Приложения дифференциалов и производных

Теоремы о неявно заданной функции

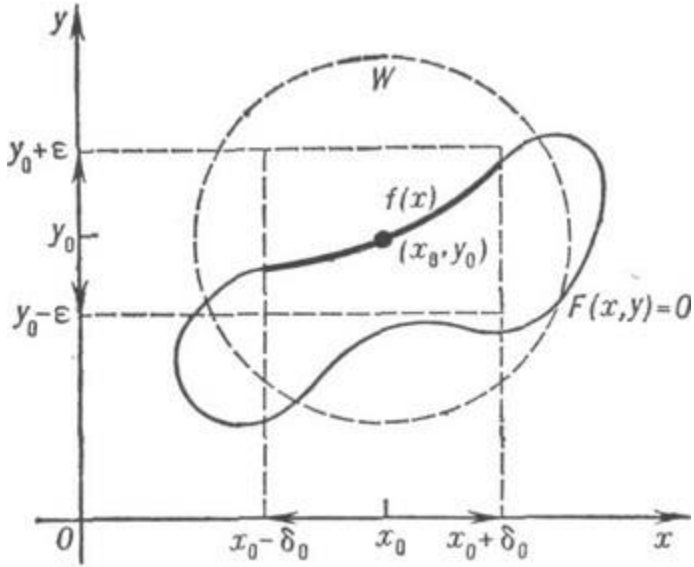
Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, заданную уравнением $F(x, y, z) = 0$. Возникает вопрос, при каких условиях подобное уравнение разрешимо? Единственное ли у него решение? Будет ли оно непрерывно или дифференцируемо?

Например, рассмотрим уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. В данном случае для каждой точки (x, y) такой, что $x^2 + y^2 < a^2$ существует ровно два решения уравнения, $z_1 = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ или $z_2 = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. При $x^2 + y^2 = a^2$ такое решение одно, $z = 0$. Если не накладывать дополнительных условий, то в каждой точке можно выбрать для z любое из значений z_1, z_2. Однако полученная функция не будет непрерывной. Ясно, что непрерывных решений будет два, они и описаны формулами.

Заметим, что практически любая точка сферы лежит на графике одного из этих решений. Кроме точек экватора. Во-первых, решение с экватора нельзя продолжить вовне круга $x^2 + y^2 < a^2$. Во-вторых, продолжить его можно двумя способами, и вниз, и вверх. Итак, точки экватора – особые точки для неявно заданной функции.

Вспомним, что обратимость функции тесно связана с ее монотонностью. А на экваторе, при $z = 0$, функция $z^2 + C$ не является монотонной.

Подробно описывать все теоремы с доказательствами достаточно долго, дадим только идею рассуждения.



Сначала рассмотрим одномерный случай, то есть уравнение $F(x, y) = 0$. Пусть F непрерывна как функция двух переменных и монотонна по y при любом x в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

На картинке изображен одномерный случай, здесь y ищется как функция от x. В прямоугольнике функция F монотонна по y. Например, выше точки (x_0, y_0) она положительна, ниже – отрицательна. По локальному свойству непрерывной функции такие же знаки F имеет на сторонах некоторого малого прямоугольника: на верхней стороне – положительна, на нижней – отрицательна. Тогда она обращается в 0 где-то между верхней и нижней сторонами. В силу монотонности F на каждой «вертикали» такая точка (x, y) единственна. Это и означает, что y является функцией от x. Можно показать, что эта функция непрерывна.

Аналогично разбирается случай большего числа переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, функцию F считаем непрерывной. Предположим, что мы нашли какое-то решение этого уравнения, а именно, (x_0, y_0, z_0), причем F монотонна по z в окрестности этой точки. Для определенности – она строго возрастает. Тогда $F(x_0, y_0, z_0 - \varepsilon) < F(x_0, y_0, z_0) = 0 < F(x_0, y_0, z_0 + \varepsilon)$. В силу непрерывности F это же соотношение выполняется в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), то есть

$$F(x, y, z_0 - \varepsilon) < 0; F(x, y, z_0 + \varepsilon) > 0$$

Но тогда, по свойству непрерывной функции, в некоторой промежуточной точке между $z_0 - \varepsilon$ и $z_0 + \varepsilon$ функция $F(x, y, z)$ обращается в 0. В силу монотонности функции F по z такая точка на этом промежутке единственная. Это рассуждение дает идею доказательства следующего утверждения:

Теорема 1 о неявной функции. Пусть функция $F(x, y, z)$ обращается в 0 в точке (x_0, y_0, z_0), непрерывна в окрестности этой точки и *монотонна* по z при фиксированных x, y. Тогда в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) существует непрерывная функция $z = f(x, y)$, такая, что $F(x, y, f(x, y)) = 0$ и $f(x_0, y_0) = z_0$.

Монотонность функции можно проверить с помощью производной. Кроме того, ограничения на гладкость F дают возможность сделать и f достаточно гладкой.

Теорема 2 о неявной функции. Пусть функция $F(x, y, z)$ обращается в 0 в точке (x_0, y_0, z_0), дифференцируема в окрестности этой точки и ее частная производная $\frac{\partial F}{\partial z}$ непрерывна и не обращается в 0 в точке

(x_0, y_0, z_0).

Тогда в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) существует дифференцируемая функция $z = f(x, y)$, такая, что $F(x, y, f(x, y)) = 0$ и $f(x_0, y_0) = z_0$.

Заметим, что дифференциал функции f можно найти, опираясь на свойство инвариантности формы первого дифференциала. Действительно, в силу того, что $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$, это равенство можно продифференцировать,

$$0 = dF(x, y, f(x, y)) = F'_x dx + F'_y dy + F'_z df$$

откуда

$$df = -\frac{F'_x dx + F'_y dy}{F'_z}$$

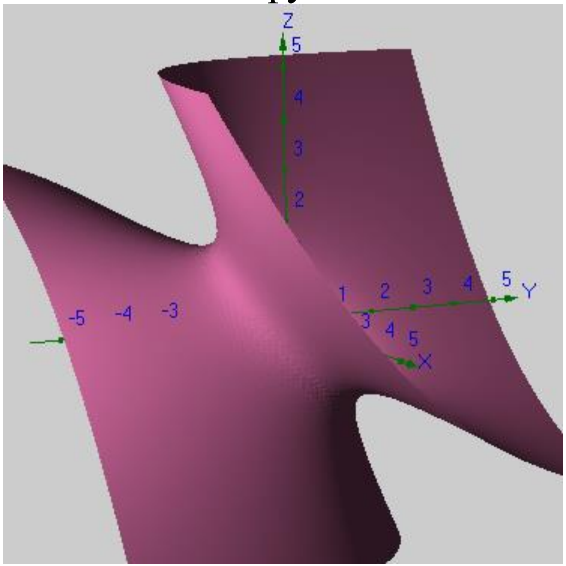
Деление допустимо, так как по предположению $F'_z \neq 0$.

Применим это правило к уравнению сферы.

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = 0 \Longrightarrow dz = -\frac{xdx + ydy}{z};\ z'_x = -\frac{x}{z};\ z'_y = -\frac{y}{z}.$$

При желании можно подставить сюда вместо z его значение. Эти равенства не имеют смысла при $z = 0$, т.е. на экваторе сферы.

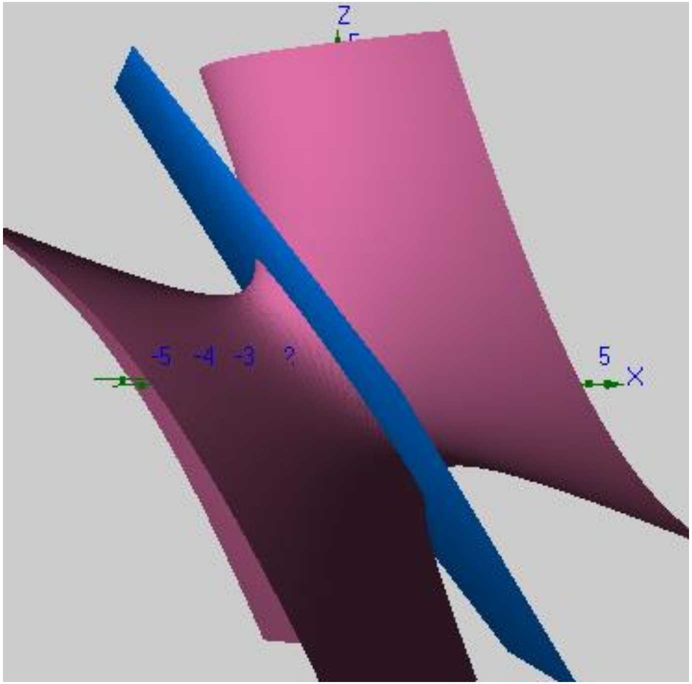
Точки экватора – это точки склейки двух решений, точки «ветвления» неявной функции.

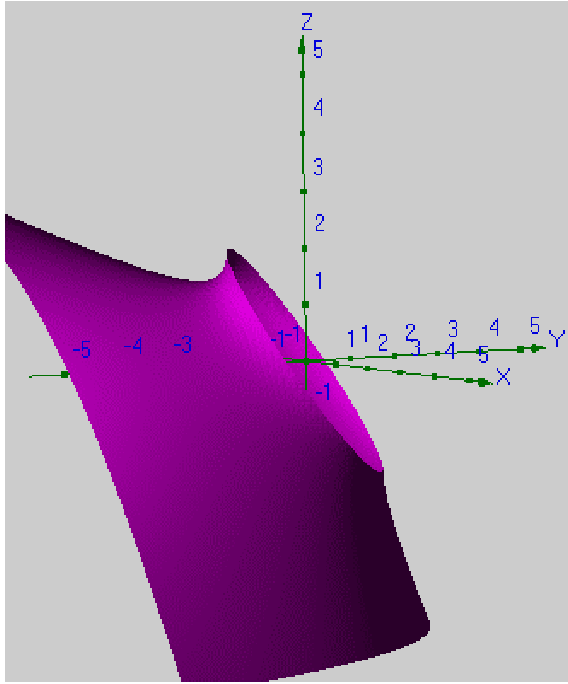


Пример. Рассмотрим поверхность, задаваемую уравнением

$$xy + yz + zx + z^2/2 = 1$$

Здесь $F(x, y, z) = xy + yz + zx + \frac{z^2}{2} - 1$ так что $F_z' = y + x + z$. Это выражение обращается в 0 на плоскости $y + x + z = 0$. Пересечение этой плоскости с исходной поверхности дает кривую, на которой расположены особые точки (в данном случае – точки склейки решений)





Итак, дифференцирование позволяет превратить любое уравнение (локально) в линейное. Можно ли то же сделать для систем уравнений?

Функции, заданные системой уравнений

Рассмотрим для начала систему двух уравнений, например,

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Будем считать, что уравнения задают y и z как функции от x. Будем также считать, что нам известно одно из решений, (x_0, y_0, z_0). Можно ли продолжить его непрерывной и дифференцируемой функцией?

Будем считать, что функции F и G достаточно гладкие. Пусть производные G'_y, G'_z не обращаются одновременно в 0 в окрестности точки (x_0, y_0, z_0). Например, $G'_z \neq 0$, тогда из второго уравнения можно выразить z, $z = f(x, y)$, $f(x_0, y_0) = z_0$. Подставим это выражение в первое уравнение, получим $H(x, y) = F(x, y, f(x, y)) = 0$.

Запишем для этого уравнения условие существования неявно заданной функции:

$$H'_y = F'_x \cdot 0 + F'_y \cdot 1 + F'_z \cdot f'_y = F'_y - F'_z \cdot \frac{G'_y}{G'_z} = \frac{F'_y \cdot G'_z - F'_z \cdot G'_y}{G'_z} \neq 0$$

Итак, достаточным условием существования решения системы является то, что не обращается в 0 выражение $J = F'_y \cdot G'_z - F'_z \cdot G'_y$.

Заметим, что требовать, что $G'_z \neq 0$ необязательно. Если $G'_z = 0$, то при $J = -F'_z \cdot G'_y \neq 0$, имеем $G'_y \neq 0$ и рассуждение можно начать с нахождения y вместо z.

Легко заметить, что J – это определитель матрицы из производных,

$$J = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}$$

Его называют якобианом и обозначают ещё

$$J = \frac{D(F,G)}{D(y,z)}$$

Итак, система уравнений (1) разрешима в окрестности решения (x_0, y_0, z_0), если не обращается в 0 ее якобиан. Найдём производные y'_x, z'_x. Для этого продифференцируем систему:

$$\begin{cases} F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0 \\ G'_x dx + G'_y dy + G'_z dz = 0 \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} F'_y dy + F'_z dz = -F'_x dx \\ G'_y dy + G'_z dz = -G'_x dx \end{cases}$$

Мы получили систему линейных уравнений относительно *dy*, *dz*, определитель которой по условию не равен 0. Значит, она имеет единственной решение. Которое можно записать, например, по правилу Крамера:

$$dy = -dx \begin{vmatrix} F'_x & F'_z \\ G'_x & G'_z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}; y'_x = -\frac{D(F,G)}{D(x,z)} : \frac{D(F,G)}{D(y,z)}$$

$$dz = -dx \begin{vmatrix} F'_y & F'_x \\ G'_y & G'_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}; z'_x = -\frac{D(F,G)}{D(y,x)} : \frac{D(F,G)}{D(y,z)}$$

Заметим, что после дифференцирования система превращается в линейную относительно дифференциалов, а якобиан становится определителем этой системы. То есть дифференцирование позволяет свести (локально) произвольную систему к линейной.

Пример. Рассмотрим систему уравнений (уравнение большого круга на сфере):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ ax + by + cz = 0 \end{cases}$$

Дифференцируя эти равенства, получаем

$$\begin{cases} 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0 \\ \ a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0 \end{cases}$$

Сокращаем двойки:

$$\begin{cases} ydy + zdz = -xdx \\ bdy + cdz = -a\,dx \end{cases}$$

Якобиан системы равен $J = cy - bz$, по правилу Крамера получаем

$$dy = -\frac{cx - az}{cy - bz}dx;\ dz = -\frac{ay - bx}{cy - bz}dx$$

Коэффициенты при dx и есть производные y'_x, z'_x.

Выясним, при каком условии система может не иметь решения. Для этого нужно решить систему из трех уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ ax + by + cz = 0 \\ cy - bz = 0 \end{cases}$$

Последние два уравнения линейны, их также можно решить по Крамеру:

$$\begin{cases} by + cz = -ax \\ cy - bz = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = -b^2 - c^2, y = -\frac{abx}{b^2 + c^2}, z = -\frac{acx}{b^2 + c^2}$$

Подставляя в первое уравнение, получаем

$$x^2 + \left(\frac{abx}{b^2 + c^2}\right)^2 + \left(\frac{acx}{b^2 + c^2}\right)^2 = 1$$

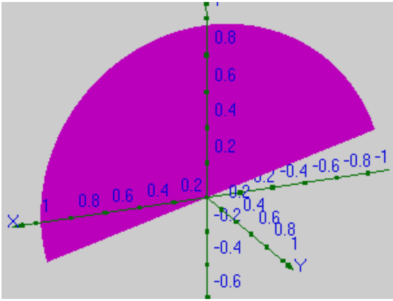
$$x^2 + \frac{a^2 x^2}{(b^2 + c^2)^2}(b^2 + c^2) = 1$$

$$x^2(b^2 + c^2 + a^2) = b^2 + c^2$$

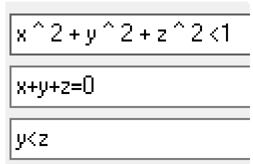
Итак, у исходной системы существуют две критические точки,

$$(x, y, z) = \pm \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}\sqrt{b^2 + c^2 + a^2}}(b^2 + c^2, -ab, -ac)$$

Это точки, в которых соединяются две полуокружности. Посмотрим, как это выглядит:



Верхняя полуокружность



Замечание о знаке. Якобиан, как любой определитель, меняет знак при перестановке аргументов:

$$\frac{D(F,G)}{D(y,x)} = -\frac{D(F,G)}{D(x,y)} = \frac{D(G,F)}{D(x,y)}; \quad \frac{D(F,F)}{D(x,y)} = \frac{D(F,G)}{D(x,x)} = 0$$

Системы большой размерности

В задаче о решении системы можно увеличить как число зависимых, так и число независимых переменных.

Обозначим для краткости $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, функции $F_1, F_2, \dots, F_m$ зависят и от x, и от u. Рассмотрим систему уравнений $\{F_i(x, u) = 0\}, i = 1, \dots, m$.

Теорема. Пусть функции $F_i(x, u)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки $\left(x^{(0)}, u^{(0)}\right)$ и $F_i\left(x^{(0)}, u^{(0)}\right) = 0$. Если якобиан

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(u_1, u_2, \dots, u_m)} \neq 0$$

то система имеет в окрестности $\left(x^{(0)}, u^{(0)}\right)$ единственное решение

$$u_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Функции u_i непрерывные и дифференцируемые в этой окрестности.

Доказательство проводится постепенным исключением уравнений из системы.

Пример. Функции $z = z(x, y)$, $t = t(x, y)$, заданы уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

Для каких (x, y) они существуют? Дифференцируемы?

Решение. Продифференцируем уравнения, получим линейную систему

$$\begin{cases} 2xdx + 2ydy + 2zdz + 2tdt = 0 \\ dx + dy + dz + dt = 0 \end{cases}$$

Исключим из системы *dt*, для этого поделим первое уравнение на 2, а второе умножим на *t*.

$$\begin{cases} xdx + ydy + zdz + tdt = 0 \\ tdx + tdy + tdz + tdt = 0 \end{cases}$$

Вычитая, получим, что $(z - t)dz = (t - x)dx + (t - y)dy$. Значит,

$$dz = \frac{t - x}{z - t}dx + \frac{t - y}{z - t}dy \Longrightarrow z'_x = \frac{t - x}{z - t}; z'_y = \frac{t - y}{z - t}$$

Особые точки следует искать на гиперплоскости $z = t$. Совместно с основными уравнениями получаем ограничение

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = -(x+y)/2 \\ x^2 + y^2 + (x+y)^2/2 = 1 \end{cases}$$

Последнее уравнение представляет собой эллипс $3x^2 + 3y^2 + 2xy = 2$.

Можно ли сказать, что во всех точках, кроме точек этого эллипса, функции $z = z(x, y)$, $t = t(x, y)$ существуют? Нет. Теорема говорит только о продолжении решения из какой-то начальной точки.

Данная систем не сложная, ее можно решить непосредственно:

$$\begin{cases} z^2 + t^2 = 1 - x^2 - y^2 \\ z + t = -x - y \end{cases} \Longrightarrow (z+t)^2 - z^2 - t^2 = (x+y)^2 - 1 + x^2 + y^2$$

То есть $2zt = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 1$. Значит (по теореме Виета) z, t являются корнями квадратного уравнения

$$u^2 + (x+y)u + x^2 + y^2 + xy - 1/2 = 0$$

Для существования корней дискриминант должен быть неотрицателен:

$$(x+y)^2 - 4x^2 - 4y^2 - 4xy + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 2xy \leq 2$$

Итак, внутри найденного ранее эллипса обе функции существуют, вне – нет. Причем внутри эллипса система имеет два решения: (z, t) и (t, z). На границе эллипса происходит склейка решений.