. \end{cases}$	2)	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$
3)	$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 15, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 9x_4 = -12, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$	4)	$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 11x_4 = 4. \end{cases}$
5)	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 = 6. \end{cases}$	6)	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -2, \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 19. \end{cases}$
7)	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1. \end{cases}$	8)	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 + x_4 = 11. \end{cases}$
9)	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 40. \end{cases}$	10)	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$
11)	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13. \end{cases}$	12)	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$
13)	$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$	14)	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$
15)	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 13, \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 + x_4 = -23, \\ 4x_1 - 7x_2 + 14x_3 + 5x_4 = -5. \end{cases}$	16)	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

Продолжение таблицы 8.2

1	2	3	4
17)	$\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3+x_4=4, \\ 6x_1+5x_2-4x_3+3x_4=5, \\ -2x_1+7x_2-4x_3+x_4=4. \end{cases}$	18)	$\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3+x_4=4, \\ 6x_1+5x_2-4x_3+3x_4=5, \\ 4x_1+2x_2-3x_3+3x_4=6. \end{cases}$
19)	$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+x_4=11, \\ 2x_1+10x_2+9x_3+9x_4=40, \\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37. \end{cases}$	20)	$\begin{cases} 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-6, \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ 3x_1-x_3+x_4=-3. \end{cases}$
21)	$\begin{cases} 2x_1-x_2+5x_3-x_4=5, \\ x_1+x_2-3x_3+2x_4=2, \\ 2x_1+2x_2-x_3-x_4=-1. \end{cases}$	22)	$\begin{cases} x_1-8x_2+10x_3+3x_4=3, \\ 4x_1-2x_2+3x_3+x_4=17, \\ 5x_1-17x_2+x_3-2x_4=0. \end{cases}$
23)	$\begin{cases} 3x_1-x_2-6x_3-4x_4=2, \\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6, \\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4=-7. \end{cases}$	24)	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=2, \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=4. \end{cases}$
25)	$\begin{cases} x_1-8x_2+10x_3+3x_4=6, \\ 4x_1-7x_2+14x_3+5x_4=0, \\ x_1+2x_2-3x_3-x_4=1. \end{cases}$	26)	$\begin{cases} 3x_1-8x_2+5x_3+x_4=-23, \\ 4x_1-7x_2+14x_3+5x_4=-5, \\ x_1+2x_2-3x_3-x_4=15. \end{cases}$
27)	$\begin{cases} 6x_1+5x_2-4x_3+3x_4=5, \\ -2x_1+7x_2-4x_3+x_4=4, \\ 4x_1+2x_2-3x_3+3x_4=6. \end{cases}$	28)	$\begin{cases} -3x_1+2x_2+x_3+2x_4=-3, \\ 2x_1-x_2-x_3-2x_4=1, \\ -x_1+x_3-24x_4=1. \end{cases}$
29)	$\begin{cases} x_1-2x_2+x_4=-3, \\ 2x_1+3x_2-2x_3-x_4=4, \\ x_1+3x_2-2x_3-2x_4=7. \end{cases}$	30)	$\begin{cases} -2x_1+3x_2-2x_3+x_4=4, \\ 6x_1+3x_2-4x_3+3x_4=0, \\ -2x_1+7x_2-4x_3+x_4=4. \end{cases}$

Практикум 2: Решение задач линейного программирования геометрическим методом в MathCAD

Задание 1. Решить нижеприведенные задачи линейного программирования графическим (геометрическим) методом. В качестве образца для оформления решения рекомендуется использовать решение примера 6.6 (из раздела 6.6), представленного на рис. 44 – 59.

Таблица 8.3

Варианты заданий

№	Задание	№	Задание
1	2	3	4
1)	$F(x)=2x_1-5x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 3x_1+4x_2\le 6, \\ 2x_1+3x_2\le 4, \\ x_1\ge 0, \\ x_2\ge 0. \end{cases}$	2)	$F(x)=x_1-4x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 3x_1+5x_2\ge 8, \\ -3x_1+10x_2\le 16, \\ x_1\ge 0, \\ x_2\ge 0. \end{cases}$
3)	$F(x)=x_1+x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1+3x_2\le 30, \\ 2x_1+x_2\le 20, \\ x_1\ge 0, \\ x_2\ge 0. \end{cases}$	4)	$F(x)=2x_1+2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1+x_2\ge 1, \\ -x_1+x_2\le 1, \\ x_1\ge 0, \\ x_2\ge 0. \end{cases}$
5)	$F(x)=2x_1+3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1+x_2\le 8, \\ x_1\ge 4, \\ x_2\ge 3. \end{cases}$	6)	$F(x)=x_1-3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1+x_2\le 3, \\ -x_1+2x_2\le 5, \\ x_1\ge 0, \\ x_2\ge 0. \end{cases}$
7)	$F(x)=x_1-3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} -x_1+2x_2\le 6, \\ x_1+2x_2\le 5, \\ x_1\ge 0, \\ x_2\ge 0. \end{cases}$	8)	$F(x)=2x_1+5x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1+x_2\le 500, \\ x_1\le 400, \\ x_2\le 300, \\ x_1\ge 0, \\ x_2\ge 0. \end{cases}$
9)	$F(x)=x_1+4x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1+x_2\le 7, \\ x_1\le 3, \\ x_2\le 1, \\ x_1\ge 0, \\ x_2\ge 0. \end{cases}$	10)	$F(x)=2x_1+x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1+6x_2\le 15, \\ 4x_1+3x_2\le 11, \\ x_1\ge 0, \\ x_2\ge 0. \end{cases}$

Продолжение таблицы 8.3

1	2	3	4
11)	$F(x)=2x_1+2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1+x_2 \ge 4, \\ -x_1+2x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	12)	$F(x)=3x_1+2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 0{,}1x_1+0{,}4x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 1, \\ x_2 \ge 0{,}6. \end{cases}$
13)	$F(x)=x_1+x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 3x_1+x_2 \le 20, \\ 2x_1+3x_2 \le 30, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	14)	$F(x)=5x_1+x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 3x_1+6x_2 \le 11, \\ x_1 \le 2{,}75, \\ 3x_2 \le 1{,}1, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
15)	$F(x)=2x_1+7x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1+2x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 3, \\ x_2 \ge 4. \end{cases}$	16)	$F(x)=x_1-2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1+10x_2 \le 1, \\ -2x_1+24x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
17)	$F(x)=x_1+3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 4x_1+8x_2 \le 17, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	18)	$F(x)=2x_1+4x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 4x_1+x_2 \le 15, \\ x_1+6x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
19)	$F(x)=2x_1+3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 5x_1+2x_2 \ge 3, \\ -4x_1+6x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	20)	$F(x)=4x_1+6x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1+15x_2 \le 32, \\ x_1 \le 31, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
21)	$F(x)=4x_1-x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 4x_1+6x_2 \le 9, \\ -5x_1+8x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	22)	$F(x)=2x_1+x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 5x_1+3x_2 \ge 7, \\ -2x_1+9x_2 \le 21, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

Продолжение таблицы 8.3

1	2	3	4
23)	$F(x)=x_1+5x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1+x_2 \le 8, \\ x_1+3x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	24)	$F(x)=2x_1+x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 5x_1-3x_2 \ge 7, \\ 2x_1+9x_2 \le 21, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
25)	$F(x)=-x_1-3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 5x_1-2x_2 \le 8, \\ 5x_1+x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	26)	$F(x)=-3x_1+x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1+5x_2 \le 16, \\ x_1+5x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
27)	$F(x)=2x_1+3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1+x_2 \le 2, \\ x_1+2x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	28)	$F(x)=x_1+4x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 3x_1+x_2 \le 16, \\ -4x_1+6x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 4, \\ x_2 \ge 5. \end{cases}$
29)	$F(x)=3x_1-2x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1+5x_2 \le 8, \\ -3x_1+8x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 2, \\ x_2 \ge 1. \end{cases}$	30)	$F(x)=x_1+3x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 16x_1+4x_2 \le 9, \\ x_1 \le \frac{1}{3}, \\ x_2 \le \frac{2}{3}, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
31)	$F(x)=5x_1+4x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 4x_1+x_2 \le 9, \\ x_1+3x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 1. \end{cases}$	32)	$F(x)=3x_1+x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} 4x_1+x_2 \ge 5, \\ -3x_1+10x_2 \le 50, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

Задание 2. Решить нижеприведенные задачи линейного программирования графическим методом. В качестве образца для оформления решения рекомендуется использовать решение примера 6.7 (из раздела 6.6), представленного на рис. 50 – 53.

Таблица 8.4

Варианты заданий

№	Задание	№	Задание
1	2	3	4
1)	$F(x)=x_1-2x_2+2x_3+3x_4\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+2x_4=8,\\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4=10,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$	2)	$F(x)=2x_1+x_2+x_3+2x_4\to\max$ $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+2x_4=16,\\ 2x_1+x_2+2x_3+x_4=14,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$
3)	$F(x)=3x_1+2x_2+x_3+x_4\to\min$ $\begin{cases}2x_1+2x_2+3x_4=9,\\ x_1+2x_2+2x_3+2x_4=8,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$	4)	$F(x)=3x_1+2x_2+x_3+2x_4\to\min$ $\begin{cases}x_2+2x_3+x_4=4,\\ x_1+2x_2+2x_3+2x_4=8,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$
5)	$F(x)=x_1+2x_2+3x_3+x_4\to\max$ $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3+x_4=12,\\ x_1+2x_2+x_3+2x_4=8,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$	6)	$F(x)=2x_1-x_2+3x_3-2x_4\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3-x_4=3,\\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4=4,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$
7)	$F(x)=2x_1+x_2+2x_3+2x_4\to\min$ $\begin{cases}2x_1+x_2+2x_3+x_4=8,\\ x_1+2x_2+x_3+2x_4=10,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$	8)	$F(x)=x_1+2x_2+x_3+x_4\to\min$ $\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=4,\\ 2x_1+x_2+2x_3-x_4=4,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$
9)	$F(x)=4x_1+2x_2+2x_3+x_4\to\min$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+2x_4=8,\\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=10,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$	10)	$F(x)=x_1+2x_2+3x_3+4x_4\to\min$ $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+x_4=2,\\ x_1-2x_2+x_3+2x_4=4,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$
11)	$F(x)=x_1+2x_2+3x_3-x_4\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=4,\\ x_1+2x_2+x_3+2x_4=6,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$	12)	$F(x)=x_1-2x_2+3x_3+x_4\to\min$ $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+x_4=7,\\ x_1-2x_2+x_3+2x_4=1,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$

Продолжение таблицы 8.4

1	2	3	4
13)	$F(x)=3x_1+x_2+2x_3+x_4\to\max$ $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_4=6,\\ x_1+x_2+x_3+2x_4=7,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$	14)	$F(x)=2x_1+x_2+3x_3+2x_4\to\max$ $\begin{cases}x_2+2x_3+2x_4=8,\\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4=9,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$
15)	$F(x)=2x_1+x_2-x_3+2x_4\to\max$ $\begin{cases}x_2+x_3+2x_4=6,\\ x_1+2x_2+2x_3=10,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$	16)	$F(x)=x_1+2x_2-x_3+3x_4\to\min$ $\begin{cases}x_1+2x_3+2x_4=5,\\ x_1+x_2+2x_3=4,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$
17)	$F(x)=4x_1+2x_2+2x_3+x_4\to\min$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+2x_4=8,\\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=10,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$	18)	$F(x)=4x_1+3x_2+2x_3+x_4\to\max$ $\begin{cases}x_1-3x_2+x_3+x_4=6,\\ x_1-2x_2+x_3+2x_4=4,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$
19)	$F(x)=x_1+x_2+x_3+x_4\to\min$ $\begin{cases}3x_1+2x_2+5x_3+x_4=22,\\ 2x_1+5x_2+4x_3+x_4=24,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$	20)	$F(x)=x_1-x_2+x_3-x_4\to\max$ $\begin{cases}3x_1+x_3+2x_4=2,\\ -x_1+x_2+x_3+5x_4=5,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$
21)	$F(x)=x_1-2x_2+2x_3+3x_4\to\min$ $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4=6,\\ x_1+x_2+2x_4=4,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$	22)	$F(x)=x_1+2x_2-2x_3+3x_4\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+2x_4=8,\\ x_1-2x_2+x_3+2x_4=1,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$
23)	$F(x)=2x_1-x_2-x_3+2x_4\to\max$ $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+2x_4=16,\\ 2x_1+2x_2-2x_3+x_4=4,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$	24)	$F(x)=3x_1-2x_2+x_3+x_4\to\min$ $\begin{cases}2x_1+2x_2+3x_4=9,\\ x_2+2x_3+x_4=4,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$
25)	$F(x)=3x_1+2x_2+x_3+2x_4\to\min$ $\begin{cases}x_1+3x_2+3x_4=10,\\ x_1+2x_2+2x_3+2x_4=8,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$	26)	$F(x)=x_1+2x_2+3x_3+x_4\to\max$ $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3+x_4=12,\\ 3x_1+3x_2+x_3+3x_4=15,\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,4}).\end{cases}$

Продолжение таблицы 8.4

1	2	3	4
27)	$F(x)=2x_1-x_2+3x_3-2x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=3, \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=5, \\ x_j \ge 0, (j=\overline{1,4}). \end{cases}$	28)	$F(x)=2x_1+x_2+2x_3+2x_4 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3+x_4=8, \\ 2x_1+x_2+2x_3+2x_4=10, \\ x_j \ge 0, (j=\overline{1,4}). \end{cases}$
29)	$F(x)=x_1+2x_2+x_3+x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_4=2, \\ 2x_1+x_2+2x_3-x_4=4, \\ x_j \ge 0, (j=\overline{1,4}). \end{cases}$	30)	$F(x)=4x_1+2x_2+2x_3+x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-2x_4=6, \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=10, \\ x_j \ge 0, (j=\overline{1,4}). \end{cases}$
31)	$F(x)=x_1+2x_2+3x_3+4x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+2x_4=8, \\ x_1-2x_2+x_3+2x_4=4, \\ x_j \ge 0, (j=\overline{1,4}). \end{cases}$	32)	$F(x)=x_1+2x_2+3x_3-x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=6, \\ x_1+2x_2+x_3+2x_4=6, \\ x_j \ge 0, (j=\overline{1,4}). \end{cases}$

Практикум 3: Решение задач линейного программирования в MathCAD

Задание 1. Решить задачи линейного программирования (таблицы 8.3, 8.4 **Практикум 2**), используя функции **Minimize**, **Maximize**. Сравнить с результатами, полученными при решении графическим методом. В качестве образца для оформления решения рекомендуется использовать решение примера 6.8, представленного на рис. 54 (из раздела 6.7).

Задание 2. Составить двойственные задачи к задачам линейного программирования (таблицы 8.3, 8.4 **Практикум 2**), привести их к каноническому виду. Реализовать решение двойственной задачи с использованием функций **Minimize**, **Maximize.** Сравнить полученные результаты в заданиях 1 и 2.

Практикум 4: Решение задач целочисленного линейного программирования в MathCAD

Решить задачи линейного программирования (таблицы 8.3, 8.4 **Практикум 2**), при условии целочисленности приведенных в задаче переменных. В качестве образца для оформления решения рекомендуется использовать решение примера 6.8 (из раздела 6.7), представленного на рис. 54 – 56.

Практикум 5: Построение моделей линейного программирования

Для ниже приведенных заданий построить математическую модель и найти оптимальное решение. В качестве образца для оформления решения рекомендуется использовать решение примеров 6.1 – 6.5, 6.8 (из раздела 6), представленных на рис. 38 – 43.

Варианты заданий

Вариант 1

Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио- и телевизионные сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены величиной 5500 условных денежных единиц. Каждая минута радиорекламы обходится в 5 условных денежных единиц, а каждая минута телерекламы – в 100 условных денежных единиц. Фирма хотела бы использовать радиосеть по крайней мере в 2 раза чаще, чем телесеть, исходя из своих конъюнктурных соображений. Опыт показал, что одна минута телерекламы обеспечивает объем сбыта продукции в 25 раз превышающий объем сбыта продукции, обеспечиваемый одной минутой радиорекламы.

Определите распределение финансовых средств между теле- и радиорекламой, максимизирующее сбыт продукции.

Вариант 2

На производственном участке компании производится два вида продукции: А и В. В производственном процессе задействовано четыре вида оборудования, причем оборудование вида I и II используются для производства продукта А, а оборудование вида III и IV – для производства продукта В. Основные производственно-экономические показатели приведены в таблице 8.5.

Разработайте план производства продукции, обеспечивающий максимальную прибыль компании с учетом следующих условий:

запас материала М-1 и М-2 составляет соответственно 120 и 100 кг;

совокупный фонд рабочего времени оборудования – 700 час.

Таблица 8.5

Основные производственно-экономические показатели

Показатели	На 1 кг А		На 1 кг В	
	I	II	III	IV
Расход материала (кг)				
материал М-1	7	5	3	2
материал М-2	3	5	10	15
Трудоемкость, норма-час.	6,8	10,1	7,8	11,1
Прибыль с 1 кг продукта, усл. ден. ед.	4	5	9	11

Вариант 3

Инвестор, располагающий суммой в 300 млн. руб., может вложить свой капитал в акции автомобильного концерна и строительной организации. С целью уменьшения риска, акций автомобильного концерна должно быть приобретено как минимум в два раза больше, чем акций строительной организации, причем последних можно купить не более чем на 100 млн. руб. Ди-

виденды по акциям автомобильного концерна составляют 8% в год, по акциям строительной организации – 10%.

Составить оптимальный план вложения капитала в акции рассматриваемых организаций, обеспечивающий максимальный доход.

Вариант 4

Торговая компания, специализирующаяся на продаже обуви, имеет четыре магазина (A, B, C, D), размещенные в различных районах города. Поставки для магазинов осуществляются с двух складов (С-I, С-II), которые ежемесячно могут поставлять по 40 тыс. ед. товара. Данные по транспортным затратам приведены в таблице 8.6.

Таблица 8.6

Транспортные затраты (усл. ден. ед./тыс. ед. товара)

Склад	Магазин			
	A	B	C	D
С-I	70	85	55	120
С-II	110	90	75	110

В будущем планируется расширить площади магазинов, поэтому их потребности составят соответственно 30, 25, 30 и 35 тыс. ед. товара ежемесячно. Чтобы удовлетворить данный спрос, планируется построить третий склад, который позволит поставлять до 60 тыс. ед. товара ежемесячно. Рассматриваются два варианта его размещения. Данные по транспортным затратам приведены в таблице 8.7.

Таблица 8.7

Транспортные затраты (усл. ден. ед./тыс. ед. товара)

Склад	Магазин			
	A	B	C	D
Вариант I	115	115	70	90
Вариант II	135	95	80	75

Оцените каждый из вариантов размещения склада с точки зрения транспортных затрат и выберите оптимальный.

Вариант 5

Фирма производит и реализует два вида продукции: А и В. Объем сбыта продукции вида А составляет не менее 60% общего объема реализации всей продукции. Для изготовления продукции А и В используется один и тот же вид материала, суточный запас которого равен 120 кг. Расход материала на единицу продукции А составляет 2 кг, а на единицу продукции В – 4 кг. Цена единицы продукции (в условных денежных единицах) вида А равна 20, а вида В – 40.

Определите оптимальное (в смысле максимального дохода фирмы от реализации продукции А и В) распределение материала для изготовления продукции вида А и вида В.

Вариант 6

В изготовленном на предприятии бензине А-76 октановое число должно быть не ниже 76, а содержание серы не более 0,3%. Данные об используемых компонентах приведены в таблице 8.8.

Таблица 8.8

Исходные данные об используемых компонентах

Показатели	Компоненты автомобильного бензина			
	I	II	III	IV
Октановое число	68	72	80	90
Содержание серы, %	0,35	0,35	0,3	0,2
Ресурсы, т	700	600	500	300
Стоимость, усл. ден. ед.	40	45	60	90

Определите, сколько тонн каждого компонента нужно взять для получения 1000 т бензина А-76, чтобы при этом себестоимость бензина была минимальной.

Вариант 7

Предприятию требуется изготовить некоторую единицу объема сплава, содержащего 15% олова, 55% цинка и 30% свинца. Данные об исходных сплавах приведены в таблице 8.9.

Таблица 8.9

Данные об исходных сплавах

Показатели	Исходные сплавы				
	I	II	III	IV	V
Содержание свинца, %	40	30	25	15	35
Содержание цинка, %	40	60	45	65	60
Содержание олова, %	20	10	30	20	5
Стоимость единицы сплава, условных денежных единиц	5	4	7	5	3

Определите, какие из исходных сплавов и в каких количествах нужно использовать для получения требуемого сплава, чтобы суммарные затраты на исходные сплавы были минимальными.

Вариант 8

Предприятию задана месячная программа на изготовление четырех типов изделий в количествах соответственно 5000, 2000, 3000 и 1800 шт. На предприятии имеется три группы станков с различной производительностью. Каждая группа станков может производить все типы изделий, их фонд рабочего времени за месяц составляет соответственно 800, 1000, 1500 час. Данные о технологическом процессе приведены в таблице 8.10.

Таблица 8.10

Исходные данные о технологическом процессе

Группы станков	Нормы времени на изготовление одного изделия, час.				Издержки на изготовление одного изделия, усл. ден. ед.			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
1	0,50	0,15	0,40	0,60	0,12	0,20	0,30	0,25
2	0,40	0,12	0,20	0,50	0,16	0,14	0,35	0,20
3	0,42	0,14	0,35	0,45	0,17	0,25	0,40	0,30

Разработайте план загрузки станков, обеспечивающий наименьшие издержки производства при выполнении месячной программы.

Вариант 9

Организация планирует рекламную кампанию нового продукта. Лимит отведенных средств на эти цели составляет 120000 руб. Предполагается, что тираж рекламных объявлений должен составить не менее 800 млн. экземпляров; объявления планируется разместить в шести изданиях. Исходные данные о стоимости размещения рекламы в одном выпуске и тираже каждого издания представлены в таблице 8.11.

При планировании рекламной кампании необходимо учесть следующие условия:

в каждом издании реклама должна пройти не менее чем в шести выпусках;

на каждое издание может быть истрачено не более трети отпущенной суммы;

общая стоимость рекламы в третьем и четвертом изданиях не должна превышать 75000 руб.

Таблица 8.11

Данные о стоимости рекламы в одном выпуске и тираже издания

Издание	Стоимость размещения рекламы в одном выпуске издания, руб.	Тираж одного выпуска, млн. экз.
A	1474,2	9,9
B	1244,1	8,4
C	1131,0	8,2
D	700,7	5,1
E	530,0	3,7
F	524,4	3,6

Сформируйте:

а) структуру рекламного бюджета в разрезе изданий, минимизирующую суммарные затраты;

б) структуру размещения рекламы в разрезе изданий, максимизирующую суммарный объем рекламных объявлений;

Вариант 10

Четыре овощехранилища каждый день обеспечивают картофелем три магазина. Магазины подали заявки соответственно на 17, 12 и 32 т. Овощехранилища имеют соответственно 20, 20, 15 и 25 т. Транспортные тарифы приведены в таблице 8.12.

Таблица 8.12

Тарифы по овощехранилищам, усл. ден. ед./т

Овощехранилища	Магазины		
	1	2	3
1	2	7	4
2	3	2	1
3	5	6	2
4	3	4	7

Составьте план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные затраты.

Вариант 11

Имеются два склада готовой продукции: A_1 и A_2 с запасами однородного груза 200 и 300 т соответственно. Данный груз необходимо доставить трем потребителям: B_1, B_2 и B_3 в количестве 100, 150, 250 т соответственно. Стоимость перевозки 1 т груза из склада A_1 потребителям B_1, B_2 и B_3 равна 5, 3, 6 ден. ед., а из склада A_2 тем же потребителям – 3, 4, 2 ден. ед. соответственно.

Составьте план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

Вариант 12

Автотранспортному предприятию следует распределить три типа автомобилей между четырьмя маршрутами. Данные об организации процесса перевозок приведены в таблице 8.13.

Таблица 8.13

Данные об организации процесса перевозок

Тип автомобиля	Число автомобилей, ед.	Месячный объем перевозок одним автомобилем по маршрутам, ед.				Транспортные затраты на одну перевозку одним автомобилем по маршрутам, усл. ден. ед.			
		I	II	III	IV	I	II	III	IV
1	50	15	10	20	50	15	20	25	40
2	20	20	25	10	10	70	28	15	45
3	30	35	50	30	45	40	70	50	65

Распределите автомобили по маршрутам так, чтобы при минимальных суммарных транспортных затратах перевезти по каждому из четырех маршрутов в течение месяца соответственно не менее 300, 200, 1000, 500 ед. груза.

Вариант 13

Три пекарни осуществляют ежедневные поставки хлеба для четырех магазинов. Исходные данные представлены в таблице 8.14.

Таблица 8.14

Исходные данные

Пекарня	Транспортные издержки, руб./т				Общее предложение
	1-й магазин	2-й магазин	3-й магазин	4-й магазин	
1	1,5	2,5	1,0	2,0	700
2	2,0	3,0	2,0	1,5	650
3	1,0	1,5	2,5	3,0	800
Общая потребность магазинов	400	500	350	900	

Требуется найти распределение поставок из каждой пекарни в магазины, минимизирующие совокупные транспортные издержки.

Вариант 14

В проектном отделе компании работают пять человек. Каждый из них затрачивает различное время на выполнение определенной работы. В настоящее время необходимо выполнить пять видов работ. Время выполнения работы каждым работником приведено в таблице 8.15.

Таблица 8.15

Исходные данные

Работники	Время выполнения работ по видам, час.				
	1	2	3	4	5
1	24	15	16	15	14
2	26	17	17	23	15
3	30	14	22	20	16
4	28	22	21	26	13
5	27	20	16	31	11

Требуется назначить на каждый вид работы одного из работников таким образом, чтобы общее время, необходимое для завершения всех видов работ, было минимальным.

Вариант 15

В регионе имеются пять угольных шахт. Показатели объемов добычи угля приведены в таблице 8.16.

Таблица 8.16

Объем добычи угольных шахт

Шахта	Объем добычи угля, т/день
1	150
2	130
3	100
4	160
5	140

Первичную переработку угля осуществляют три фабрики, производственные возможности которых приведены в таблице 8.17.

Таблица 8.17

Производственные возможности фабрик

Фабрика	Производственные возможности по первичной переработке угля, т/день
A	300
B	200
C	200

Перевозка угля от шахт до фабрик осуществляется с помощью железнодорожного транспорта. Транспортные затраты составляют 500 руб./т-км. Расстояния от шахт до углеперерабатывающих фабрик приведены в таблице 8.18.

Таблица 8.18

Расстояния от шахт до углеперерабатывающих фабрик, км

Фабрики	Шахты				
	1	2	3	4	5
A	24	40	26	50	22
B	19	17	20	41	45
C	44	30	15	18	21

Требуется найти распределение поставок угля на перерабатывающие фабрики, минимизирующие совокупные транспортные издержки.

Вариант 16

Научно-исследовательский институт (НИИ) получил грант на проведение исследований по четырем исследовательским проектам. Поскольку все четыре проекта обладают равным приоритетом в выполнении, руководство НИИ должно по каждому проекту назначить один исполнительный отдел. Каждым отделом были представлены оценки времени реализации проектов (таблица 8.19).

Таблица 8.19

Оценки времени реализации проектов по отделам, дни

Отделы	Исследовательские проекты			
	1	2	3	4
A	85	120	60	105
B	70	141	50	110
C	97	145	75	115
D	60	100	55	100

Необходимо закрепить проекты за отделами таким образом, чтобы совокупное время реализации проектов было минимальным.

Вариант 17

Химическая компания выпускает три вида продукции (A, B, C) и использует при этом четыре вида сырья (I, II, III, IV). Информация о расходе сырья на производство 1 кг каждого продукта и ежедневном запасе каждого вида сырья приведена в таблице 8.20.

Таблица 8.20

Удельный расход и ежедневные запасы сырья

Продукт	Удельный расход сырья, кг			
	I	II	III	IV
A	0,4	–	0,4	0,3
B	0,3	0,3	–	0,1
C	–	0,5	0,3	0,2
Ежедневный запас	300	150	200	200

Исходные данные о стоимости каждого вида сырья приведены в таблице 8.21.

Таблица 8.21

Исходные данные о стоимости сырья по видам

Вид сырья	Стоимость сырья, руб./кг
I	17
II	20
III	15
IV	18

Рыночные цены по каждому виду продукту представлены в таблице 8.22.

Таблица 8.22

Рыночные цены продуктов

Продукт	Цена, руб./ед.
A	40
B	35
C	45

Продукты А и В можно использовать во многих целях и рыночный спрос на них превышает производственные возможности компании. Продукт С производится только для нескольких специализированных компаний и максимальный ежедневный спрос на него не превышает 500 кг.

Определить дневной план производства продуктов с учетом существующих ресурсных ограничений, максимизирующий прибыль компании.

Вариант 18

Компания намерена инвестировать 100 000 долл. и рассматривает шесть краткосрочных инвестиционных проектов (A, B, C, D, E, F), предусматривающих долевое участие. Показатели по инвестиционным проектам представлены в таблице 8.23.

Таблица 8.23

Показатели эффективности инвестиционных проектов

Проект	Объем инвестиций, тыс. долл.	Доходность, % годовых	Надежность, баллов
A	35	5,5	5
B	23	6,0	4
C	60	8,0	2
D	75	7,5	3
E	27	5,5	5
F	40	7,0	4

Составить инвестиционный план, обеспечивающий максимальную доходность, исходя следующих условий:

доля капитала, инвестированная в один объект, не может превышать четверти от всего объема;

доля капитала, инвестированного в объекты с надежностью менее чем 4 балла, не должна превышать трети от суммарного объема.

Вариант 19

На производственном участке предприятия площадью 64 м^2 необходимо разместить два вида оборудования. Для размещения одной единицы оборудования первого вида требуется 2 м^2, второго вида – 3,2 м^2. С использованием единицы оборудования первого вида можно произвести за месяц товарной продукции на сумму 2 млн. руб., второго вида – 4 млн. руб. Определить количество единиц оборудования каждого вида для размещения на производственном участке, обеспечивающее максимальный объем производства товарной продукции, при условии, что предприятие может приобрести не более 20 единиц оборудования первого вида и не более 11 единиц оборудования второго вида.

Вариант 20

Компания-разработчик прикладного программного обеспечения при планировании своей деятельности на очередной период оценивает возможности разработки новых программных продуктов. Исходные данные о затратах и ожидаемой прибыли от продажи представлены в таблице 8.24.

Таблица 8.24

Исходные данные о затратах и ожидаемой прибыли (тыс. долл.)

Программный продукт (ПП)	Затраты на разработку	Требуемое число программистов	Прибыль от реализации
ПП-1	400	6	2000
ПП-2	1100	18	3600
ПП-3	940	20	4000
ПП-4	760	16	3000
ПП-5	1260	28	4400
ПП-6	1800	34	6200

Компания может выделить на разработку программного обеспечения не более 3,5 млн. долл. и задействовать не более 60 программистов.

Определить набор программных продуктов для разработки, обеспечивающий максимальную прибыль компании, если:

ожидается, что клиенты, заинтересованные в ПП-4, будут заинтересованы также и в ПП-5, и наоборот;

разработка ПП-1 имеет смысл только при наличии ПП-2, поэтому, если разрабатывается ПП-1, должно разрабатываться и ПП-2, однако последнее может разрабатываться и независимо;

ПП-3 и ПП-6 являются альтернативными, поэтому разработка целесообразна только одного из них;

стремясь обеспечить качество своих разработок, компания намерена сосредоточить усилия не более чем на трех программных продуктах.

Вариант 21

Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию с использованием телевидения, радио, газет и афиш. Проводимые в прошлом маркетинговые исследования показали, что использование теле-, радио-, газетной и афишной рекламы (в расчете на 1 руб. затраченных средств) обеспечивает увеличение прибыли соответственно на 10, 3, 7 и 4 руб.

Сформируйте структуру рекламного бюджета в разрезе различных видов рекламных средств, позволяющую получить максимальный прирост прибыли с учетом следующих условий:

лимит рекламного бюджета составляет 500000 руб.;

необходимо задействовать все виды рекламных средств;

на телерекламу следует расходовать не более 40%, а на афиши не менее 20% рекламного бюджета;

в силу популярности среди целевой аудитории местных радиостанций, на радиорекламу следует направить не менее половины средств, запланированных на телерекламу.

Вариант 22

Нефтеперерабатывающий завод получает четыре полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг-бензина, 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изопентона. В результате смешивания данных компонентов в разных пропорциях можно получить три сорта авиационного бензина: А, В, С. Пропорции компонент для каждого сорта бензина составляют соответственно 2:3:5:2, 3:1:2:1, 2:2:1:3.

Стоимость 1 тыс. л каждого сорта бензина составляет соответственно 1200, 1000 и 1500 усл. ден. ед.

Составьте план выпуска разных сортов авиационного бензина, максимизирующий доход нефтеперерабатывающего завода.

Вариант 23

Автотранспортное предприятие (АТП) заключило долгосрочный контракт с торговой организацией. Доставку грузов необходимо осуществлять колоннами специально оборудованных автомобилей на склады торговой организации, расположенные в двух районах.

Условия перевозки требуют, чтобы в составе каждой колонны, направляемой в первый район, было 4 автомобилей КАМАЗ 4308, 7 автомобилей КАМАЗ 43253 и 10 автомобилей КАМАЗ 53215; в колоннах, направляемых во второй район, – 5 автомобилей КАМАЗ 4308, 6 автомобилей КАМАЗ 43253 и 9 автомобилей КАМАЗ 53215. Каждая из колонн может сделать за сутки одинаковое количество поездок. Парк подвижного состава АТП состоит из 38 автомобилей КАМАЗ 4308 грузоподъемностью 5,5 т, 52 автомобиля

КАМАЗ 43253 грузоподъемностью 7,5 т, 50 автомобилей КАМАЗ 53215 грузоподъемностью 11 т.

Определите количество колонн, которое нужно направить в каждый район, чтобы перевезти наибольшее количество груза.

Вариант 24

На заготовительный участок предприятия каждый месяц поступают 500 стальных труб Ø 30 мм и длиной 3 м и 300 стальных уголков 40×40 мм и длиной 5 м. Трубы необходимо нарезать на заготовки длиной 350, 750, 1300 мм в соотношении 4:2:2, а уголки – на заготовки длиной 350, 1200 и 1850 мм в соотношении 4:2:1.

Составьте план распила материала, обеспечивающий максимальное число комплектов.

Вариант 25

Цех мебельного комбината выпускает три вида наборов мебели. Исходные данные по нормам расхода материала в расчете на единицу каждого вида продукции, плановой себестоимости, оптовой цене, трудоемкости единицы продукции и рыночном спросе приведены в таблице 8.25.

Запас древесно-стружечных плит (ДСП), досок сосновых и березовых составляет 90, 30 и 14 $м^3$ соответственно. Плановый фонд рабочего времени – 16800 чел.-час.

Таблица 8.25

Исходные данные

Показатели	Набор мебели		
	I	II	III
1	2	3	4
Норма расхода материала, $м^3$:			
ДСП	0,032	0,031	0,038
доски сосновые	0,020	0,020	0,008
доски березовые	0,005	0,005	0,006
Трудоемкость ед. изделия, чел.-час.	10,2	7,5	5,8
Себестоимость ед. изделия, усл. ден. ед.	88,81	63,98	29,60
Цена единицы изделия, усл. ден. ед.	93,00	67,00	30,00
Спрос, шт.	350	290	1200

Продолжение таблицы 8.25

Составьте план производства продукции с учетом ресурсных ограничений, максимизирующий прибыль мебельного комбината.

Вариант 26

Компания ежемесячно обслуживает пять организаций, используя три бригады специалистов. Каждая бригада в месяц может обслужить не более трех организаций. Исходные данные о затратах на обслуживание каждой организации приведены в таблице 8.26.

Таблица 8.26

Исходные данные о затратах по обслуживанию (тыс. усл. ден. ед.)

Организации – клиенты	Бригада специалистов		
	I	II	III
1	120	130	140
2	125	115	125
3	220	200	210
4	170	190	165
5	110	115	120

Необходимо закрепить бригады специалистов за организациями таким образом, чтобы суммарные затраты для компании были минимальными.

Вариант 27

На заготовительный участок предприятия каждый месяц поступают стальные уголки 45×45 мм длиной 3 и 5 м в количестве соответственно 300 и 500 шт. Материал необходимо нарезать на заготовки длиной 350, 750, 1300 мм в соотношении 4:2:2.

Составьте план распила материала, обеспечивающий максимальное число комплектов.

Вариант 28

На строительство четырех промышленных объектов кирпич поступает с трех заводов, каждый из которых ежедневно может поставлять 100, 90 и 70 тыс. шт. кирпича соответственно. Потребности строительных объектов составляют соответственно 50, 70, 40, 60 тыс. шт. кирпича в день. Исходные данные по транспортным затратам представлены в таблице 8.27.

Таблица 8.27

Исходные данные по транспортным затратам (тыс. усл. ден. ед./тыс. шт.)

Кирпичные заводы	Промышленные объекты			
	I	II	III	IV
1	0,2	0,6	0,2	0,3
2	0,5	0,2	0,1	0,7
3	0,4	0,5	0,7	0,8

Составьте план поставок кирпича на строящиеся промышленные объекты, минимизирующие совокупные транспортные затраты.

Вариант 29

Городская ремонтно-строительная организация имеет в штате 60 рабочих, которые объединены в 6 одинаковых бригад: Б-I, Б-II, Б-III, Б-IV, Б-V, Б-VI. Вся работа подразделяется на 4 категории:

работы по ремонту водопровода (категория А);

работы по ремонту дорог (категория В);

работы по ремонту зданий (категория С);

прочие работы (категория D).

Бригады штатных рабочих должны отработать по 40 часов в неделю. Для выдерживания сроков сдачи объектов в эксплуатацию, предусматривается возможность проведения сверхурочных работ. При этом формируются дополнительные бригады из тех же штатных рабочих по 6 человек в бригаде. Так как оплата сверхурочных работ осуществляется по повышенной ставке, то для предотвращения перерасхода денежных средств, разрешено использовать не более двух дополнительных бригад (БД-I, БД-II) с нагрузкой не более 10 часов сверхурочного времени в неделю. Информация о средних объемах работ в городе за неделю представлена в таблице 8.28.

Таблица 8.28

Информация о средних объемах работ в городе за неделю

Категория работ	Трудоемкость, норма-час
A	800
B	2000
C	100
D	200
Всего	3100

Очевидно, что 6 бригад, работающих по 40 часов в неделю (2400 часов), плюс 2 бригады по 10 часов сверхурочного времени в неделю (200 часов) обеспечивают всего 2600 часов. Таким образом, требуемые 3100 часов не могут быть обеспечены постоянными рабочими. В связи с этим городская ремонтно-строительная организация нанимает каждую неделю три временные бригады по контракту (БК-I, БК-II, БК-III). Информация о возможности выполнения определенных работ бригадами и почасовых ставках оплаты труда приведена в таблице 8.29.

Таблица 8.29

Информация о возможности выполнения определенных работ бригадами и почасовых ставках оплаты труда

Бригада	Почасовая ставка	Категории работ			
		A	B	C	D
Б-I	16		✓		
Б-II	16		✓		✓
Б-III	17		✓	✓	
Б-IV	17		✓		✓
Б-V	18	✓	✓	✓	✓
Б-VI	20	✓	✓	✓	✓
БД-I	23	✓		✓	✓
БД-II	26	✓		✓	✓
БК-I	20		✓		
БК-II	20			✓	✓
БК-III	20	✓			

Необходимо составить план работы бригад, минимизирующий трудовые затраты для ремонтно-строительной организации, при соблюдении следующих условий:

контрактные бригады должны отработать в неделю как минимум по 8 часов;

разница в объемах работ в сверхурочное время бригад БД-I и БД-II не должна превышать 5 часов.

Вариант 30

Мебельная фабрика выпускает книжные полки, тумбы под телевизоры и три вида наборов мебели. Данные по ценам и прибыли от реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице 8.30.

Таблица 8.30

Исходные данные по ценам и прибыли от реализации продукции

Показатели	Виды продукции				
	Наборы мебели			Книжные полки	Тумбы под TV
	I	II	III		
Оптовая цена единицы изделия, тыс. руб.	7,2	14,3	32,5	0,182	1,5
Прибыль от реализации единицы изделия, тыс. руб.	2,4	4,5	8,9	0,06	0,45

Исходя из финансового плана, объем товарной продукции фабрики за рассматриваемый период должен составить не менее 459,31 тыс. руб.

Рыночная конъюнктура в течение рассматриваемого периода характеризуется следующими условиями.

Книжными полками рынок насыщен, поэтому торговые организации уменьшили объем договоров до 10 тыс. шт. Тумбы под телевизоры могут быть реализованы в объемах от 4 до 7 тыс. шт., набор мебели III – от 7 до 10 тыс.шт. Спрос на наборы мебели I и II неограничен, и требуется не менее 10 тыс. шт. Фабрика имеет технологическое оборудование, количество единиц которого и нормы затрат времени на изготовление единицы продукции каждого вида приведены в таблице 8.31.

Таблица 8.31

Исходные данные о наличии оборудования и нормах затрат времени на изготовление единицы продукции по видам

Наименование оборудования	Число, ед.	Нормы затрат времени на изготовление единицы продукции, час.				
		Наборы мебели			Книжные полки	Тумбы под TV
		I	II	III		
Линия раскроя древесно-стружечных плит (ДСП)	2	0,068	0,096	0,207	0,018	0,042
Гильотинные ножницы	1	0,045	0,080	0,158	0,011	0,035
Линия облицовки	2	0,132	0,184	0,428	0,020	0,060
Линия обрезки кромок	2	0,057	0,082	0,230	0,010	0,028
Лаконаливная машина	2	0,063	0,090	0,217	0,010	0,032
Полировальные станки	4	0,170	0,280	0,620	0,020	0,096

Фабрика работает в две смены, эффективный фонд рабочего времени каждой единицы оборудования в каждой смене составляет 3945 час.

Составить производственную программу, обеспечивающую максимальную прибыль мебельной фабрике в данных условиях.

Практикум 6: Решение задач динамического программирования (задача распределения ресурсов между предприятиями)

Имеется определенное количество ресурсов s_0, которое необходимо распределить между n хозяйствующими субъектами на текущую деятельность в течение рассматриваемого периода (месяц, квартал, полугодие, год и т.д.) с целью получения совокупной максимальной прибыли. Размеры вложений ресурсов x_i ($i=\overline{1,n}$; $\sum_{i=1}^{n} x_i = s_o$) в деятельность каждого хозяйствующего субъекта кратны некоторой величине h. Известно, что каждый хозяйствующий субъект в зависимости от объема используемых средств x_i за рассматри-

ваемый период приносит прибыль в размере $f_i(x_i)$ ($i=\overline{1,n}$) (не зависит от вложения ресурсов в другие хозяйствующие субъекты). Исходные данные приведены в таблице 8.32.

Необходимо определить, какой объем ресурсов нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была наибольшей.

Таблица 8.32

Варианты заданий

№	Задание	№	Задание
1	2	3	4
1)	$Q=\begin{pmatrix}0\\20\\40\\60\\80\\100\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\9&10&10&8\\18&21&18&12\\24&25&29&26\\38&35&39&37\\50&51&61&58\end{pmatrix}$	2)	$Q=\begin{pmatrix}0\\10\\20\\30\\40\\50\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\9&11&11&5\\17&21&17&15\\29&29&25&26\\38&36&30&37\\47&56&62&52\end{pmatrix}$
3)	$Q=\begin{pmatrix}0\\5\\10\\15\\20\\25\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\7&12&9&9\\29&20&17&20\\37&26&28&31\\41&39&36&39\\47&59&58&54\end{pmatrix}$	4)	$Q=\begin{pmatrix}0\\20\\40\\60\\80\\100\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\9&11&8&7\\20&22&14&21\\35&25&27&30\\44&29&39&40\\48&47&57&57\end{pmatrix}$
5)	$Q=\begin{pmatrix}0\\2\\4\\6\\8\\10\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\9&11&7&10\\18&25&15&17\\29&27&25&28\\41&36&41&41\\52&60&54&60\end{pmatrix}$	6)	$Q=\begin{pmatrix}0\\30\\60\\90\\120\\150\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\11&10&7&8\\21&19&14&21\\40&23&25&29\\54&40&40&36\\63&57&56&58\end{pmatrix}$
7)	$Q=\begin{pmatrix}0\\12\\24\\36\\48\\60\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\12&9&7&8\\26&34&16&21\\40&38&26&29\\60&46&40&36\\74&52&52&58\end{pmatrix}$	8)	$Q=\begin{pmatrix}0\\5\\10\\15\\20\\25\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\14&8&12&11\\24&22&21&19\\37&29&23&28\\45&37&45&35\\47&52&57&59\end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 8.32

1	2	3	4
9)	$Q=\begin{pmatrix}0\\20\\40\\60\\80\\100\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\16&7&10&10\\28&19&15&19\\36&25&27&27\\39&39&42&34\\44&51&59&61\end{pmatrix}$	10)	$Q=\begin{pmatrix}0\\25\\50\\75\\100\\125\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\18&14&9&7\\28&18&48&21\\39&24&31&30\\47&39&40&39\\55&59&53&49\end{pmatrix}$
	$Q=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\12&12&12&8\\19&17&19&20\\30&28&30&31\\44&38&37&41\\69&60&52&51\end{pmatrix}$	11)	$Q=\begin{pmatrix}0\\10\\20\\30\\40\\50\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\11&10&13&9\\34&12&21&17\\46&20&32&30\\53&29&38&40\\68&47&57&50\end{pmatrix}$
12)	$Q=\begin{pmatrix}0\\7\\14\\21\\28\\35\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\9&5&14&10\\19&10&22&14\\28&21&28&32\\37&27&40&42\\68&36&49&47\end{pmatrix}$	13)	$Q=\begin{pmatrix}0\\21\\42\\63\\84\\105\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\12&7&10&12\\25&10&17&15\\34&21&29&30\\46&32&42&38\\58&41&64&55\end{pmatrix}$
14)	$Q=\begin{pmatrix}0\\2\\4\\6\\8\\10\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\11&13&7&8\\19&15&19&16\\30&25&27&28\\47&30&43&40\\52&40&60&48\end{pmatrix}$	15)	$Q=\begin{pmatrix}0\\15\\30\\45\\60\\75\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\9&12&6&7\\20&20&11&19\\42&31&20&29\\45&39&40&35\\59&47&62&51\end{pmatrix}$
16)	$Q=\begin{pmatrix}0\\20\\40\\60\\80\\100\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\8&8&9&6\\22&15&16&11\\36&25&21&21\\49&40&39&35\\64&51&63&52\end{pmatrix}$	17)	$Q=\begin{pmatrix}0\\2\\4\\6\\8\\10\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\8&7&10&7\\24&16&19&15\\42&24&24&25\\58&41&42&32\\67&51&59&50\end{pmatrix}$
18)	$Q=\begin{pmatrix}0\\8\\16\\24\\32\\40\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\7&7&11&8\\27&20&20&16\\42&28&30&25\\50&29&41&29\\66&58&58&54\end{pmatrix}$	19)	$Q=\begin{pmatrix}0\\10\\20\\30\\40\\50\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\5&9&12&10\\30&21&21&19\\40&25&30&26\\52&29&42&31\\65&57&50&57\end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 8.32

1	2	3	4
20)	$Q=\begin{pmatrix}0\\5\\10\\15\\20\\25\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\6&9&12&8\\16&21&18&11\\23&22&29&26\\39&35&33&37\\47&51&50&51\end{pmatrix}$	21)	$Q=\begin{pmatrix}0\\20\\40\\60\\80\\100\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\7&10&10&8\\15&21&12&11\\24&30&29&26\\37&35&39&35\\50&51&61&58\end{pmatrix}$
	$Q=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\6&11&9&8\\18&21&18&12\\21&25&29&24\\38&35&40&37\\52&51&61&58\end{pmatrix}$	22)	$Q=\begin{pmatrix}0\\2\\4\\6\\8\\10\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\9&7&10&8\\15&21&18&12\\24&25&30&28\\33&35&39&37\\50&51&61&60\end{pmatrix}$
23)	$Q=\begin{pmatrix}0\\20\\40\\60\\80\\100\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\5&9&10&8\\18&21&19&12\\24&25&27&26\\40&38&39&33\\50&61&61&58\end{pmatrix}$	24)	$Q=\begin{pmatrix}0\\11\\22\\33\\44\\55\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\9&7&10&8\\18&21&18&12\\24&27&29&26\\40&35&30&37\\50&51&60&58\end{pmatrix}$
25)	$Q=\begin{pmatrix}0\\2\\4\\6\\8\\10\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\4&7&10&8\\18&21&18&10\\24&20&29&26\\30&35&39&37\\50&51&51&48\end{pmatrix}$	26)	$Q=\begin{pmatrix}0\\3\\6\\9\\12\\15\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\9&11&13&8\\18&21&18&12\\34&25&29&26\\48&35&39&47\\50&51&61&58\end{pmatrix}$
27)	$Q=\begin{pmatrix}0\\20\\40\\60\\80\\100\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\12&10&9&8\\18&21&18&12\\34&30&29&26\\38&35&39&40\\50&62&61&58\end{pmatrix}$	28)	$Q=\begin{pmatrix}0\\7\\14\\21\\28\\35\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\9&13&11&8\\18&21&28&12\\24&25&33&26\\30&35&39&31\\50&51&41&51\end{pmatrix}$
29)	$Q=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\9&7&10&8\\18&21&18&12\\24&27&29&26\\38&45&39&40\\50&51&61&48\end{pmatrix}$	30)	$Q=\begin{pmatrix}0\\20\\40\\60\\80\\100\end{pmatrix}$ $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\9&10&12&8\\28&21&19&12\\34&25&29&26\\38&35&40&37\\40&51&53&50\end{pmatrix}$

Практикум 7: Решение задач динамического программирования (задача замены оборудования)

Оборудование эксплуатируется в течение T лет, после чего продается (считается, что после T лет оборудование в результате морального износа не способно обеспечить выпуск конкурентоспособной продукции). В начале каждого года принимается решение сохранить оборудование или заменить его новым аналогичным (при этом старое оборудование продается, а вырученные средства направляются на покрытие части стоимости нового оборудования).

Известны:

- стоимость нового оборудования p;
- первоначальные затраты по новому оборудованию $r(0)$, включающие затраты на доставку, монтаж оборудования, пуско-наладочные работы и др.;
- эксплуатационные затраты $r(t)$ (осуществляются в начале каждого периода, зависят от возраста оборудования t);
- рыночная (ликвидная) стоимость оборудования, эксплуатировавшегося t лет – $\varphi(t)$ (в качестве $\varphi(t)$ условно принять остаточную стоимость оборудования на конец каждого периода, определяемую исходя из амортизационного срока T_a и способа начисления амортизации);
- прогнозные годовые темпы инфляции R.

Необходимо определить оптимальную стратегию замены оборудования, обеспечивающую минимальные суммарные затраты на эксплуатацию в течение рассматриваемого периода T в условиях постоянных и текущих цен (рассчитанных с учетом прогнозных годовых темпов инфляции R).

Варианты заданий

Вариант 1

T=5 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		12	11	10,5	10	9,5	–	–
T_a=10 лет		*Способ начисления амортизации:* линейный						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	4600							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	450	500	560	630	700	–	–	–

Вариант 2

T=6 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		12,5	12	11	10,5	10	9	–
T_a=9 лет		*Способ начисления амортизации:* уменьшаемого остатка						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	11000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	2500	2700	3100	3600	4000	5000	–	–

Вариант 3

T=7 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		12,5	12	11,5	11	10,5	10	9
T_a=8 лет		*Способ начисления амортизации:* линейный						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	12000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	1500	1750	1800	2500	3200	4000	4900	–

Вариант 4

T=5 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		8	10	11	11,5	12	–	–
T_a=10 лет		*Способ начисления амортизации:* уменьшаемого остатка						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	5000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	600	800	1100	1500	2000	–	–	–

Вариант 5

T =6 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		8	10	11	11,5	12	13	–
T_a=9 лет		*Способ начисления амортизации:* линейный						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	13000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	500	900	1200	2000	3000	4000	–	–

Вариант 6

T =7 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		12,5	12	11	10,5	10	9	8
T_a=8 лет		*Способ начисления амортизации:* уменьшаемого остатка						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	7500							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	500	700	900	1100	1500	2000	2500	–

Вариант 7

T =5 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		12,5	12	11	10,5	10	–	–
T_a=10 лет		*Способ начисления амортизации:* линейный						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	15000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	1000	1100	1300	1500	1600	–	–	–

Вариант 8

T =6 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		12,5	12	11	10,5	10	9	–
T_a=9 лет		*Способ начисления амортизации:* уменьшаемого остатка						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	10000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	600	800	1200	1500	2000	2500	–	–

Вариант 9

T =7 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		12,5	12	11	10,5	10	9	8
T_a=8 лет		*Способ начисления амортизации:* линейный						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	9000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	700	900	1200	1600	2000	2500	3000	–

Вариант 10

T =5 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		8	10	11	11,5	12	–	–
T_a=10 лет		*Способ начисления амортизации:* уменьшаемого остатка						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	10000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	500	900	1200	1700	2500	–	–	–

Вариант 11

T =6 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		8	10	11	11,5	12	13	–
T_a=9 лет		*Способ начисления амортизации:* линейный						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	12000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	1200	1500	1900	2400	3000	3800	–	–

Вариант 12

T =7 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		8	10	11	11,5	12	13	14
T_a=8 лет		*Способ начисления амортизации:* уменьшаемого остатка						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	9500							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	700	910	1200	1500	2000	2650	3100	–

Вариант 13

T=5 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		12,5	12	11	10,5	10	–	–
T_a=10 лет		*Способ начисления амортизации:* линейный						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	10000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	700	900	1200	1600	3000	–	–	–

Вариант 14

T=6 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		12,5	12	11	10,5	10	9	–
T_a=9 лет		*Способ начисления амортизации:* уменьшаемого остатка						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	6000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	400	600	1000	1450	2000	2500	–	–

Вариант 15

T=7 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		12,5	12	11	10,5	10	9	8
T_a=8 лет		*Способ начисления амортизации:* линейный						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	8100							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	500	600	900	1000	1200	1800	2500	–

Вариант 16

T=5 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		9	10	11	11,5	12	–	–
T_a=10 лет		*Способ начисления амортизации:* уменьшаемого остатка						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	10000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	600	800	1200	1800	2500	–	–	–

Вариант 17

T=6 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		9	10	11	11,5	12	13	–
T_a=9 лет		*Способ начисления амортизации:* линейный						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	12000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	600	950	1300	1900	2500	3200	–	–

Вариант 18

T=7 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		9	10	11	11,5	12	13	14
T_a=8 лет		*Способ начисления амортизации:* уменьшаемого остатка						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	9500							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	800	1100	1500	1900	2500	3100	3900	–

Вариант 19

T=5 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		12,5	12	11	10,5	10	–	–
T_a=10 лет		*Способ начисления амортизации:* линейный						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	30000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	2500	3600	7500	8500	10000	–	–	–

Вариант 20

T=6 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		13	12	11	10,5	9	8	–
T_a=9 лет		*Способ начисления амортизации:* Уменьшаемого остатка						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	15500							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	2100	2500	3000	3250	3600	4100	–	–

Вариант 21

T =7 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		12	11	10	9	8	7	6
T_a=8 лет		*Способ начисления амортизации:* линейный						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	12000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	2100	2500	3200	3800	4100	4850	5200	–

Вариант 22

T =5 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		8	10	11	11,5	12	–	–
T_a=10 лет		*Способ начисления амортизации:* уменьшаемого остатка						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	75000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	5000	7000	9000	11000	15000	–	–	–

Вариант 23

T =6 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		8	10	11	11,5	12	13	–
T_a=9 лет		*Способ начисления амортизации:* линейный						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	10000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	680	850	1240	1590	2000	2640	–	–

Вариант 24

T =7 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		8	10	11	11,5	12	13	14
T_a=10 лет		*Способ начисления амортизации:* уменьшаемого остатка						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	12500							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	1250	1550	1950	2400	2900	3200	4000	–

Вариант 25

T =5 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		13	12	11	10	9	–	–
T_a=10 лет		*Способ начисления амортизации:* линейный						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	7000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	450	680	1050	1400	2000	–	–	–

Вариант 26

T =6 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		9	10	11	11,5	12	13	–
T_a=9 лет		*Способ начисления амортизации:* уменьшаемого остатка						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	10000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	800	1000	1400	1900	2300	2700	–	–

Вариант 27

T =7 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		9	10	11	11,5	12	13	14
T_a=8 лет		*Способ начисления амортизации:* линейный						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	15500							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	2150	2500	2900	3350	3800	4100	4850	–

Вариант 28

T =5 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		12	11,5	11	10,5	10	–	—
T_a=10 лет		*Способ начисления амортизации:* уменьшаемого остатка						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	9500							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	750	1100	1500	1900	2500	–	–	–

Вариант 29

T =6 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		12	11	11	10,5	10	9	–
T_a=9 лет		*Способ начисления амортизации:* линейный						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	9000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	700	900	1200	1600	1900	2200	–	–

Вариант 30

T =7 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		10	10	10	9	9	8	8
T_a=8 лет		*Способ начисления амортизации:* уменьшаемого остатка						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	14000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	950	1200	1500	2000	2200	2800	3200	–

Вариант 31

T =5 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		6	7	8	9	10	–	–
T_a=10 лет		*Способ начисления амортизации:* линейный						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	13000							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	1000	1200	1500	2000	2200	–	–	–

Вариант 32

T =6 лет (горизонт планирования)		1	2	3	4	5	6	7
R (% годовых)		6	7	8	9	10	11	–
T_a=9 лет		*Способ начисления амортизации:* уменьшаемого остатка						
t (возраст оборудования)	0 (новое)	1	2	3	4	5	6	7
p (усл. ден. ед.)	12900							
$r(t)$ (усл. ден. ед.)	1050	1200	1500	2000	2200	2800	–	–

Список рекомендуемой литературы

1. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 368 с.
2. Волков И.К., Загоруйко Е.А. Исследование операций: Учеб. для вузов. 2-е изд. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 436 с.
3. Дьяконов В.П. Энциклопедия Mathcad 2001i и Mathcad 11. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 832 с.
4. Идельсон А.В., Блюмкина И.А. Аналитическая геометрия. Линейная алгебра. Учебное пособие / Под ред. Л.П. Гаштольда, В.Г. Дмитриева, А.Ф. Тарасюка. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 200 с.
5. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А.Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 407 с.
6. Кирьянов Д.В. Mathcad 12. – СПб.: БХВ–Петербург, 2005. – 576 с.
7. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. – СПб: Питер, 2002. – 208 с.
8. Кузнецов Б.Т. Математические методы и модели исследования операций: Учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 390 с.
9. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 656 с.
10. Орлова И.В. Экономико-математическое моделирование: Практическое пособие по решению задач. – М.: Вузовский учебник, 2005. – 144 с.
11. Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 656 с.

12. Сернова Н.В., Гордуновский В.М., Самохвалов С.Ю. Балансовые и оптимизационные модели принятия решений: Учебное пособие по курсу «Экономико-математические методы и модели». – М.: МГИМО(У) МИД России, 2005. – 104 с.

13. Смирнов Ю.Н., Шибанова Е.В. Экономико-математические методы и модели. Линейное программирование: Учебное пособие. – Набережные Челны: Изд-во КамПИ, 2004. – 81 с.

14. Федосеев В.В., Эриашвили Н.Д. Экономико-математические методы и модели в маркетинге: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В.В. Федосеева. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 159 с.

15. Херхагер М., Партолль Х. Mathcad 2000: полное руководство: Пер. с нем. – К.: Издательская группа BHV, 2000. – 416 с.

16. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов / В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; Под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 391 с.

Приложение 1

Таблица П 1.1

Сообщения о наиболее характерных ошибках

Сообщение	Описание
1	2
All evaluations resulted in either an error or complex result.	Вычисления приводят к ошибке или комплексному результату.
A "Find" or "Minerr" must be preceded by a mathing "Given".	Перед «Find» или «Minerr» должно быть слово Given.
Arguments in function definitions must by name.	Аргументы в определениях функции должны быть именами.
Argument to large.	Аргумент слишком велик.
At least one limit must be infinity.	Хотя бы один предел должен быть бесконечным.
Array size mismatch.	Несоответствие размера массива.
Cannot be defined.	Не может быть определено.
Cannot take subscript.	Не содержит индексов.
Can't evaluate this function when is argument less than or equal to zero.	Нельзя вычислить данную функцию, когда ее аргумент меньше или равен нулю.
Can't converge to a solution.	Не сходится к решению.
Can't define the same variable more than once in the same expression.	Невозможно определить одну и ту же переменную в выражении более одного раза.
Can't determine what units the result of this operation should have.	Невозможно определить, в каких единицах должен быть результат данной операции.
Can't divide by zero.	Деление на 0 невозможно.
Can't evaluate this accurately at one or more of values you specified.	Невозможно точно вычислить одно или более значений.
Can't evaluate this expression. It may have resulted in an overflow or an infinite loop.	Невозможно вычислить это выражение. Это может быть результатом переполнения или зацикливания.
Can't find a solution.	Невозможно найти решение.
Can't use a range variable in a solve block.	Нельзя использовать ранжированную переменную в вычислительном блоке.
Definition stack overflow.	Переполнение стека определений.
Degree of the polynomial must be between 1 and 99.	Степень полинома должна быть от 1 до 99.
Did not find solution.	Решение не найдено.

Продолжение приложения 1

Продолжение таблицы П 1.1

1	2
Dimension must be >4.	Размерность должна быть больше 4.
Dimension to non real power.	Размерность массива не является целым числом.
Discarding large (huge) result.	Сброс большого результата (его можно разместить в буфере).
Domain error.	Ошибка области определения.
Duplicate.	Дублирование.
End of file.	Конец файла.
End points cannot be the same.	Конечные точки не могут быть одинаковыми.
Equation too large.	Слишком большое выражение.
Error in constant.	Ошибка в константе.
Error in list.	Ошибка в списке.
Error in solve block.	Ошибка в блоке.
Expected array or list.	Ожидается массив или список.
Floating point error.	Ошибка вычислений с плавающей точкой.
Floats not handled.	Вычисления с плавающей точкой не поддерживаются.
File error.	Ошибка в файле.
File not found.	Файл не найден.
Found a number with a magnitude greater than 10^307.	Найдено число со значением выше 10^{307}.
Found a singularity while evaluating this expression. You my be dividing by zero.	При вычислении этого выражения найдена сингулярность. Возможно, вы делите на 0.
Illegal array operation.	Неверная операция с массивом.
Illegal context. Press <F1> for help.	Неверный контекст. Нажмите клавишу F1 для справки.
Illegal dimensions.	Недопустимые размеры (матрицы).
Illegal factor.	Неверный множитель.
Illegal function name.	Неверное имя функции.
Illegal function syntax.	Неправильный синтаксис функции.
Illegal ORIGIN.	Неверное значение переменной ORIGIN.
Illegal range.	Неправильный диапазон.
Illegal tolerance.	Некорректная точность аппроксимации.

Продолжение приложения 1

Продолжение таблицы П 1.1

1	2
Incompatible units.	Несовместимые единицы.
Index out of bounds.	Индекс вне границ.
Integer to large.	Целое число слишком велико.
Integer to small.	Целое число слишком мало.
Interrupted.	Вычисления прерваны.
Invalid arguments.	Недопустимые аргументы.
Invalid format.	Неверный формат.
Invalid order.	Неверный порядок.
Invalid range.	Недопустимый интервал.
List too long.	Слишком длинный входной список.
Misplaced comma.	Неуместная запятая.
Missing operand.	Пропущенный операнд.
Missing operator.	Пропущенный оператор.
Must be 3-vector.	Должно быть трехмерным вектором.
Must be array.	Должно быть массивом
Must be between two lock refions.	Должно быть между двумя закрытыми областями.
Must be dimensionless.	Должно быть безразмерным.
Must be function.	Должно быть функцией.
Must be increasing.	Должно быть возрастающим.
Must be integer.	Должно быть целым.
Must be less than the number of data points.	Должен быть меньше, чем число точек данных.
Must be nonzero.	Должно быть ненулевым.
Must-be positive.	Должно быть положительным.
Must be range.	Должно быть диапазоном.
Must be real.	Должно быть вещественным.
Must be scalar.	Должно быть скаляром.
Must be square.	Должна быть квадратной (о матрице).
Must be string.	Должно быть строкой.
Must be vector.	Должно быть вектором.
Nested solve block.	Вложенный блок решения.

Продолжение приложения 1

Продолжение таблицы П 1.1

1	2
No answer found; stack limit reached.	Не найден ответ; лимит стека исчерпан.
No closed form for ...	Не найдено замкнутой формы для ...
No matching Given.	Нет соответствующей директивы Given.
No solution found.	Не найдено решение.
No scalar value.	Не является скаляром.
Not a name.	Не является именем.
Not converging.	Не сходится.
Not enough memory for this operation.	Недостаточно памяти для этой операции.
Only one array allowed.	Допустим только один массив.
Only pozitive values are allowed here.	Только положительные значения разрешены здесь.
Overflow.	Переполнение.
Significance lost.	Потеряны значащие цифры.
Singularity.	Деление на ноль.
Singular matrix.	Матрица сингулярная.
Stack overflow.	Переполнение стека
Syntax error.	Синтаксическая ошибка.
Subscript too large.	Слишком большой индекс.
The expression to the left of the equal sign cannot be defined.	Выражение слева от знака равенства не может быть определено.
The number of rows and/or columns in this arrays do not math.	Число строк и/или столбцов в этих массивах не совпадает.
The units in this expression do not match.	Размерности в этом выражении не согласованы.
Ther is an extra comma in this expression.	В выражении лишняя запятая.
This expression in incomplete. You must fill in the placeholders.	Это выражение неполное. Вы должны заполнить места ввода.
This function has too many arguments.	Эта функция имеет слишком много аргументов.
This function needs more arguments	Этой функции требуется больше аргументов.
This operation can only be performed on a function (or array, number, string, ...).	Эта операция может быть произведена только над функцией (или массивом, числом, строкой, ...).
This subscript is too large.	Этот нижний индекс слишком велик.

Продолжение приложения 1

Продолжение таблицы П 1.1

1	2
This system of the equation has more unknowns than there are equations.	Эта система уравнений имеет больше неизвестных, чем уравнений.
This value must be a matrix.	Это значение должно быть матрицей.
This value must be a vector.	Это значение должно быть вектором.
This value must be a integer greater than 1.	Это значение должно быть целым числом, большим 1.
This variable or function is not defined above.	Эта переменная или функция не определена выше.
This variable must be a range variable.	Эта переменная должна быть ранжированной переменной.
Too few arguments.	Слишком мало аргументов.
Too few constraints.	Слишком мало ограничений.
Too few elements.	Слишком мало элементов.
Too few subscripts.	Слишком мало индексов.
Too large to display.	Слишком велико, чтобы отобразить.
Too many arguments.	Слишком много аргументов.
Too many constraints.	Слишком много ограничений.
Too many iterations.	Слишком много итераций.
Too many integration steps.	Слишком много шагов интегрирования.
Too many points.	Слишком много точек.
Too many subscripts.	Слишком много индексов.
Undefined.	Не определено.
Underflow.	Потеря значащих цифр результата.
Unequal array dimension.	Неравные размеры массивов.
Unmatched parenthesis.	Дисбаланс скобок.
Value of subscript or superscript is too big (or too small) for this array.	Значение нижнего или верхнего индекса слишком велико (или слишком мало) для данного массива.
Vector elements cannot all be the same.	Все элементы вектора не могут быть одинаковыми.
Wrong size vector.	Неверный размер вектора.

Приложение 2

Таблица П 2.1

Системные переменные MathCAD

Переменная	Описание
$\pi = 3{,}14159...$	Число π. В численных расчетах Mathcad использует значение π с учетом 15 значащих цифр. В символьных вычислениях π выводится как символ (для ввода π используется комбинация клавиш Shift+Ctrl+p).
e = 2,71828...	Основание натуральных логарифмов. В численных расчетах Mathcad 2001 использует значение e с учетом 15 значащих цифр. В символьных вычислениях e выводится как символ.
∞	Бесконечность. В численных расчетах это предельно большое число (10^{307}). В символьных вычислениях выводится как знак бесконечности. Для ввода используется (сочетание клавиш Shift+Ctrl+Z).
% = 0,01	Процент — величина, равная 0,01. Используйте ее в выражениях, подобных 10*__%, или как масштабирующий множитель в поле, отводимом для единиц размерности.
i ИЛИ j	Множитель для мнимой части комплексного числа, равный корню квадратному из минус единицы.
$TOL = 10^{-3}$	Допустимая погрешность для различных численных алгоритмов (интегрирования, решения уравнений и т. д.).
$CTOL = 10^{-3}$	Погрешность для условий ограничения при решении оптимизационных задач с применением функций Maximize, Minimize, Find и Minerr.
ORIGIN = 0	Начало массива. Определяет индекс первого элемента массива.
PRNCOLWIDTH = 8	Ширина столбца, используемая при записи файлов функцией WRITEPRN.
PRNPRECISION = 4	Число значащих цифр, используемых при записи файлов функцией WRITEPRN.
FRAME = 0	Используется в качестве счетчика при создании анимации.
CWD	Текущая папка в виде строки (только для Mathcad Professional).
inN	Переменная ввода для связи Mathcad через MathConnex с другими программными средствами. Здесь N — номер входа N — целое число, по умолчанию равное 0 (только для Mathcad Professional и при условии применения MathConnex в виде отдельной программы).
outN	Переменная выхода для связи Mathcad через MathConnex с другими программными средствами. Здесь N — номер выхода N — целое число, по умолчанию равное 0 (только для Mathcad Professional и при условии применения MathConnex в виде отдельной программы).

Карамышев А.Н., Махмутов И.И.

Лабораторный практикум
по дисциплине «Пакеты прикладных программ (MathCad)»

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 22.04.2019.
Формат 60х84/16. Печать ризографическая.
Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman».
Усл.п.л. 4,75 Уч.-изд. л. 4,56
Тираж 100 экз. Заказ № 1227

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре
Набережночелнинского института
Казанского (Приволжского) федерального университета

423810, г. Набережные Челны, Новый город, пр.Мира, 68/19
тел./факс (8552) 39-65-99 e-mail: ic-nchi-kpfu@mail.ru